

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE
SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE M'HAMED BOUGARA-BOUMERDES



Faculté des Sciences de l'Ingénieur

Thèse de Doctorat

Présentée par :

M. CHERABI Bilal

En vue de l'obtention du diplôme de **DOCTORAT** en :

Filière : Génie Mécanique

Option : Modélisation et Simulation en Mécanique

**Réduction de modèle par PGD dans les problèmes
d'élasto-hydrodynamiques liés aux paliers lisses**

Devant le jury composé de :

M. MANSOURI	Kacem	Professeur	UMBB	Président
Mme. BOUMEDIENE	Faiza	MCA	USTHB	Examinatrice
M. DJEBILI	Omar	MCA	UMBB	Examineur
M. BELAIDI	Idir	Professeur	UMBB	Directeur
M. KHELLADI	Sofiane	Professeur	AM-ParisTech- France	Co-directeur
M. BAKIR	Farid	Professeur	AM-ParisTech- France	Invité

For my family

Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier en premier lieu Allah, le tout puissant, de m'avoir donné autant de courage, de patience et de volonté pour achever ce projet.

Je tiens à remercier du fond du cœur mon directeur de thèse le Professeur Idir BELAIDI et mon co-directeur de thèse Monsieur KHELLADI Sofiane, Professeur des universités à l'Ecole nationale Supérieure des Arts et Métiers de Paris, qui m'ont proposé ce sujet, m'ont soutenu et encouragé tout au long de mon parcours. Je les remercie d'avoir partagé avec moi leur savoir scientifique et technique intarissable, de m'avoir fait profiter également de leurs conseils et orientations avisés, notamment sur le plan professionnel et relationnel. Je tiens aussi à leur exprimer ma gratitude pour leur sollicitude, leur disponibilité et leur confiance qu'ils ont accordée à mes idées scientifiques, et surtout pour leur expertise qui a permis d'apporter un point de vue critique à mon travail de recherche.

Je tiens à remercier vivement les membres de jury, d'avoir accepté d'examiner ce travail de thèse et pour le temps qu'ils m'ont consacré. Je nomme :

- Monsieur le Professeur Kacem MANSOURI, de l'université de Boumerdes - FSI (Président).
- Madame le Docteur Faiza BOUMEDIENE, de l'université d'Alger - USTHB.
- Monsieur le Docteur Omar DJEBILI, de l'université de Boumerdes - FS.
- Monsieur le Professeur Farid BAKIR, de l'Ecole nationale Supérieure des Arts et Métiers de Paris.

Je suis particulièrement reconnaissant pour l'aide du Docteur HAMRANI Abderrachid, qui m'a particulièrement soutenu et encouragé. Je remercie également Monsieur Francisco CHINESTA, Professeur à ENSAM de Paris qui m'a débloqué sur des points cruciaux. Un grand merci également aux membres de l'équipe DynFluid de l'ENSAM de Paris pour l'accueil chaleureux et convivial que j'ai reçu lors de mes séjours de recherche au sein de leur laboratoire, où j'ai apprécié particulièrement l'esprit de collaboration dans une atmosphère de travail agréable.

Ce travail a également pu voir le jour grâce au soutien quotidien de mon entourage, tant professionnel que privé. Merci à mes amis Ossama CHABANI, Amine OUDNI, Toufik MEZGHICHE, Younes MANSER et Samir AMRI pour m'avoir aidé et encouragé.

Merci à tous les chercheurs de laboratoire LEMI et le personnel de la FSI, leur disponibilité m'a été d'un grand soutien. Merci également à tous les enseignants et tous les chercheurs que j'ai pu rencontrer jusqu'ici pour la générosité avec laquelle ils ont partagé leurs connaissances.

Merci à tous mes amis d'enfance et à ceux que j'ai rencontrés plus récemment. Enfin, je souhaite remercier mes parents, ma chère fiancée, mes sœurs notamment de m'avoir transmis cette soif de découverte et de m'offrir les conditions d'y arriver, je tiens à assurer mes chers parents de ma plus profonde reconnaissance.



Dans la vie, on a toujours le choix :
aimer ou détester, assumer ou s'enfuir,
avouer ou mentir, être soi-même ou faire semblant

— NELSON MANDELA

Graine d'Eden

GRAINEDEDEN.COM CULTIVEZ VOTRE BIEN-ÊTRE

Résumé

Dans cette contribution, nous avons développé et mis en œuvre la méthode de réduction de modèle “Proper Generalized Decomposition” (PGD) pour la résolution de l'équation de Reynolds, décrivant le comportement du lubrifiant dans les paliers lisses. Le modèle de la méthode de PGD utilisé est basé sur la technique de séparation des variables à travers la stratégie des directions alternées. Une étude comparée relative à la simulation numérique du comportement de paliers lisses et aux calculs de leurs paramètres géométriques et mécaniques a permis de mettre en exergue l'intérêt de la PGD par rapport à la méthode classique des différences finies, qui se décline en termes de réduction appréciables des temps de traitement. Des exemples numériques de la littérature ont été traités pour étayer cet avantage considérable et valider notre approche. En outre, à la lumière de ces résultats, nous avons observé que la méthode PGD mise en œuvre présente un taux de convergence bien élevé, pour un coût de calcul réduit. Par la suite, nous avons appliqué cette méthode de réduction de modèles par PGD pour la résolution numérique du problème élasto-hydrodynamique (EHD) des paliers lisses. Le temps de calcul réduit et la précision des résultats obtenus sont très encourageants.

Mots clefs : *Palier hydrodynamique, équation de Reynolds, Élasto-hydrodynamique, réduction de modèle, décomposition propre généralisée.*

Abstract

In this contribution, we have developed and implemented the "Proper Generalized Decomposition" (PGD) model reduction method for resolving the Reynolds equation, describing lubricant behaviour in plain bearings. The model of the PGD method used is based on the technique of separation of variables through the strategy of alternate directions. A comparative study on numerical simulation of the behaviour of plain bearings and calculations of their geometrical and mechanical parameters highlighted the value of PGD compared to the classical method of finite differences, which is available in terms of appreciable reduction of processing times. Numerical reference examples were used to support this considerable advantage and validate our approach. In addition, in the light of these results, we observed that the PGD method used has a very high convergence rate, with a reduced calculation cost. Subsequently, we applied this PGD model reduction method for the numerical resolution of the elasto-hydrodynamic (EHD) problem of plain bearings. The preliminary results inherent in the time and accuracy of the calculations are very encouraging.

Keywords : *Hydrodynamic journal bearing, Reynolds equation, Elasto-hydrodynamic, Reduced order modeling, Proper Generalized Decomposition.*

ملخص

في هذه المذكرة، قمنا بتطوير وتطبيق طريقة تخفيض النموذج "التفكيك المعمم المناسب" أو "ت م م" لحل معادلة رينولدز، التي تصف سلوك التزييت الهيدروديناميكي في المحامل الملساء. ويستند نموذج "ت م م" على تقنية فصل المتغيرات من خلال إستراتيجية الاتجاهات البديلة. وقد أتاحت دراسة مقارنة عن المحاكاة العددية لسلوك المحامل الملساء وحساب خصائصها الهندسية والميكانيكية من تسليط الضوء على تفوق طريقة "ت م م" مقارنة بالطريقة الكلاسيكية للاختلافات المحدودة من حيث انخفاض كبير في وقت الحساب الرقمي. وقد تمت معالجة أمثلة رقمية مرجعية لدعم هذه الفائدة الكبيرة والتحقق من صحة نهجنا. بالإضافة، عند تسليط الضوء على هذه النتائج، لاحظنا أن طريقة "ت م م" لديها معدل تقارب مرتفع جدا مع تكلفة حساب منخفضة. بعد ذلك، طبقنا طريقة تخفيض النموذج "التفكيك المعمم المناسب" من أجل الحل العددي لمشكل الإلاستوهيدروديناميك للمحامل الملساء. تم الحصول على النتائج الأولية مشجعة من حيث دقة الحسابات والوقت الحسابي المخفّض.

كلمات البحث : محمل هيدروديناميكي، معادلة رينولدز، التفكيك المعمم المناسب، الإلاستوهيدروديناميك، طريقة تخفيض النموذج.

Table des matières

Table des matières	i
Table des figures	v
Liste des tableaux	ix
Introduction générale	1
1 Généralités sur la lubrification dans les paliers hydrodynamiques	4
1.1 Introduction	5
1.2 Lubrifiants	5
1.2.1 Définition	5
1.2.2 Choix du lubrifiant	5
1.2.3 Additifs	6
1.3 Contacts lubrifiés	7
1.3.1 Contacts surfaciques	9
1.3.2 Contacts Hertiens	10
1.4 Paliers hydrodynamiques	12
1.4.1 Paliers lisses	13
1.5 Conclusion	13

2	Modélisation de la lubrification des paliers lisses	15
2.1	Introduction	16
2.2	Annotations géométriques	16
2.3	Dérivation de l'équation de Reynolds	17
2.4	Équation de Reynolds	20
2.4.1	Conditions aux limites	24
2.4.2	Résolution de l'équation de Reynolds	26
2.5	Régime élasto-hydrodynamique (EHD)	34
2.5.1	Modélisation de la lubrification EHD	35
2.5.2	Géométrie et cinématique du palier	42
2.5.3	Épaisseur du film lubrifiant	42
2.6	Conclusion	44
3	Proper Generalized Decomposition	46
3.1	Introduction	47
3.2	Méthodes de réduction de modèle	47
3.2.1	Classification des méthodes de réduction de modèle	48
3.3	Proper Generalized Decomposition	49
3.4	Stratégie de décomposition : exemple d'équation de poisson	49
3.4.1	Construction de la représentation séparée	50
3.4.2	Solution de l'équation de poisson	54
3.5	PGD pour la résolution du problème de la lubrification hydrodynamique	56
3.5.1	Représentation séparée liée à l'équation de Reynolds	56
3.5.2	Construction progressive de la représentation séparée	57

3.5.3	Description algorithmique	62
3.6	PGD pour la résolution du problème de la lubrification élasto- hydrodynamique	64
3.6.1	Formulation PGD du problème EHD	64
3.6.2	Construction de la représentation séparée	65
3.6.3	Description algorithmique	70
3.7	Conclusion	71
4	PGD pour la résolution des problèmes de lubrification hydrody- namique	72
4.1	Introduction	73
4.2	Simulation du palier hydrodynamique rigide	73
4.2.1	Palier infiniment court et long	74
4.2.1.1	Champs de pression	74
4.2.1.2	Nombre de Sommerfeld	77
4.2.1.3	Nombre de frottement	79
4.2.1.4	Étude de convergence	80
4.2.1.5	Temps de calcul	82
4.2.2	Palier de longueur finie	84
4.2.2.1	Champ de pression	84
4.2.2.2	Nombre de Sommerfeld	87
4.2.2.3	Nombre de frottement	89
4.2.2.4	Temps de calcul	91
4.3	Simulation du palier élasto-hydrodynamique	92
4.3.1	Étude de validation	93

4.3.1.1	Cas test 1	93
4.3.1.2	Cas test 2	94
4.3.1.3	Champ de déformation	94
4.4	Coût de calcul	96
4.5	Conclusion	97
	Conclusions et perspectives	98
	Références bibliographiques	99

Table des figures

1.1	Courbe de Stribeck [1]	8
1.2	Courbe de Stribeck [2]	9
1.3	Régimes de lubrification dans le cas d'un contact Hertiens [3]	11
1.4	Schéma d'un palier hydrodynamique typique.	12
1.5	Position d'un arbre dans un palier lisse hydrodynamique	13
2.1	Schéma d'annotations géométriques.	16
2.2	Section droite du palier	21
2.3	Système d'axes en coordonnées cartésiennes	22
2.4	Palier lisse développé	24
2.5	Les conditions aux limites dans un palier	26
2.6	Schéma de discrétisation du palier	31
2.7	Schéma des différences finies	32
2.8	Géométrie d'un palier cylindrique revêtu mono-couche	34
2.9	Diagramme de résolution EHD avec une procédure itérative	38
2.10	Diagramme de résolution EHD par une approche de résolution simultanée	41
2.11	Section droite d'un palier cylindrique revêtu mono-couche	42

3.1	Classification des méthodes de réduction de modèle	48
3.2	Fonctions normalisées $X_i(x)$ pour $i = 1, \dots, 4$ produit par la solution PGD	55
3.3	Fonctions normalisées $Y_i(y)$ pour $i = 1, \dots, 4$ produit par la solution PGD	55
3.4	Solution reconstituée de PGD	56
3.5	Algorithme de résolution du problème EHD	71
4.1	Distribution de pression pour un palier infiniment court (ISJB) ($L/D = 0.12$).	74
4.2	Distribution de pression pour un palier infiniment long (ILJB) ($L/D =$ 6).	75
4.3	Fonctions normalisées pour un palier infiniment court (ISJB) : $X_i(\theta)$ (à gauche) and $Y_i(z)$ (à droite) avec $i = 1, \dots, 3$	75
4.4	Fonctions normalisées pour un palier infiniment long ILJB : $X_i(\theta)$ (à gauche) et $Y_i(z)$ (à droite) avec $i = 1, \dots, 4$	76
4.5	Comparaison de la distribution de pression obtenue par PGD, DF, DF_{sur} et la solution analytique à $z = 0$ pour ISJB.	76
4.6	Comparaison de la distribution de pression obtenue par PGD, DF, DF_{sur} et la solution analytique à $z = 0$ pour ILJB.	77
4.7	Nombre de Sommerfeld avec les différentes valeurs de l'excentricité relative pour ISJB.	78
4.8	Nombre de Sommerfeld avec les différentes valeurs de l'excentricité relative pour ILJB.	78
4.9	Nombre de frottement avec les différentes valeurs de l'excentricité relative pour ISJB.	79
4.10	Nombre de frottement avec les différentes valeurs de l'excentricité relative pour ILJB.	80

4.11 Erreurs dans le calcul de la pression pour ISJB en utilisant les méthodes DF, DF_{sur} et PGD.	81
4.12 Erreurs dans le calcul de la pression pour ILJB en utilisant les méthodes DF, DF_{sur} et PGD.	81
4.13 Comparaison du temps de calcul PGD vs DF en augmentent le nombre de nœuds pour ISJB ($L/D = 0.12$).	82
4.14 Comparaison du temps de calcul PGD vs DF en augmentent le nombre de nœuds pour ILJB ($L/D = 6$).	83
4.15 Distribution de pression pour FJB ($L/D = 1$) avec $\varepsilon = 0.1$ (taille de maillage = 100×100).	85
4.16 Fonctions normalisées $X_i(\theta)$ (à gauche) et $Y_i(z)$ (à droite) avec $i = 1, \dots, 4$	85
4.17 Comparaison de champ de pression obtenu par PGD, DF, DF_{sur} à $z = 0$ pour FJB ($L/D = 1/4$).	86
4.18 Comparaison de champ de pression obtenu par PGD, DF, DF_{sur} à $z = 0$ pour FJB ($L/D = 1/2$).	86
4.19 Comparaison de champ de pression obtenu par PGD, DF, DF_{sur} à $z = 0$ pour FJB ($L/D = 1$).	86
4.20 Comparaison de champ de pression obtenu par PGD, DF, DF_{sur} à $z = 0$ pour FJB ($L/D = 2$).	87
4.21 Nombre de Sommerfeld avec les différentes valeurs d'excentricité relative pour FJB ($L/D = 1/4$).	88
4.22 Nombre de Sommerfeld avec les différentes valeurs d'excentricité relative pour FJB ($L/D = 1/2$).	88
4.23 Nombre de Sommerfeld avec les différentes valeurs d'excentricité relative pour FJB ($L/D = 1$).	88
4.24 Nombre de Sommerfeld avec les différentes valeurs d'excentricité relative pour FJB ($L/D = 2$).	89

4.25	Nombre de frottement avec différentes valeurs d'excentricité relative pour FJB ($L/D = 1/4$).	90
4.26	Nombre de frottement avec différentes valeurs d'excentricité relative pour FJB ($L/D = 1/2$).	90
4.27	Nombre de frottement avec différentes valeurs d'excentricité relative pour FJB ($L/D = 1$).	90
4.28	Nombre de frottement avec différentes valeurs d'excentricité relative pour FJB ($L/D = 2$).	91
4.29	Comparaison du temps de calcul PGD vs DF en augmentent le nombre de nœuds pour FJB.	92
4.30	Validation du champ de pression obtenu avec les résultats de la référence [4].	93
4.31	Validation du champ de pression obtenu avec les résultats de la référence [5].	94
4.32	Déformation élastique du coussinet en 3D (cas test 1)	95
4.33	Déformation élastique du coussinet en 3D (cas test 2)	95
4.34	Nombre de flops pour les différentes configurations de maillage.	96
4.35	Nombre d'opérations arithmétiques (flops) obtenu par les méthodes PGD et DF.	97

Liste des tableaux

4.1	Caractéristiques de palier et de lubrifiant	74
4.2	Nombre de Sommerfeld pour ISJB et ILJB avec les différentes valeurs de l'excentricité relative.	77
4.3	Nombre de frottement pour ISJB et ILJB avec les différentes valeurs de l'excentricité relative.	79
4.4	Erreurs dans le calcul de la pression pour ISJB et ILJB en utilisant les méthodes DF, DF_{sur} et PGD.	80
4.5	Comparaison du temps de calcul nécessaire pour le calcul de la pression du film de fluide en utilisant DF, DF_{sur} et PGD.	82
4.6	Caractéristiques de palier de longueur finie et propriétés de lubrifiant	84
4.7	Nombre de Sommerfeld pour les différents rapport L/D avec les différentes valeurs d'excentricités relatives.	87
4.8	Nombre de frottement pour différents rapport L/D avec différentes valeurs d'excentricité relative.	89
4.9	Comparaison du temps de calcul nécessaire pour le calcul de la pression du film fluide en utilisant DF, DF_{sur} et PGD pour FJB . .	91
4.10	Nombre d'opérations avec les différentes tailles de maillages pour les méthodes PGD et DF.	96

Liste des abréviations :

d.d.l	d egrés de l ibertés
DF	D ifférences F inies
DF_{sur}	D ifférences F inies avec coefficient de sur -relaxation
EDP	Équation aux D érivées P artielles
EHD	E lasto- H ydro D ynamique
FDM	F inite D ifference M ethod
FDM_{sor}	F inite D ifference M ethod with S uccessive O ver R elaxation
FEM	F inite E lement M ethod
FJB	F inite J ournal B earing
Flops	F loating point o perations o pérations en virgule F lottante
HD	H ydro D ynamique
h_{mesh}	h esh size convergence rate parameter Taux de convergence de la taille de maillage
ILJB	I nfinately L ong J ournal B earing
ISJB	I nfinately S hort J ournal B earing
Max_{fp}	M aximum f ixed p oint iterations Nombre d'itérations maximum du "point fixe"
Max_{terms}	M aximum number of enrichments t erms Nombre maximum de termes d'enrichissements
MEF	M éthode des É lements F inis
PGD	P roper G eneralized D ecomposition

Liste des symboles 1 :

$A_{1...4}$	Coefficients des différences finies
b_i	Forces massiques extérieures [N]
b	Pas selon la direction circonférentielle θ
C	Jeu radial [m]
C_0	Coefficient de déformation élastique
C_a	Couple de frottement [$N.m$]
c	Pas selon la direction axiale z
D	Diamètre du palier [m]
d	Diamètre de l'arbre [m]
E	Module de Young du matériau [Pa]
Ep	Erreur de pression
e	Excentricité [m]
$Flops$	Nombre d'opérations en virgule flottante
f	Nombre de frottement
h	Épaisseur du film fluide [m]
\bar{h}	Épaisseur adimensionnel du film
h_0	Épaisseur nominale du film fluide [m]
h_e	Déformation élastique engendrée par les pressions hydrodynamiques [m]
h_{mesh}	Taux de convergence de la taille de maillage
j	Indices selon θ
k	Indices selon z
L	Longueur du palier [m]
M, M'	Points liées aux deux surfaces des parois lubrifiées
N_θ	Nombre d'éléments selon θ
N_z	Nombre d'éléments selon z
n	Points de discrétisation selon θ
O_c, O_a	Centres du coussinet et de l'arbre
P	Pression hydrodynamique du lubrifiant [Pa]
\bar{P}	Pression hydrodynamique adimensionnelle du lubrifiant
p	Points de discrétisation selon z
Q_z	Débit axial [m^3/s]
R_a	Rayon de l'arbre [m]
R_c	Rayon du coussinet [m]
S	Nombre de Sommerfeld

Liste des symboles 2 :

S_{diff}	Norme de la différence entre deux itérations de point fixe
S_z	Solution PGD selon la direction z
S_θ	Solution PGD selon la direction θ
t_h	Épaisseur de la couche élastique [m]
U_r	Déplacement radial du coussinet [m]
\bar{U}_r	Déplacement radial adimensionnel du coussinet
$U_{r_{max}}$	Déplacement radial maximal adimensionnel du coussinet
u	Vitesse linéaire de l'arbre [m/s]
$u_{1,2}$	Vitesses des surfaces 1 et 2 selon l'axe x [m/s]
u_i	Composantes de la vitesse d'écoulement [m/s]
$v_{1,2}$	Vitesses des surfaces 1 et 2 selon l'axe y [m/s]
W	Charge extérieur (statique) [N]
$w_{1,2}$	Vitesses des surfaces 1 et 2 selon l'axe z [m/s]
$x_{i,t}$	Variables d'espace et de temps
Z	Coefficient de similitude
z	Coordonnée axiale [m]
\bar{z}	Coordonnée axial adimensionnelle
μ	Viscosité dynamique du lubrifiant [$Pa.s$]
ρ	Masse volumique du fluide [kg/m^3]
ν	Coefficient de Poisson du matériau
δ_{ij}	Symbole de Kronecker
σ_{ij}	Tenseur des contraintes
λ, μ	Coefficients de viscosité de Navier
θ	Coordonnée circonférentielle [rad]
θ_d	Taux de dilatation cubique
θ_s, ψ_s	Angle de rupture du film [rad]
ε_{ij}	tenseur des taux de déformations
τ_{xy}	Contraintes de cisaillement dans le fluide selon xy [Pa]
τ_{yz}	Contraintes de cisaillement dans le fluide selon yz [Pa]
κ	Erreur de la boucle d'enrichissement
ξ	Tolérance de point fixe (fixée par l'utilisateur)
$\tilde{\xi}$	Tolérance d'enrichissement (fixée par l'utilisateur)
Γ	Frontières du domaine

Liste des symboles 3 :

- φ Angle de calage [*rad*]
- ω_a Vitesse de rotation angulaire de l'arbre [*rad/s*]
- Ω Domaine de calcul
- Ω_s Coefficient de sur-relaxation compris entre (1.4 ~ 2)

Introduction générale

La tribologie est la science qui s'intéresse à l'étude des phénomènes résultants de l'interaction superficielle entre deux corps. Ce mot vient du grec "tribos" : frotter et "logos" : science. Principalement, la tribologie regroupe l'étude du frottement, de l'usure et de la lubrification. Les frottements sont pratiquement omniprésents dans tous les mécanismes en mouvement, ce qui entraîne, avec le temps, l'usure de leurs composants en contact. Contribuer à la maîtrise du comportement, de la durée de vie et de la fiabilité de ces derniers est le but principal de la tribologie, réduisant ainsi les consommations de coût et d'énergie. La lubrification reste le moyen le plus efficace afin de réduire le frottement et l'usure et de dissiper la chaleur produite dans le contact, mais aussi de protéger contre la corrosion et d'empêcher le grippage. Deux grandes familles de lubrification peuvent être distinguées : la lubrification fluide, dont les contacts sont dits "gras" (huile, graisse, etc) et la lubrification solide, dont les contacts sont dits "secs" (métaux mous, poudres, polymères, etc).

Selon la plage de pressions et de vitesses relatives des surfaces en contact, différents régimes de lubrification fluide peuvent exister. Nous distinguons le régime limite où la vitesse est trop faible pour assurer la portance, et le régime mixte qui se situe au delà du régime limite, dans lequel la vitesse permet d'assurer une portance partielle, et enfin le régime hydrodynamique où la vitesse est suffisamment élevée pour séparer totalement les surfaces. C'est ce dernier cas qui fera l'objet de notre intérêt dans nos travaux.

La résolution numérique des problèmes de lubrification hydrodynamique des paires lisses par les méthodes classiques (différences finies, éléments finis) nécessite en effet des temps de simulation longs, et une capacité de stockage des données importante, ce qui rend le coût de calcul trop élevé.

Des méthodes de réduction de modèles, basées sur la séparation des variables, ont été développées, et ont pour principe la recherche d'une base réduite pour décrire la solution, permettant ainsi de réduire la taille du problème à résoudre (grand nombre de d.d.l), et par conséquent la réduction des temps de traitement du problème posé. Il existe de nombreuses méthodes de réduction de modèles qui peuvent être classées en deux grandes catégories, à savoir les méthodes de réduction a posteriori, où une connaissance préalable sur la solution du problème est nécessaire, et les méthodes de réduction a priori qui ne nécessitent aucune connaissance sur la solution.

Dans le contexte de notre étude, nous nous intéressons à la méthode de réduction de modèle PGD (Proper Generalized Decomposition) de type à-priori, qui consiste à rechercher la solution d'une EDP de manière itérative sous forme séparée, pour montrer son intérêt intrinsèque dans la simulation numérique du comportement hydrodynamique et élastique des paliers lisses.

Pour faire, nous nous fixons l'objectif de développer et de mettre en œuvre d'abord la méthode des différences finies, afin de mettre en exergue la nécessité de réduire les temps de calcul, trop faramineux dans le cas du problème traité. Ensuite, dans une deuxième étape, nous développerons l'approche algorithmique de la méthode PGD, appliquée à l'analyse hydrodynamique pour prédire le comportement statique des paliers lisses et l'influence des déformations élastiques sur ces derniers. Une implémentation de l'application développée sera effectuée sous MatlabTM, afin de montrer tout l'intérêt de la PGD vis-à-vis des méthodes numériques classiques.

A cet effet, nous avons structuré notre manuscrit comme suit :

Dans le premier chapitre, nous rappellerons les notions fondamentales relatives à la lubrification en général, et aux paliers lisses en particulier.

Le chapitre 2 est dédié à la modélisation de la lubrification des paliers lisses dont il rappelle les équations de bases sur la lubrification hydrodynamique et sur le comportement élasto-hydrodynamique des paliers lisses.

Le chapitre 3, est dédié aux développements méthodologique et la mise en œuvre numérique de l'approche PGD à travers un premier exemple simple de l'équation de poisson, ensuite le problème de la lubrification hydrodynamique (palier rigide / élastique) sera explicité.

Enfin, dans le chapitre 4, la méthode PGD est appliquée pour résoudre le problème de la lubrification hydrodynamique et validée pour des cas tests pour la résolution du problème élasto-hydrodynamique par le modèle de la couche mince élastique et une comparaison des temps de calcul de la PGD a été effectuée.

Une conclusion générale, synthétisant l'ensemble des travaux effectués, et les résultats obtenus, ainsi que des perspectives de développement ultérieurs, parachèvent ce manuscrit.

Chapitre 1

Généralités sur la lubrification dans les paliers hydrodynamiques

Sommaire

1.1	Introduction	5
1.2	Lubrifiants	5
1.2.1	Définition	5
1.2.2	Choix du lubrifiant	5
1.2.3	Additifs	6
1.3	Contacts lubrifiés	7
1.3.1	Contacts surfaciques	9
1.3.2	Contacts Hertiens	10
1.4	Paliers hydrodynamiques	12
1.4.1	Paliers lisses	13
1.5	Conclusion	13

1.1 Introduction

La majorité des mécanismes de machines tournantes sont souvent supportés par des paliers lisses hydrodynamiques. Ces éléments, très actifs, contribuent de façon significative à la bonne marche et la stabilité de l'ensemble de la machine. En générale, le rôle de la lubrification est multiple : elle permet de réduire le frottement et l'usure, mais aussi de dissiper la chaleur produite dans le contact, et enfin, de protéger contre la corrosion et le grippage.

Dans ce chapitre, une étude bibliographique sur la lubrification hydrodynamique dans les paliers lisses sera menée, en parcourant en premier lieu les définitions de base utilisées dans notre contexte. En deuxième lieu, on abordera le problème de la lubrification hydrodynamique (HD).

1.2 Lubrifiants

1.2.1 Définition

Le mot lubrifiant vient du latin *lubricus* signifiant glissant. Un lubrifiant est une substance qui, interposé entre deux surfaces en contact et en mouvement l'une par rapport à l'autre, permet de réduire le frottement tout en combattant l'usure. Un lubrifiant doit remplir les fonctions suivantes :

1. former un film d'huile de séparation des zones de contact,
2. évacuer une partie de l'énergie thermique engendrée par le frottement,
3. dans le cas du graissage, étancher le roulement vers l'extérieur pour empêcher la pénétration d'impuretés,
4. réduire le bruit de fonctionnement,
5. protéger contre la corrosion.

1.2.2 Choix du lubrifiant

C'est une question très complexe, où on peut dire qu'à chaque sorte de contact mécanique correspond une composition de lubrifiant optimale.

On peut classer les lubrifiants selon leur origine : animale, végétale, minérale ou synthétique, ou selon leur présentation, liquide, pâte ou solide.

Lubrifiants d'origine animale : Ils sont constitués essentiellement d'esters résultant de la combinaison d'acides gras avec la glycérine. Ce type de lubrifiant a été depuis longtemps utilisé par l'homme.

Lubrifiants d'origine végétale : Ce sont en général des combinaisons d'acides gras peu ou pas estérifiés. Certains sont encore largement utilisés en addition dans les huiles de pétrole ou dans les graisses.

Lubrifiants d'origine minérale : Les huiles minérales ; appelées aussi les huiles de base ; proviennent de la distillation du pétrole brut. D'un prix peu élevé, elles présentent des performances « moyennes », de ce fait, elle sont, de loin, les plus utilisées aussi bien dans les applications automobiles qu'industrielles.

Les huiles de synthèse ou synthétiques : Les huiles synthétiques sont fabriquées à partir de molécules sélectionnées selon leurs fonctions afin de créer un produit dont les propriétés physiques et chimiques sont prédéterminées. Actuellement, en rajoute à ces huiles les additifs nécessaires pour répondre à un service voulu. Ces huiles ont des performances élevées, en particulier pour des objectifs et des conditions de service difficiles.

1.2.3 Additifs

Les propriétés des bases utilisées sont généralement modifiées par des composés de structures chimiques très variées, appelés additifs ou dopes que nous allons examiner succinctement.

Additifs d'amélioration d'indice de viscosité : Ils augmentent l'indice de viscosité du lubrifiant sans modifier défavorablement les autres propriétés essentielles. Ils permettent à l'huile d'être :

1. Suffisamment fluide à froid (faciliter le démarrage en abaissant le point d'écoulement entre -15 et -45°C suivant les huiles).
2. Visqueuse à chaud (éviter le contact des pièces en mouvement).

Additifs Anti-congelant : Ils permettent au lubrifiant de garder une bonne fluidité à basse température (de -15°C à -45°C).

Additifs extrême pression et anti-friction : Les additifs anti-usures agissent dès la température ambiante ou à moyenne température alors que les additives extrêmes pressions sont actifs à température élevée. Ils permettent à l'huile de :

1. Réduire les couples de frottement et par conséquence économiser l'énergie.
2. Protéger les surfaces des fortes charges.

Additifs Anti-oxydants : ils suppriment, ou tout au moins ralentissent les phénomènes d'oxydation du lubrifiant. ils Contribuent à l'espacement des vidanges par une meilleure tenue aux hautes températures.

Additifs Anti-corrosion : ils empêchent l'attaque des métaux ferreux, attaque due à l'action conjuguée de l'eau, de l'oxygène de l'air et de certains oxydes formés lors de la combustion.

Additifs Anti-mousse : Le moussage de l'huile peut être dû à :

1. A la présence d'autres additifs. Les additifs détergents agissent dans l'huile comme du savon dans l'eau : ils nettoient le moteur mais ont tendance à mousser.
2. Au dessin du circuit de graissage qui provoque des turbulences lors de l'écoulement du lubrifiant, facilitant ainsi le brassage air-huile et la formation des bulles.

Additifs Anti-émulsion et Détergent : ils évitent le mélange de fluides étrangers (de l'eau par exemple) avec l'huile et favorise la décantation (séparation) de l'ensemble. ils sont destinés pour l'objectif d'éviter la formation de dépôts ou de vernis sur les parties les plus chaudes du moteurs telles que les gorges des pistons.

1.3 Contacts lubrifiés

La lubrification concerne tous les contacts pour lesquels un film mince visqueux est intercalé entre deux corps solides en mouvement relatif. Les différents régimes de lubrification ont été présentés pour la première fois par Richard Stribeck [6] dans le cas d'un palier lisse. La courbe de Stribeck représente la variation du coefficient de frottement d'un palier lubrifié en fonction de sa vitesse. Cette courbe montre plusieurs régimes de fonctionnement successifs (figure 1.1). Stribeck définit par la

suite, un coefficient de similitude pour permettre la généralisation de son modèle à tous types de contact lubrifiés [1].

$$Z = \mu u / W \quad (1.1)$$

où Z : le coefficient de similitude, μ : la viscosité dynamique du lubrifiant, u : la vitesse linéaire de l'arbre en rotation et W : la charge radiale exercée sur l'arbre.

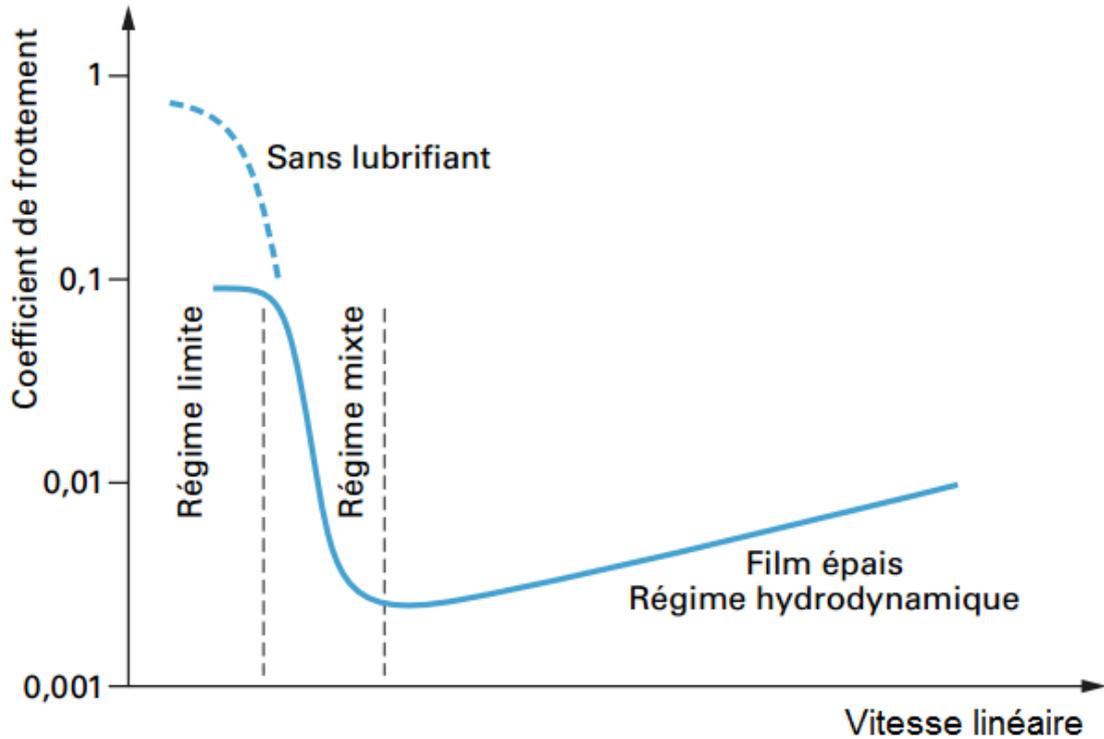


FIGURE 1.1: Courbe de Stribeck [1]

La courbe de Stribeck montre que dans les deux premiers régimes ; limite et mixte ; le coefficient de frottement d'un palier lubrifié diminue avec la vitesse, puis pendant le dernier régime (hydrodynamique), il augmente linéairement avec la vitesse.

Selon les pressions de contact et la vitesse relative des surfaces, on peut distinguer deux grandes catégories de contacts ; contacts surfaciques (à basse pression, entre 0.1 et 50 MPa) et contacts hertziens (à haute pression, entre 0.1 et 3 GPa).

1.3.1 Contacts surfaciques

Les contacts "en grande surface" concernent essentiellement : les butées hydrostatiques, les paliers hydrodynamiques, les joints d'étanchéité, etc.

L'examen de la courbe de Stribeck "étendue" (figure 1.2) montre à l'évidence quatre zones de variations, qui correspondent à quatre régimes de lubrification [2]. La zone I correspond à la lubrification dans un régime limite, la zone II dans un régime mixte, la zone III dans un régime hydrodynamique laminaire et la zone IV dans un régime hydrodynamique non laminaire (turbulent).

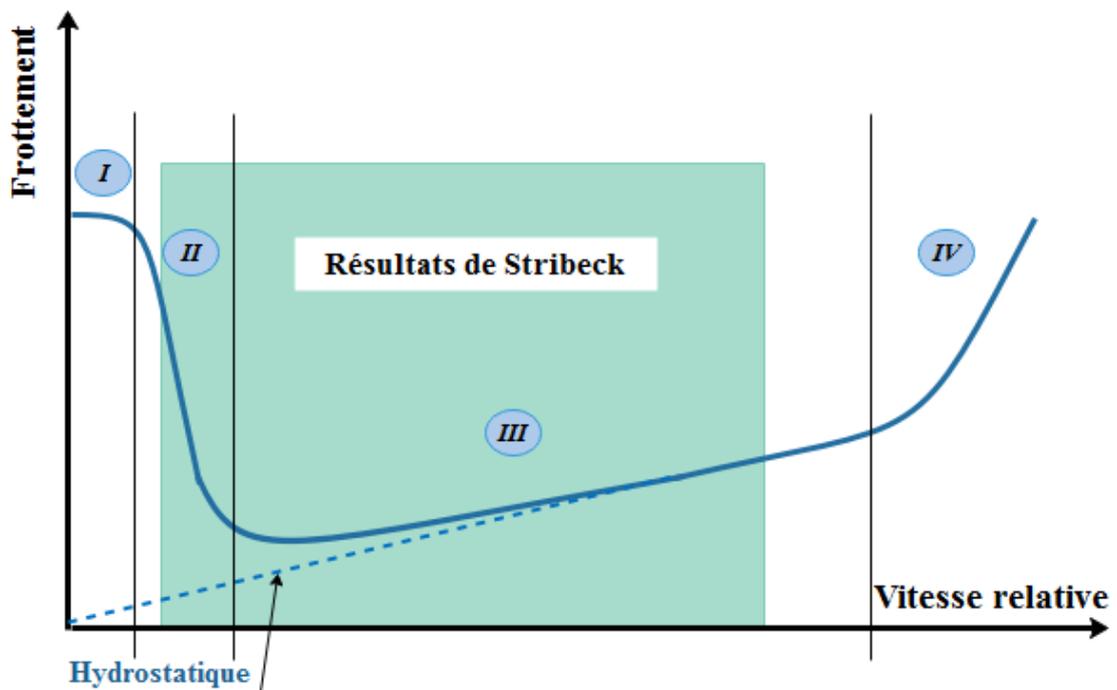


FIGURE 1.2: Courbe de Stribeck [2]

1. Régime limite :

Au démarrage, lors de la mise en vitesse, le film lubrifiant n'est pas assez épais pour séparer les surfaces en contact. Le coefficient de frottement est élevé, l'usure devient rapide, et le phénomène d'échauffement thermique est prépondérant.

2. Régime mixte :

Quand la vitesse augmente, l'épaisseur du film d'huile augmente aussi et commence à séparer les deux surfaces en contact. La vitesse relative des surfaces antagonistes n'est pas encore suffisante pour engendrer une pression dynamique qui assure complètement la portance de la charge citation [1].

Ces deux derniers régimes de lubrification, peuvent être supprimés si l'on injecte du lubrifiant sous pression dans le contact. On parle alors de lubrification hydrostatique.

3. Régime hydrodynamique :

À haute vitesse, le film d'huile devient épais, la distribution de pression s'élargit jusqu'à séparation totale des deux surfaces. Le frottement visqueux devient prépondérant et le coefficient de frottement augmente avec la vitesse.

4. Régime hydrodynamique non laminaire :

Lorsque la vitesse du fluide est très grande, l'écoulement dans le film lubrifiant change de régime, l'écoulement n'est plus décrit par l'équation de Reynolds en régime laminaire [7] seulement, mais par d'autres équations traduisant le phénomène de turbulence dans le fluide. Le nombre de Taylor ou le nombre de Reynolds sont souvent les indicateurs du type d'écoulement du fluide.

1.3.2 Contacts Hertziens

Généralement, on désigne un contact Hertzien, un contact de surface étroite ; ponctuel ou linéique. Dans ce type de contact, la pression générée dans le film est suffisamment élevée pour déformer élastiquement les surfaces, et ainsi provoquer des contacts entre des surfaces non conformes.

Dans le cas du contact Hertzien, la courbe de variation du frottement en fonction de la vitesse de roulement est donnée par la figure 1.3 [3]. Cette courbe est semblable à la courbe de Stribeck précédente, et présente trois zones qui correspondent à trois types de lubrification. La zone I correspond à la lubrification extrême pression, la zone II à la lubrification mixte et la zone III à la lubrification élasto-hydrodynamique.

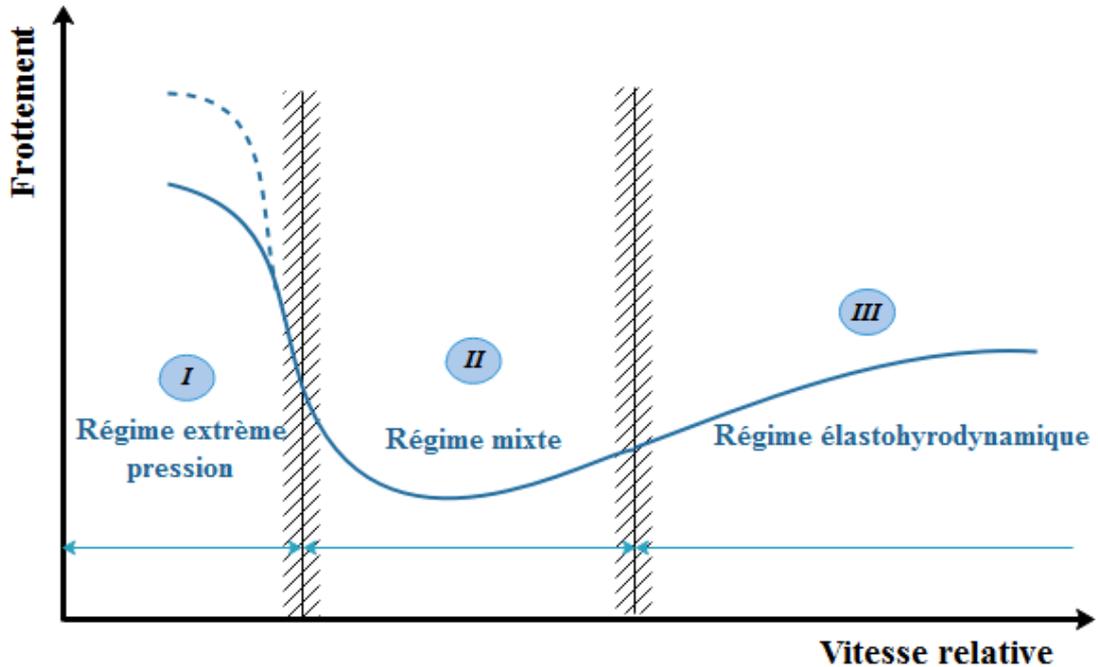


FIGURE 1.3: Régimes de lubrification dans le cas d'un contact Hertiens [3]

1. Lubrification extrême pression :

En lubrification extrême pression (EP), les surfaces sont séparées par un film réactif formé par réaction chimique entre les "additives extrêmes pressions"; activés par les hautes pressions; contenues dans le lubrifiant [7]. Ces additifs sont des macromolécules comportant en général des atomes de soufre, de chlore ou de phosphore. Ces lubrifiants sont fréquemment utilisés dans les engrenages et les roulements à billes des boîtes de vitesse automobiles.

2. Lubrification mixte :

Ce type de lubrification correspond à un régime de transition entre la lubrification extrême pression et la lubrification élasto-hydrodynamique. Dans ce régime le coefficient de frottement diminue et sa valeur est intermédiaire entre le coefficient du régime extrême pression (au démarrage) et celui de l'élasto-hydrodynamique (lorsque les surfaces se séparent progressivement).

3. Lubrification élasto-hydrodynamique :

La zone III correspond à la lubrification élasto-hydrodynamique pour laquelle le lubrifiant sépare totalement les surfaces. Sous forte pression, la viscosité du lubrifiant devient très grande. Le lubrifiant se comporte comme un solide élastique dans l'interface de contact, ce qui engendre la déformation des surfaces de contact [8]. La détermination des caractéristiques du mécanisme de lubrification est obtenue par la résolution simultanée de l'équation de

Reynolds dans le film et des équations de l'élasticité dans les matériaux formant le contact.

1.4 Paliers hydrodynamiques

Les Paliers hydrodynamiques (HD) (figure 1.4), comme leurs nom l'indique, travaillent dans un régime hydrodynamique ; où le film fluide sépare totalement les surfaces ; sous un contact supposé surfacique (arbre/coussinet de forme cylindrique sans déformation). Ils sont fréquemment utilisés pour supporter des charges radiales, ainsi que pour le guidage des lignes d'arbre de machines tournantes (moteurs thermiques, compresseurs, turbomachines, alternateurs, réducteurs, etc.).

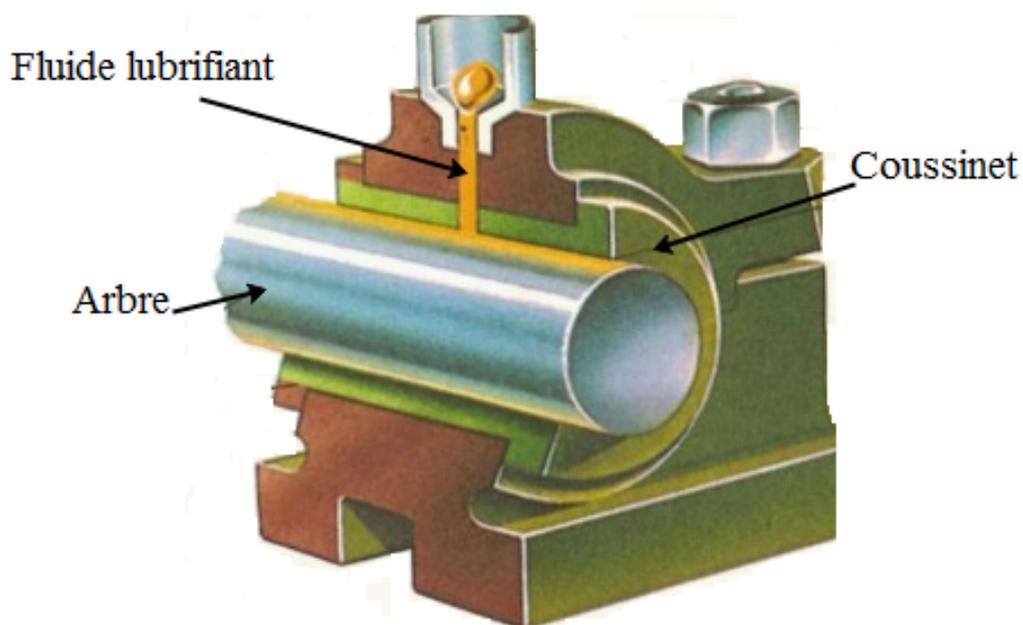


FIGURE 1.4: Schéma d'un palier hydrodynamique typique.

Les paliers HD de géométries cylindriques peuvent être classés selon deux critères : le support de guidage de l'arbre et la direction de la charge par rapport à l'arbre.

a. Selon le support de guidage de l'arbre :

1. **Paliers lisses** : l'arbre prend appui sur un coussinet et est séparé de celui-ci par un film lubrifiant.

2. **Paliers à roulements** : dans le cas où des corps roulants (billes ou rouleaux) séparent la bague en rotation de l'alésage extérieur.
- b. selon la direction de la charge par rapport à l'arbre en rotation :
1. **Paliers porteurs** : Pour lesquels la charge est radiale.
 2. **Paliers de butée** : Pour lesquels la charge est axiale.

Dans notre cas, on s'intéressera à l'étude de la lubrification dans les paliers lisses.

1.4.1 Paliers lisses

Dans le palier lisse, la géométrie du coin d'huile est créée par l'excentricité (figure 1.5). A l'arrêt, l'arbre est en contact avec le coussinet. Lors de la phase de démarrage, l'arbre roule à l'intérieur du coussinet dans un régime de frottement limite ou mixte. Lorsque la vitesse augmente, le régime devient hydrodynamique. L'huile qui adhère aux parois est entraînée dans un convergent formé par l'espace entre le coussinet et l'arbre excentré. C'est cet écoulement d'huile qui crée la pression hydrodynamique supportant la charge appliquée sur le rotor et assurant ainsi le fonctionnement sans contact du palier.

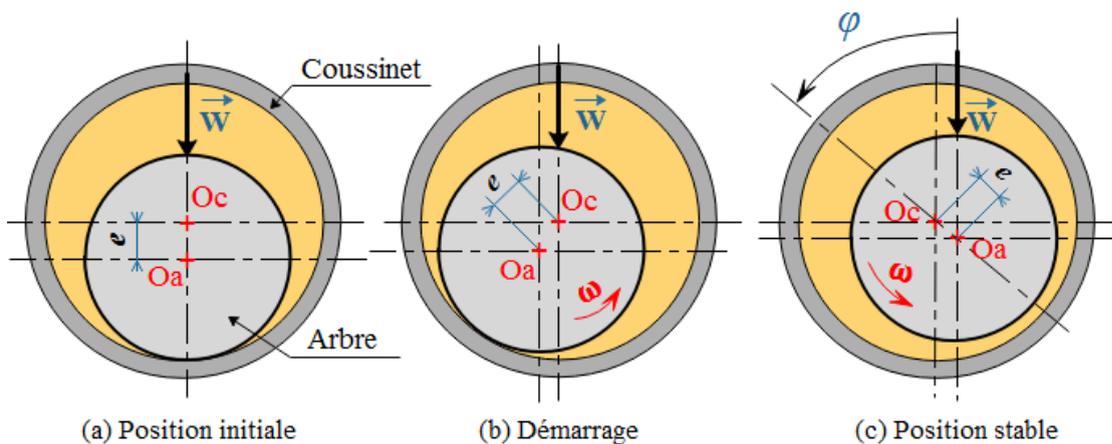


FIGURE 1.5: Position d'un arbre dans un palier lisse hydrodynamique

1.5 Conclusion

Après cette présentation "technique" des notions de base sur la lubrification en générale, et sur les paliers hydrodynamiques en particulier, on peut retenir que la

lubrification reste un élément primordial pour assurer le bon fonctionnement des éléments d'une machine. La compréhension et la modélisation du contact lubrifié dans un palier lisse nécessitent une description physique très fine du comportement du film fluide présent entre l'arbre et le coussinet. Les études sur la lubrification sont principalement basées sur les méthodes de résolution de l'équation de Reynolds. Le plus souvent, la résolution est faite à l'aide des méthodes des différences finies ou des éléments finis. Diverses simplifications peuvent rendre la résolution de l'équation de Reynolds plus facile, mais souvent au détriment de la précision des résultats. La prise en compte des déformations élastiques des surfaces dues au champ de pressions dans un contact lubrifié complique la résolution. tout cet aspect de modélisation de la lubrification dans les paliers lisses sera traité dans le chapitre suivant.

Chapitre 2

Modélisation de la lubrification des paliers lisses

Sommaire

2.1	Introduction	16
2.2	Annotations géométriques	16
2.3	Dérivation de l'équation de Reynolds	17
2.4	Équation de Reynolds	20
2.4.1	Conditions aux limites	24
2.4.2	Résolution de l'équation de Reynolds	26
2.5	Régime élasto-hydrodynamique (EHD)	34
2.5.1	Modélisation de la lubrification EHD	35
2.5.2	Géométrie et cinématique du palier	42
2.5.3	Épaisseur du film lubrifiant	42
2.6	Conclusion	44

2.1 Introduction

Ce chapitre présente le développement des équations de base de la lubrification des paliers lisses en régime hydrodynamique et élasto-hydrodynamique ; on citera : l'équation de Reynolds et sa résolution analytique (pour certains cas particuliers) et numérique dans les deux régimes, les paramètres de fonctionnement et les conditions aux limites appropriées. On terminera par une présentation des différents travaux ; existants dans la littérature ; portant sur les méthodes de résolution de ce type de problème.

2.2 Annotations géométriques

D'un point de vue géométrique, un palier hydrodynamique se compose d'un arbre cylindrique en rotation à l'intérieur d'un coussinet ; cylindrique aussi ; de plus grand diamètre (figure 2.1). Le coussinet peut présenter une rainure (ou plusieurs) longitudinale (ou circonférentielle) permettant d'alimenter en lubrifiant. On notera que, l'arbre n'est pas centré dans le coussinet, ce qui crée une zone convergente où il sera possible de générer une pression hydrodynamique.

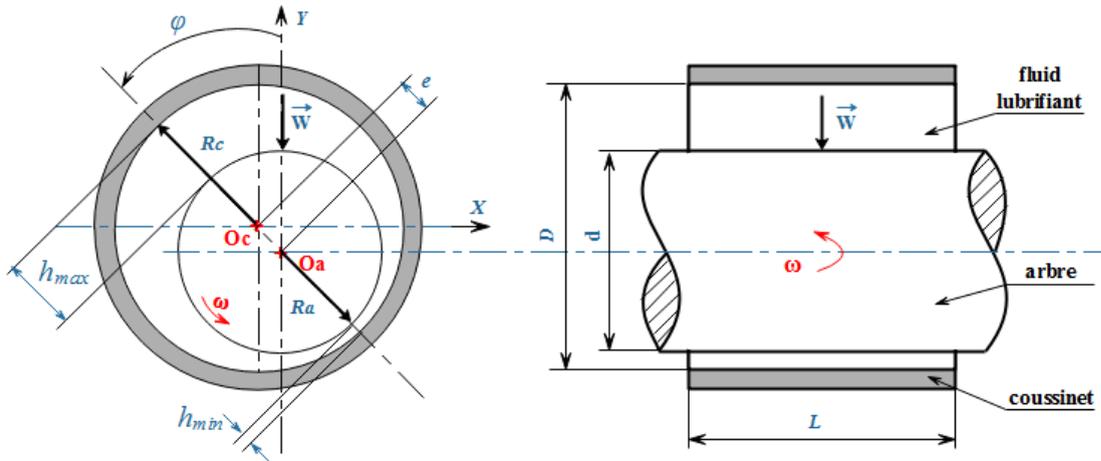


FIGURE 2.1: Schéma d'annotations géométriques.

Les principaux paramètres qui interviennent dans la définition d'un palier cylindrique sont :

1. Les paramètres géométriques : diamètre du coussinet D et du palier d , la longueur L , le jeu radial C .

2. Les paramètres cinématiques : vitesse de rotation ω , charge W , angle de calage φ , excentricité e , l'épaisseur du film h .
3. Les paramètres caractéristiques du lubrifiant : viscosité dynamique, masse volumique, chaleur spécifique.

2.3 Dérivation de l'équation de Reynolds

B. Towers [9] en 1883, découvre l'existence d'une répartition de pression entre les surfaces de l'arbre et du coussinet d'un palier de wagon de chemin de fer. A partir de ces travaux et celles de N. P. Petrov [10], Reynolds définit le phénomène de portance hydrodynamique. Lorsqu'il entre dans le convergent, le lubrifiant qui adhère aux surfaces en mouvement du palier, génère un champ de pression capable de supporter une charge radiale importante. Sur la base des équations de Navier-Stokes, cette théorie est mise en équation par Reynolds [11] en 1886, elle permet le calcul de la répartition de pression hydrodynamique dans le film lubrifiant, et constitue ainsi la base de la théorie de la lubrification actuelle [12].

Les équations générales de la lubrification hydrodynamique par fluide newtonien permettent de déterminer les caractéristiques d'un écoulement en film mince.

L'équation de Reynolds est déduite des équations de la mécanique des milieux continus selon les hypothèses suivantes [3] :

Les lois fondamentales de la mécanique des milieux continus :

1. Loi de conservation de la masse :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_i}{\partial x_i} = 0 \quad (2.1)$$

pour $i = 1, 2, 3$.

2. Loi de conservation de la quantité de mouvement :

$$\rho \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho b_i \quad (2.2)$$

pour $i, j = 1, 2, 3$.

3. Loi de comportement rhéologique pour un fluide newtonien s'écrit :

$$\sigma_{ij} = (-p + \lambda \theta_d) \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij} \quad (2.3)$$

pour $i, j = 1, 2, 3$.

avec :

x_i, t : variables d'espace et de temps ;

u_i : composantes de la vitesse d'écoulement ;

b_i : forces massiques extérieures (gravité, etc) ;

ρ : masse volumique du fluide ;

p : pression hydrodynamique ;

δ_{ij} : symbole de Kronecker : $\delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } i = j \\ 1 & \text{si } i \neq j \end{cases}$;

σ_{ij} : tenseur des contraintes (symétrique) ;

λ, μ : coefficients de viscosité de Navier ;

θ_d : taux de dilatation cubique s'écrit :

$$\theta_d = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \quad (2.4)$$

ε_{ij} : tenseur des taux de déformations :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (2.5)$$

Remarque : Le régime d'écoulement étant isotherme, on ne tient donc pas compte de l'équation de conservation d'énergie.

En reportant l'équation de comportement rhéologique (2.3) dans l'équation de la dynamique (2.2) et en négligeant les forces massiques, on obtient les équations de mouvement du fluide newtonien appelées équations de Navier-Stokes, qui s'écrivent :

$$\rho \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) = - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \lambda \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i \partial x_j} + \mu \left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} + \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i \partial x_j} \right) + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial \lambda}{\partial x_i} + \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial \mu}{\partial x_j} \quad (2.6)$$

• **Hypothèse du film minces :**

L'équation de Reynolds est obtenue en adoptant les hypothèses des films minces [3] :

1. l'épaisseur du film est très faible devant les autres dimensions du contact,
2. le milieu est continu sans rupture du film lubrifiant,
3. le fluide est newtonien : il y a proportionnalité entre le taux de cisaillement et les contraintes de cisaillement dans le film,
4. le régime est laminaire,
5. l'une des surfaces du contact est parfaitement plane et ne présente pas de rugosité, ce qui permet de placer l'origine des axes sur cette surface. Ainsi, la courbure générale du film est négligée,
6. il n'y a pas de glissement entre le fluide et les parois du contact : la vitesse du fluide à la paroi est égale à celle de la paroi,
7. les forces d'inertie sont négligeables,
8. les forces massiques extérieures sont négligées,
9. la viscosité et la masse volumique du fluide ne varient pas à travers l'épaisseur du film.

Pour plus de détails sur l'application de ces hypothèses simplificatrices afin d'arriver au modèle de Reynolds, l'auteur peut se référer à la référence [3]. L'équation généralisée de la mécanique des films minces visqueux se réduit alors à l'équation de Reynolds suivante :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\rho h^3}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\rho h^3}{\mu} \frac{\partial p}{\partial z} \right) &= 6\rho (u_1 - u_2) \frac{\partial h}{\partial x} + 6\rho (w_1 - w_2) \frac{\partial h}{\partial z} \\ &+ 6h \frac{\partial}{\partial x} [\rho (u_1 + u_2)] \\ &+ 6h \frac{\partial}{\partial z} [\rho (w_1 + w_2)] + 12\rho v_2 + 12h \frac{\partial \rho}{\partial t}, \end{aligned} \quad (2.7)$$

où u_1, u_2, v_2, w_1, w_2 sont les vitesses de surfaces (1) et (2) (figure 2.2) selon les axes x, y, z ; h est l'épaisseur du film; p la pression hydrodynamique μ est la viscosité du lubrifiant ρ est la masse volumique du lubrifiant.

En régime permanent le terme $12h \frac{\partial \rho}{\partial t}$ est nul dans l'équation de Reynolds.

A cette équation de Reynolds, s'ajoutent les équations donnant les vitesses dans le fluide :

$$\begin{cases} u = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x} y(y-h) + \frac{h-y}{h} u_1 + \frac{y}{h} u_2 \\ w = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial z} y(y-h) + \frac{h-y}{h} w_1 + \frac{z}{h} w_2 \end{cases} \quad (2.8)$$

Ainsi que les contraintes de cisaillement dans le fluide :

$$\begin{cases} \tau_{xy} = \mu \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{2} \frac{\partial p}{\partial x} (2y-h) + (u_2 - u_1) \frac{\mu}{h} \\ \tau_{yz} = \mu \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{1}{2} \frac{\partial p}{\partial z} (2y-h) + (w_2 - w_1) \frac{\mu}{h} \end{cases} \quad (2.9)$$

2.4 Équation de Reynolds

Considérons une section droite du palier (figure 2.2). Un point M appartenant à la surface du coussinet sera repéré par la coordonnée angulaire $\theta = (\overrightarrow{O_c A}, \overrightarrow{O_c M})$, l'épaisseur du film lubrifiant qui sépare les surfaces de l'arbre et du coussinet est donnée par :

$$h = O_c M - O_c M' = R_c - O_c M' = R_a + C - O_c M' \quad (2.10)$$

C est le jeu radial du palier ($C = R_c - R_a$)

En appliquant la règle des sinus au triangle $O_a M' O_c$ il vient :

$$\frac{O_a M'}{\sin(O_a O_c M')} = \frac{e}{\sin \alpha} = \frac{R_a}{\sin(M' O_a O_c)} = \frac{R_a}{\sin(\pi - \theta)} = \frac{R_a}{\sin \theta} \quad (2.11)$$

d'où

$$\sin \alpha = \frac{e}{R_a} \sin \theta \text{ et } O_c M' = \frac{R_a}{\sin \alpha} \sin(O_c O_a M'). \quad (2.12)$$

Or

$$(O_c O_a M') = \theta - \alpha = \theta - \arcsin \left(\frac{e}{R_a} \sin \theta \right), \quad (2.13)$$

donc

$$O_c M' = \frac{R_a}{\sin \theta} \sin \left[\theta - \arcsin \left(\frac{e}{R_a} \sin \theta \right) \right]. \quad (2.14)$$

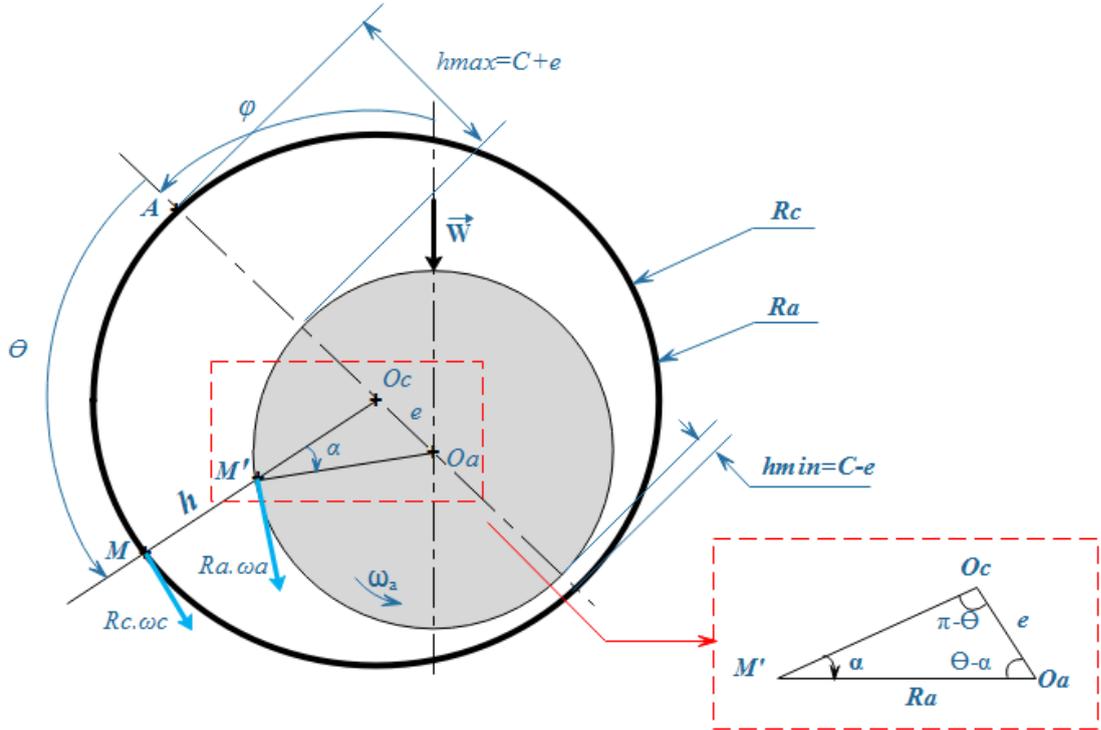


FIGURE 2.2: Section droite du palier

En développant le *sinus* il vient :

$$O_c M' = R_a \sqrt{1 - \left(\frac{e}{R_a} \sin \theta\right)^2} - e \cos \theta \quad (2.15)$$

La quantité $e/R_a < C/R$ est très petite devant l'unité (de l'ordre de 10^{-3}). On peut donc négliger le terme $\left(\frac{e}{R_a} \sin \theta\right)^2$ devant 1. L'épaisseur du film s'écrit alors :

$$h(\theta) = C(1 + \varepsilon \cos \theta) \quad (2.16)$$

Où ε est l'excentricité relative défini par $\varepsilon = e/C$ varie de 0 à 1.

- Pour $\varepsilon = 0$: l'arbre et le coussinet sont coaxiaux.
- Pour $\varepsilon = 1$: il y a présence d'un contact entre les surfaces de l'arbre et du coussinet.

En coordonnées cartésiennes (figure 2.3), les conditions cinématiques relatives aux surfaces d'un palier lisse cylindrique de longueur finie travaillant en régime stationnaire établi, s'écrivent :

Sur la paroi 1 (le coussinet), pour $y = 0$: $u_1 = u_c = 0$; $v_1 = v_c = 0$; $w_1 = w_c = 0$.

Sur la paroi 2 (l'arbre), pour $y = h$: $u_2 = u_a$; $v_2 = v_a$; $w_2 = w_a = 0$.

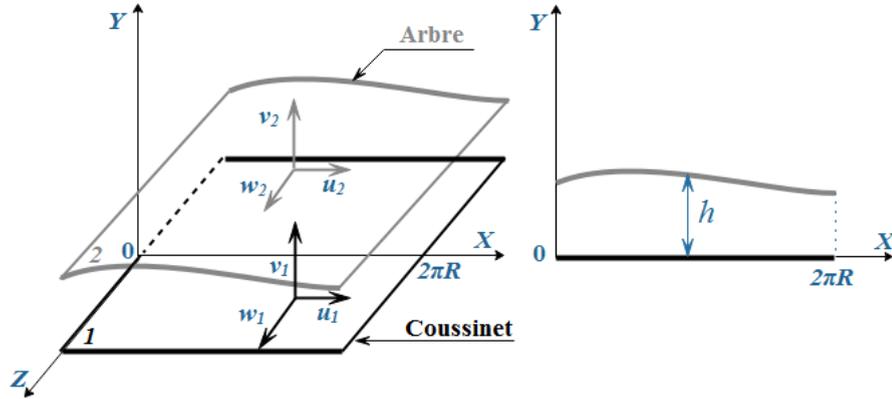


FIGURE 2.3: Système d'axes en coordonnées cartésiennes

Après simplification, l'équation de Reynolds 2.7 devient :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\rho h^3}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\rho h^3}{\mu} \frac{\partial p}{\partial z} \right) = 6\rho(u_c - u_a) \frac{\partial h}{\partial x} + 12\rho v_a \quad (2.17)$$

Ces conditions cinématiques relatives aux surfaces de l'arbre et du coussinet s'écrivent compte tenu de la figure 2.2 :

$$\begin{cases} u_c = R_c \omega_c \\ u_a = R_a \omega_a \cos \alpha \\ v_a = R_a \omega_a \sin \alpha \end{cases} \quad (2.18)$$

tel que α , l'angle entre $O_c M'$ et $O_a M'$; représente la pente de la courbe $h(x)$:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{dh}{dx} = \frac{1}{R_a} \frac{dh}{d\theta} = -\frac{e}{R_a} \sin \theta \quad (2.19)$$

La quantité e/R_a étant très petite devant 1, il est possible d'effectuer un développement limité d'ordre 1 : $\cos \alpha \approx 1$; $\sin \alpha \approx \alpha$ et $\operatorname{tg} \alpha = \frac{dh}{dx}$

Dans ces conditions, les vitesses des surfaces s'écrivent comme suit :

$$\begin{cases} u_c = R_c \omega_c \\ u_a = R_a \omega_a \\ v_a = R_a \omega_a \frac{dh}{dx} \end{cases} \quad (2.20)$$

En reportant l'expression de vitesses des surfaces eq.2.20 dans l'équation de Reynolds 2.17, et si on pose $\omega_c = 0$, $\omega = \omega_a$, on obtient :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{h^3}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{h^3}{\mu} \frac{\partial p}{\partial z} \right) = 6R_a \omega \frac{dh}{dx}. \quad (2.21)$$

On peut exprimer l'équation de Reynolds par les coordonnées θ et z . On pose $x = R_a \theta$ alors $dx = R_a d\theta$, l'équation de Reynolds 2.21 s'écrit sous la forme suivante :

$$\frac{1}{R_a} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{h^3}{\mu R_a} \frac{\partial p}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{h^3}{\mu} \frac{\partial p}{\partial z} \right) = 6\omega \frac{dh}{d\theta}, \quad (2.22)$$

pour un palier lisse cylindrique et aligné, h ne dépend que de θ l'équation 2.22 devient :

$$\frac{1}{\mu R_a^2} \left(\frac{\partial h^3}{\partial \theta} \frac{\partial P}{\partial \theta} + h^3 \frac{\partial^2 P}{\partial \theta^2} \right) + \frac{h^3}{\mu} \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} = 6\omega \frac{dh}{d\theta}, \quad (2.23)$$

d'où

$$\frac{3h^2}{\mu R_a^2} \frac{\partial h}{\partial \theta} \frac{\partial P}{\partial \theta} + \frac{h^3}{\mu R_a^2} \frac{\partial^2 P}{\partial \theta^2} + \frac{h^3}{\mu} \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} = 6\omega \frac{dh}{d\theta}, \quad (2.24)$$

soit finalement :

$$\frac{3}{h R_a^2} \frac{dh}{d\theta} \frac{\partial P}{\partial \theta} + \frac{1}{R_a^2} \frac{\partial^2 P}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} = 6 \frac{\mu \omega}{h^3} \frac{dh}{d\theta}, \quad (2.25)$$

avec : p la pression, h l'épaisseur du film d'huile, R_a le rayon de l'arbre, ω la vitesse de rotation de l'arbre et μ la viscosité dynamique.

$h = C(1 + \epsilon \cos \theta)$ Avec : C le jeu radial, ϵ L'excentricité relative défini par $\epsilon = e/C$.

Une autre forme de l'équation de Reynolds peut être trouvé dans la littérature, qui est la forme adimensionnelle.

En adoptant $u = R_a \omega$ dans l'équation 2.21 :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(h^3 \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(h^3 \frac{\partial p}{\partial z} \right) = 6\mu u \frac{dh}{dx} \quad (2.26)$$

Si on reporte dans l'équation 2.26 les variables adimensionnelle suivantes :

$$\theta = x/R_a, \quad \bar{z} = z/L, \quad \bar{h} = h/C \quad \text{et} \quad \bar{P} = \frac{PC^2}{6\mu u R_a}$$

Alors l'équation de Reynolds en forme adimensionnelle s'écrit :

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\bar{h}^3 \frac{\partial \bar{P}}{\partial \theta} \right) + \alpha^2 \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left(\bar{h}^3 \frac{\partial \bar{P}}{\partial \bar{z}} \right) = \frac{d\bar{h}}{d\theta}, \quad (2.27)$$

avec α est le rapport de R et L .

2.4.1 Conditions aux limites

Les conditions aux limites utilisées pour la résolution de l'équation de Reynolds sont basées sur la séparation des zones actives et inactives. c'est dans la zone active que la pression monte et que l'équilibre avec la charge appliquée se réalise.

Pour calculer le champ de pression, il faut résoudre l'équation de Reynolds sur le domaine représenté par la figure 2.4, compte tenu des conditions aux limites sur la pression :

- Selon z : $p\left(\theta, z = +\frac{L}{2}\right) = p_1$; $p\left(\theta, z = -\frac{L}{2}\right) = p_2 \quad \forall \theta$
- Selon θ : $p(\theta = 0, z) = p(\theta = 2\pi, z) \quad \forall z$

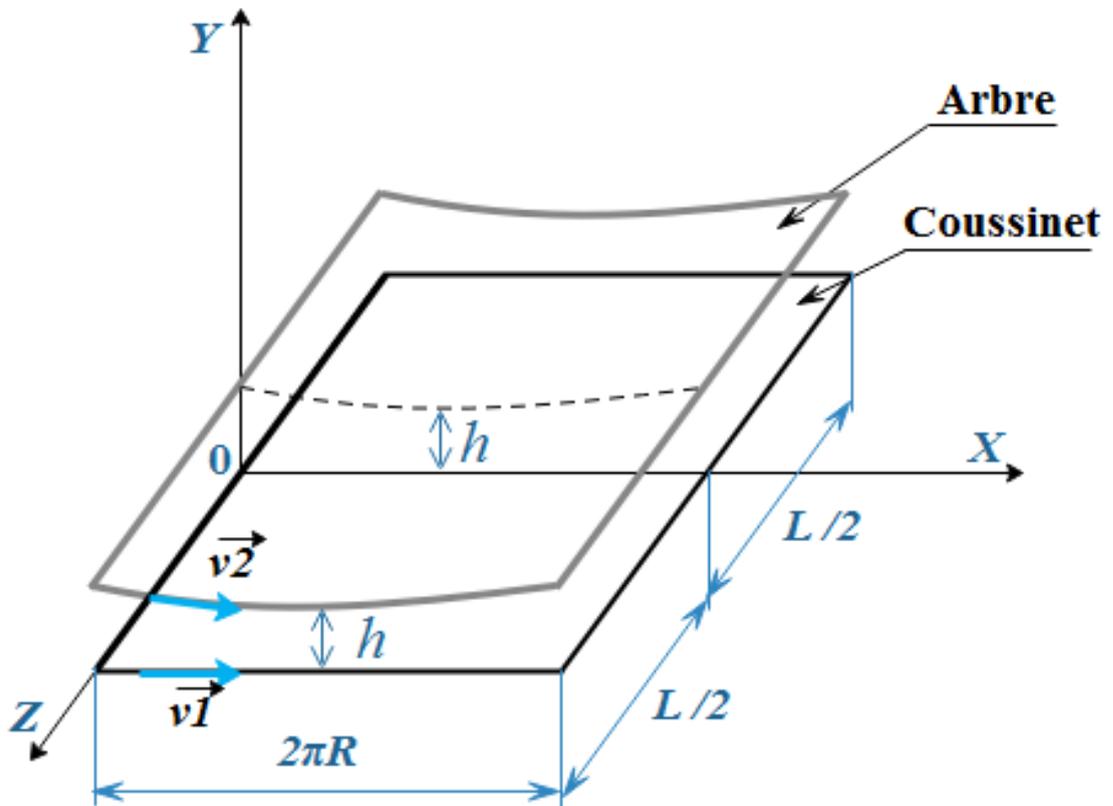


FIGURE 2.4: Palier lisse développé

Où P_1 et P_2 représentent les pressions extérieures aux extrémités du palier. Si le palier possède des rainures d'alimentation en lubrifiant, il faut alors écrire les conditions aux limites correspondantes :

- Pour une rainure circonférentielle en $z = 0$: $p(\theta, z = 0) = P_a$
- Pour une rainure axiale située à l'abscisse $\theta = \theta_a$: $p(\theta_a, a) = P_a$
- Pour une alvéole rectangulaire $\theta(\theta_a, \theta_b)$ et $z(z_a, z_c)$: $p = P_a$
- où P_a est la pression dans la rainure ou dans l'alvéole.

De plus, comme la forme du film est convergente puis divergente en fonction de θ , il peut y avoir rupture du film dans le divergent lorsque la pression devient inférieure à la pression de vapeur saturante du fluide.

Pour un palier hydrodynamique en fonctionnement stationnaire, trois types de conditions aux limites ont été successivement définies :

1. Conditions de Sommerfeld

Sommerfeld en 1904 [13] suppose que le film lubrifiant est continu et qu'il n'y a pas de rupture du film. Dans ces conditions la distribution de pression est antisymétrique par rapport au point $\theta = \pi$ et le lieu du centre de l'arbre dans le coussinet est une droite normale à la direction de charge.

Ces conditions aux limites ne sont valables que pour les paliers fonctionnant à de très faibles charges ou avec des pressions d'alimentation très élevées car sinon des pressions négatives apparaissent dans le film, ce qui est physiquement inacceptable.

2. Conditions de Gümbel

Gümbel en 1921 [14], à la suite des travaux de Sommerfeld, propose comme conditions aux limites :

$$\begin{cases} p(\theta = 0, z) = 0 \\ p(\theta = \pi, z) = 0 \\ p(\pi < \theta < 2\pi, z) = 0 \end{cases} \quad (2.28)$$

Cela revient à négliger, dans la solution de Sommerfeld les pressions négatives. Ces conditions impliquent une discontinuité dans l'écoulement au point $\theta = \pi$; elles ne sont pas acceptables physiquement mais sont utilisées dans le cas de l'approximation du palier court.

3. Conditions de Reynolds

Ces conditions proposées indépendamment par Swift en 1932 [15] et par Steiber en 1933 [16], respectent la continuité du débit et supposent que pour

une abscisse θ_s inconnue, la pression et le gradient de pression s'annulent :

$$\begin{cases} p(\theta = 0, z) = 0 \\ p(\theta = \theta_s, z) = 0 \\ \frac{\partial p}{\partial \theta}(\theta = \theta_s, z) = \frac{\partial p}{\partial z}(\theta = \theta_s, z) = 0 \\ p(\theta_s < \theta < 2\pi, z) = 0 \end{cases} \quad (2.29)$$

On distingue ainsi deux régions dans le palier : une région active où la pression est positive et le film complet, pour des valeurs de θ comprises entre 0 et θ_s et une région inactive à pression nulle et dans laquelle en régime dynamique, peut apparaître de la cavitation, pour $\theta_s < \theta < 2\pi$. Ces conditions sont celles qui donnent les solutions les plus exactes ; elles ont été vérifiées dans de nombreuses études expérimentales.

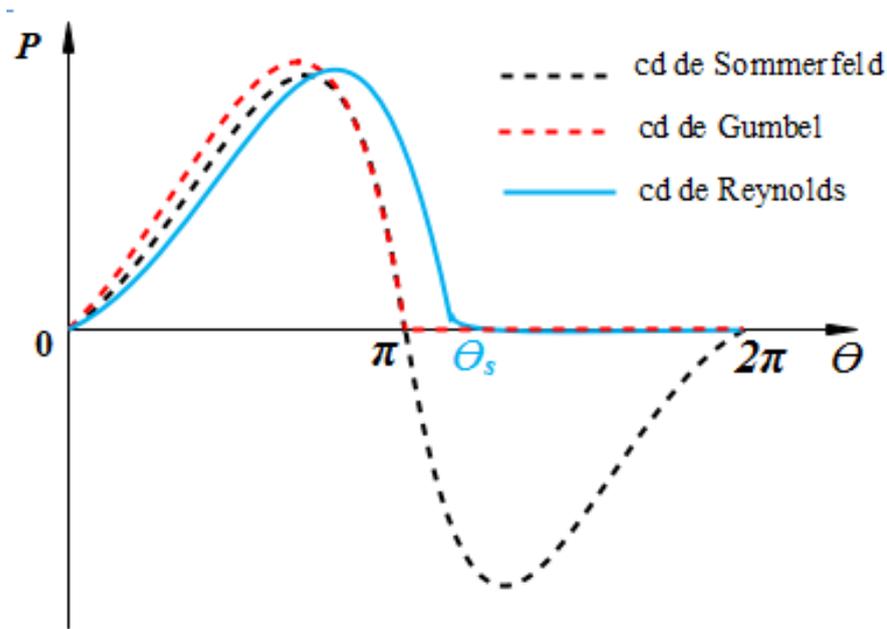


FIGURE 2.5: Les conditions aux limites dans un palier

2.4.2 Résolution de l'équation de Reynolds

L'équation de Reynolds est une équation aux dérivées partielles du second ordre de type elliptique. Plusieurs approches ont été proposées pour résoudre cette équation. On trouve d'une part, les modèles analytiques, qui dans certaines conditions et simplifications peuvent donner des résultats intéressants pour des cas très particuliers (palier infiniment court [16, 17], palier infiniment long [18], palier de

longueur finie [19, 20]). D'autre part, plusieurs méthodes numériques ont été aussi mises au point pour résoudre ce type de problèmes. Dans la catégorie où la méthode des différences finies a été utilisée, on trouve les travaux de Christopherson [21], Cryer [22], Raimondi et Boyd [23], Deligant et al. [24].

Dans la catégorie où la méthode des éléments finis (EF) a été employée, on trouve les travaux de Booker [25], Allair et al [26], Childs et al. [27] de Sorsimo et al. [28], Raghavendra et al. [29].

Gero et Ettles [30] ont effectué une comparaison entre les méthodes de différence finie (DF) et la méthode des éléments finis (EF) pour la résolution des équations 1D et 2D de Reynolds. Leurs résultats pour les paliers bidimensionnels ont prouvé que les erreurs relatives des solutions DF étaient plus faibles que celles associées à l'approche EF. En outre, il a été démontré que l'approche DF convergeait plus rapidement que la technique EF.

Dans la catégorie des études basées sur le Calcul de Dynamique des Fluides (CFD) on retrouve les travaux de Gertzos et al. [31], Deligant et al. [32] et Tiwari et al. [33]. ils ont utilisé les logiciels de CFD basés sur la méthode des volumes finies comme FLUENT, ANSYS pour analyser les performances des paliers lisses.

On retrouve aussi d'autres méthodes numériques pour la résolution de l'équation de Reynolds, comme la méthode pseudo-spectrale on trouve les travaux de Gantasala et al. [34].

a Approche analytique

Selon le rapport de la longueur sur le diamètre (L/D), les paliers lisses peuvent être divisés en trois catégories : les paliers infiniment courts, infiniment longs et les paliers de longueur finie.

a.1 Palier infiniment court

Lorsque le rapport L/D de la longueur au diamètre du palier est faible, on peut négliger le gradient de pression circonférentiel devant le gradient de pression axial. Cette hypothèse émise pour la première fois de Michell [17] a été reprise et développée par Ocvirk et Dubois [16]. Elle est entièrement justifiée pour les paliers dont le rapport L/D est inférieur ou égal à $1/8$. En pratique cette hypothèse est encore utilisée pour des rapports L/D de 0,5 car l'erreur commise reste faible sur

le couple et le débit, elle est d'un ordre de grandeur acceptable sur la charge mais très importante sur la valeur du maximum de pression dans le film. Ces erreurs diminuent lorsque l'excentricité décroît.

L'équation de Reynolds s'écrit :

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(h^3 \frac{\partial p}{\partial z} \right) = 6\mu\omega \frac{dh}{d\theta} \quad (2.30)$$

Avec les conditions aux limites suivantes :

$$\begin{aligned} P\left(\theta, z = -\frac{L}{2}\right) &= 0 \\ P\left(\theta, z = +\frac{L}{2}\right) &= 0 \end{aligned} \quad (2.31)$$

Le champ de pression s'écrit comme suit :

$$P(\theta, z) = -\frac{3\mu\omega}{C^2} \left(z^2 - \frac{L^2}{4} \right) \frac{\epsilon \sin \theta}{(1 + \epsilon \cos \theta)^3} \quad (2.32)$$

Il est évident que la pression varie comme $\sin \theta$; elle est positive pour $\theta \in [0, \pi]$. Pour obtenir la charge, Ocvirk et Dubois [16] utilisent les conditions aux limites de Gumbel [14] ; il vient :

$$W = \mu LR\omega \left(\frac{L}{D} \right)^2 \left(\frac{R}{C} \right)^2 \frac{\epsilon}{(1 - \epsilon^2)^2} \sqrt{16\epsilon^2 + \pi^2 (1 - \epsilon^2)} \quad (2.33)$$

Le nombre de Sommerfeld est tel que :

$$S = \left(\frac{D}{L} \right)^2 \frac{(1 - \epsilon^2)^2}{\pi \epsilon \sqrt{16\epsilon^2 + \pi^2 (1 - \epsilon^2)}} \quad (2.34)$$

Le couple de frottement calculé en tenant compte des zones active et inactive du palier, est donné par la relation :

$$C_a = \frac{\mu\omega R^3 L}{C} \frac{\pi (2 + \epsilon)}{(1 + \epsilon) \sqrt{1 - \epsilon^2}} \quad (2.35)$$

Le nombre de frottement sur l'arbre s'écrit :

$$f = \frac{C_a}{CW} = \frac{\pi^2 S (2 + \epsilon)}{(1 + \epsilon) \sqrt{1 - \epsilon^2}} \quad (2.36)$$

Le débit axial est :

$$Q_z = LCV\epsilon \quad (2.37)$$

a.2 Palier infiniment long

Lorsque le rapport L/D de la longueur au diamètre du palier est grand, on peut négliger le débit axial. L'écoulement est donc purement circonférentiel. En pratique, ce calcul s'applique aux paliers tels que $L/D > 4$.

Dans ce cas l'équation de Reynolds (2.25) se réduit à :

$$\frac{3}{hR_a^2} \frac{dh}{d\theta} \frac{\partial P}{\partial \theta} + \frac{1}{R_a^2} \frac{\partial^2 P}{\partial \theta^2} = 6 \frac{\mu\omega}{h^3} \frac{dh}{d\theta} \quad (2.38)$$

En choisissant les conditions aux limites de Reynolds en effectuant le changement de variable de Sommerfeld [35] défini par :

$$1 + \varepsilon \cos \theta = \frac{1 - \varepsilon^2}{1 - \varepsilon \cos \psi} \quad (2.39)$$

où ψ simple variable mathématique.

Avec les conditions aux limites suivantes :

$$P(\theta = 0) = 0 \text{ ou bien } P(\psi = 0) = 0$$

$$P(\theta = \theta_s) = \left(\frac{dP}{d\theta} \right)_{\theta=\theta_s} = 0 \text{ ou bien } P(\psi = \psi_s) = \left(\frac{dP}{d\psi} \right)_{\psi=\psi_s} = 0$$

Le champ de pression s'écrit :

$$P(\psi) = \frac{6\mu R^2 \omega}{C^2 (1 - \varepsilon^2)^{3/2}} \left\{ \psi - \varepsilon \sin \psi - \frac{2\psi - 4\varepsilon \sin \psi + \varepsilon^2 \psi + \varepsilon^2 \sin \psi \cos \psi}{2(1 - \varepsilon \cos \psi_s)} \right\} + P_a \quad (2.40)$$

Avec ψ_s abscisse de rupture du film d'huile définie par la relation :

$$\varepsilon (\sin \psi_s \cos \psi_s - \psi_s) + 2 (\sin \psi_s - \psi_s \cos \psi_s) = 0 \quad (2.41)$$

Les composantes de la charge sont obtenues par l'intégration du champ de pression :

$$W = 3\mu R \omega L \left(\frac{R}{C} \right)^2 \frac{1}{\sqrt{1 - \varepsilon^2} (1 - \varepsilon \cos \psi_s)} \sqrt{\frac{\varepsilon^2 (1 - \cos \psi_s)^4}{1 - \varepsilon} + 4(\sin \psi_s - \psi_s \cos \psi_s)^2} \quad (2.42)$$

L'angle de calage est donné par :

$$tg\phi = \frac{2\sqrt{1 - \varepsilon^2} (\sin \psi_s - \psi_s \cos \psi_s)}{\varepsilon (1 - \varepsilon \cos \psi_s)^2} \quad (2.43)$$

Le nombre de Sommerfeld est donné par :

$$S = \frac{\sqrt{1 - \varepsilon^2}(1 - \varepsilon \cos \psi_s)}{3\pi \sqrt{\frac{\varepsilon^2(1 - \varepsilon \cos \psi_s)^4}{1 - \varepsilon^2} + 4(\sin \psi_s - \psi_s \cos \psi_s)^2}} \quad (2.44)$$

Le couple de frottement :

$$C_a = \frac{\mu R^3 \omega L}{C} \left[\frac{2\pi + \varepsilon (\sin \psi_s - \psi_s \cos \psi_s)}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}(1 - \varepsilon \cos \psi_s)} \right] + \frac{e}{2} W \sin \phi \quad (2.45)$$

Le nombre de frottement sur l'arbre :

$$f = \frac{C_a}{CW} = \pi S \left[\frac{2\pi + \varepsilon (\sin \psi_s - \psi_s \cos \psi_s)}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}(1 - \varepsilon \cos \psi_s)} \right] + \frac{\varepsilon}{2} \sin \phi \quad (2.46)$$

b. Approche numérique

La méthode des différences finies a été largement utilisée pour la résolution du problème de lubrification hydrodynamique des paliers lisses. Dans cette partie, on s'intéressera à la résolution numérique du modèle de Reynolds par la méthode des différences finies, qui constituera un bon exemple dans la perception de la procédure de résolution, et aussi nous permettra par la suite de valider et comparer notre modèle numérique proposé (chapitre 4).

La figure 2.6 montre un maillage uniforme, avec des nœuds n selon la direction θ et p selon la direction z , de sorte que le nombre total de nœuds est égal à $n \times p$.

La surface de l'arbre est discrétisée en n points sur la circonférence et en p points sur la longueur. Les dérivées partielles sont donc discrétisées par la méthode des différences finies.

Soit :

selon θ on a pris un pas $b = 2\pi/n$ dans l'intervalle $[0, 2\pi]$. selon z on a pris un pas $c = L/p$ dans l'intervalle $[0, L]$.

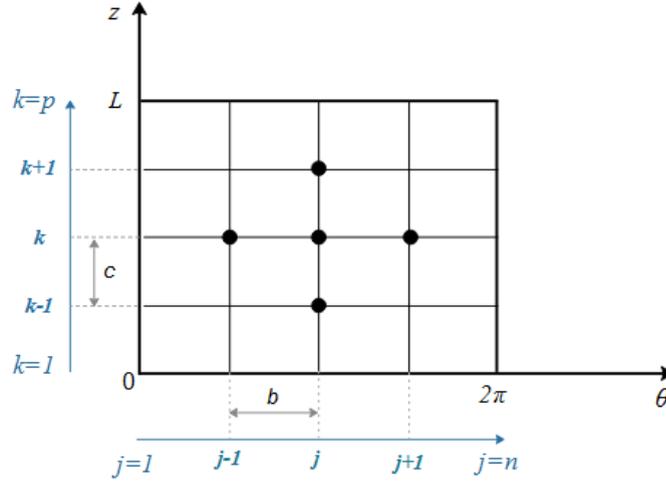


FIGURE 2.6: Schéma de discrétisation du palier

En utilisant les développements de Taylor à l'ordre 2, on peut exprimer les dérivées partielles :

$$\frac{\partial P(\theta, z)}{\partial \theta} = \frac{P(\theta + b, z) - P(\theta - b, z)}{2b} \quad (2.47)$$

$$\frac{\partial^2 P(\theta, z)}{\partial \theta^2} = \frac{P(\theta + b, z) - 2P(\theta, z) + P(\theta - b, z)}{b^2} \quad (2.48)$$

$$\frac{\partial^2 P(\theta, z)}{\partial z^2} = \frac{P(\theta, z + c) - 2P(\theta, z) + P(\theta, z - c)}{c^2} \quad (2.49)$$

En remplaçant les dérivées par leur expression (2.47), (2.48), (2.49) dans l'équation de Reynolds (2.25) on obtient :

$$\begin{aligned} & \frac{3}{2bhR_a^2} \frac{dh}{d\theta} [P(\theta + b, z) - P(\theta - b, z)] \\ & + \frac{1}{b^2R_a^2} [P(\theta + b, z) - 2P(\theta, z) + P(\theta - b, z)] \\ & + \frac{1}{c^2} [P(\theta, z + c) - 2P(\theta, z) + P(\theta, z - c)] = 6 \frac{\mu\omega}{h^3} \frac{dh}{d\theta}, \end{aligned} \quad (2.50)$$

d'où

$$\begin{aligned} & P(\theta + b, z) \left[\frac{3}{2bhR_a^2} \frac{dh}{d\theta} + \frac{1}{b^2R_a^2} \right] + P(\theta - b, z) \left[\frac{-3}{2bhR_a^2} \frac{dh}{d\theta} + \frac{1}{b^2R_a^2} \right] \\ & - 2P(\theta, z) \left[\frac{1}{b^2R_a^2} + \frac{1}{c^2} \right] + P(\theta, z + c) \left[\frac{1}{c^2} \right] + P(\theta, z - c) \left[\frac{1}{c^2} \right] = 6 \frac{\mu\omega}{h^3} \frac{dh}{d\theta}. \end{aligned} \quad (2.51)$$

On définit les coefficients :

$$A = \frac{2}{b^2 R_a^2} + \frac{2}{c^2}; A_1 = \frac{-3}{2bhR_a^2} \frac{dh}{d\theta} + \frac{1}{b^2 R_a^2};$$

$$A_2 = \frac{3}{2bhR_a^2} \frac{dh}{d\theta} + \frac{1}{b^2 R_a^2}; A_3 = \frac{1}{c^2}; A_4 = 6 \frac{\mu\omega}{h^3} \frac{dh}{d\theta}$$

Avec A , A_1 , A_2 , A_3 et A_4 sont des coefficients connus.

L'équation (2.51) devient :

$$A_2 P(\theta + b, z) + A_1 P(\theta - b, z) - AP(\theta, z) + A_3 [P(\theta, z - c) + P(\theta, z + c)] = A_4 \quad (2.52)$$

En adoptant la notation indicielle :

$$j \in [1, n] \text{ tel que } \theta = bj$$

$$k \in [1, p] \text{ tel que } z = ck$$

La distribution de la pression P dans le domaine de calcul peut être exprimée pour chaque nœud $P_{j,k}$.

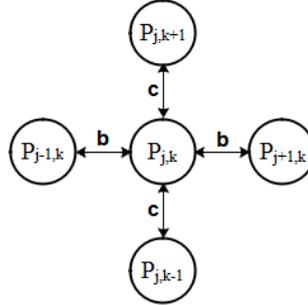


FIGURE 2.7: Schéma des différences finies

L'équation de Reynolds (2.52) discrétisée en notation indicielle :

$$A_2 P_{j+1,k} + A_1 P_{j-1,k} - AP_{j,k} + A_3 (P_{j,k-1} + P_{j,k+1}) = A_4 \quad (2.53)$$

d'où

$$AP_{j,k} = A_2 P_{j+1,k} + A_1 P_{j-1,k} + A_3 (P_{j,k-1} + P_{j,k+1}) - A_4 \quad (2.54)$$

En utilisant l'équation (2.53), nous pouvons calculer la discrétisation nodale par différences finies. Pour les nœuds frontières, les variables doivent satisfaire les conditions aux limites imposées. De cette manière, on peut obtenir un ensemble

d'équations algébriques linéaires dont le nombre est le même que le nombre de variables inconnues de sorte que l'ensemble peut être résolu en utilisant une méthode itérative.

Lorsque la précision répond à l'exigence de convergence, le calcul s'arrête et les variables pour chaque nœud dans l'ensemble du domaine de la solution peuvent être obtenues.

Au cours de calcul itératif, et pour garantir la convergence, on utilise souvent la méthode itérative de Gauss-Seidel avec coefficient de sur-relaxation, c'est-à-dire pondérée pour ajouter l'ancienne pression à la pression itérative sous forme d'une nouvelle pression, comme dans l'équation (2.55) :

$$P_{j,k}^{n+1} = (1 - \Omega_s) P_{j,k}^n + \Omega_s \left[\frac{A_1}{A} \cdot P_{j+1,k}^n + \frac{A_2}{A} \cdot P_{j-1,k}^{n+1} + \frac{A_3}{A} \cdot (P_{j,k+1}^n + P_{j,k-1}^{n+1}) + \frac{A_4}{A} \right] \quad (2.55)$$

Où $P_{j,k}^n$ est l'ancienne pression, $P_{j,k}^{n+1}$ est la nouvelle pression, et Ω_s est le coefficient de sur-relaxation ; généralement compris entre 1,4 et 2.

Conditions aux limites :

Dans notre étude, on adoptera l'analogie des conditions aux limites de Sommerfeld, où les pressions négatives sont prises en compte.

A l'entrée : Le palier est considéré sans aucune rainure d'alimentation, c'est à

$$\text{dire ; } \begin{cases} k \in [1, p] \\ j = 1 \end{cases} \Rightarrow P_{1,k} = 0$$

A la sortie : aux deux extrémités axiales, le champ de pression est donné par ;

$$\begin{cases} k = 1 \text{ et } k = p \\ j \in [1, n] \end{cases} \Rightarrow P_{j,1} = P_{j,p} = 0$$

2.5 Régime élasto-hydrodynamique (EHD)

L'étude du régime EHD prend en compte les déformations élastiques dues au champ de pression dans le contact lubrifié. La formulation d'un problème élasto-hydrodynamique "EHD" a été initialisée par la théorie de Hertz [36] dans laquelle il présente une étude qui concerne la déformation élastique des solides semi-infinis, il propose une solution analytique du champs de pression dans le cas d'un problème 2D. Une première approche "EHD" du contact linéique a été proposée par Ertel [37], il propose l'expression analytique pour calculer l'épaisseur du film pour un fluide compressible, il utilise dans leur approche la théorie de Hertz [36] pour la déformation élastique et la loi de Barus [38] pour la variation de la viscosité avec la pression.

Pour aboutir à la résolution d'un problème EHD isotherme il est nécessaire de déterminer d'une part le champ de pression du film de lubrifiant et d'autre part le champ d'épaisseurs à tout moment du fonctionnement. Ceci impose la résolution simultanée de deux équations :

- Une décrivant l'épaisseur de film fluide tenant compte des déformations élastiques des surfaces.
- Une équation hydrodynamique définissant le comportement du film de lubrifiant (équation de Reynolds).

Nous nous intéressons dans cette partie à l'étude des déformations élastiques des surfaces de contact au sein des paliers hydrodynamiques. Nous considérons que le coussinet est déformable à cause d'un revêtement élastique mince qui est placé sur la surface interne du coussinet, par contre l'arbre est supposé rigide (figure 2.8).

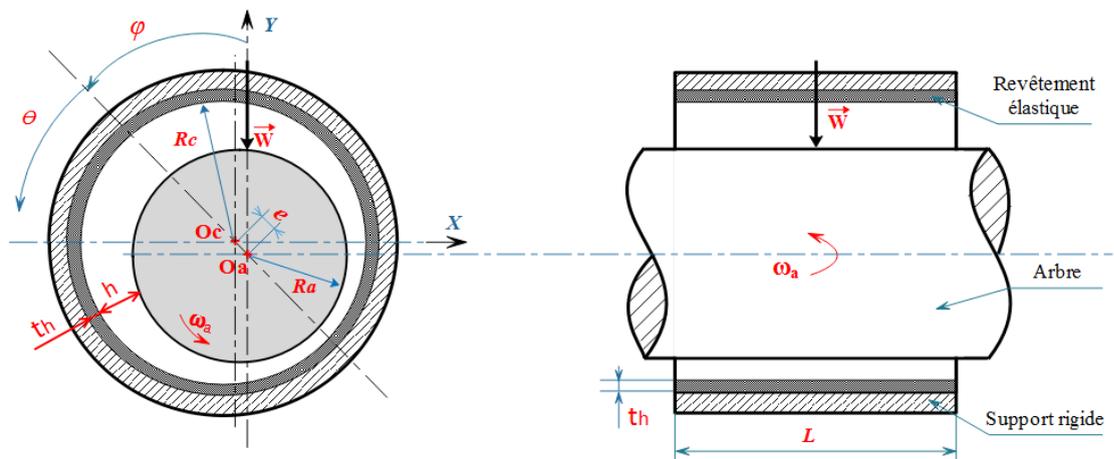


FIGURE 2.8: Géométrie d'un palier cylindrique revêtu mono-couche

2.5.1 Modélisation de la lubrification EHD

Depuis le 20ème siècle, la communauté scientifique s'est intéressée de plus en plus aux problèmes de lubrification [41–43]. En même temps, le développement des moyens expérimentaux basés sur des techniques d'interférométrie optique, accompagné d'un énorme progrès dans la résolution numérique des équations aux dérivées partielles grâce à des ordinateurs plus puissants et des algorithmes plus performants, permirent une compréhension plus précise des phénomènes de lubrification. Ces développements ont mené l'évaluation précise de la distribution de l'épaisseur du film de lubrifiant dans un contact EHD. L'étude de la lubrification du palier en régime élasto-hydrodynamique (EHD) prend en compte les déformations élastiques dues au champ de pression dans un contact lubrifié, ce qui augmente le degré de complexité du problème hydrodynamique basique. De nombreuses études ont été menées afin de modéliser et résoudre ce type de problème. On classera ces travaux en deux grandes catégories : expérimentales et numériques.

a Approche expérimentale

La validation des travaux théoriques requiert des résultats expérimentaux pour confirmer certaines observations qualitatives telles que la séparation complète des surfaces en contact par un film de lubrifiant ou la distribution de pression à l'intérieur de ce dernier. Ces expériences peuvent être aussi utilisées pour confirmer des observations plus quantitatives telles que la distribution exacte de l'épaisseur de film dans le contact. Au fil des années, plusieurs techniques basées sur des principes physiques différents ont été développées. La plus utilisée reste l'interférométrie optique. Foord et al. [44], Gohar et Cameron [45, 46], Wedeven et al [47], Chiu et Sibley [48] ont noté en utilisant cette technique, la forme particulière en « fer à cheval » de la distribution de l'épaisseur de film dans un contact ponctuel. De nos jours, cette technique est bien plus développée avec des capteurs optiques d'une résolution nettement meilleure, permettant ainsi de mesurer des épaisseurs de film extrêmement minces de l'ordre de quelques nanomètres, comme le montrent les travaux de Guangteng et al. [49] ou de Cann et al. [50–52].

Le développement parallèle des techniques expérimentales et numériques permet aujourd'hui une comparaison quantitative des distributions de pression et d'épaisseur de film et ainsi la validation des modèles numériques. Le paragraphe suivant

expose les différentes méthodes numériques trouvées dans la littérature pour la résolution du problème EHD.

b Approche numérique

En général, la procédure de résolution numérique du problème EHD consiste à calculer dans un premier temps, la répartition de la pression hydrodynamique dans le palier pour une géométrie non déformée (palier parfaitement cylindrique), puis nous déterminons par l'utilisation du modèle « couche mince », les déplacements élastiques du revêtement de surface dus aux pressions hydrodynamiques. Ces déplacements permettent de recalculer une nouvelle géométrie puis un nouveau champ de pression. Ce processus itératif ainsi défini ne converge généralement pas. Pour assurer la convergence, nous ne devons prendre en compte qu'une petite partie de déplacements calculés, ce qui peut être analogue aux méthodes itératives de relaxation.

Pour trouver la solution d'un problème EHD isotherme, il est nécessaire de déterminer, d'une part le champ de pression du film lubrifiant et le champ de déplacements radiaux d'autre part. Afin que nous puissions assurer une convergence rapide, nous devons résoudre au préalable le problème hydrodynamique isotherme sans tenir compte des déformations élastiques et des effets thermiques dans le contact.

Petrusevich [53] fut le premier à fournir une solution numérique complète du problème EHD. Il a fait une résolution simultanée de l'équation de Reynolds et de la déformation élastique en déterminant le champs de pression et l'épaisseur de film. Dans les années 1960, Dowson et Higginson [54] réalisent un grand nombre de simulations numériques pour calculer l'épaisseur de film dans un contact cylindre/plan. Les résultats obtenus permettent de dégager l'influence des différents paramètres sur l'épaisseur de film. Les paramètres de contact sont groupés dans trois paramètres adimensionnés, utilisés par la suite pour trouver une expression analytique de l'épaisseur de film minimale.

Avec l'avancée technologique des ordinateurs, les solutions numériques firent leur apparition donnant lieu à plusieurs formules analytiques liant les épaisseurs de film centrales et minimales à différents paramètres adimensionnés du contact. Parmi

celles-ci, les plus courantes sont celles de Hamrock et Dowson [55], Nijenbanning et al. [56] et Evans et Snidle [57].

A cause des difficultés de convergence rencontrées pendant le processus de résolution, en particulier, celles dues au couplage entre l'équation de Reynolds et celle des déformations élastiques des surfaces. Les différentes approches numériques développées peuvent être classifiées en deux catégories : les approches se basant sur une procédure itérative et celles se basant sur la résolution simultanée.

b.1 Approches se basant sur une procédure itérative

Ces approches consistent à résoudre les différentes équations du problème EHD séparément et à établir une procédure itérative entre leurs solutions respectives comme le montre la Figure 2.9. Parmi les premiers à avoir adopté ce type d'approche, on citera : Dowson et Higginson [54] dans le cadre d'un contact linéique. Ensuite, suivirent les travaux de Hamrock et Dowson [58–61] et de Ranger et al. [62] pour le contact circulaire, Chittenden et al. [63] et Nijenbanning et al. [56] pour le contact elliptique. Ces modèles étaient basés sur ce qu'on appelle la méthode directe. En d'autres termes, l'équation de Reynolds est résolue en fonction de la pression pour une géométrie de film donnée. L'inconvénient majeur de ces modèles est la limitation en pression à moins de 1 GPa alors que dans des contacts EHD réels, des pressions de l'ordre de 2 ou 3 GPa peuvent être rencontrées. Afin de s'affranchir de cette limitation, Ertel [37] avait introduit auparavant ce que l'on connaît sous le nom de méthode inverse. Contrairement à la méthode directe, la méthode inverse consiste à résoudre l'équation de Reynolds en fonction de l'épaisseur de film pour un profil de pression donné. Dowson et Higginson [54] furent les premiers à développer un algorithme pour trouver la solution numérique du problème de contact EHD linéique basé sur la solution inverse de l'équation de Reynolds. Cette approche fut plus tard étendue au cas des contacts circulaires par Evans et Snidle [64]. Malgré la robustesse de cette méthode dans la zone centrale du contact où la méthode directe souffrait de problèmes de stabilité, la solution demeurait instable dans les zones d'entrée et de sortie du contact. Plus tard, Kweh et al. [65] ont introduit une approche hybride qui consistait à utiliser une combinaison des deux méthodes : la méthode directe dans les zones d'entrée et de sortie du contact et la méthode inverse dans la zone centrale. Un algorithme pratiquement similaire a été aussi présenté par Seabra et Berthe [66]. Bien que cette approche ait permis l'extension de la solution du problème EHD à des contacts

fortement chargés, elle présentait plusieurs inconvénients. En effet, résoudre l'équation de Reynolds en fonction de l'épaisseur de film pour un profil de pression donné requiert la résolution d'une équation cubique qui possède pratiquement trois solutions. Ainsi, il fallait prendre soin de bien choisir la solution appropriée. En plus, la relation employée pour mettre à jour le profil de pression, pour une épaisseur de film donnée, était basée sur l'intuition, son fondement physique n'était pas bien établi.

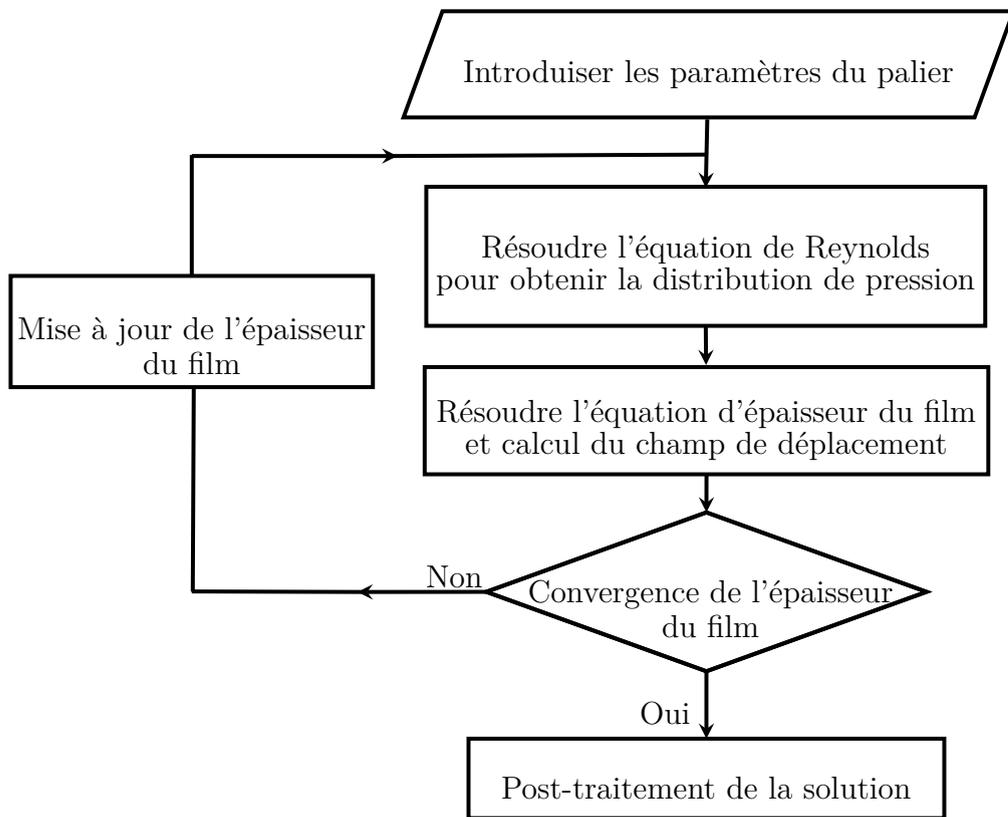


FIGURE 2.9: Diagramme de résolution EHD avec une procédure itérative

Une avancée majeure dans le domaine fut réalisée par Lubrecht [67, 68], qui appliqua les techniques multi-grilles au problème de lubrification EHD en utilisant une méthode directe. Cette technique apporte une nette amélioration au taux de convergence et permet ainsi de réduire les temps de calcul. Elle est basée sur une

certaine compréhension du comportement en convergence des processus itératifs de résolution. En effet, les schémas itératifs réussissent à réduire l'erreur dans la solution tant que cette dernière possède une longueur d'onde du même ordre de grandeur que la taille du maillage. Une réduction encore plus importante des temps de calcul a été réalisée par Brandt et Lubrecht [69] qui introduisirent la technique de Multi-Intégration permettant d'accélérer le processus de calcul intégral des déformations élastiques. Ce travail a été encore amélioré au début des années 90 par Venner [70–72] qui étendit le processus de résolution au cas des contacts fortement chargés en appliquant un schéma de relaxation distributive en ligne. Ce travail fournit une alternative efficace à la méthode inverse pour le cas de contacts fortement chargés et constitua ainsi une base pour les travaux numériques dans le domaine de l'EHD pour les années à venir. Ju et al. [73] introduisirent par exemple la méthode de convolution discrète par transformée de Fourier rapide comme alternative pour le calcul de la déformation élastique des surfaces. Wang et al. [74] prétendent que cette dernière est trois fois plus rapide que la méthode de MultiIntégration.

Les différents travaux cités dans ce paragraphe sont basés sur une discrétisation par différences finies des équations EHD. Bien qu'en général cette méthode limite le processus de discrétisation à des maillages structurés de forme rectangulaire avec des approximations d'ordre faible, c'est la plus utilisée dans la modélisation des problèmes de lubrification. Cela est dû au développement des techniques citées précédemment. Une méthode alternative à laquelle il a été accordé beaucoup moins d'attention en EHD est la méthode des éléments finis [75]. Cette dernière permet l'utilisation de maillages non-réguliers non-structurés avec des approximations d'ordre élevé. Un exemple d'application de cette méthode aux problèmes EHD est fourni dans [76, 77]. Ces auteurs appliquent la méthode directe tout en utilisant une formulation de type Galerkin discontinue afin de stabiliser la solution de contacts linéiques fortement chargés. Malheureusement, l'utilisation d'éléments discontinus mène à des systèmes de plus grande taille. En effet, chaque point de discrétisation peut avoir plusieurs valeurs nodales pour la même variable, degrés de libertés. Hughes et al. [78] ont aussi utilisé la méthode des éléments finis en combinant des approches du 1er et du 2nd ordre de l'équation de Reynolds afin d'obtenir une résolution efficace pour les problèmes de contacts EHD linéiques faiblement et fortement chargés. En fait, l'approche de 1er ordre, qui consiste à écrire l'équation de Reynolds sous forme d'une équation différentielle du 1er ordre, est uniquement stable dans la zone de fortes pressions alors que l'approche de 2nd

ordre est uniquement stable dans la zone de pressions faibles. Ainsi, les auteurs proposent d'utiliser une combinaison de l'approche de 2nd ordre dans les zones d'entrée et de sortie du contact et de celle de 1er ordre dans la zone centrale. Cela mène à un processus de résolution stable indépendamment de la charge appliquée. Enfin, il est important de noter que, puisque l'approche avec couplage faible présentée dans ce paragraphe se base sur une résolution séparée des équations EHD, une perte d'informations est susceptible de se produire durant le processus itératif établi pour coupler leurs différentes solutions. Cette perte d'information est en général compensée par une sévère sous-relaxation, menant ainsi à un faible taux de convergence du schéma itératif global.

b.2 Approche se basant sur la résolution simultanée

Cette approche consiste à résoudre les différentes équations simultanément comme le montre le diagramme de la figure 2.10. Différentes méthodes trouvées dans la littérature pourraient être classées dans cette catégorie. Par exemple, les développements récents en « Computational Fluid Dynamics » (CFD) ou aussi en « Fluide-Structure Interaction » (FSI) ont été appliqués au problème EHD par Hartinger et al. [79] et Yiping et al. [80] respectivement. Ces méthodes sont basées sur une résolution complète des équations de Navier-Stokes couplées aux équations d'élasticité linéaire pour le calcul des déformations élastiques. Cette approche est relativement précise mais présente un inconvénient majeur : les temps de calcul ; un calcul typique d'un contact ponctuel pourrait durer plus d'une semaine avec un maillage relativement grossier. Les résultats confirment que les variations de pression dans l'épaisseur du film peuvent être négligées comparé à celles dans le plan du contact. L'avantage principal de ces méthodes est qu'elles permettent une évaluation exacte des fuites latérales du lubrifiant puisque le champ de vitesses complet de l'écoulement est déterminé. De plus, le champ de contraintes dans les corps solides est aussi obtenu. Cela pourrait s'avérer utile pour une étude en fatigue des composants. Mais, à cause des temps de calculs trop longs, de nos jours et jusqu'à ce que les puissances des machines de calcul deviennent bien plus importantes, ces méthodes demeurent peu adoptées.

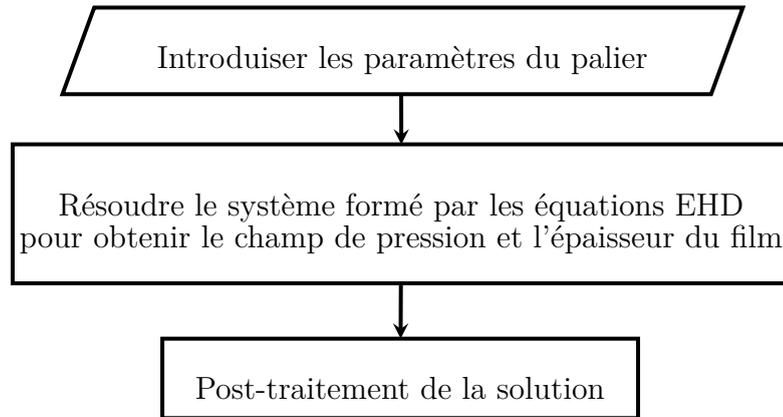


FIGURE 2.10: Diagramme de résolution EHD par une approche de résolution simultanée

Enfin, il est important de noter que, puisque l'approche par couplage fort consiste à résoudre les équations EHD simultanément, aucune perte d'informations ne se produit entre leurs solutions respectives. Ainsi, la sous relaxation n'est plus utile, ce qui explique; en partie; les taux de convergence rapides du processus itératif.

2.5.2 Géométrie et cinématique du palier

La figure 2.11 présente les détails géométriques et cinématiques du palier lisse. R_a , R_c et t_h représentent respectivement les rayons de l'arbre et du coussinet non déformés et l'épaisseur de la couche élastique constituant le revêtement de surface. E et ν étant respectivement le module de Young et le coefficient de Poisson du matériau (revêtement). L'arbre est animé d'un mouvement de rotation de vitesse angulaire ω_a . La charge extérieure W est supposée constante en direction et en module. La direction de la ligne des centres du palier est repérée par l'angle φ dit angle de calage, tel que $\varphi = (\vec{W}, \overrightarrow{O_a O_c})$

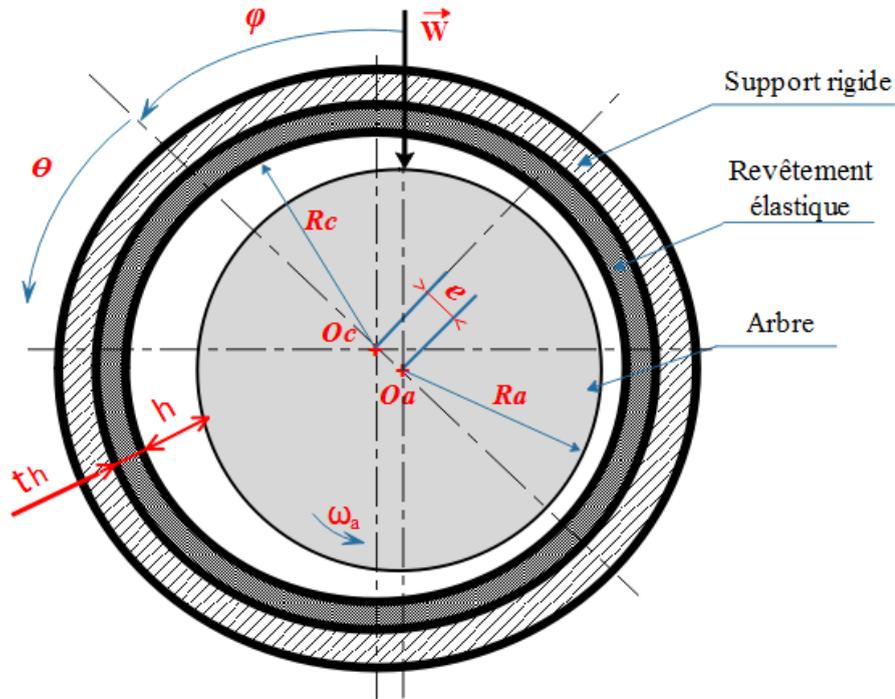


FIGURE 2.11: Section droite d'un palier cylindrique revêtu mono-couche

2.5.3 Épaisseur du film lubrifiant

Les coussinets sont pratiquement constitués de revêtements élastiques qui peuvent être métalliques (alliage antifriction) ou en élastomère (caoutchouc). L'arbre est souvent supposé rigide (indéformable). Le champ de pression hydrodynamique engendré dans le film d'huile par la rotation de l'arbre, peut provoquer des déformations élastiques qui sont de l'ordre de grandeur de l'épaisseur du film.

La prise en considération des déformations élastiques du revêtement de l'alésage conduit à la modification de l'expression de l'épaisseur du film d'huile [39, 40] :

$$h(\theta, z) = h_0(\theta, z) + h_e(\theta, z), \quad (2.56)$$

où :

$h_0(\theta, z)$ est l'épaisseur du film pour le cas d'un palier rigide,

$h_e(\theta, z)$ est la déformation élastique des solides engendrée par les pressions hydrodynamiques dans le film fluide.

La relation (2.56) s'écrit aussi :

$$h(\theta, z) = C(1 + \varepsilon \cos \theta) + U_r(\theta, z), \quad (2.57)$$

où : U_r étant le déplacement radial du coussinet. Si le rapport de l'épaisseur du revêtement au rayon du palier t_h/R est très faible devant 1 ($t_h/R \ll 1$), les déformations radiales sont [39, 40] :

$$U_r(\theta, z) = \left[\frac{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}{1 - \nu} \right] \frac{t_h}{E} P(\theta, z), \quad (2.58)$$

où ν , E et P étant respectivement le coefficient de Poisson, le module de Young du matériau et la pression hydrodynamique.

on remplace l'équation (2.58) dans (2.57) :

$$h(\theta, z) = C(1 + \varepsilon \cos \theta) + \left[\frac{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}{1 - \nu} \right] \frac{t_h}{E} P(\theta, z) \quad (2.59)$$

On peut écrire l'équation (2.59) en forme adimensionnelle en introduisant les paramètres suivants : $\bar{h} = \frac{h}{C}$, $P = \frac{6\mu u R_a \bar{P}}{C^2}$.

$$\bar{h}(\theta, \bar{z}) = (1 + \varepsilon \cos \theta) + \left[\frac{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}{1 - \nu} \right] \frac{6\mu u R_a t_h}{EC^3} \bar{P}(\theta, \bar{z}), \quad (2.60)$$

où bien :

$$\bar{h}(\theta, \bar{z}) = (1 + \varepsilon \cos \theta) + \bar{U}_r(\theta, \bar{z}), \quad (2.61)$$

autrement :

$$\bar{h}(\theta, \bar{z}) = (1 + \varepsilon \cos \theta) + C_0 \cdot \bar{P}(\theta, \bar{z}). \quad (2.62)$$

Tel que :

$$\bar{U}_r(\theta, \bar{z}) = C_0 \cdot \bar{P}(\theta, \bar{z}) = \left[\frac{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}{1 - \nu} \right] \frac{6\mu u R_a t_h}{EC^3} \cdot \bar{P}(\theta, \bar{z}) \quad (2.63)$$

$$C_0 = \left[\frac{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}{1 - \nu} \right] \frac{6\mu u R_a t_h}{EC^3}. \quad (2.64)$$

C_0 : est le coefficient de déformation élastique.

Afin d'assurer la convergence du processus itératif, les déplacements calculés doivent être pondérés avant leur utilisation dans le calcul hydrodynamique. La méthode de sous-relaxation pouvant conduire à une convergence rapide.

$$\begin{cases} U_r^{n+1} = \Omega U_r^{n+1} + (1 - \Omega) U_r^n \\ p(\theta = \theta_s, z) = 0 \\ h^{n+1} = h_0 + U_r^{n+1} \end{cases} \quad (2.65)$$

où U_r^{n+1} et U_r^n sont respectivement les déplacements obtenus aux itérations $k + 1$ et k , Ω étant un coefficient de sous-relaxation compris entre 0 et 1, et h_0 étant l'épaisseur nominale du film avant déformation. Le choix optimum de ce coefficient donne une convergence rapide [39, 40].

En effet, nous avons vu la nécessité d'appliquer l'algorithme de sous-relaxation pour relier les deux parties du programme élasto-hydrodynamique, car ce problème est fortement non linéaire et les déformations élastiques dues au champ de pression seraient parfois supérieures à l'épaisseur du film.

$$er_m = \frac{1}{N_p} \sum_{ij} \left| \frac{P_{i,j}^{n+1} - P_{i,j}^n}{P_{i,j}^{n+1}} \right| \leq eps \quad (2.66)$$

2.6 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté les équations de base qui peuvent être utilisées pour la prédiction du comportement HD et EHD des paliers lisses. Ces équations vont être intégrées par la suite pour calculer la répartition de pression et du champ de déplacements au sein des paliers. On a aussi présenté ; à travers

un survol de la littérature existante ; les principales méthodes numériques employées pour la résolution de ce type de problèmes. Cependant, le constat est que le problème du temps de calcul reste un des inconvénient majeur liées à toutes les méthodes numériques employées. Une conclusion s'impose face à ce constat : l'utilisation d'une méthode de réduction de modèle s'avère plus que primordiale et représente l'un des axes de recherche les plus convoités en ce moment.

Chapitre 3

Proper Generalized Decomposition

Sommaire

3.1	Introduction	47
3.2	Méthodes de réduction de modèle	47
3.2.1	Classification des méthodes de réduction de modèle	48
3.3	Proper Generalized Decomposition	49
3.4	Stratégie de décomposition : exemple d'équation de poisson	49
3.4.1	Construction de la représentation séparée	50
3.4.2	Solution de l'équation de poisson	54
3.5	PGD pour la résolution du problème de la lubrification hydrodynamique	56
3.5.1	Représentation séparée liée à l'équation de Reynolds	56
3.5.2	Construction progressive de la représentation séparée	57
3.5.3	Description algorithmique	62
3.6	PGD pour la résolution du problème de la lubrification élasto-hydrodynamique	64
3.6.1	Formulation PGD du problème EHD	64
3.6.2	Construction de la représentation séparée	65
3.6.3	Description algorithmique	70
3.7	Conclusion	71

3.1 Introduction

Les techniques classiques de discrétisation sont désormais suffisamment robustes pour être utilisées dans l'industrie. Cependant, leur application à des problématiques industrielles nécessite des ressources informatiques toujours plus importantes. Bien que les moyens de calcul actuels permettent de résoudre des modèles à plusieurs centaines de millions d'inconnues, il s'avère aujourd'hui nécessaire de proposer de nouvelles méthodes afin de mieux exploiter les ressources informatiques disponibles. Les méthodes de représentation à variables séparées sont un bon moyen pour atteindre cet objectif. Dans ce chapitre, les principales méthodes de réduction de modèle (ROM) sont présentées de manière générale, en explicitant leurs classifications et leurs domaines d'application avec une étude bibliographique sur les différentes catégories de ROM est donnée.

Nous étudierons tout d'abord le cas classique de l'équation de Poisson par la méthode PGD. En effet l'équation de Poisson fait partie des problèmes classiques que l'on retrouve dans la résolution de beaucoup de problèmes, puis on applique la méthode PGD pour la formulation de l'équation de Reynolds pour la résolution des problèmes de lubrification hydrodynamique et élastohydrodynamique.

3.2 Méthodes de réduction de modèle

Le principe des méthodes de réduction consiste en un premier temps à construire une base réduite de taille N bien inférieure au nombre de degrés de liberté du problème à résoudre et, dans un second temps à projeter le problème sur cette base réduite de façon à ramener le problème initial à la résolution d'un système d'équations différentielles couplées de taille N , dont la résolution est très rapide. Selon la méthode de réduction utilisée, le principe de construction de la base sera différent. Ces méthodes sont introduites dans les années 1980 pour la résolution des problèmes non-linéaires de mécanique [81], elles ont été récemment généralisées pour les problèmes multi-dimensionnels [82–85].

Ces méthodes de réduction de modèle (ou ROM pour 'Reduced Order Models') peuvent être classées en deux catégories (figure 3.1) : les méthodes de réduction a posteriori où une connaissance préalable sur la solution du problème est nécessaire

et les méthodes de réduction a priori qui nécessite aucune connaissance sur la solution.

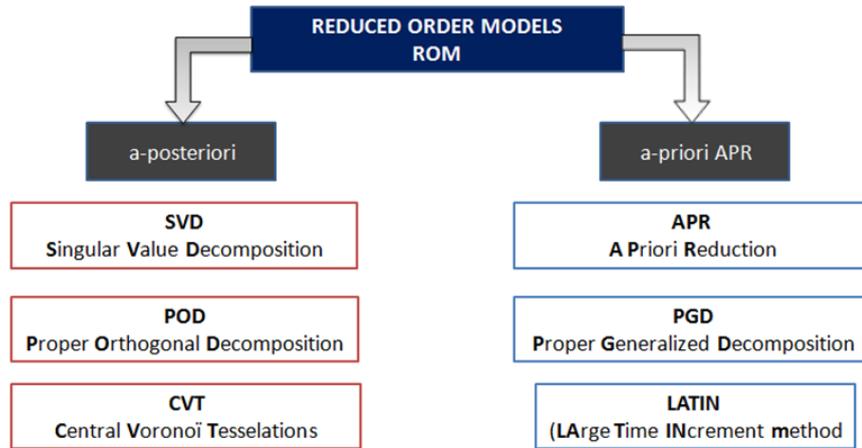


FIGURE 3.1: Classification des méthodes de réduction de modèle

3.2.1 Classification des méthodes de réduction de modèle

a. Méthodes de réduction de modèle a posteriori

Les méthodes de réduction de modèle a posteriori nécessitent une connaissance préalable sur la solution pour construire la base réduite. Les plus classiquement utilisées sont la Décomposition Orthogonale aux valeurs Propres (POD - Proper Orthogonal Decomposition) et la Décomposition en Valeurs Singulières (SVD - Singular Value Decomposition). La POD [86, 87], initialement développée pour l'analyse de données ou le traitement des images, consiste à compacter les données [86]. La POD est aussi utilisée dans un grand nombre de domaines et en particulier la mécanique des fluides [88]. Cette méthode peut être assimilée à la décomposition de Karhunen-Loeve [89, 90] dans le cas d'espaces de dimensions infinies ou encore à l'Analyse en Composantes Principales (PCA – Principal Component Analysis) liée à la SVD dans le cas où la dimension est finie.

b. Méthodes de réduction de modèle a priori

Pour les méthodes de réduction de modèle a posteriori, des informations initiales sur la solution recherchée doivent être connues. De plus, elles influencent fortement

les résultats et peuvent mener lorsqu'elles ne sont pas optimales à une inefficacité de la POD pour prédire la solution. Pour pallier ce principal défaut, un certain nombre de méthodes de réduction de modèle a priori, c'est-à-dire aucune information initiale n'est nécessaire, ont vu le jour. Nous allons maintenant présenter trois de ces méthodes. Il s'agit de la méthode APR (A Priori Reduction), la méthode LATIN et la méthode PGD. La première se différencie plus particulièrement des deux autres car elle est incrémentale alors que, comme nous l'avons déjà mentionné, les deux dernières sont non incrémentales.

3.3 Proper Generalized Decomposition

La méthode PGD (Proper Generalized Decomposition) est une méthode de réduction de modèle de type a-priori qui consiste à rechercher la solution d'une EDP de manière itérative sous forme séparée. La PGD est actuellement utilisée dans un grand nombre de domaines et beaucoup de travaux de recherche. Pour plus de détails, le lecteur pourra se référer à la revue concernant la PGD faite par Chinesta et al. en 2011[91]. Concernant les applications récentes et les différents challenges, le lecteur pourra compléter avec les articles suivants [92, 93].

3.4 Stratégie de décomposition : exemple d'équation de poisson

Nous étudierons tout d'abord le cas classique de l'équation de Poisson stationnaire en deux dimensions. En effet l'équation de Poisson fait partie des problèmes classiques que l'on retrouve dans la résolution de beaucoup de problèmes.

Le problème de Poisson est défini sous la forme suivante :

$$\Delta u(x, y) = f(x, y), \tag{3.1}$$

où $f(x, y)$ est le terme source considéré constant dans le domaine Ω . Cette équation (3.1) est définie dans un domaine rectangulaire $\Omega = \Omega_x \times \Omega_y = (0, L) \times (0, H)$.

Nous imposons les conditions aux limites de type "Dirichlet" pour le champ $u(x, y)$ qui s'annulent aux frontières du domaine Γ .

Pour toutes les fonctions tests appropriées u^* , la forme pondérée de l'équation (3.1) est la suivante :

$$\int_{\Omega_x \times \Omega_y} u^* \cdot (\Delta u - f) dx \cdot dy = 0, \quad (3.2)$$

où avec plus de détails :

$$\int_{\Omega_x \times \Omega_y} u^* \cdot \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - f \right) dx \cdot dy = 0. \quad (3.3)$$

Notre but est d'obtenir une solution PGD approximative à l'équation (3.1) sous la forme séparée suivante :

$$u(x, y) = \sum_{i=1}^N X_i(x) \cdot Y_i(y). \quad (3.4)$$

Dans le but de trouver une approximation PGD dans une forme séparée de l'équation (3.1), on doit calculer chaque terme à part, ensuite enrichir l'approximation PGD jusqu'à satisfaction du critère de convergence.

3.4.1 Construction de la représentation séparée

A chaque étape d'enrichissement n ($n \geq 1$), nous avons déjà calculé les $n - 1$ premiers termes de l'approximation PGD de l'équation (3.4) :

$$u^{n-1}(x, y) = \sum_{i=1}^{n-1} X_i(x) \cdot Y_i(y). \quad (3.5)$$

Nous devons maintenant calculer le prochain terme $X_n(x) \cdot Y_n(y)$ pour obtenir la solution PGD enrichie

$$u^n(x, y) = u^{n-1}(x, y) + X_n(x) \cdot Y_n(y) = \sum_{i=1}^{n-1} X_i(x) \cdot Y_i(y) + X_n(x) \cdot Y_n(y). \quad (3.6)$$

Les deux fonctions $X_n(x)$ et $Y_n(y)$ sont inconnues à l'étape d'enrichissement en cours n , et elles apparaissent sous la forme d'un produit. Le problème résultant est donc non-linéaire, un schéma itératif est nécessaire. Nous utiliserons l'indice q pour désigner une itération donnée.

A l'étape d'enrichissement n , l'approximation PGD $P^{n,q}$ obtenue à l'itération q est la suivante

$$u^{n,q}(x, y) = u^{n-1}(x, y) + X_n^q(x) \cdot Y_n^q(y). \quad (3.7)$$

Le schéma itératif le plus simple est la stratégie des directions alternées qui calcule $X_n^q(x)$ à partir de $Y_n^{q-1}(y)$, et ensuite $Y_n^q(y)$ à partir de $X_n^q(x)$. Une valeur initiale arbitraire $Y_n^0(y)$ est spécifiée pour lancer le processus itératif. Les itérations non linéaires continuent jusqu'à atteindre un point fixe dans une tolérance spécifiée par l'utilisateur ξ , c'est-à-dire

$$\frac{\|X_n^q(x) \cdot Y_n^q(y) - X_n^{q-1}(x) \cdot Y_n^{q-1}(y)\|}{\|X_n^{q-1}(x) \cdot Y_n^{q-1}(y)\|} < \xi, \quad (3.8)$$

où $\|\cdot\|$ est la norme.

L'étape d'enrichissement n se termine donc par les affectations $X_n(x) \leftarrow X_n^q(x)$ et $Y_n(y) \leftarrow Y_n^q(y)$.

Le processus d'enrichissement lui-même s'arrête lorsqu'une évaluation appropriée de l'erreur est effectuée $\kappa(n)$ devient suffisamment petite, c'est-à-dire $\kappa(n) < \tilde{\xi}$.

$$\kappa(n) = \frac{\|X_n(x) \cdot Y_n(y)\|}{\|X_1(x) \cdot Y_1(y)\|}. \quad (3.9)$$

Nous présentons maintenant de façon plus détaillée une itération d'une direction alternée pour une étape d'enrichissement donnée.

Stratégie des directions alternées

Chaque itération du schéma des directions alternées se réalise en deux étapes :

1. Calcul de $X_n^q(x)$ à partir de $Y_n^{q-1}(y)$:

Dans ce cas, l'approximation se définit comme suit

$$u^{n,q}(x, y) = \sum_{i=1}^{n-1} X_i(x) \cdot Y_i(y) + X_n^q(x) \cdot Y_n^{q-1}(y), \quad (3.10)$$

où toutes les fonctions sont connues sauf $X_n^q(x)$. Le choix le plus simple de la fonction de pondération u^* dans la formulation pondérée (3.2) est le suivant

$$u^*(x, y) = X_n^*(x) \cdot Y_n^{q-1}(y), \quad (3.11)$$

ce qui revient à choisir la forme pondérée de Galerkin de l'équation de Poisson.

En injectant les équations (3.10) et (3.11) dans l'équation (3.2), on obtient

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Omega_x \times \Omega_y} X_n^* \cdot Y_n^{q-1} \left(\frac{\partial^2 X_n^q}{\partial x^2} \cdot Y_n^{q-1} + X_n^q \frac{\partial^2 Y_n^{q-1}}{\partial y^2} \right) dx \cdot dy \\
 &= - \int_{\Omega_x \times \Omega_y} X_n^* \cdot Y_n^{q-1} \cdot \sum_{i=1}^{n-1} X_i \left(\frac{\partial^2 X_i}{\partial x^2} \cdot Y_i + X_i \frac{\partial^2 Y_i}{\partial y^2} \right) dx \\
 & \quad \cdot dy + \int_{\Omega_x \times \Omega_y} X_n^* \cdot Y_n^{q-1} \cdot f dx \cdot dy.
 \end{aligned} \tag{3.12}$$

Puisque toutes les fonctions de y sont connues dans l'expression ci-dessus, nous pouvons calculer les intégrales unidimensionnelles suivantes sur Ω_y :

$$\begin{cases} \alpha^x = \int_{\Omega_y} (Y_n^{q-1}(y))^2 dy \\ \beta^x = \int_{\Omega_y} Y_n^{q-1}(y) \cdot \frac{d^2 Y_n^{q-1}(y)}{dy^2} dy \\ \gamma_i^x = \int_{\Omega_y} Y_n^{q-1}(y) \cdot Y_i(y) dy \\ \delta_i^x = \int_{\Omega_y} Y_n^{q-1}(y) \cdot \frac{d^2 Y_i(y)}{dy^2} dy \\ \zeta^x = \int_{\Omega_y} Y_n^{q-1}(y) \cdot f dy \end{cases} . \tag{3.13}$$

L'équation (3.12) devient :

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Omega_x} X_n^* \cdot \left(\alpha^x \cdot \frac{d^2 X_n^q}{dx^2} + \beta^x \cdot X_n^q \right) dx = \\
 & - \int_{\Omega_x} X_n^* \cdot \sum_{i=1}^{n-1} \left(\gamma_i^x \cdot \frac{d^2 X_i}{dx^2} + \delta_i^x \cdot X_i \right) \cdot dx + \int_{\Omega_x} X_n^* \cdot \zeta^x \cdot dx,
 \end{aligned} \tag{3.14}$$

Nous avons ainsi obtenu la forme pondérée d'un problème unidimensionnel défini dans Ω_x qui peut être résolu en utilisant n'importe quelle technique de discrétisation fonctionnant sur la forme faible du modèle (méthode des éléments finis, volumes finis) pour obtenir la fonction X_n^q que nous recherchons.

$$\alpha^x \cdot \frac{d^2 X_n^q}{dx^2} + \beta^x \cdot X_n^q = - \sum_{i=1}^{n-1} \left(\gamma_i^x \cdot \frac{d^2 X_i}{dx^2} + \delta_i^x \cdot X_i \right) + \zeta^x. \tag{3.15}$$

Cela pourrait être résolu numériquement par n'importe quelle méthode numérique adaptée (Différences Finies, Techniques Pseudo-Spectrales,... etc). La forme forte (3.15) est une équation différentielle ordinaire de second ordre pour X_n^q . Avec des

formulations fortes ou résiduelles pondérées, les conditions limites homogènes de Dirichlet $X_n^q(x=0) = X_n^q(x=L) = 0$ sont facilement spécifiées.

Une fois $X_n^q(x)$ calculé, on passe à la deuxième étape de l'itération q .

2. Calcul de $Y_n^q(y)$ à partir de la valeur de $X_n^q(x)$ obtenue :

La procédure est exactement la même que celle que nous avons suivie précédemment. En effet, nous échangeons simplement les rôles joués par toutes les fonctions correspondantes de x et y .

L'approximation actuelle de la PGD est la suivante

$$u^{n,q}(x, y) = \sum_{i=1}^{n-1} X_i(x) \cdot Y_i(y) + X_n^q(x) \cdot Y_n^q(y), \quad (3.16)$$

où toutes les fonctions sont connues sauf $Y_n^q(y)$.

La formulation Galerkin de l'équation (3.2) est obtenue avec le choix particulier

$$u^*(x, y) = X_n^q(x) \cdot Y_n^*(y). \quad (3.17)$$

Ensuite, en introduisant les équations (3.16) et (3.17) dans l'équation (3.2), on obtient

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_x \times \Omega_y} X_n^q \cdot Y_n^* \left(\frac{\partial^2 X_n^q}{\partial x^2} \cdot Y_n^q + X_n^q \frac{\partial^2 Y_n^q}{\partial y^2} \right) dx \cdot dy \\ &= \int_{\Omega_x \times \Omega_y} X_n^q \cdot Y_n^* \cdot \sum_{i=1}^{n-1} X_i \left(\frac{\partial^2 X_i}{\partial x^2} \cdot Y_i + X_i \frac{\partial^2 Y_i}{\partial y^2} \right) dx \cdot dy + \int_{\Omega_x \times \Omega_y} X_n^q \cdot Y_n^* \cdot f dx \cdot dy, \end{aligned} \quad (3.18)$$

Comme toutes les fonctions de x sont connues, les intégrales sur Ω_x peuvent être calculées pour obtenir

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha^y = \int_{\Omega_x} (X_n^q(x))^2 dx \\ \beta^y = \int_{\Omega_x} X_n^q(x) \cdot \frac{d^2 X_n^q(x)}{dx^2} dx \\ \gamma_i^y = \int_{\Omega_x} X_n^q(x) \cdot X_i(x) dx \\ \delta_i^y = \int_{\Omega_x} X_n^q(x) \cdot \frac{d^2 X_i(x)}{dx^2} dx \\ \zeta^y = \int_{\Omega_x} X_n^q(x) \cdot f dx \end{array} \right. \quad (3.19)$$

L'équation (3.37) devient

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_y} Y_n^* \cdot \left(\alpha^y \cdot \frac{d^2 Y_n^q}{dy^2} + \beta^y \cdot X_n^q \right) dy \\ &= \int_{\Omega_y} Y_n^* \cdot \sum_{i=1}^{n-1} \left(\gamma_i^y \cdot \frac{d^2 Y_i}{dy^2} + \delta_i^y \cdot Y_i \right) \cdot dy + \int_{\Omega_y} Y_n^* \cdot \zeta^y \cdot dy. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Comme précédemment, nous avons ainsi obtenu la forme pondérée d'un problème elliptique défini sur Ω_y dont la solution est la fonction $Y_n^q(x)$. Alternativement, la formulation forte correspondante à ce problème unidimensionnel se définit comme suit

$$\alpha^y \cdot \frac{d^2 Y_n^q}{dy^2} + \beta^y \cdot X_n^q = - \sum_{i=1}^{n-1} \left(\gamma_i^y \cdot \frac{d^2 Y_i}{dy^2} + \delta_i^y \cdot Y_i \right) + \zeta^y. \quad (3.21)$$

Il s'agit là encore d'une équation différentielle ordinaire du deuxième ordre, étant donné que l'équation de Poisson originale implique des dérivés du deuxième ordre du champ inconnu par rapport à y . Dans le cas des formulations à la fois pondérées et fortes, les conditions limites de Dirichlet homogènes $Y_n^q(y=0) = Y_n^q(y=H) = 0$ sont facilement spécifiées.

Nous avons donc terminé l'itération q à l'étape d'enrichissement n .

Il est important de se rendre compte que l'équation de Poisson bidimensionnelle initiale définie sur $\Omega = \Omega_x \times \Omega_y$ a été transformée dans le cadre de la PGD en une série de problèmes unidimensionnels découplés formulés en Ω_x et Ω_y .

3.4.2 Solution de l'équation de poisson

Les solutions séparées de l'équation de poisson ainsi que la solution globale sont représentées dans les figures 3.2, 3.3 et 3.4.

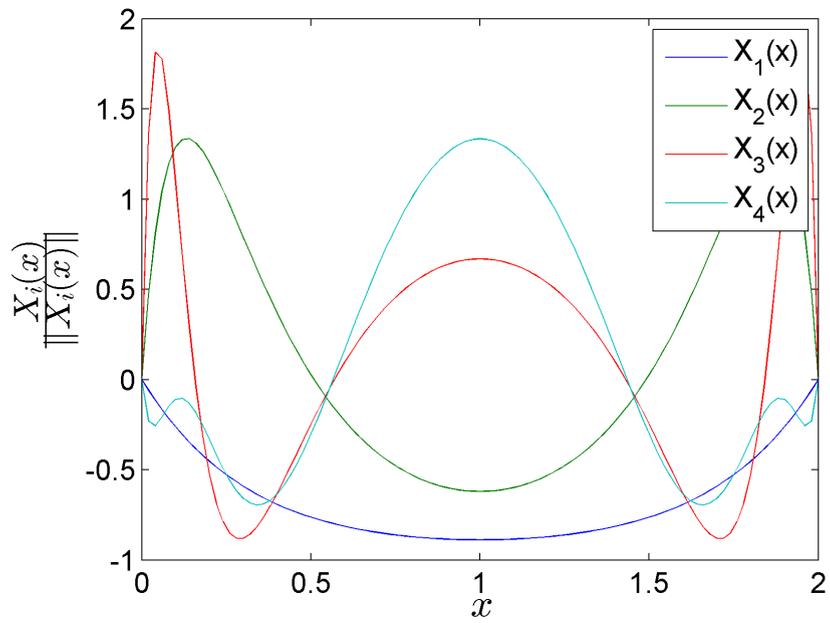


FIGURE 3.2: Fonctions normalisées $X_i(x)$ pour $i = 1, \dots, 4$ produit par la solution PGD

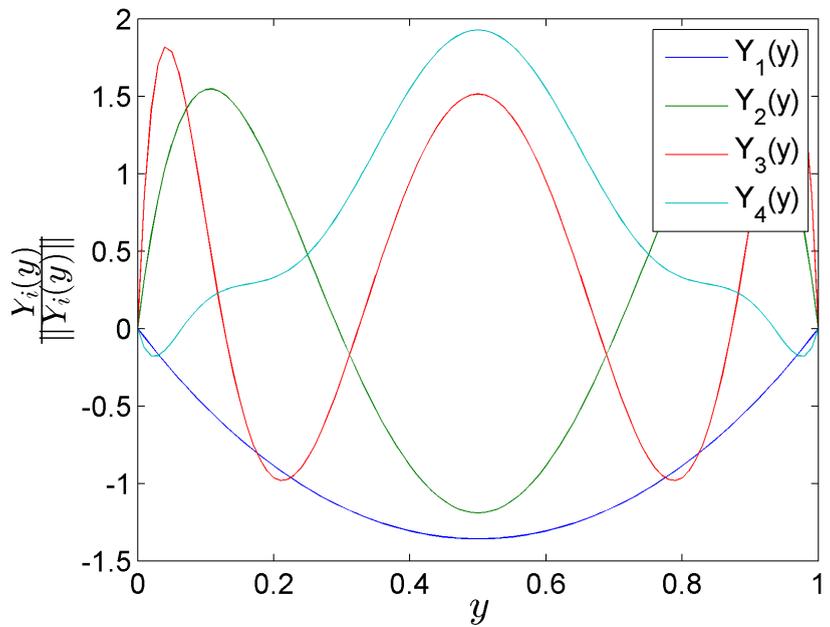


FIGURE 3.3: Fonctions normalisées $Y_i(y)$ pour $i = 1, \dots, 4$ produit par la solution PGD

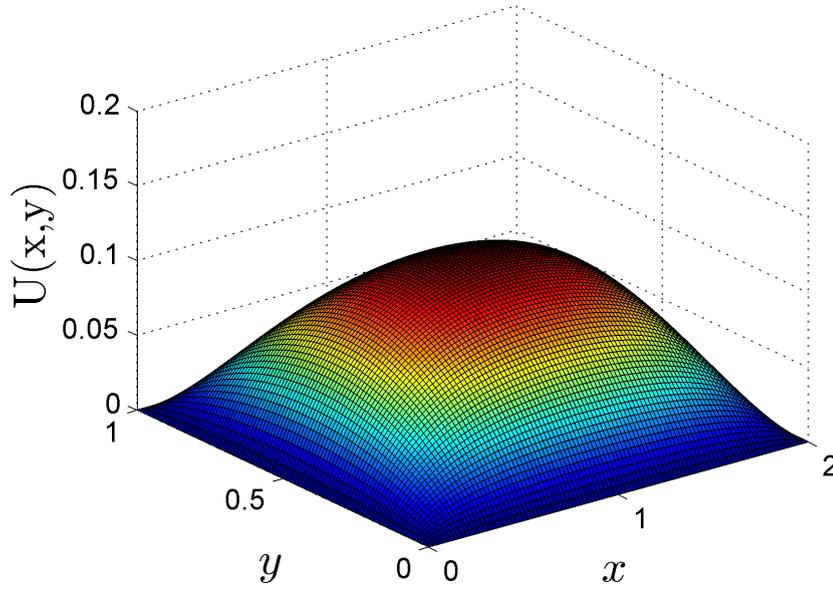


FIGURE 3.4: Solution reconstituée de PGD

3.5 PGD pour la résolution du problème de la lubrification hydrodynamique

3.5.1 Représentation séparée liée à l'équation de Reynolds

Pour analyser le comportement du fluide lubrifiant, l'équation de Reynolds (2.25) est formulée par la méthode PGD pour trouver les différents paramètres comme la distribution de pression, la charge qui peut supporter le contact et le couple de frottement etc.

Considérons la solution de l'équation de Reynolds (2.25) dans un domaine rectangulaire bidimensionnel $\Omega = \Omega_\theta \times \Omega_z = (0, 2\pi) \times (-L/2, L/2)$.

Pour toutes les fonctions tests appropriées P^* , la forme pondérée de l'équation (2.25) est la suivante :

$$\int_{\Omega_\theta \times \Omega_z} P^* \left[\frac{3}{hR_a^2} \frac{dh}{d\theta} \frac{\partial P}{\partial \theta} + \frac{1}{R_a^2} \frac{\partial^2 P}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} - 6 \frac{\mu\omega dh}{h^3 d\theta} \right] d\theta dz = 0. \quad (3.22)$$

Notre but est d'obtenir une solution PGD approximative à l'équation (2.25) sous la forme séparée suivante :

$$P(\theta, z) = \sum_{i=1}^N X_i(\theta) \cdot Y_i(z), \quad (3.23)$$

Dans le but de trouver une approximation PGD dans une forme séparée de l'équation (2.25), on doit calculer chaque terme à part, ensuite enrichir l'approximation PGD jusqu'à satisfaction du critère de convergence.

3.5.2 Construction progressive de la représentation séparée

A chaque étape d'enrichissement n ($n \geq 1$), nous avons déjà calculé les $n - 1$ premiers termes de l'approximation PGD de l'équation (3.23) :

$$P^{n-1}(\theta, z) = \sum_{i=1}^{n-1} X_i(\theta) \cdot Y_i(z). \quad (3.24)$$

Nous devons maintenant calculer le prochain terme $X_n(\theta) \cdot Y_n(z)$ pour obtenir la solution PGD enrichie

$$P^n(\theta, z) = P^{n-1}(\theta, z) + X_n(\theta) \cdot Y_n(z) = \sum_{i=1}^{n-1} X_i(\theta) \cdot Y_i(z) + X_n(\theta) \cdot Y_n(z). \quad (3.25)$$

les deux fonctions $X_n(\theta) \cdot Y_n(z)$ sont inconnues à l'étape d'enrichissement en cours n , et elles apparaissent sous la forme d'un produit. Le problème résultant est donc non-linéaire, un schéma itératif est nécessaire. Nous utiliserons l'indice q pour désigner une itération donnée.

A l'étape d'enrichissement n , l'approximation PGD $P^{n,q}$ obtenue à l'itération q est la suivante

$$P^{n,q}(\theta, z) = P^{n-1}(\theta, z) + X_n^q(\theta) \cdot Y_n^q(z). \quad (3.26)$$

Le schéma itératif le plus simple est la stratégie des directions alternées qui calcule $X_n^q(\theta)$ à partir de $Y_n^{q-1}(z)$, et ensuite $Y_n^q(z)$ à partir de $X_n^q(\theta)$. Une valeur initiale arbitraire $Y_n^0(z)$ est spécifiée pour lancer le processus itératif. Les itérations non linéaires continuent jusqu'à atteindre un point fixe dans une tolérance spécifiée

par l'utilisateur ξ , c'est-à-dire

$$\frac{\|X_n^q(\theta) \cdot Y_n^q(z) - X_n^{q-1}(\theta) \cdot Y_n^{q-1}(z)\|_{L^2(\Omega)}}{\|X_n^{q-1}(\theta) \cdot Y_n^{q-1}(z)\|_{L^2(\Omega)}} < \xi. \quad (3.27)$$

L'étape d'enrichissement n se termine donc par les affectations $X_n(\theta) \leftarrow X_n^q(\theta)$ et $Y_n(z) \leftarrow Y_n^q(z)$. Le critère d'arrêt correspondant est basé sur la norme (L^2) du mode n par rapport à la norme du premier mode.

Le processus d'enrichissement lui-même s'arrête lorsqu'une évaluation appropriée de l'erreur est effectuée $\kappa(n)$ devient suffisamment petite, c'est-à-dire $\kappa(n) < \tilde{\xi}$.

$$\kappa(n) = \frac{\|X_n(\theta) \cdot Y_n(z)\|_{L^2(\Omega)}}{\|X_1(\theta) \cdot Y_1(z)\|_{L^2(\Omega)}}. \quad (3.28)$$

Nous présentons maintenant de façon plus détaillée une itération d'une direction alternée pour une étape d'enrichissement donnée.

Stratégie des directions alternées

Chaque itération du schéma des directions alternées se réalise en deux étapes :

1. Calcul de $X_n^q(\theta)$ à partir de $Y_n^{q-1}(z)$:

Dans ce cas, l'approximation se définit comme suit

$$P^{n,q}(\theta, z) = \sum_{i=1}^{n-1} X_i(\theta) \cdot Y_i(z) + X_n^q(\theta) \cdot Y_n^{q-1}(z), \quad (3.29)$$

où toutes les fonctions sont connues sauf $X_n^q(\theta)$. Le choix le plus simple de la fonction de pondération P^* dans la formulation pondérée (3.22) est le suivant

$$P^*(\theta, z) = X_n^*(\theta) \cdot Y_n^{q-1}(z). \quad (3.30)$$

En injectant les équations (3.29) et (3.30) dans l'équation (3.22), on obtient

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Omega_\theta \times \Omega_z} X_n^*(\theta) \cdot Y_n^{q-1}(z) \cdot G_1 \cdot \frac{dX_n^q(\theta)}{d\theta} \cdot Y_n^{q-1}(z) \cdot d\theta dz \\
 & + \frac{1}{R_a^2} \int_{\Omega_\theta \times \Omega_z} X_n^*(\theta) \cdot Y_n^{q-1}(z) \cdot \frac{d^2 X_n^q(\theta)}{d\theta^2} \cdot Y_n^{q-1}(z) \cdot d\theta dz \\
 & + \int_{\Omega_\theta \times \Omega_z} X_n^*(\theta) \cdot Y_n^{q-1}(z) \cdot X_n^q(\theta) \cdot \frac{d^2 Y_n^{q-1}(z)}{dz^2} \cdot d\theta dz = \\
 & - \int_{\Omega_\theta \times \Omega_z} X_n^*(\theta) \cdot Y_n^{q-1}(z) \cdot G_1 \cdot \sum_{i=1}^n \frac{dX_i(\theta)}{d\theta} \cdot Y_i(z) \cdot d\theta dz \quad (3.31) \\
 & - \frac{1}{R_a^2} \int_{\Omega_\theta \times \Omega_z} X_n^*(\theta) \cdot Y_n^{q-1}(z) \cdot \sum_{i=1}^n \frac{d^2 X_i(\theta)}{d\theta^2} \cdot Y_i(z) \cdot d\theta dz \\
 & - \int_{\Omega_\theta \times \Omega_z} X_n^*(\theta) \cdot Y_n^{q-1}(z) \cdot \sum_{i=1}^n X_i(\theta) \cdot \frac{d^2 Y_i(z)}{dz^2} \cdot d\theta dz \\
 & + \int_{\Omega_\theta \times \Omega_z} X_n^*(\theta) \cdot Y_n^{q-1}(z) \cdot G_2 \cdot d\theta dz,
 \end{aligned}$$

avec $G_1 = \frac{3}{hR_a^2} \frac{dh}{d\theta}$ et $G_2 = \frac{6\mu wd h}{h^3 \cdot d\theta}$.

Puisque toutes les fonctions de y sont connues dans l'expression ci-dessus, nous pouvons calculer les intégrales unidimensionnelles suivantes sur Ω_z :

$$\begin{cases} \alpha^\theta = \int_{\Omega_z} (Y_n^{q-1}(z))^2 dz \\ \beta^\theta = \int_{\Omega_z} Y_n^{q-1}(z) \cdot \frac{d^2 Y_i(z)}{dz^2} dz \\ \gamma_i^\theta = \int_{\Omega_z} Y_n^{q-1}(z) \cdot Y_i(z) dz \\ \delta_i^\theta = \int_{\Omega_z} Y_n^{q-1}(z) \cdot \frac{d^2 Y_i(z)}{dz^2} dz \\ \zeta^\theta = \int_{\Omega_z} Y_n^{q-1}(z) \cdot G_2 dz \end{cases} \quad (3.32)$$

L'équation (3.31) se réduit à :

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Omega_\theta} X_n^* \cdot \alpha^\theta \cdot G_1 \frac{dX_n^q(\theta)}{d\theta} \cdot d\theta + \frac{1}{Ra^2} \int_{\Omega_\theta} X_n^* \cdot \alpha^\theta \cdot \frac{d^2 X_n^q(\theta)}{d\theta^2} \cdot d\theta + \sum_{i=1}^{n-1} X_i(\theta) \frac{d^2 Y_i(z)}{dz^2} \cdot d\theta \\
 & + \int_{\Omega_\theta} X_n^* \cdot \beta^\theta \cdot X_n^q \cdot d\theta = - \int_{\Omega_\theta} X_n^* \cdot G_1 \cdot \sum_{i=1}^{n-1} \left(\gamma_i^\theta \frac{dX_i(\theta)}{d\theta} \right) \cdot d\theta \\
 & - \frac{1}{Ra^2} \int_{\Omega_\theta} X_n^* \cdot \sum_{i=1}^{n-1} \left(\gamma_i^\theta \frac{d^2 X_i(\theta)}{d\theta^2} \right) \cdot d\theta - \int_{\Omega_\theta} X_n^* \cdot \sum_{i=1}^{n-1} \left(\delta_i^\theta X_i(\theta) \right) \cdot d\theta + \int_{\Omega_\theta} X_n^* \cdot \zeta^\theta \cdot d\theta. \quad (3.33)
 \end{aligned}$$

Nous avons ainsi obtenu la forme pondérée d'un problème unidimensionnel défini dans Ω_θ qui peut être résolu en utilisant n'importe quelle technique de discrétisation fonctionnant sur la forme faible du modèle (méthode des éléments finis,

volumes finis) pour obtenir la fonction X_n^q que nous recherchons.

$$\begin{aligned} & \alpha^\theta \cdot G_1 \cdot \frac{dX_n^q(\theta)}{d\theta} + \frac{1}{R_a^2} \cdot \alpha^\theta \cdot \frac{d^2 X_n^q(\theta)}{d\theta^2} + \beta^\theta \cdot X_n^q \\ & = -G_1 \cdot \sum_{i=1}^{n-1} \gamma_i^\theta \cdot \frac{dX_i(\theta)}{d\theta} - \frac{1}{R_a^2} \cdot \sum_{i=1}^{n-1} \gamma_i^\theta \cdot \frac{d^2 X_i(\theta)}{d\theta^2} - \sum_{i=1}^{n-1} \delta_i^\theta \cdot X_i(\theta) + \zeta^\theta, \end{aligned} \quad (3.34)$$

Cela pourrait être résolu numériquement par n'importe quelle méthode numérique adaptée (Différences Finies, Techniques Pseudo-Spectrales,... etc). La forme forte (3.34) est une équation différentielle ordinaire de second ordre pour X_n^q .

Nous avons donc calculé $X_n^q(\theta)$, on passe à la deuxième étape de l'itération q .

2. Calcul de $Y_n^q(z)$ à partir de la valeur de $X_n^q(\theta)$ obtenue :

La procédure est exactement la même que celle que nous avons suivie précédemment. En effet, nous échangeons simplement les rôles joués par toutes les fonctions correspondantes de θ et z .

L'approximation actuelle de la PGD est la suivante

$$P^{n,q}(\theta, z) = \sum_{i=1}^{n-1} X_i(\theta) \cdot Y_i(z) + X_n^q(\theta) \cdot Y_n^q(z), \quad (3.35)$$

où toutes les fonctions sont connues sauf $Y_n^q(z)$.

La formulation Galerkin de l'équation (3.22) est obtenue avec le choix particulier

$$P^*(\theta, z) = X_n^q(\theta) \cdot Y_n^*(z). \quad (3.36)$$

Ensuite, en introduisant les équations (3.35) et (3.36) dans l'équation (3.22), on obtient

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Omega_\theta \times \Omega_z} X_n^q(\theta).Y_n^*(z).G_1.\frac{dX_n^q(\theta)}{d\theta}.Y_n^q(z).d\theta dz \\
 & + \frac{1}{R_a^2} \int_{\Omega_\theta \times \Omega_z} X_n^q(\theta).Y_n^*(z).\frac{d^2 X_n^q(\theta)}{d\theta^2}.Y_n^q(z).d\theta dz \\
 & + \int_{\Omega_\theta \times \Omega_z} X_n^q(\theta).Y_n^*(z).\frac{d^2 Y_n^q(z)}{dz^2}.X_n^q(\theta).d\theta dz = \\
 & - \int_{\Omega_\theta \times \Omega_z} X_n^q(\theta).Y_n^*(z).G_1.\sum_{i=1}^{n-1} \frac{dX_i(\theta)}{d\theta}.Y_i(z)d\theta dz \\
 & - \frac{1}{R_a^2} \int_{\Omega_\theta \times \Omega_z} X_n^q(\theta).Y_n^*(z).\frac{d^2 X_i(\theta)}{d\theta^2}.Y_i(z).d\theta dz \\
 & - \int_{\Omega_\theta \times \Omega_z} X_n^q(\theta).Y_n^*(z).\sum_{i=1}^{n-1} \frac{d^2 Y_i(z)}{dz^2}.X_i(\theta).d\theta dz + \int_{\Omega_\theta \times \Omega_z} X_n^q(\theta).Y_n^*(z).G_2.d\theta dz,
 \end{aligned} \tag{3.37}$$

Avec $G_1 = \frac{3}{hR_a^2} \frac{dh}{d\theta}$ and $G_2 = \frac{6\mu wd h}{h^3 d\theta}$.

Comme toutes les fonctions de θ sont connues, les intégrales sur Ω_θ peuvent être calculées pour obtenir

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \alpha^z = \int_{\Omega_\theta} (X_n^q(\theta))^2 d\theta \\
 \psi^z = \int_{\Omega_\theta} X_n^q(\theta) \frac{dX_n^q(\theta)}{d\theta} d\theta \\
 \beta^z = \int_{\Omega_\theta} X_n^q(\theta) \cdot \frac{d^2 X_n^q(\theta)}{d\theta^2} d\theta \\
 \gamma_i^z = \int_{\Omega_\theta} X_n^q(\theta) \cdot X_i(\theta) d\theta \\
 \delta_i^z = \int_{\Omega_\theta} X_n^q(\theta) \cdot \frac{d^2 X_i(\theta)}{d\theta^2} d\theta \\
 \phi_i^z = \int_{\Omega_\theta} X_n^q(\theta) \cdot \frac{dX_i(\theta)}{d\theta} d\theta \\
 \zeta^z = \int_{\Omega_\theta} X_n^q(\theta) \cdot G_2 d\theta.
 \end{array} \right. \tag{3.38}$$

L'équation (3.37) devient

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Omega_z} \psi^z.Y_n^*(z).G_1.Y_n^q(z).dz + \frac{1}{R_a^2} \int_{\Omega_z} \beta^z.Y_n^*(z).Y_n^q(z).dz + \int_{\Omega_z} \alpha^z.Y_n^*(z).\frac{d^2 Y_n^q(z)}{dz^2}.dz \\
 & = - \int_{\Omega_z} Y_n^*(z).G_1.\sum_{i=1}^{n-1} \phi_i^z.Y_i(z).dz - \frac{1}{R_a^2} \int_{\Omega_z} Y_n^*(z).\sum_{i=1}^{n-1} \delta_i^z.Y_i(z).dz \\
 & - \int_{\Omega_z} Y_n^*(z).\sum_{i=1}^{n-1} \gamma_i^z \frac{d^2 Y_i(z)}{dz^2}.dz + \int_{\Omega_z} Y_n^*(z).\zeta^z.dz.
 \end{aligned} \tag{3.39}$$

Comme précédemment, nous avons ainsi obtenu la forme pondérée d'un problème elliptique défini sur Ω_z dont la solution est la fonction $Y_n^q(z)$. Alternativement, la formulation forte correspondante à ce problème unidimensionnel se définit comme suit

$$\begin{aligned} & \psi^z \cdot G_1 \cdot Y_n^q(z) + \frac{1}{R_a^2} \cdot \beta^z \cdot Y_n^q(z) + \alpha^z \frac{d^2 Y_n^q(z)}{dz^2} \\ & = -G_1 \cdot \sum_{i=1}^{n-1} \phi_i^z \cdot Y_i(z) - \frac{1}{R_a^2} \cdot \sum_{i=1}^{n-1} \delta_i^z \cdot Y_i(z) - \sum_{i=1}^{n-1} \gamma_i^z \cdot \frac{d^2 Y_i(z)}{dz^2} + \zeta^z. \end{aligned} \quad (3.40)$$

Nous avons donc terminé l'itération q à l'étape d'enrichissement n .

3.5.3 Description algorithmique

L'algorithme du code source PGD implémenté sur Matlab, est présenté dans le pseudo-code 1. Les procédures sont les suivantes :

1. Les caractéristiques du palier et les paramètres de PGD sont définies.
2. Lorsque la géométrie du domaine de problème est créée, un ensemble de nœuds est généré pour représenter le domaine de problème.
3. La construction progressive de la représentation séparée s'effectue à travers deux boucles ; la boucle extérieure est pour l'enrichissement principal, en s'arrêtant lorsque le critère (3.28) est satisfait et que les conditions limites sont appliquées. Dans la boucle intérieure, les itérations non linéaires se poursuivent jusqu'à atteindre un point fixe dans la tolérance définie dans l'équation (3.27), la procédure détaillée est prescrite dans l'algorithme 1.
4. La représentation séparée est reconstruite pour obtenir une solution de pression.
5. Le post-traitement est effectué pour obtenir les résultats en terme de capacité de charge, Sommerfeld et le coefficient de frottement.

Algorithm 1 Pseudo-code de l'approche PGD implémentée

- 1: Paramètres d'entrés : Paramètres du palier, Paramètres du maillage, Paramètres de PGD : $\xi, \tilde{\xi}, Max_{terms}, Max_{fp}$
 - 2: Définition du maillage pour chaque dimension : N_θ, N_z
 - 3: **for** $i=1 : Max_{terms}$ **do** (boucle d'enrichissement principale)
 - 4: Initialisation de la boucle "point fixe" : $S_\theta = random(N_\theta, 1), S_z = random(N_z, 1)$
 - 5: Définition des conditions aux limites
 - 6: **for** $j=1 : Max_{fp}$ **do** (itérations de point fixe)
 - 7: Stockez les anciennes valeurs de S_θ et S_z pour une comparaison ultérieure.
 - 8: **procedure** STRATÉGIE DES DIRECTIONS ALTERNÉES
 - 9: Résoudre pour S_θ le système d'intégrales unidimensionnelles (Eq. (3.32))
 - 10: Construction de la solution par différence finie pour la forme forte donnée dans Eq. (3.34)
 - 11: Résoudre pour S_z le système d'intégrales unidimensionnelles (Eq. (3.38))
 - 12: Construction de la solution par différence finie pour la forme forte donnée dans Eq. (3.40)
 - 13: Norm d'erreur S_{diff} des itérations "point fixe" (Eq. (3.27))
 - 14: **if** $S_{diff} < \xi$ **then**
 - 15: Break (arrêt des itérations "point fixe")
 - 16: Calcul de l'erreur κ (Eq. (3.28))
 - 17: **if** $\kappa < \tilde{\xi}$ **then** (vérification du deuxième critère d'arrêt)
 - 18: Break (arrêt de la boucle d'enrichissement principale)
-

3.6 PGD pour la résolution du problème de la lubrification élasto-hydrodynamique

La détermination du champ de pression existant à l'intérieur du film fluide conduit à la résolution simultanée de :

- L'équation de Reynolds (forme adimensionnelle) (2.27) qui définit le comportement du fluide.

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\bar{h}^3 \frac{\partial \bar{P}}{\partial \theta} \right) + \alpha^2 \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left(\bar{h}^3 \frac{\partial \bar{P}}{\partial \bar{z}} \right) = \frac{d\bar{h}}{d\theta}, \quad (3.41)$$

- L'équation géométrique (forme adimensionnelle) (2.60) qui définit l'épaisseur du film lubrifiant.

$$\bar{h}(\theta, \bar{z}) = (1 + \varepsilon \cos \theta) + \left[\frac{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}{1 - \nu} \right] \frac{6\mu u R_{at_h}}{EC^3} \bar{P}(\theta, \bar{z}) \quad (3.42)$$

3.6.1 Formulation PGD du problème EHD

Comme l'équation géométrique de l'épaisseur du film fluide (3.42) dépend non seulement de la coordonnée circonférentielle θ , il faut considérer les dérivés de \bar{h} dans l'équation de Reynolds dans les deux directions selon θ et \bar{z} .

$$\bar{h}^3 \frac{\partial^2 \bar{P}}{\partial \theta^2} + \frac{\partial \bar{h}^3}{\partial \theta} \frac{\partial \bar{P}}{\partial \theta} + \alpha^2 \bar{h}^3 \frac{\partial^2 \bar{P}}{\partial \bar{z}^2} + \alpha^2 \frac{\partial \bar{h}^3}{\partial \bar{z}} \frac{\partial \bar{P}}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial \bar{h}}{\partial \theta}, \quad (3.43)$$

où bien :

$$\bar{h}^3 \frac{\partial^2 \bar{P}}{\partial \theta^2} + 3\bar{h}^2 \frac{\partial \bar{h}}{\partial \theta} \frac{\partial \bar{P}}{\partial \theta} + \alpha^2 \bar{h}^3 \frac{\partial^2 \bar{P}}{\partial \bar{z}^2} + 3\alpha^2 \bar{h}^2 \frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{z}} \frac{\partial \bar{P}}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial \bar{h}}{\partial \theta}. \quad (3.44)$$

On pose :

$$G1 = \bar{h}^3, \quad G2 = 3\bar{h}^2 \frac{\partial \bar{h}}{\partial \theta}, \quad G3 = \alpha^2 \bar{h}^3, \quad G4 = 3\alpha^2 \bar{h}^2 \frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{z}}, \quad G5 = \frac{\partial \bar{h}}{\partial \theta}.$$

L'équation (3.44) devient :

$$G1 \frac{\partial^2 \bar{P}}{\partial \theta^2} + G2 \frac{\partial \bar{P}}{\partial \theta} + G3 \frac{\partial^2 \bar{P}}{\partial \bar{z}^2} + G4 \frac{\partial \bar{P}}{\partial \bar{z}} = G5. \quad (3.45)$$

Pour toutes les fonctions tests appropriées \bar{P}^* , la forme pondérée de l'équation (3.45) est la suivante :

$$\int_{\Omega_\theta \times \Omega_{\bar{z}}} \bar{P}^* \left[G1 \frac{\partial^2 \bar{P}}{\partial \theta^2} + G2 \frac{\partial \bar{P}}{\partial \theta} + G3 \frac{\partial^2 \bar{P}}{\partial \bar{z}^2} + G4 \frac{\partial \bar{P}}{\partial \bar{z}} - G5 \right] d\theta d\bar{z} = 0. \quad (3.46)$$

Notre but est d'obtenir une solution PGD approximative à l'équation (3.45) sous la forme séparée suivante :

$$\bar{P}(\theta, \bar{z}) = \sum_{i=1}^N X_i(\theta) \cdot Y_i(\bar{z}). \quad (3.47)$$

Dans le but de trouver une approximation PGD dans une forme séparée de l'équation (3.45), on doit calculer chaque terme à part, ensuite enrichir l'approximation PGD jusqu'à satisfaction du critère de convergence.

3.6.2 Construction de la représentation séparée

A chaque étape d'enrichissement n ($n \geq 1$), nous avons déjà calculé les $n - 1$ premiers termes de l'approximation PGD de l'équation (3.47)

$$\bar{P}^{n-1}(\theta, \bar{z}) = \sum_{i=1}^{n-1} X_i(\theta) \cdot Y_i(\bar{z}). \quad (3.48)$$

Nous devons maintenant calculer le prochain terme $X_n(\theta) \cdot Y_n(\bar{z})$ pour obtenir la solution PGD enrichie

$$\bar{P}^n(\theta, \bar{z}) = \bar{P}^{n-1}(\theta, \bar{z}) + X_n(\theta) \cdot Y_n(\bar{z}) = \sum_{i=1}^{n-1} X_i(\theta) \cdot Y_i(\bar{z}) + X_n(\theta) \cdot Y_n(\bar{z}). \quad (3.49)$$

les deux fonctions $X_n(\theta) \cdot Y_n(\bar{z})$ sont inconnues à l'étape d'enrichissement en cours n , et elles apparaissent sous la forme d'un produit. Le problème résultant est donc non-linéaire, un schéma itératif est nécessaire. Nous utiliserons l'indice q pour désigner une itération donnée.

A l'étape d'enrichissement n , l'approximation PGD $P^{n,q}$ obtenue à l'itération q est la suivante

$$\bar{P}^{n,q}(\theta, \bar{z}) = P^{n-1}(\theta, \bar{z}) + X_n^q(\theta) \cdot Y_n^q(\bar{z}). \quad (3.50)$$

Le schéma itératif le plus simple est la stratégie des directions alternées qui calcule $X_n^q(\theta)$ à partir de $Y_n^{q-1}(\bar{z})$, et ensuite $Y_n^q(\bar{z})$ à partir de $X_n^q(\theta)$. Une valeur initiale arbitraire $Y_n^0(\bar{z})$ est spécifiée pour lancer le processus itératif. Les itérations non linéaires continuent jusqu'à atteindre un point fixe dans une tolérance spécifiée par l'utilisateur ξ , c'est-à-dire

$$\frac{\|X_n^q(\theta) \cdot Y_n^q(\bar{z}) - X_n^{q-1}(\theta) \cdot Y_n^{q-1}(\bar{z})\|_{L^2(\Omega)}}{\|X_n^{q-1}(\theta) \cdot Y_n^{q-1}(\bar{z})\|_{L^2(\Omega)}} < \xi. \quad (3.51)$$

L'étape d'enrichissement n se termine donc par les affectations $X_n(\theta) \leftarrow X_n^q(\theta)$ et $Y_n(\bar{z}) \leftarrow Y_n^q(\bar{z})$. Le critère d'arrêt correspondant est basé sur la norme (L^2) du mode n par rapport à la norme du premier mode.

Le processus d'enrichissement lui-même s'arrête lorsqu'une évaluation appropriée de l'erreur est effectuée $\kappa(n)$ devient suffisamment petite, c'est-à-dire $\kappa(n) < \tilde{\xi}$.

$$\kappa(n) = \frac{\|X_n(\theta) \cdot Y_n(\bar{z})\|_{L^2(\Omega)}}{\|X_1(\theta) \cdot Y_1(\bar{z})\|_{L^2(\Omega)}}. \quad (3.52)$$

Nous présentons maintenant de façon plus détaillée une itération d'une direction alternée pour une étape d'enrichissement donnée.

Stratégie des directions alternées

Chaque itération du schéma des directions alternées se réalise en deux étapes :

1. Calcul de $X_n^q(\theta)$ à partir de $Y_n^{q-1}(\bar{z})$:

Dans ce cas, l'approximation se définit comme suit

$$\bar{P}^{n,q}(\theta, \bar{z}) = \sum_{i=1}^{n-1} X_i(\theta) \cdot Y_i(\bar{z}) + X_n^q(\theta) \cdot Y_n^{q-1}(\bar{z}), \quad (3.53)$$

où toutes les fonctions sont connues sauf $X_n^q(\theta)$. Le choix le plus simple pour la fonction de pondération \bar{P}^* dans la formule pondérée (3.22) est le suivant

$$\bar{P}^*(\theta, \bar{z}) = X_n^*(\theta) \cdot Y_n^{q-1}(\bar{z}). \quad (3.54)$$

En injectant les équations (3.53) et (3.54) dans l'équation (3.46), on obtient :

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Omega\theta \times \Omega\bar{z}} X_n^*(\theta) \cdot Y_n^{q-1}(\bar{z}) \cdot G_1 \cdot \sum_{i=1}^{n-1} \frac{d^2 X_i(\theta)}{d\theta^2} \cdot Y_i(\bar{z}) \cdot d\theta d\bar{z} \\
 & + \int_{\Omega\theta \times \Omega\bar{z}} X_n^*(\theta) \cdot Y_n^{q-1}(\bar{z})^2 \cdot G_1 \cdot \frac{d^2 X_n^q(\theta)}{d\theta^2} \cdot d\theta d\bar{z} \\
 & + \int_{\Omega\theta \times \Omega\bar{z}} X_n^*(\theta) \cdot Y_n^{q-1}(\bar{z}) \cdot G_2 \cdot \sum_{i=1}^{n-1} \frac{dX_i(\theta)}{d\theta} \cdot Y_i(\bar{z}) \cdot d\theta d\bar{z} \\
 & + \int_{\Omega\theta \times \Omega\bar{z}} X_n^*(\theta) \cdot Y_n^{q-1}(\bar{z})^2 \cdot G_2 \cdot \frac{dX_n^q(\theta)}{d\theta} \cdot d\theta d\bar{z} \\
 & + \int_{\Omega\theta \times \Omega\bar{z}} X_n^*(\theta) \cdot Y_n^{q-1}(\bar{z}) \cdot G_3 \cdot \sum_{i=1}^{n-1} X_i(\theta) \cdot \frac{d^2 Y_i(\bar{z})}{d\bar{z}^2} \cdot d\theta d\bar{z} \\
 & + \int_{\Omega\theta \times \Omega\bar{z}} X_n^*(\theta) \cdot Y_n^{q-1}(\bar{z}) \cdot G_3 \cdot X_n^q(\theta) \cdot \frac{d^2 Y_n^{q-1}(\bar{z})}{d\bar{z}^2} \cdot d\theta d\bar{z} \\
 & + \int_{\Omega\theta \times \Omega\bar{z}} X_n^*(\theta) \cdot Y_n^{q-1}(\bar{z}) \cdot G_4 \cdot \sum_{i=1}^{n-1} X_i(\theta) \cdot \frac{dY_i(\bar{z})}{d\bar{z}} \cdot d\theta d\bar{z} \\
 & + \int_{\Omega\theta \times \Omega\bar{z}} X_n^*(\theta) \cdot Y_n^{q-1}(\bar{z}) \cdot G_4 \cdot X_n^q(\theta) \cdot \frac{dY_n^{q-1}(\bar{z})}{d\bar{z}} \cdot d\theta d\bar{z} \\
 & - \int_{\Omega\theta \times \Omega\bar{z}} X_n^*(\theta) \cdot Y_n^{q-1}(\bar{z}) \cdot G_5 \cdot d\theta d\bar{z} = 0,
 \end{aligned} \tag{3.55}$$

Puisque toutes les fonctions de \bar{z} sont connues dans l'expression ci-dessus, nous pouvons calculer les intégrales unidimensionnelles suivantes sur $\Omega_{\bar{z}}$:

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \alpha^\theta = \int_{\Omega_{\bar{z}}} (Y_n^{q-1}(\bar{z}))^2 d\bar{z} \\
 \psi^\theta = \int_{\Omega_{\bar{z}}} Y_n^{q-1}(\bar{z}) \cdot \frac{dY_n^{q-1}(\bar{z})}{d\bar{z}} d\bar{z} \\
 \beta^\theta = \int_{\Omega_{\bar{z}}} Y_n^{q-1}(\bar{z}) \cdot \frac{d^2 Y_i(\bar{z})}{d\bar{z}^2} d\bar{z} \\
 \gamma_i^\theta = \int_{\Omega_{\bar{z}}} Y_n^{q-1}(\bar{z}) \cdot Y_i(\bar{z}) d\bar{z} \\
 \delta_i^\theta = \int_{\Omega_{\bar{z}}} Y_n^{q-1}(\bar{z}) \cdot \frac{d^2 Y_i(\bar{z})}{d\bar{z}^2} d\bar{z} \\
 \phi_i^\theta = \int_{\Omega_{\bar{z}}} Y_n^{q-1}(\bar{z}) \cdot \frac{dY_i(\bar{z})}{d\bar{z}} d\bar{z} \\
 \zeta^\theta = \int_{\Omega_{\bar{z}}} Y_n^{q-1}(\bar{z}) d\bar{z}
 \end{array} \right. . \tag{3.56}$$

L'équation (3.55) se réduit à :

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Omega_\theta} X_n^*(\theta) \cdot \alpha^\theta \cdot G_1 \cdot \frac{d^2 X_n^q(\theta)}{d\theta^2} \cdot d\theta + \int_{\Omega_\theta} X_n^*(\theta) \cdot \alpha^\theta \cdot G_2 \cdot \frac{dX_n^q(\theta)}{d\theta} \cdot d\theta \\
 & + \int_{\Omega_\theta} X_n^*(\theta) \cdot \beta^\theta \cdot G_3 \cdot X_n^q(\theta) \cdot d\theta + \int_{\Omega_\theta} X_n^*(\theta) \cdot \psi^\theta \cdot G_4 \cdot X_n^q(\theta) \cdot d\theta = \\
 & - \int_{\Omega_\theta} X_n^*(\theta) \cdot G_1 \cdot \sum_{i=1}^{n-1} \gamma_i^\theta \cdot \frac{d^2 X_i(\theta)}{d\theta^2} \cdot d\theta \tag{3.57} \\
 & - \int_{\Omega_\theta} X_n^*(\theta) \cdot G_2 \cdot \sum_{i=1}^{n-1} \gamma_i^\theta \cdot \frac{dX_i(\theta)}{d\theta} \cdot d\theta - \int_{\Omega_\theta} X_n^*(\theta) \cdot G_3 \cdot \sum_{i=1}^{n-1} \delta_i^\theta \cdot X_i(\theta) \cdot d\theta \\
 & - \int_{\Omega_\theta} X_n^*(\theta) \cdot G_4 \cdot \sum_{i=1}^{n-1} \phi_i^z \cdot X_i(\theta) \cdot d\theta + \int_{\Omega_\theta} X_n^*(\theta) \cdot \zeta^\theta \cdot G_5 \cdot d\theta.
 \end{aligned}$$

Nous avons ainsi obtenu la forme pondérée d'un problème unidimensionnel défini au-dessus de Ω_θ qui peut être résolu en utilisant n'importe quelle technique de discrétisation fonctionnant sur la forme faible du modèle (méthode des éléments finis, volumes finis) pour obtenir la fonction X_n^q que nous recherchons.

$$\begin{aligned}
 & \alpha^\theta \cdot G_1 \cdot \frac{d^2 X_n^q(\theta)}{d\theta^2} + \alpha^\theta \cdot G_2 \cdot \frac{dX_n^q(\theta)}{d\theta} + \beta^\theta \cdot G_3 \cdot X_n^q(\theta) + \psi^\theta \cdot G_4 \cdot X_n^q(\theta) \\
 & = -G_1 \cdot \sum_{i=1}^{n-1} \gamma_i^\theta \cdot \frac{d^2 X_i(\theta)}{d\theta^2} - G_2 \cdot \sum_{i=1}^{n-1} \gamma_i^\theta \cdot \frac{dX_i(\theta)}{d\theta} \tag{3.58} \\
 & - G_3 \cdot \sum_{i=1}^{n-1} \delta_i^\theta \cdot X_i(\theta) - G_4 \cdot \sum_{i=1}^{n-1} \phi_i^z \cdot X_i(\theta) + \zeta^\theta \cdot G_5,
 \end{aligned}$$

Cela pourrait être résolu numériquement par n'importe quelle méthode numérique adaptée (Différences Finies, Techniques Pseudo-Spectrales,... etc). La forme forte (3.58) est une équation différentielle ordinaire de second ordre pour X_n^q .

Une fois $X_n^q(\theta)$, on passe à la deuxième étape de l'itération q .

2. Calcul de $Y_n^q(\bar{z})$ à partir de la valeur de $X_n^q(\theta)$ obtenue :

La procédure est exactement la même que celle que nous avons suivie précédemment. En effet, nous échangeons simplement les rôles joués par toutes les fonctions correspondantes de θ et \bar{z} .

L'approximation actuelle de la PGD est la suivante

$$\bar{P}^{n,q}(\theta, \bar{z}) = \sum_{i=1}^{n-1} X_i(\theta) \cdot Y_i(\bar{z}) + X_n^q(\theta) \cdot Y_n^q(\bar{z}), \tag{3.59}$$

où toutes les fonctions sont connues sauf $Y_n^q(\bar{z})$.

La formulation Galerkin de l'équation (3.46) est obtenue avec le choix particulier

$$\bar{P}^*(\theta, \bar{z}) = X_n^q(\theta).Y_n^*(\bar{z}). \quad (3.60)$$

Ensuite, en introduisant les équations (3.59) et (3.60) dans l'équation (3.46), on obtient

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega\bar{z}} X_n^q(\theta).Y_n^*(\bar{z}).G_1.\sum_{i=1}^{n-1}\frac{d^2X_i(\theta)}{d\theta^2}.Y_i(\bar{z}).d\theta d\bar{z} \\ & + \int_{\Omega\bar{z}} X_n^q(\theta).Y_n^*(\bar{z}).G_1.\frac{d^2X_n^q(\theta)}{d\theta^2}.d\theta d\bar{z} \\ & + \int_{\Omega\bar{z}} X_n^q(\theta).Y_n^*(\bar{z}).G_2.\sum_{i=1}^{n-1}\frac{dX_i(\theta)}{d\theta}.Y_i(\bar{z}).d\theta d\bar{z} \\ & + \int_{\Omega\bar{z}} X_n^q(\theta).Y_n^*(\bar{z}).G_2.\frac{dX_n^q(\theta)}{d\theta}.Y_n^q(\bar{z}).d\theta d\bar{z} \\ & + \int_{\times\Omega\bar{z}} X_n^q(\theta).Y_n^*(\bar{z}).G_3.\sum_{i=1}^{n-1}X_i(\theta).\frac{d^2Y_i(\bar{z})}{d\bar{z}^2}.d\theta d\bar{z} \\ & + \int_{\Omega\bar{z}} X_n^q(\theta)^2.Y_n^*(\bar{z}).G_3.\frac{d^2Y_n^q(\bar{z})}{d\bar{z}^2}.d\theta d\bar{z} \\ & + \int_{\Omega\bar{z}} X_n^q(\theta).Y_n^*(\bar{z}).G_4.\sum_{i=1}^{n-1}X_i(\theta).\frac{dY_i(\bar{z})}{d\bar{z}}.d\theta d\bar{z} \\ & + \int_{\Omega\bar{z}} X_n^q(\theta)^2.Y_n^*(\bar{z}).G_4.\frac{dY_n^q(\bar{z})}{d\bar{z}}.d\theta d\bar{z} \\ & - \int_{\Omega\bar{z}} X_n^q(\theta).Y_n^*(\bar{z}).G_5.d\theta d\bar{z} = 0, \end{aligned} \quad (3.61)$$

Comme toutes les fonctions de θ sont connues, les intégrales sur Ω_θ peuvent être calculées pour obtenir

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha^{\bar{z}} = \int_{\Omega_\theta} (X_n^q(\theta))^2 d\theta \\ \psi^{\bar{z}} = \int_{\Omega_\theta} X_n^q(\theta).\frac{dX_n^q(\theta)}{d\theta} d\theta \\ \beta^{\bar{z}} = \int_{\Omega_\theta} X_n^q(\theta).\frac{d^2X_n^q(\theta)}{d\theta^2} d\theta \\ \gamma_i^{\bar{z}} = \int_{\Omega_\theta} X_n^q(\theta).X_i(\theta) d\theta \\ \delta_i^{\bar{z}} = \int_{\Omega_\theta} X_n^q(\theta).\frac{d^2X_i(\theta)}{d\theta^2} d\theta \\ \phi_i^{\bar{z}} = \int_{\Omega_\theta} X_n^q(\theta).\frac{dX_i(\theta)}{d\theta} d\theta \\ \zeta^{\bar{z}} = \int_{\Omega_\theta} X_n^q(\theta) d\theta \end{array} \right. \quad (3.62)$$

L'équation (3.61) devient

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Omega\theta \times \Omega\bar{z}} Y_n^*(\bar{z}) \cdot \beta^{\bar{z}} \cdot G_1 \cdot d\bar{z} + \int_{\Omega\theta \times \Omega\bar{z}} Y_n^*(\bar{z}) \cdot \psi^{\bar{z}} \cdot G_2 \cdot Y_n^q(\bar{z}) \cdot d\bar{z} \\
 & + \int_{\Omega\theta \times \Omega\bar{z}} Y_n^*(\bar{z}) \cdot \alpha^{\bar{z}} \cdot G_3 \cdot \frac{d^2 Y_n^q(\bar{z})}{d\bar{z}^2} \cdot d\bar{z} + \int_{\Omega\theta \times \Omega\bar{z}} Y_n^*(\bar{z}) \cdot \alpha^{\bar{z}} \cdot G_4 \cdot \frac{dY_n^q(\bar{z})}{d\bar{z}} \cdot d\bar{z} = \\
 & - \int_{\Omega\theta \times \Omega\bar{z}} Y_n^*(\bar{z}) \cdot G_1 \cdot \sum_{i=1}^{n-1} \delta_i^{\bar{z}} \cdot Y_i(\bar{z}) \cdot d\bar{z} - \int_{\Omega\theta \times \Omega\bar{z}} Y_n^*(\bar{z}) \cdot G_2 \cdot \sum_{i=1}^{n-1} \phi_i^{\bar{z}} \cdot Y_i(\bar{z}) \cdot d\bar{z} \\
 & - \int_{\Omega\theta \times \Omega\bar{z}} Y_n^*(\bar{z}) \cdot G_3 \cdot \sum_{i=1}^{n-1} \gamma_i^{\bar{z}} \cdot \frac{d^2 Y_i(\bar{z})}{d\bar{z}^2} \cdot d\bar{z} \\
 & - \int_{\Omega\theta \times \Omega\bar{z}} Y_n^*(\bar{z}) \cdot G_4 \cdot \sum_{i=1}^{n-1} \gamma_i^{\bar{z}} \cdot \frac{dY_i(\bar{z})}{d\bar{z}} \cdot d\bar{z} + \int_{\Omega\theta \times \Omega\bar{z}} Y_n^*(\bar{z}) \cdot \zeta^{\bar{z}} \cdot G_5 \cdot d\bar{z}.
 \end{aligned} \tag{3.63}$$

Comme précédemment, nous avons ainsi obtenu la forme pondérée d'un problème elliptique défini sur $\Omega_{\bar{z}}$ dont la solution est la fonction $Y_n^q(\bar{z})$. Alternativement, la formulation forte correspondante à ce problème unidimensionnel se définit comme suit

$$\begin{aligned}
 & \beta^{\bar{z}} \cdot G_1 + \psi^{\bar{z}} \cdot G_2 \cdot Y_n^q(\bar{z}) + \alpha^{\bar{z}} \cdot G_3 \cdot \frac{d^2 Y_n^q(\bar{z})}{d\bar{z}^2} + \alpha^{\bar{z}} \cdot G_4 \cdot \frac{dY_n^q(\bar{z})}{d\bar{z}} \\
 & = -G_1 \cdot \sum_{i=1}^{n-1} \delta_i^{\bar{z}} \cdot Y_i(\bar{z}) - G_2 \cdot \sum_{i=1}^{n-1} \phi_i^{\bar{z}} \cdot Y_i(\bar{z}) \\
 & - G_3 \cdot \sum_{i=1}^{n-1} \gamma_i^{\bar{z}} \cdot \frac{d^2 Y_i(\bar{z})}{d\bar{z}^2} - G_4 \cdot \sum_{i=1}^{n-1} \gamma_i^{\bar{z}} \cdot \frac{dY_i(\bar{z})}{d\bar{z}} + \zeta^{\bar{z}} \cdot G_5.
 \end{aligned} \tag{3.64}$$

3.6.3 Description algorithmique

Le champ de la déformation élastique de surface du coussinet et le déplacement radiale à l'interface fluide-solide est calculé en utilisant le modèle "couche mince". La figure 3.5 représente l'algorithme de résolution du problème EHD en régime isotherme.

A partir de cet algorithme, nous pouvons dire que pour une géométrie initiale, nous calculons le champ de pression puis le champ de déplacement, ce dernier modifie à son tour le coussinet qui n'est plus cylindrique, puis nous recalculons un nouveau champ de pression et ainsi de suite. Ce procédé de calcul se poursuit jusqu'à stabilisation de la déformation, ce qui peut se traduire par l'obtention de deux champs de déplacement ou de pression consécutifs suffisamment proches.

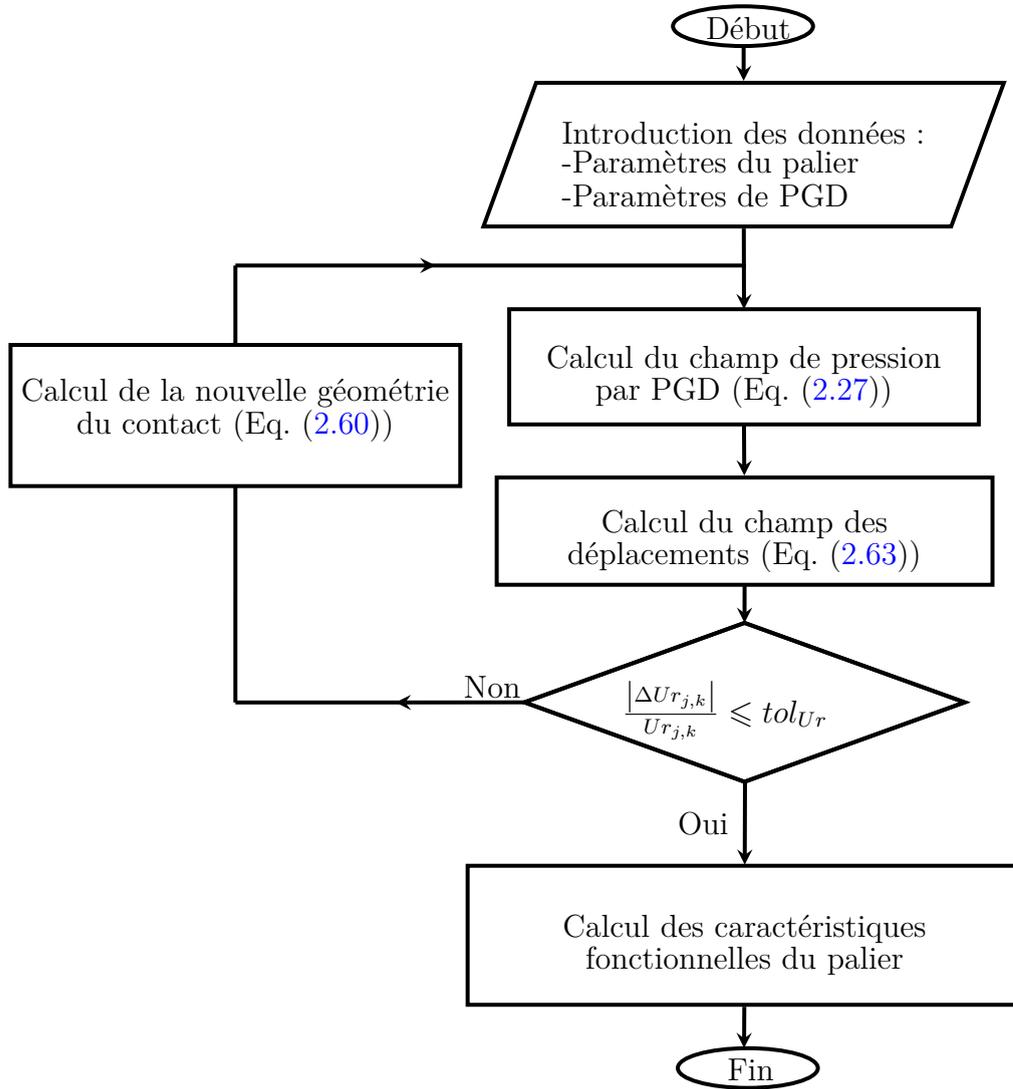


FIGURE 3.5: Algorithme de résolution du problème EHD

3.7 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons appliqué la PGD à la résolution des équations de lubrification hydrodynamique et élasto-hydrodynamique. La formulation PGD liée aux problèmes HD et EHD a été développée avec le pseudo code et l'algorithme de résolution. La suite logique de ce manuscrit consiste à traiter les problèmes de lubrification dans les deux régimes hydrodynamiques et élasto-hydrodynamiques. Ce sera donc l'objet du prochain chapitre.

Chapitre 4

PGD pour la résolution des problèmes de lubrification hydrodynamique

Sommaire

4.1	Introduction	73
4.2	Simulation du palier hydrodynamique rigide	73
4.2.1	Palier infiniment court et long	74
4.2.2	Palier de longueur finie	84
4.3	Simulation du palier élasto-hydrodynamique	92
4.3.1	Étude de validation	93
4.4	Coût de calcul	96
4.5	Conclusion	97

4.1 Introduction

Dans cette partie, nous allons considérer l'efficacité de la méthode de réduction de modèles par PGD, d'un point de vue précision et temps de calcul, à travers l'étude de cas de paliers lisses rigides (HD) et élasto-hydrodynamique (EHD).

Dans le cas de la résolution du problème HD des paliers lisses rigides, nous mènerons une étude comparée mettant en évidence la distribution du champ de pression du film fluide évaluée par les méthodes : Proper Generalized Decomposition (PGD), différences finies (DF) et différences finies avec sur-relaxation successive (DF_{sur}); d'une part, et la solution analytique dans les cas des paliers infiniment courts (ISJB) et longs (ILJB) d'autre part. Cette comparaison est étendue à l'évaluation des caractéristiques du palier lisse rigide (capacité de charge, nombre Sommerfeld et nombre de frottement). Ensuite, les mêmes comparaisons sont effectuées pour les paliers de longueur finie (FJB), avec différents rapport de longueurs L/D . Une deuxième comparaison relative aux temps de calcul CPU pour toutes les méthodes numériques mentionnées ci-dessus, parachèvera cette première étude.

Concernant la résolution du problème élasto-hydrodynamique (EHD) des paliers lisses, nous présenterons en premier lieu une analyse pour la validation du modèle PGD mis en œuvre, suivie d'une estimation du temps de calcul.

4.2 Simulation du palier hydrodynamique rigide

Les paramètres associés à la méthode PGD seront fixés aux valeurs suivantes :

- Tolérance du “point fixe” : $\xi = 10^{-8}$,
- Tolérance d'enrichissement : $\tilde{\xi} = 10^{-5}$,
- Nombre maximum de termes d'enrichissements : $Max_{terms} = 4$,
- Nombre d'itérations maximum du “point fixe” : $Max_{fp} = 20$.

Dans ce qui suit, une étude comparative des résultats de simulation des méthodes classiques avec la PGD est menée, tout en validant les résultats par les données analytiques des cas de paliers infiniment court et long.

4.2.1 Palier infiniment court et long

4.2.1.1 Champs de pression

Les caractéristiques du palier et du lubrifiant utilisés dans cette étude sont définis dans le tableau 4.1 :

Paramètres		Palier infiniment court	Palier infiniment long
L	longueur de palier	6.10^{-3} m	300.10^{-3} m
D	diamètres de palier	50.10^{-3} m	50.10^{-3} m
C	jeu radial	20.10^{-6} m	20.10^{-6} m
ϵ	excentricité relative	0.1	0.1
N	vitesse de rotation de l'arbre	1000 tr/min	1000 tr/min
μ	viscosité dynamique du lubrifiant	0.19 Pa.s	0.19 Pa.s
	maillage	100×100 nœuds	100×100 nœuds

TABLEAU 4.1: Caractéristiques de palier et de lubrifiant

La distribution de pression est calculée numériquement par la méthode PGD (avec un maillage régulier 100×100 nœuds) dans les deux cas : palier infiniment court $L/D = 0.12$ et infiniment long $L/D = 6$, comme montrent les figures 4.1 et 4.2.

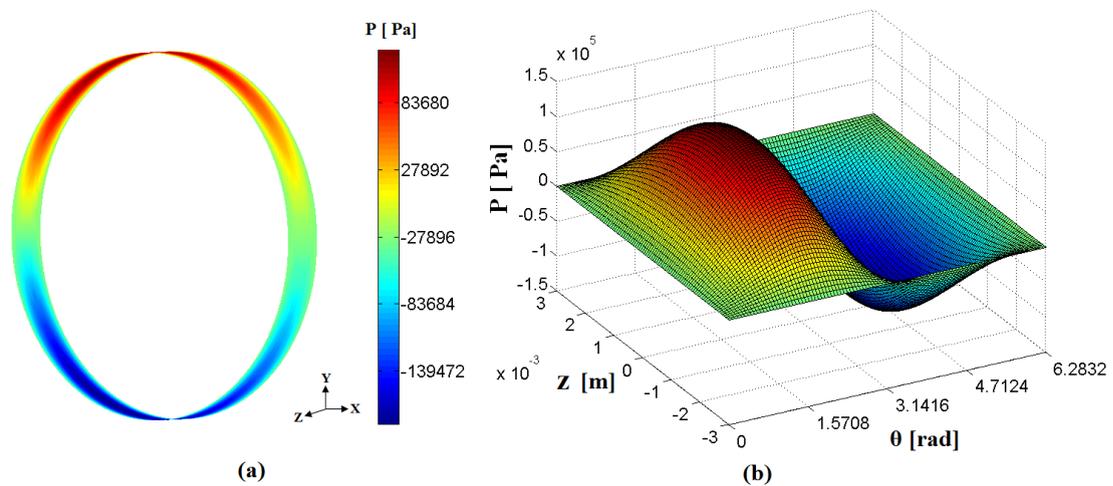


FIGURE 4.1: Distribution de pression pour un palier infiniment court (ISJB) ($L/D = 0.12$).

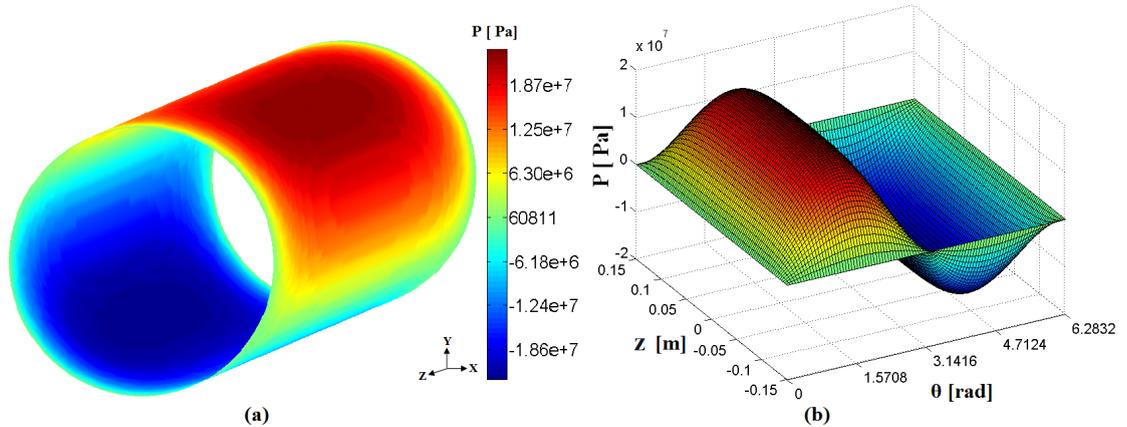


FIGURE 4.2: Distribution de pression pour un palier infiniment long (ILJB) ($L/D = 6$).

Les figures 4.3 et 4.4 illustrent les fonctions séparées normalisées $X_i(\theta)$ et $Y_i(z)$ pour $i = 1, \dots, 4$ respectivement. Il est à noter que la solution PGD calculée dans le cas d'un palier infiniment court possède uniquement trois étapes d'enrichissement (ou le critère d'arrêt est satisfait), ce qui n'est pas le cas pour le palier infiniment long.

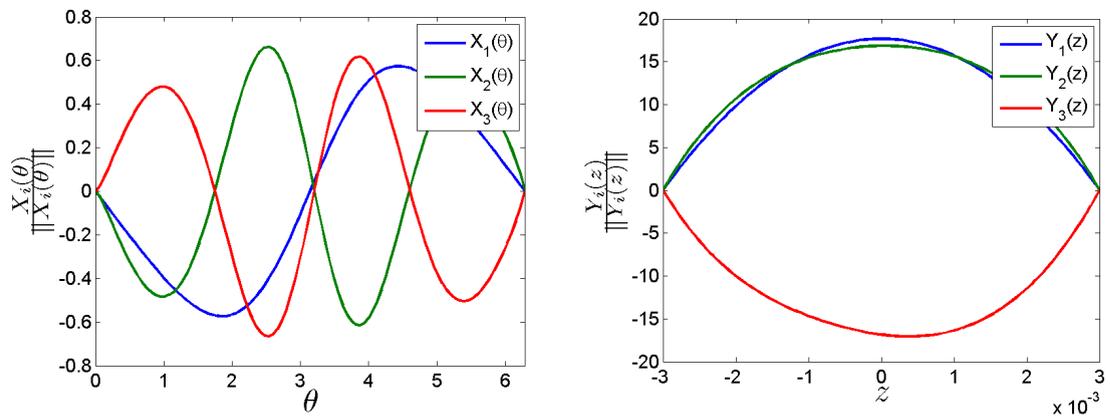


FIGURE 4.3: Fonctions normalisées pour un palier infiniment court (ISJB) : $X_i(\theta)$ (à gauche) and $Y_i(z)$ (à droite) avec $i = 1, \dots, 3$.

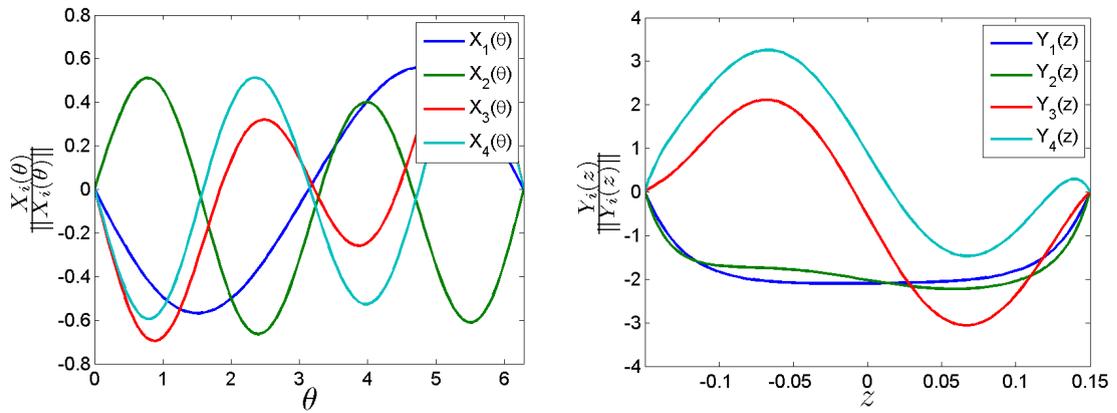


FIGURE 4.4: Fonctions normalisées pour un palier infiniment long ILJB : $X_i(\theta)$ (à gauche) et $Y_i(z)$ (à droite) avec $i = 1, \dots, 4$.

Sur les figures 4.5 et 4.6, la répartition des champs de pression obtenue par la PGD sont tracés le long de la ligne médiane du palier (à $z = 0$) et comparés aux solutions numériques obtenues par DF, DF_{sur} et les solutions analytiques (données dans le chapitre précédent). On remarque que les courbes de pression sont assez proches l'une par rapport à l'autre pour toutes les approches numériques. Cependant, la plage d'erreur de la méthode PGD est moindre que celles obtenus par DF et DF_{sur} .

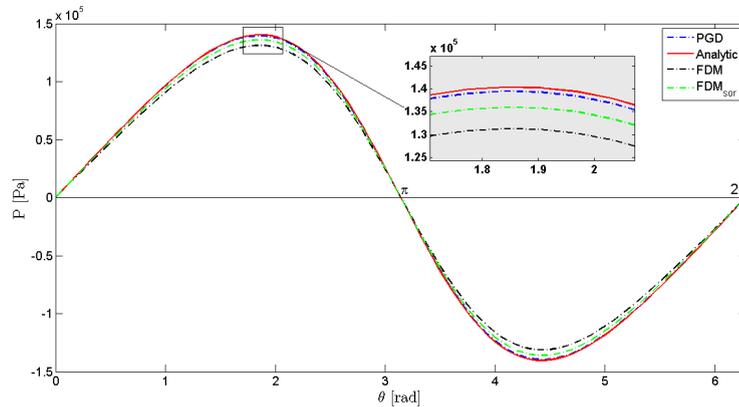


FIGURE 4.5: Comparaison de la distribution de pression obtenue par PGD, DF, DF_{sur} et la solution analytique à $z = 0$ pour ISJB.

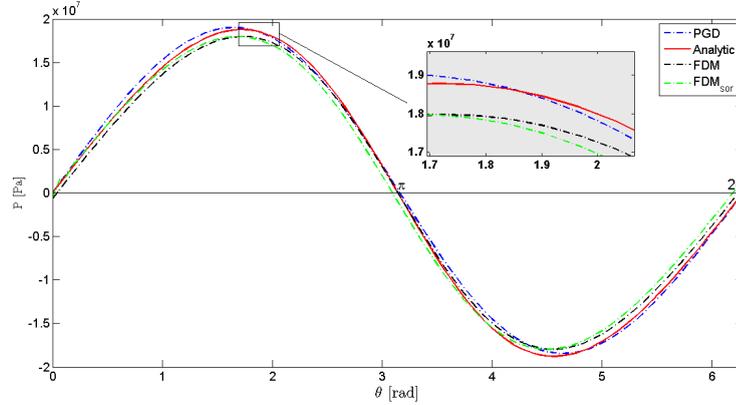


FIGURE 4.6: Comparaison de la distribution de pression obtenue par PGD, DF, DF_{sur} et la solution analytique à $z = 0$ pour ILJB.

Nous constatons que ces premiers tests de comparaison de la distribution de pression (résultats présentés sur les figures 4.5 et 4.6) sont calculés à la demi-longueur du palier (position $z = 0$). Ces tests comparatifs sont encore insuffisants pour évaluer l'erreur de calcul de la pression dans le domaine de calcul. Pour une comparaison plus complète ; l'évaluation de nombre de Sommerfeld et de frottement, qui nécessitent le calcul de l'intégrale de la répartition de la pression sur l'ensemble du domaine (capacité de charge), est effectuée dans ce qui suit.

4.2.1.2 Nombre de Sommerfeld

Dans le tableau 4.2, le nombre de Sommerfeld (pour les deux cas d'un palier infiniment court/long, avec des valeurs de l'excentricité relative variant $\varepsilon = 0.1 \sim 0.9$) est calculé par les méthodes PGD, DF, DF_{sur} et comparé avec les résultats donnés par la référence [3].

Paramètres		Excentricité relative ε								
L/D	Sommerfeld	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
SJB	S(L/D) ² -[3]	0,99	0,461	0,272	0,17	0,106	0,0625	0,033	0,0139	0,00331
	S(L/D) ² -PGD	0,99	0,464	0,273	0,17	0,106	0,0631	0,033	0,0140	0,00336
	S(L/D) ² -DF	1,08	0,504	0,298	0,18	0,117	0,0694	0,037	0,0159	0,00506
	S(L/D) ² - DF_{sur}	1,08	0,503	0,297	0,18	0,116	0,0694	0,037	0,0159	0,00405
LJB	S-[3]	0,247	0,123	0,0823	0,0628	0,0483	0,0389	0,0297	0,0211	0,0114
	S-PGD	0,395	0,192	0,123	0,0850	0,0601	0,0394	0,0194	0,0118	0,0050
	S-DF	0,422	0,208	0,136	0,0980	0,0743	0,0566	0,0420	0,0286	0,0150
	S- DF_{sur}	0,422	0,208	0,136	0,0980	0,0743	0,0566	0,0420	0,0286	0,0150

TABLEAU 4.2: Nombre de Sommerfeld pour ISJB et ILJB avec les différentes valeurs de l'excentricité relative.

Les figures 4.7 et 4.8 présentent l'évolution du nombre de Sommerfeld en fonction de l'excentricité relative dans le cas d'un palier infiniment court ISJB et long ILJB. Il est clair que le nombre de Sommerfeld calculé par la méthode proposée PGD concorde avec les résultats obtenus par la référence [3] et les autres méthodes.

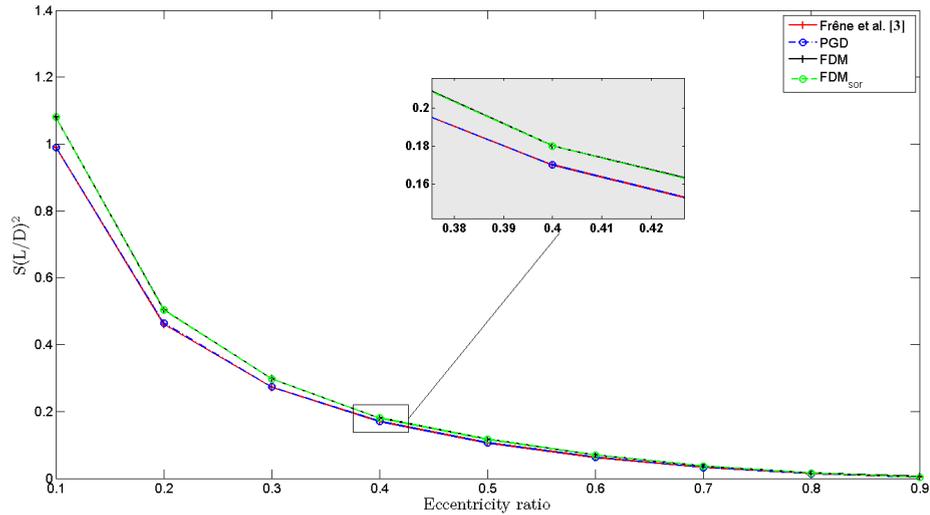


FIGURE 4.7: Nombre de Sommerfeld avec les différentes valeurs de l'excentricité relative pour ISJB.

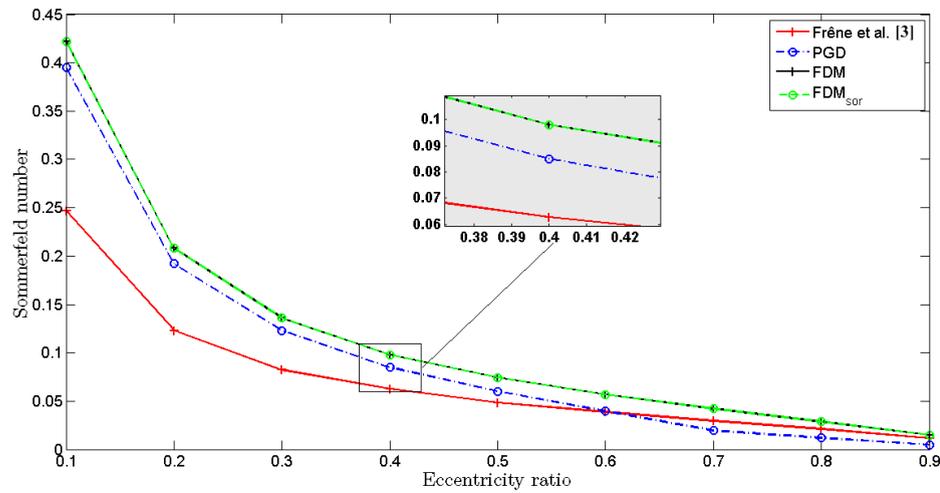


FIGURE 4.8: Nombre de Sommerfeld avec les différentes valeurs de l'excentricité relative pour ILJB.

4.2.1.3 Nombre de frottement

Dans le tableau suivant 4.3, le nombre de frottement est évalué (pour les deux cas ISJB et ILJB en variant l'excentricité relative) en utilisant les méthodes PGD, DF et DF_{sur} , et par la suite comparé avec les résultats de la référence [3].

Paramètres		Excentricité relative ϵ								
L/D	Nombre de frottement	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
ISJB	$f(L/D)^2$ -[3]	18,75	8,514	4,98	3,14	2,016	1,25	0,722	0,355	0,114
	$f(L/D)^2$ -PGD	19,75	9,348	5,66	3,69	2,437	1,55	0,921	0,463	0,152
	$f(L/D)^2$ -DF	21,43	10,145	6,15	4,01	2,649	1,69	1,005	0,507	0,169
	$f(L/D)^2$ - DF_{sur}	21,43	10,144	6,15	4,01	2,647	1,69	1,004	0,507	0,169
ILJB	f -[3]	5,02	2,61	1,84	1,47	1,25	1,10	0,98	0,852	0,658
	f -PGD	7,84	3,88	2,55	1,85	1,37	0,97	0,53	0,391	0,220
	f -DF	8,3	4,02	2,55	1,76	1,25	0,85	0,51	0,189	0,150
	f - DF_{sur}	8,36	4,16	2,76	2,04	1,60	1,29	1,04	0,817	0,560

TABLEAU 4.3: Nombre de frottement pour ISJB et ILJB avec les différentes valeurs de l'excentricité relative.

Les figures 4.9 et 4.10 schématisent le nombre de frottement en fonction de l'excentricité relative dans les deux cas ISJB/ILJB. On observe que le nombre de frottement calculé par la méthode PGD concorde bien avec les résultats obtenu par la référence [3] et par les autres méthodes.

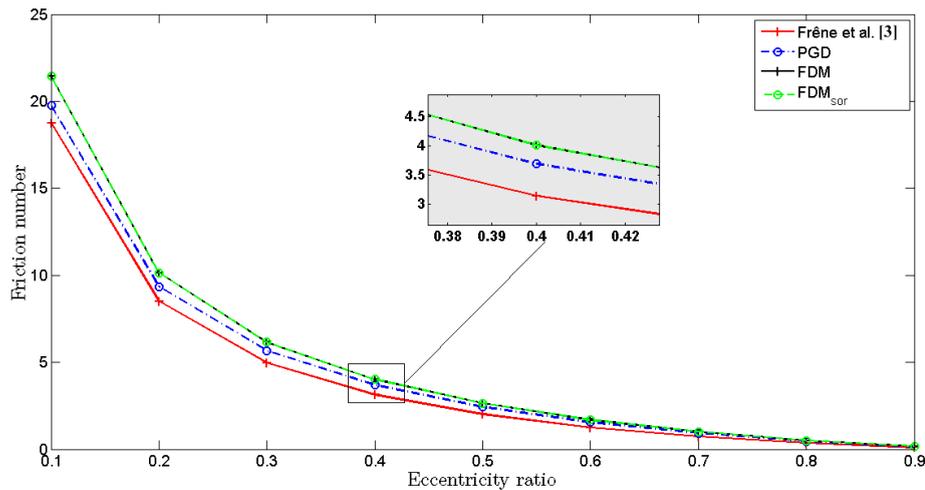


FIGURE 4.9: Nombre de frottement avec les différentes valeurs de l'excentricité relative pour ISJB.

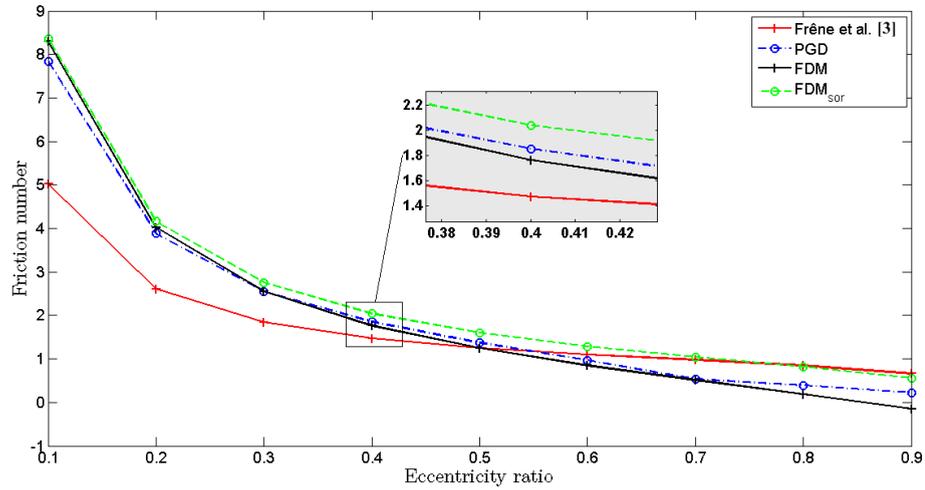


FIGURE 4.10: Nombre de frottement avec les différentes valeurs de l'excentricité relative pour ILJB.

4.2.1.4 Étude de convergence

Différents ensembles de nœuds distribués de façon régulière sont employés : $\{ 20 \times 20, 40 \times 40, 70 \times 70, 100 \times 100, 200 \times 200, 300 \times 300, 400 \times 400, 500 \times 500, 600 \times 600 \}$. Les courbes de convergence du champ de pression obtenues par les trois méthodes sont présentées sur le tableau 4.4 et tracées sur les figures 4.11 et 4.12.

Nœuds	h_{mesh}	Erreur E_P pour ISJB			h_{mesh}	Erreur E_P pour ILJB		
		PGD	DF	DF _{sur}		PGD	DF	DF _{sur}
400	0.00970	0.006759	0.28120	0.10647	0.00686	0.11664	0.24676	0.36086
1600	0.00485	0.006759	0.14912	0.05986	0.00343	0.06696	0.12399	0.17724
4900	0.00277	0.006767	0.08931	0.03919	0.00196	0.04661	0.07264	0.10171
10000	0.00194	0.006767	0.06483	0.03114	0.00137	0.04291	0.05207	0.07206
40000	0.00097	0.006767	0.03589	0.02120	0.00068	0.03964	0.02833	0.03769
90000	0.00064	0.006767	0.02615	0.01767	0.00045	0.03901	0.02042	0.02629
160000	0.00048	0.006767	0.02127	0.01577	0.00038	0.03879	0.01648	0.02063
250000	0.00038	0.006767	0.01834	0.01454	0.00027	0.03869	0.01412	0.01726
360000	0.00032	0.006767	0.01639	0.01365	0.00022	0.03863	0.01254	0.01503

TABEAU 4.4: Erreurs dans le calcul de la pression pour ISJB et ILJB en utilisant les méthodes DF, DF_{sur} et PGD.

Le taux de convergence de la PGD est relativement meilleur que ceux obtenus par les autres méthodes DF, DF_{sur}. On remarque également que l'erreur de calcul de la méthode PGD a tendance à se stabiliser immédiatement après les premières configurations de maillage. Ceci est dû à la procédure d'enrichissement itérative

de la PGD, où l'erreur se stabilise lorsque le taux de convergence est atteint (c'est-à-dire jusqu'à atteindre le point fixe, Algorithme 1).

En général, un maillage plus fin aboutit généralement à une solution plus précise, mais qui est couteuse en temps de calcul. Pour cette raison, une étude sur le temps de calcul de la PGD se dévoile plus que nécessaire.

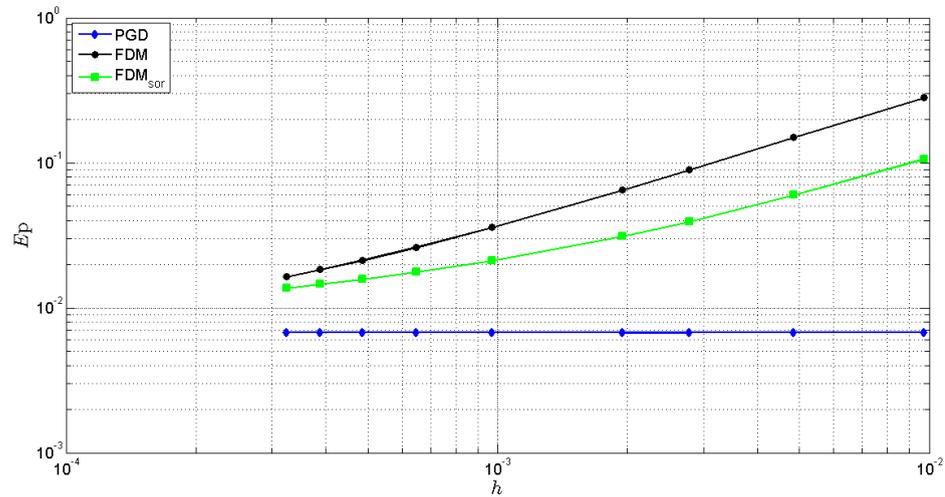


FIGURE 4.11: Erreurs dans le calcul de la pression pour ISJB en utilisant les méthodes DF, DF_{sur} et PGD.

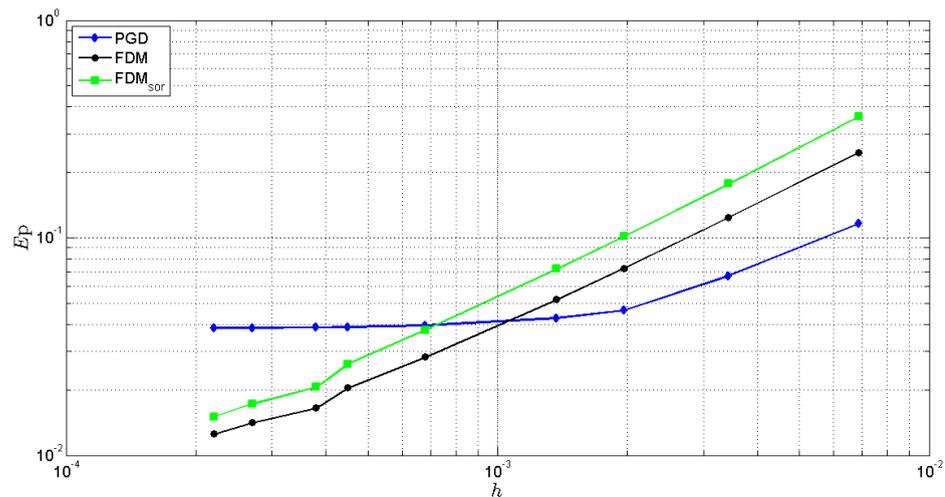


FIGURE 4.12: Erreurs dans le calcul de la pression pour ILJB en utilisant les méthodes DF, DF_{sur} et PGD.

4.2.1.5 Temps de calcul

Le temps de calcul machine nécessaire pour le calcul de la pression dans le film fluide avec les différentes configurations de maillage en utilisant les méthodes PGD, DF et DF_{sur} est présenté dans le tableau 4.5 et illustré sur les figures 4.13 et 4.14.

Noeuds	Temps de calcul (s)					
	ISJB			ILJB		
	PGD	DF	DF_{sur}	PGD	DF	DF_{sur}
2500	0.08	0.14	0.16	0.10	0.15	0.17
10000	0.09	0.79	0.86	0.11	0.81	0.87
40000	0.15	21.06	21.49	0.19	21.11	21.28
90000	0.33	123.08	125.25	0.42	122.67	124.59
160000	0.64	401.97	406.99	0.69	395.07	397.65
250000	0.95	981.70	992.09	1.07	979.91	988.56
360000	1.22	2045.88	2057.86	1.55	2027.67	2272.35

TABLEAU 4.5: Comparaison du temps de calcul nécessaire pour le calcul de la pression du film de fluide en utilisant DF, DF_{sur} et PGD.

Les calculs ont été effectués sur une machine (pc ordinateur) Intel Core i5-2450M CPU @ 2.50 GHz (6 GB RAM, 64 bit) en utilisant le langage de programmation Matlab.

Les figures 4.13 et 4.14 illustrent le temps de calcul lors de l'augmentation du nombre de nœuds en utilisant les méthodes DF, DF_{sur} et PGD.

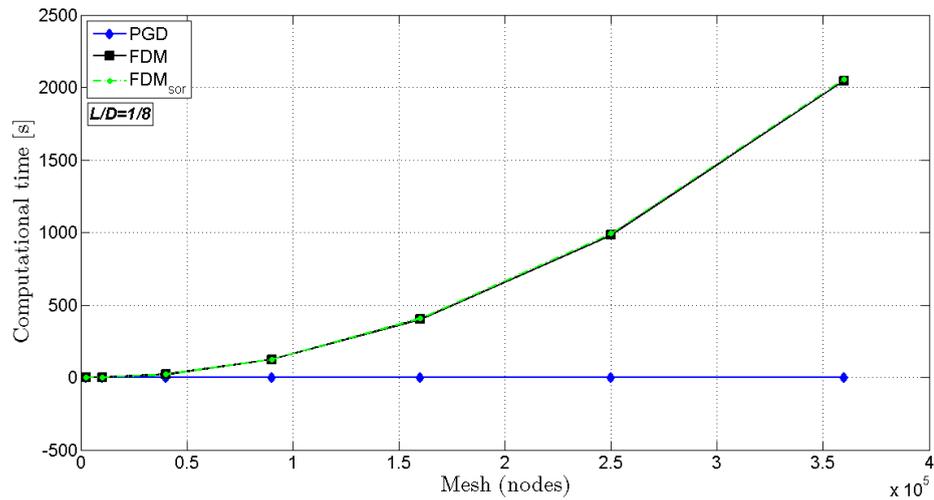


FIGURE 4.13: Comparaison du temps de calcul PGD vs DF en augmentant le nombre de nœuds pour ISJB ($L/D = 0.12$).

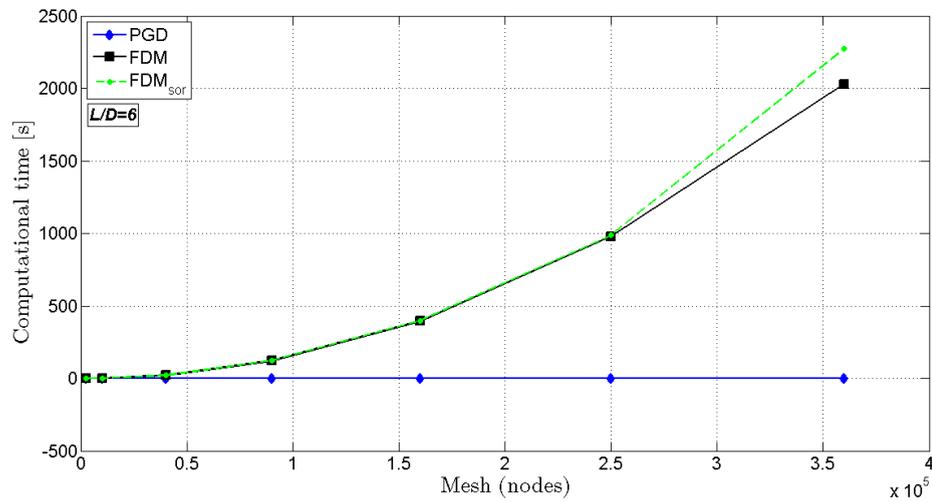


FIGURE 4.14: Comparaison du temps de calcul PGD vs DF en augmentant le nombre de nœuds pour ILJB ($L/D = 6$).

A travers cette comparaison, l'efficacité de la PGD par rapport à d'autres méthodes, en terme du temps de calcul, est fulgurante. Nous remarquons que, de plus en plus le maillage est fin, contrairement aux autres méthodes, la PGD reste la moins gourmande en temps de calcul. Cela est justifié par le fait que, dans la PGD, une représentation séparée du domaine est développée, rendant ainsi l'ordre des calculs considérablement réduit.

4.2.2 Palier de longueur finie

Une analyse plus complète des capacités de la méthode proposée peut être effectuée pour la résolution de l'équation de Reynolds dans le cas d'un palier de longueur finie (FJB) avec différentes valeurs de rapport L/D .

Le tableau suivant 4.6 décrit les paramètres du modèle liés au palier de longueur finie considéré dans ce cas.

Paramètres		Palier de longueur finie (FJB)			
L	longueur de palier	0.0125 m	0.025 m	0.05 m	0.1 m
D	diamètre de palier	50.10^{-3}m			
L/D	rapport	1/4	1/2	1	2
C	jeu radial	20.10^{-6}m			
ϵ	excentricité relative	0.1~0.9			
N	vitesse de rotation de l'arbre	1000 tr/min			
μ	viscosité dynamique de lubrifiant	0.19 Pa.s			
	maillage	100×100 nœuds			

TABLEAU 4.6: Caractéristiques de palier de longueur finie et propriétés de lubrifiant

4.2.2.1 Champ de pression

La distribution du champ de pression est calculée numériquement par la PGD (avec un maillage régulier 100×100 nœuds) dans le cas d'un palier de longueur finie ($L/D = 1$) (figure 4.15).

Dans la figure 4.16, les fonctions séparées normalisées $X_i(\theta)$ et $Y_i(z)$ pour $i = 1, \dots, 4$ sont illustrées. On remarque que pour le calcul de la solution PGD (dans le cas d'un problème de palier de longueur finie FJB), toutes les itérations d'enrichissement sont utilisées.

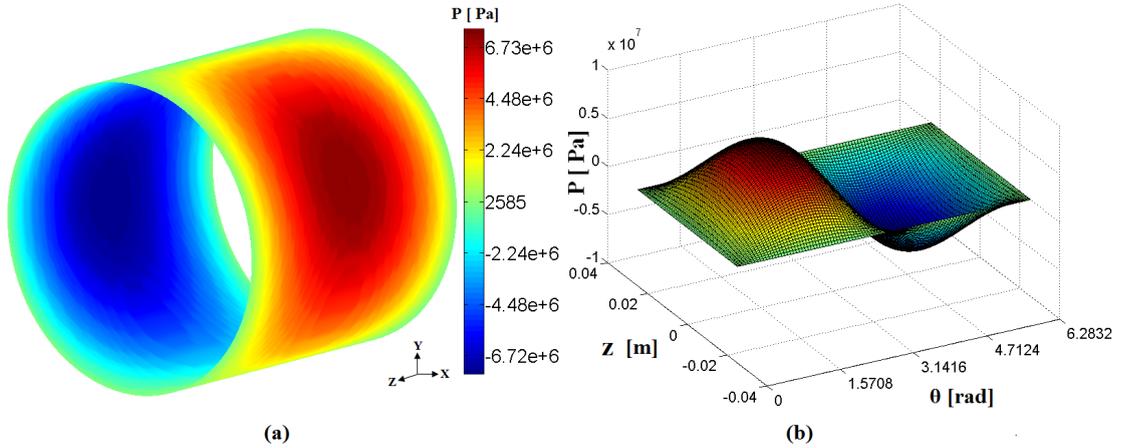


FIGURE 4.15: Distribution de pression pour FJB ($L/D = 1$) avec $\varepsilon = 0.1$ (taille de maillage = 100×100).

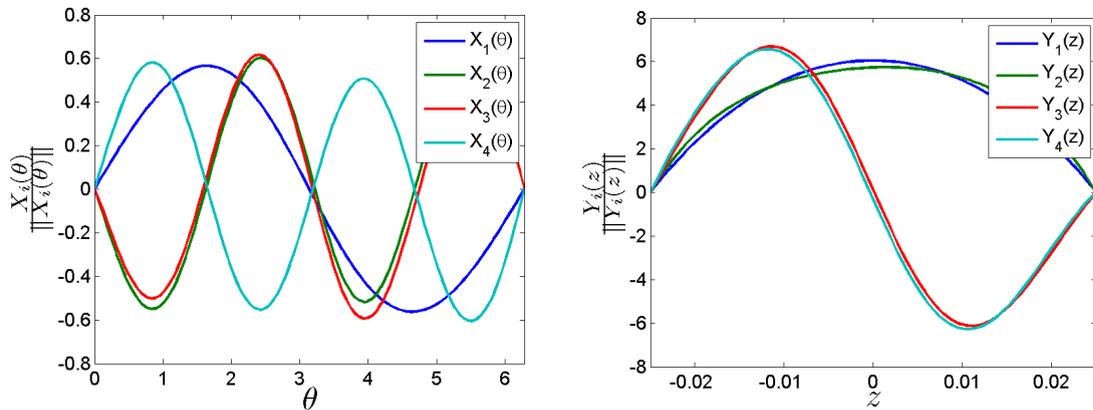


FIGURE 4.16: Fonctions normalisées $X_i(\theta)$ (à gauche) et $Y_i(z)$ (à droite) avec $i = 1, \dots, 4$.

Dans les figures 4.17 à 4.20, la distribution du champ de pression obtenue par la PGD le tracé 2d de la ligne médiane du palier (à $z = 0$); avec différentes valeurs de rapport L/D ($L/D = 1/4, 1/2, 1, 2$); est tracée et comparée aux solutions numériques des autres méthodes DF, DF_{sur} . On remarque que les courbes de pression sont assez proches l'une par rapport à l'autre. Afin d'enrichir la comparaison, l'évaluation des nombres de Sommerfeld et de frottement est effectuée dans les applications suivantes.

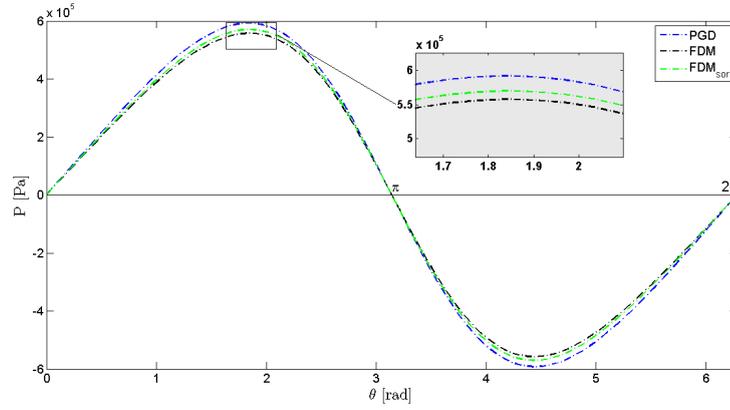


FIGURE 4.17: Comparaison de champ de pression obtenu par PGD, DF, DF_{sur} à $z = 0$ pour FJB ($L/D = 1/4$).

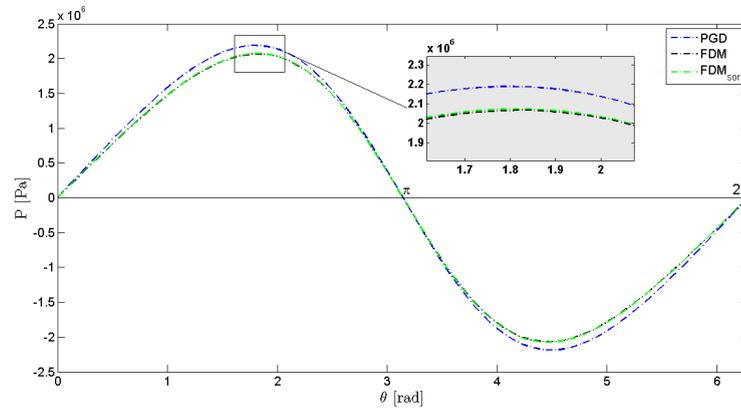


FIGURE 4.18: Comparaison de champ de pression obtenu par PGD, DF, DF_{sur} à $z = 0$ pour FJB ($L/D = 1/2$).

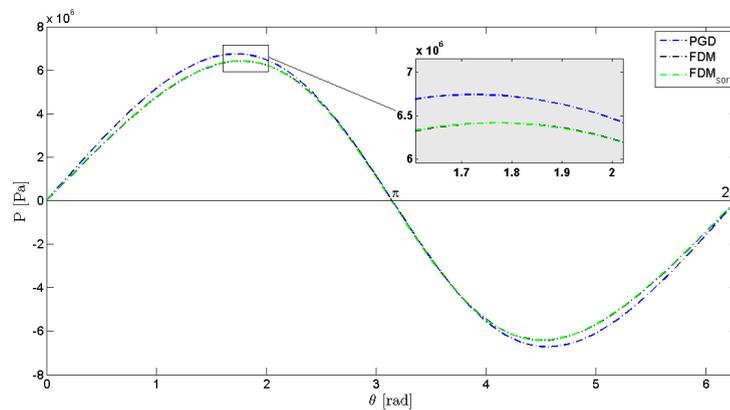


FIGURE 4.19: Comparaison de champ de pression obtenu par PGD, DF, DF_{sur} à $z = 0$ pour FJB ($L/D = 1$).

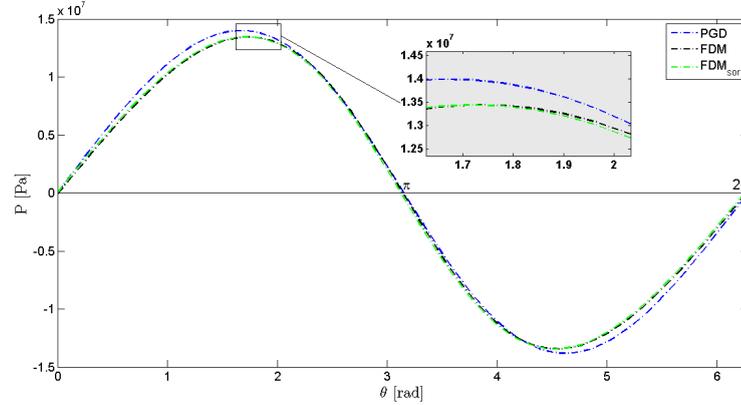


FIGURE 4.20: Comparaison de champ de pression obtenu par PGD, DF, DF_{sur} à $z = 0$ pour FJB ($L/D = 2$).

4.2.2.2 Nombre de Sommerfeld

Dans le tableau suivant 4.7, le nombre de Sommerfeld est calculé, pour différents rapports L/D ($L/D = 1/4 \sim 2$) et d'excentricités ϵ ($\epsilon = 0.1 \sim 0.9$), en utilisant les méthodes PGD, DF et DF_{sur} et comparé aux résultats donnés dans [3].

Paramètres		Excentricité relative ϵ								
L/D	Sommerfeld	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
1/4	S-[3]	16,2	7,57	4,49	2,83	1,78	1,07	0,58	0,263	0,0728
	S-PGD	16,24	7,57	4,47	2,81	1,75	1,03	0,55	0,233	0,0566
	S-DF	17,61	8,24	4,90	3,11	1,97	1,19	0,65	0,299	0,0862
	S-DF _{sur}	17,61	8,24	4,90	3,11	1,97	1,19	0,65	0,299	0,0861
1/2	S-[3]	4,32	2,03	1,21	0,784	0,508	0,318	0,184	0,0912	0,0309
	S-PGD	4,35	2,038	1,21	0,760	0,480	0,28	0,156	0,0699	0,0202
	S-DF	4,71	2,23	1,35	0,870	0,570	0,36	0,216	0,1097	0,0383
	S-DF _{sur}	4,71	2,23	1,35	0,870	0,570	0,36	0,216	0,1097	0,0382
1	S-[3]	1,33	0,631	0,388	0,260	0,178	0,12	0,0776	0,0443	0,0185
	S-PGD	1,38	0,653	0,394	0,255	0,167	0,105	0,0613	0,0299	0,0091
	S-DF	1,48	0,716	0,446	0,303	0,211	0,145	0,0947	0,0549	0,0233
	S-DF _{sur}	1,48	0,716	0,446	0,303	0,211	0,145	0,0947	0,0549	0,0233
2	S-[3]	0,559	0,271	0,173	0,122	0,0893	0,0654	0,0463	0,0297	0,0173
	S-PGD	0,638	0,306	0,190	0,128	0,0876	0,0576	0,0342	0,016	0,0059
	S-DF	0,676	0,33	0,212	0,149	0,1098	0,0806	0,0571	0,0367	0,0178
	S-DF _{sur}	0,676	0,33	0,212	0,149	0,1098	0,0806	0,0571	0,0367	0,0178

TABEAU 4.7: Nombre de Sommerfeld pour les différents rapport L/D avec les différentes valeurs d'excentricités relatives.

Les figures 4.17 à 4.20 montrent la variation du nombre de Sommerfeld en fonction de l'excentricité pour différentes valeurs du rapport L/D . On remarque que le

nombre de Sommerfeld calculé avec la méthode proposée PGD est conforme aux résultats obtenus dans [3] et aux méthodes DF, DF_{sur} .

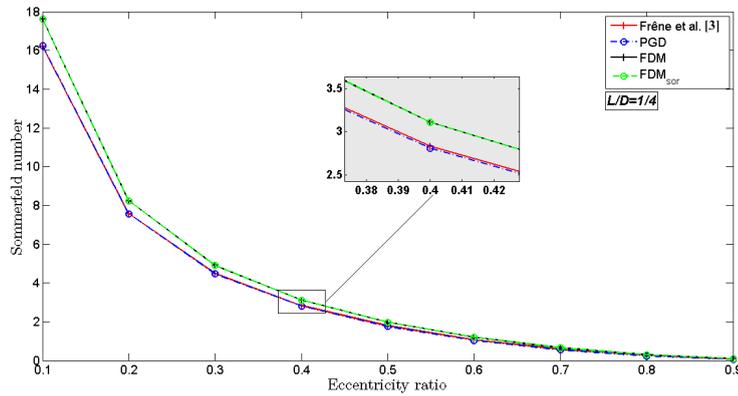


FIGURE 4.21: Nombre de Sommerfeld avec les différentes valeurs d'excentricité relative pour FJB ($L/D = 1/4$).

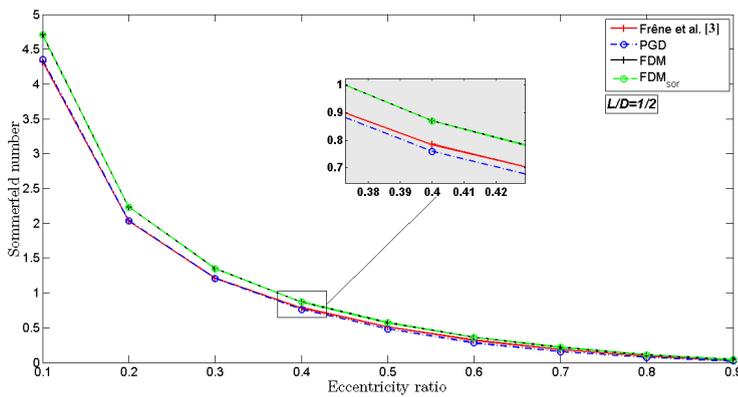


FIGURE 4.22: Nombre de Sommerfeld avec les différentes valeurs d'excentricité relative pour FJB ($L/D = 1/2$).

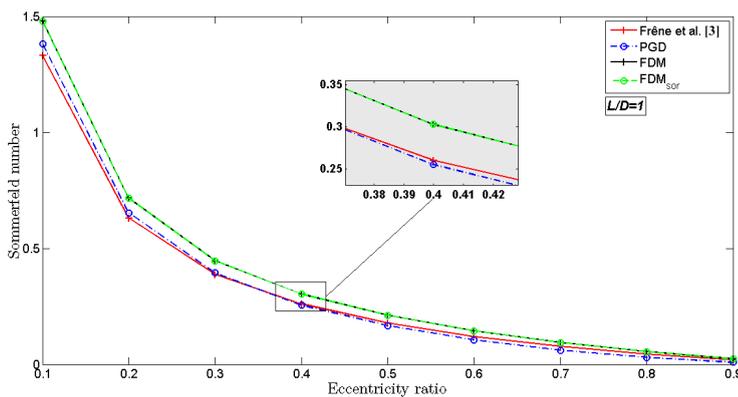


FIGURE 4.23: Nombre de Sommerfeld avec les différentes valeurs d'excentricité relative pour FJB ($L/D = 1$).

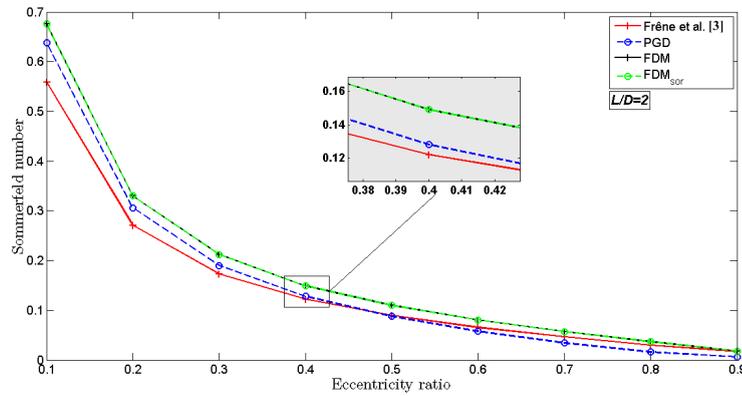


FIGURE 4.24: Nombre de Sommerfeld avec les différentes valeurs d'excentricité relative pour FJB ($L/D = 2$).

4.2.2.3 Nombre de frottement

Le tableau ci-dessous 4.8 présente la variation du nombre de frottement en fonction de la valeur de l'excentricité relative pour différents rapports L/D , en utilisant les méthodes PGD, DF et DF_{sur} et les résultats de la référence [3].

Paramètres		Excentricité relative ϵ								
L/D	Nombre de frottement	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
1/4	f-[3]	307.0	140.0	82.5	52.67	34.26	21.85	13.19	6.97	2.7
	f-PGD	322.0	152.0	92.6	60.57	40.67	25.64	15.2	7.88	2.56
	f-DF	349.0	165.0	100.6	65.91	43.67	28.11	16.78	8.53	2.81
	f- DF_{sur}	349.0	165.0	100.6	65.9	43.66	28.11	16.78	8.53	2.81
1/2	f-[3]	82.1	37.71	22.55	14.75	9.94	6.67	4.33	2.59	1.27
	f-PGD	86.47	41.07	25.05	16.48	10.98	7.13	4.33	2.3	0.91
	f-DF	93.33	44.35	27.08	17.82	11.85	7.62	4.48	2.12	0.4
	f- DF_{sur}	93.34	44.37	27.1	17.84	11.88	7.66	4.52	2.16	0.44
1	f-[3]	25.36	11.87	7.35	5.07	3.67	2.7	1.99	1.4	0.859
	f-PGD	27.51	13.17	8.16	5.51	3.81	2.6	1.68	0.98	0.41
	f-DF	29.26	13.88	8.44	5.49	3.55	2.13	1.02	0.12	0.59
	f- DF_{sur}	29.28	13.93	8.51	5.59	3.76	2.26	1.17	0.28	0.43
2	f-[3]	10.76	5.21	3.4	2.5	1.96	1.6	1.31	1.04	0.73
	f-PGD	12.67	6.17	3.94	2.76	1.99	1.42	0.94	0.52	0.26
	f-DF	13.2	6.24	3.75	2.38	1.46	0.74	0.14	0.4	0.9
	f- DF_{sur}	13.27	6.36	3.94	2.63	1.77	1.11	0.57	0.09	0.38

TABEAU 4.8: Nombre de frottement pour différents rapport L/D avec différentes valeurs d'excentricité relative.

Les figures 4.25 à 4.28 illustrent la variation du nombre de frottement en fonction de l'excentricité relative. On constate une très bonne correspondance entre les solutions de la PGD et celles des autres méthodes DF, DF_{sur} et la référence [3].

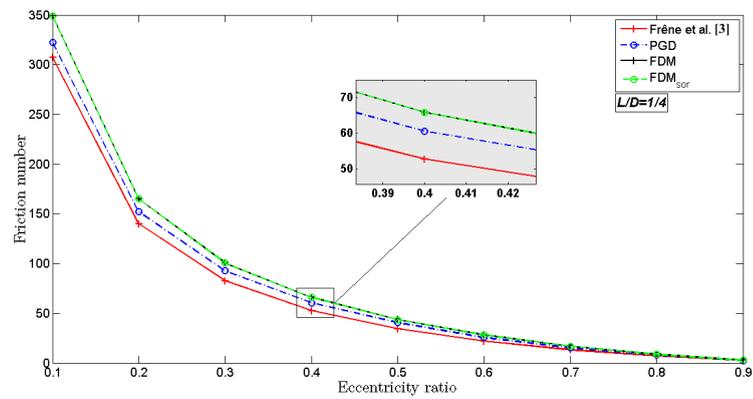


FIGURE 4.25: Nombre de frottement avec différentes valeurs d'excentricité relative pour FJB ($L/D = 1/4$).

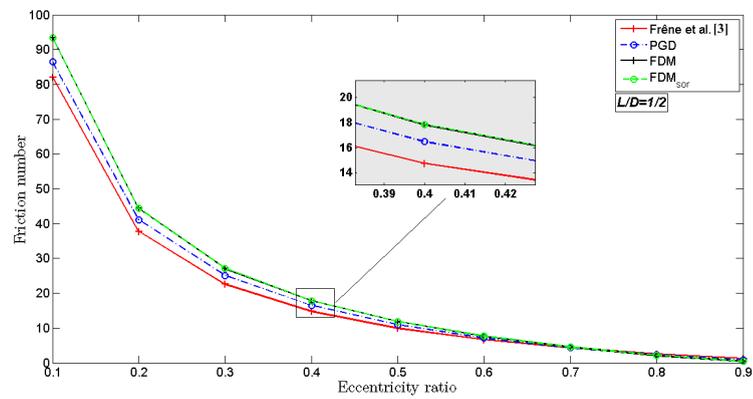


FIGURE 4.26: Nombre de frottement avec différentes valeurs d'excentricité relative pour FJB ($L/D = 1/2$).

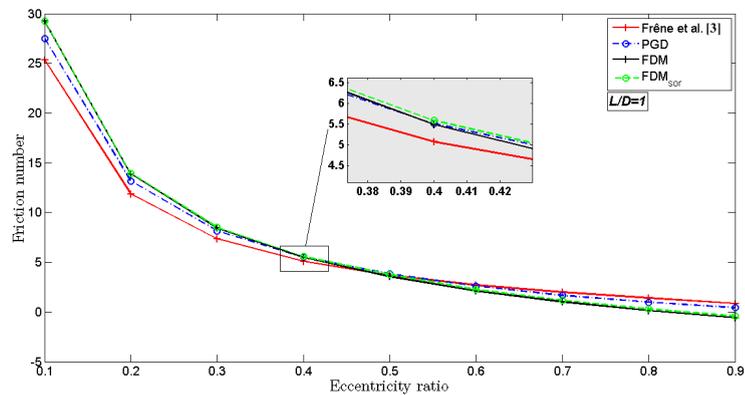


FIGURE 4.27: Nombre de frottement avec différentes valeurs d'excentricité relative pour FJB ($L/D = 1$).

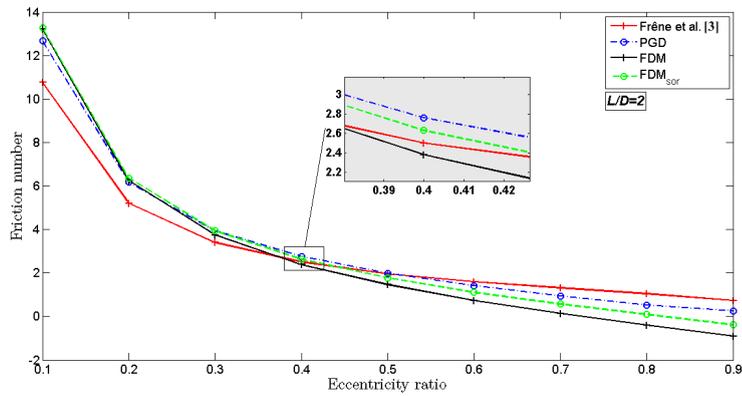


FIGURE 4.28: Nombre de frottement avec différentes valeurs d'excentricité relative pour FJB ($L/D = 2$).

4.2.2.4 Temps de calcul

Le temps de calculs nécessaire pour l'évaluation de la pression du film fluide opérant dans les conditions suivantes : $L/D = 1$, $\varepsilon = 0.1$ et maillage = $[50, 100, 200, \dots, 600]$, en utilisant les méthodes DF, DF_{sur} et PGD sont listées dans le tableau 4.9 et tracées dans la figure 4.29.

L/D	Méthode	Maillage (Nombre de nœuds)						
		2500	10000	40000	90000	160000	250000	360000
1	PGD	0.11	0.12	0.23	0.54	0.97	1.53	2.33
	DF	0.15	0.81	21.19	123.57	399.50	985.21	2036.59
	DF_{sur}	0.16	0.87	21.88	126.12	403.23	992.22	2048.64

TABLEAU 4.9: Comparaison du temps de calcul nécessaire pour le calcul de la pression du film fluide en utilisant DF, DF_{sur} et PGD pour FJB

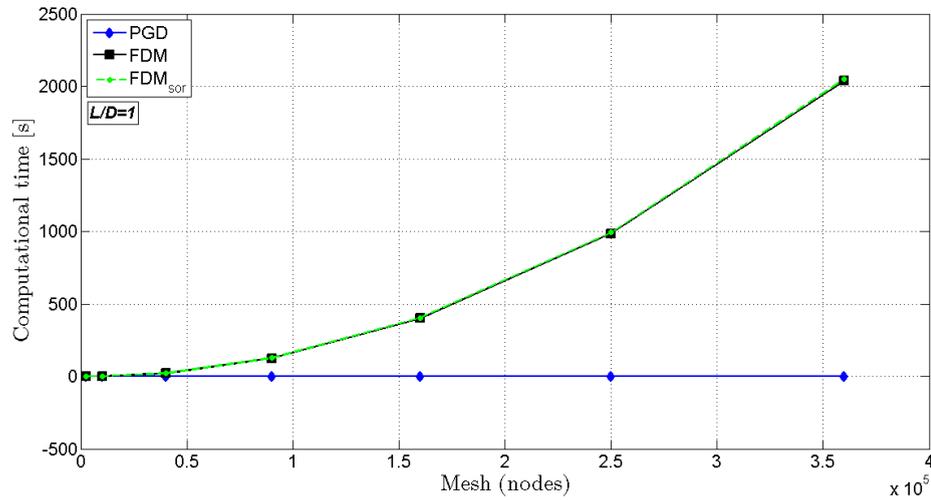


FIGURE 4.29: Comparaison du temps de calcul PGD vs DF en augmentent le nombre de nœuds pour FJB.

A travers cette comparaison, nous constatons que la méthode PGD est nettement plus efficace, en terme de temps de calcul, par rapport aux autres méthodes. Pour plus précision, le nombre d'opérations arithmétiques (Flops) requis pour le calcul de la solution est étudié dans la section 4.4.

4.3 Simulation du palier élasto-hydrodynamique

Dans cette partie, on présentera les résultats de la résolution numérique par la PGD du problème EHD. Cela nous a amené à résoudre de façon itérative les deux équations suivantes : l'équation de Reynolds adimensionnelle (3.41) et l'équation géométrique du film fluid (avec prise en compte des déformations élastiques de la couche mince de revêtement au niveau du coussinet) (3.42). On commencera tout d'abord, par la validation de notre modèle PGD pour le traitement des problèmes élasto-hydrodynamiques, et cela à travers deux modèles de références bien connus dans la littérature. on donnera par la suite le champs de déformation correspondants.

4.3.1 Étude de validation

4.3.1.1 Cas test 1

Dans ce premier cas de validation, on prend comme référence le travail de Mokhiamer et al. [4], où ils ont étudiés les performances d'un palier de longueur finie en prenant en compte la déformation élastique du revêtement au niveau du coussinet. Dans leur étude, ils considèrent les données suivantes : l'excentricité $\varepsilon = 0.4$, rapport géométrique $R/L = 0.5$, dans le cas d'un palier sans revêtement $C_0 = 0.00$ (palier rigide) et palier avec revêtement $C_0 = 0.02$, et un fluide à couple stresse de paramètre $\bar{l} = 0$ (le cas d'un fluide Newtonien).

Une comparaison des deux champs de pression, PGD/référence [4], calculés aux niveau de la direction circonférentielle du palier, est élaborée (figure 4.30).

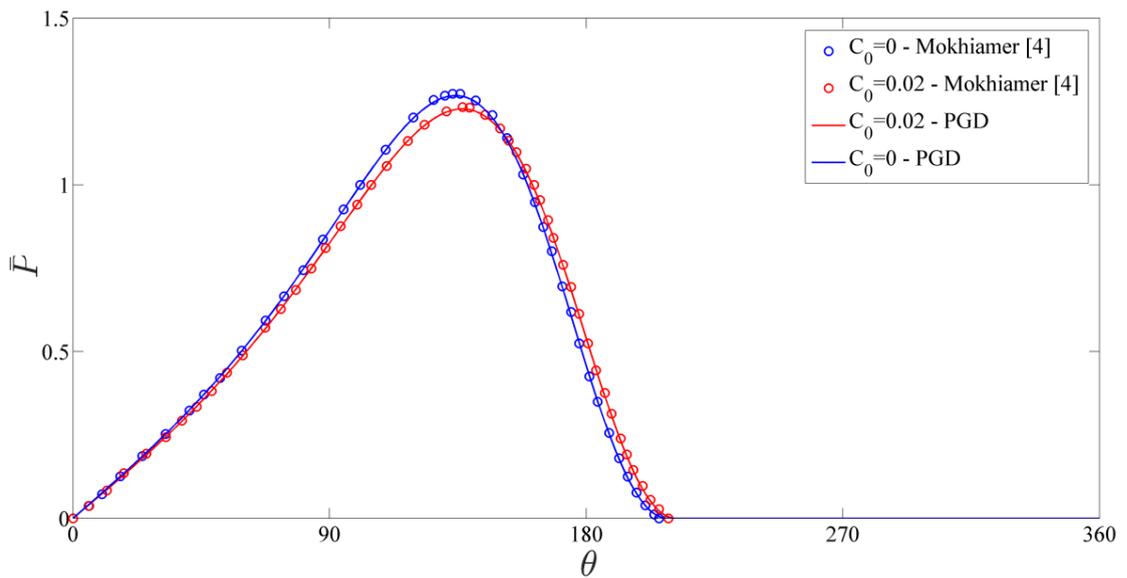


FIGURE 4.30: Validation du champ de pression obtenu avec les résultats de la référence [4].

On observe que les résultats de la distribution du champ de pression, au niveau de la ligne médiane du palier, obtenus par la méthode PGD concordent parfaitement avec ceux donnés dans [4]. Afin d'assurer la validité de notre modèle PGD, un deuxième cas test a été traité suivant une autre référence.

4.3.1.2 Cas test 2

La deuxième référence utilisée dans cette partie est celle de Jain et al.[5], où ils ont déterminé les caractéristiques statiques et dynamiques d'un palier à couche mince de revêtement dont le profil du film fluide est modifié par la déformation élastique du coussinet. L'étude montre des changements importants dans les caractéristiques de performance dus à la déformation du palier. La marge de stabilité du système de paliers lisses varie considérablement avec le coefficient de déformation. Les données adoptées dans cet exemple sont : l'excentricité $\varepsilon = 0.8$, rapport géométrique $R/L = 1$ et deux cas palier sans revêtement $C_0 = 0.00$ (palier rigide) et palier avec revêtement $C_0 = 0.01$.

La figure 4.31 présente une comparaison des résultats obtenus par PGD avec ceux de la référence [5] pour différentes valeurs du coefficient de déformation C_0 .

D'une manière similaire au cas précédent, les résultats de la PGD concordent avec ceux énoncés dans [5] et cela pour les deux cas de configurations.

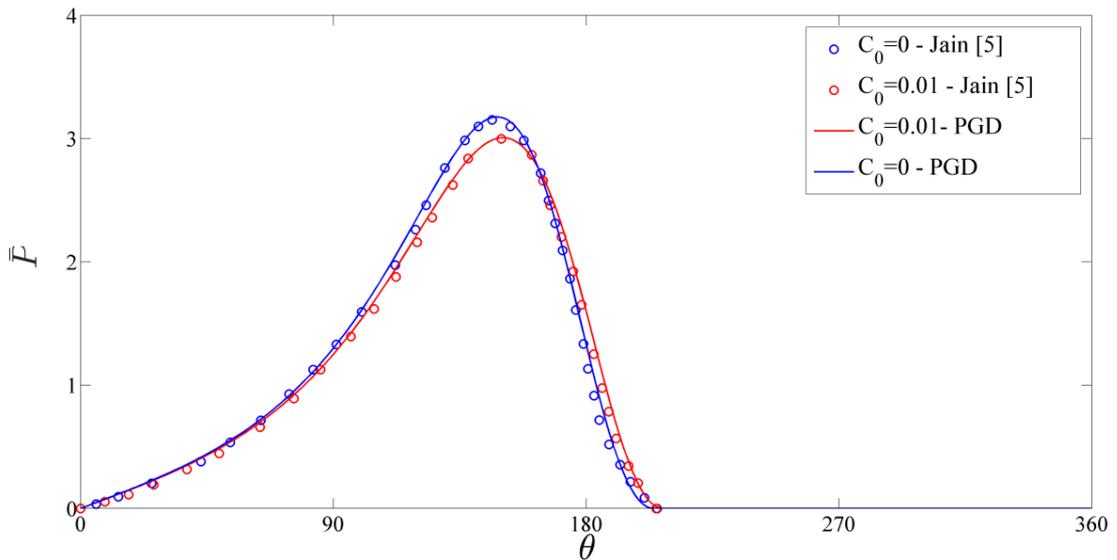


FIGURE 4.31: Validation du champ de pression obtenu avec les résultats de la référence [5].

4.3.1.3 Champ de déformation

Les figures 4.32 et 4.33 illustrent la distribution du champ de déformation à travers la surface du coussinet en 3D avec les valeurs maximales du déplacement radial adimensionnel $\bar{U}_{r_{max}}$ pour les deux cas tests respectivement.

On remarque que dans la zone active, c'est-à-dire celle qui subit un chargement important avec un champ de déplacements considérable, l'épaisseur du film est modifiée et connaît une augmentation notable.

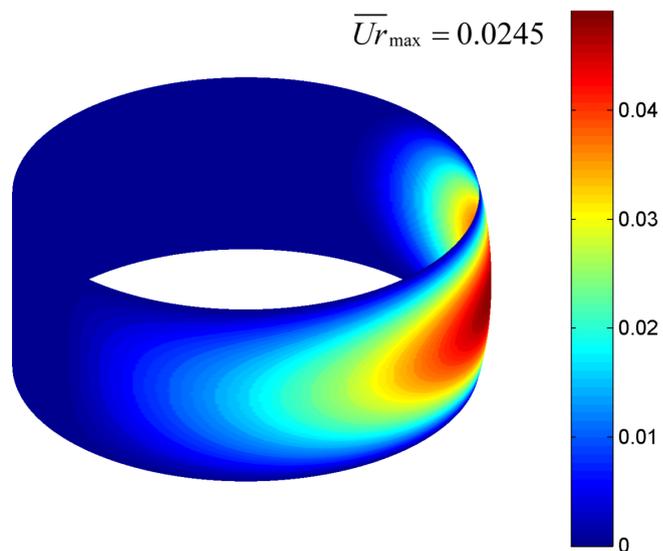


FIGURE 4.32: Déformation élastique du coussinet en 3D (cas test 1)

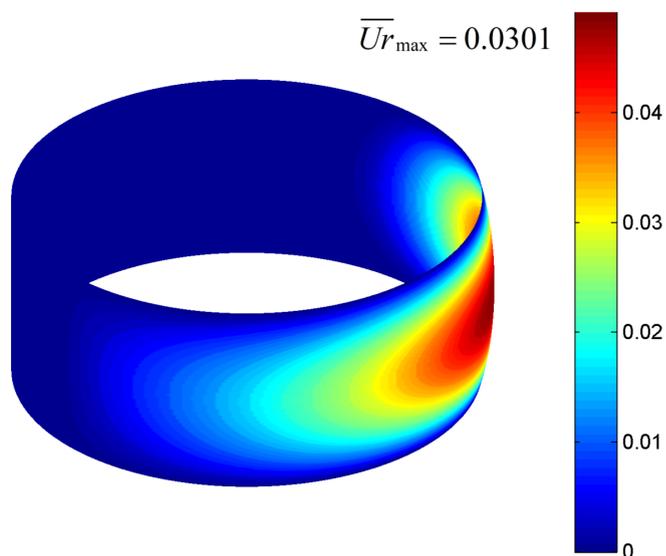


FIGURE 4.33: Déformation élastique du coussinet en 3D (cas test 2)

4.4 Coût de calcul

On constate que la majeure partie du temps machine CPU requis par une méthode numérique (PGD ou autre), pour la résolution des équations différentielles, est essentiellement engendrée par la détermination de la solution du système algébrique linéaire. Dans notre cas, la factorisation LU (Lower-Upper) avec pivot partiel est utilisée. La factorisation d'une matrice carrée d'ordre N en L et U nécessite $[(2/3) \cdot (N \times N)^3]$ opérations arithmétiques [94]. Compte tenu des Flops nécessaires pour résoudre le système linéaire, on peut dire que pour résoudre le système d'ordre résultant $[(N \times N)]$ obtenu à partir de DF, nous devons consommer $[(2/3) \cdot (N \times N)^3]$ opérations (pour DF_{sur} , il sera encore plus coûteux, en termes de nombre d'opérations, en raison de la procédure itérative de sur-relaxation). Alors que, dans la méthode PGD, la représentation séparée nous permet de réduire le nombre d'opérations à $[(2/3) \cdot (N)^3 \cdot \text{number of dimensions} \cdot \text{Max}_{terms} \cdot \text{Max}_{fp}]$ (algorithme 1), dans notre cas $PGD_{flops} = [(2/3) \cdot (N)^3 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 20]$.

Le résultat de cette discussion est donné dans le tableau 4.10 et tracé sur la figure 4.34.

Flops	Nombre de nœuds						
	2500	10000	40000	90000	160000	250000	360000
PGD	3,0000e+07	2,4000e+08	1,9200e+09	6,4800e+09	1,5360e+10	3,0000e+10	5,1840e+10
DF	2,3438e+10	1,5000e+12	9,6000e+13	1,0935e+15	6,1440e+15	2,3438e+16	6,9984e+16

TABLEAU 4.10: Nombre d'opérations avec les différentes tailles de maillages pour les méthodes PGD et DF.

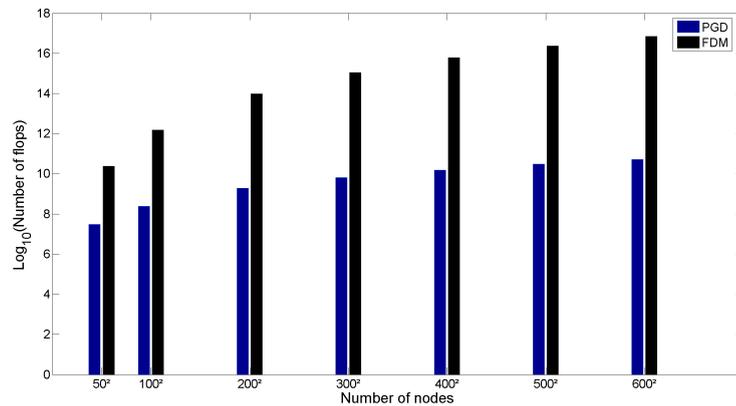


FIGURE 4.34: Nombre de flops pour les différentes configurations de maillage.

À partir de cette dernière comparaison, on remarque que le nombre d'opérations arithmétiques requis par la PGD est beaucoup plus petit que celui de la DF, et sa tendance à augmenter fortement moins prononcé lorsque le nombre de nœuds devient prohibitif, ce qui n'est pas le cas de la DF.

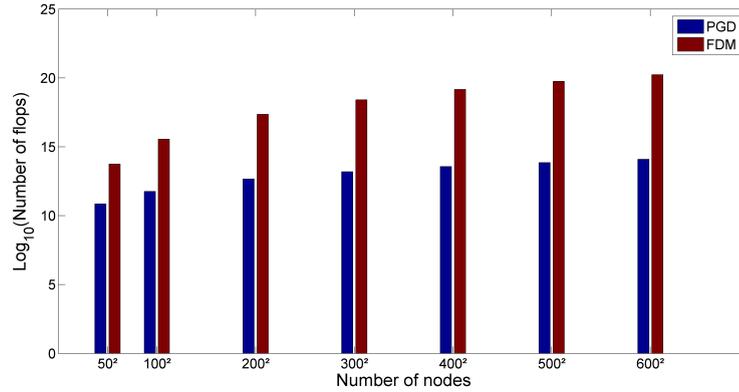


FIGURE 4.35: Nombre d'opérations arithmétiques (flops) obtenu par les méthodes PGD et DF.

Le même constat peut être reformuler pour le cas du problème EHD, sauf que dans ce dernier, le coût de calcul est plus important car une procédure itérative est exigée pour résoudre les deux équations de Reynolds et de l'élasticité. Le coût de calcul est donc multiplié par le nombre d'itérations nécessaires pour la convergence des résultats ; c'est-à-dire $PGD_{EHDflops} = Max_{iteration} \times [(2/3) \cdot (N)^3 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 20]$.

4.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons mis en exergue l'efficacité de la méthode PGD en termes de précision des résultats et rapidité des calculs, à travers l'étude de cas relatifs à la résolution de problèmes hydrodynamiques rigides et déformables. Ce travail pourrait être considéré comme un des premiers travaux dans l'utilisation des méthodes de réduction de modèles en générale et de la PGD en particulier, pour la résolution des problèmes de lubrification dans les paliers lisses. Il s'agit d'un premiers apport encourageant, que nous envisageant d'étendre à des problèmes complexes des paliers hydrodynamiques.

Conclusions et perspectives

A travers notre présente contribution, nous avons montré l'efficacité de la méthode de réduction de modèles "PGD" pour la simulation numérique du comportement hydrodynamique et élastohydrodynamique des paliers lisses, à travers une étude comparée, qui a mis en exergue aussi bien sa précision que sa capacité de réduction des temps de calculs.

Pour ce faire, nous avons d'abord établi les développements mathématiques et algorithmiques requis et résolu l'équation de Reynolds pour le problème de la lubrification hydrodynamique des paliers lisses dans le cas où cette équation dispose d'une solution analytique pour les paliers infiniment courts et infiniment longs. Ce qui nous a permis de montrer que dans tous ces cas, la précision de la méthode PGD est équivalente à celle du modèle standard des solutions analytiques d'une part, et d'autre part, qu'en terme de réduction des temps de calcul, la méthode de réduction de modèle PGD surpasse très largement les performances des méthode classiques et des résultats consultés dans la littérature.

Dans une deuxième étape, la méthode PGD a été ensuite appliquée à la résolution du problème de lubrification élasto-hydrodynamique, où nous avons démontré son apport considérable en terme de temps de calcul, tout en préservant une précision comparable.

En perspective, le développement et la mise en œuvre de l'approche PGD paramétrique pour la résolution de problèmes de lubrification inhérents au comportement thermo-élasto-hydrodynamique TEHD, au mésalignement, à la variation géométriques des textures, en relation avec l'état de surface des paliers, sont autant d'objectifs prioritaires et imminents, inscrits dans les thématique de recherche de notre équipe, au sein du laboratoire Energétique, Mécanique et Ingénierie.

Références bibliographiques

- [1] Pascal GUAY. Principes de base de la lubrification. *Techniques de l'ingénieur Lubrification*, base documentaire : TIB465DUO.(ref. article : tri1500), 2014.
- [2] Jean Frêne. La tribologie de l'antiquité à nos jours. *ANNALS*, 24 :26, 2003.
- [3] Jean Frêne, Daniel Nicolas, Bernard Degueurce, Daniel Berthe, and Maurice Godet. *Hydrodynamic lubrication : bearings and thrust bearings*, volume 33. Elsevier, 1997.
- [4] UM Mokhiamer, WA Crosby, and HA El-Gamal. A study of a journal bearing lubricated by fluids with couple stress considering the elasticity of the liner. *Wear*, 224(2) :194–201, 1999.
- [5] SC Jain, R Sinhasan, and DV Singh. The performance characteristics of thin compliant shell journal bearings. *Wear*, 81(2) :251–261, 1982.
- [6] Richard Stribeck and M Schröter. *Die wesentlichen Eigenschaften der Gleit-und Rollenlager : Untersuchung einer Tandem-Verbundmaschine von 1000 PS*. Springer, 1903.
- [7] Jean Frêne. *Régimes d'écoulement non laminaire en films minces : application aux paliers lisses*. PhD thesis, 1974.
- [8] Pascal GUAY. Principes de base de la lubrification. *Techniques de l'ingénieur Lubrification*, base documentaire : TIB465DUO.(ref. article : tri1500), 2014.
- [9] Beauchamp Tower. First report on friction experiments. *Proceedings of the institution of mechanical engineers*, 34(1) :632–659, 1883.

- [10] NP Petrov. Friction in machines and the effect of the lubricant. *Inzherernii Zhurnal*, 1 :71–140, 1883.
- [11] Osborne Reynolds. On the theory of lubrication and its application to mr. beauchamp tower's experiments, including an experimental determination of the viscosity of olive oil. *Proceedings of the Royal Society of London*, 40 (242-245) :191–203, 1886.
- [12] Oscar Pinkus and Beno Sternlicht. *Theory of hydrodynamic lubrication*. McGraw-Hill, 1961.
- [13] Sommerfeld A. *Zur hydrodynamischen theorie der schmiermittelreibung*, volume 50. *Z. angew. Math. Phys*, 1904.
- [14] Herbert Walker Swift. The stability of lubricating films in journal bearings.(includes appendix). In *Minutes of the Proceedings of the Institution of Civil Engineers*, volume 233, pages 267–288. Thomas Telford-ICE Virtual Library, 1932.
- [15] W Steiber. *Das schwimmlager krayn*, 1933.
- [16] George B DuBois and d W Ocvirk. *Analytical derivation and experimental evaluation of short-bearing approximation for full journal bearings*. US Government Printing Office Washington, 1953.
- [17] AGM Michell. Progress in fluid-film lubrication. *Trans. ASME*, 51(2) : 153–163, 1929.
- [18] Arnold Sommerfeld. Zur hydrodynamischen theorie der schmiermittelreibung. *Z. Math. Phys*, 50(97) :155, 1904.
- [19] D Sfyris and A Chasalevris. An exact analytical solution of the reynolds equation for the finite journal bearing lubrication. *Tribology International*, 55 :46–58, 2012.
- [20] A Chasalevris and D Sfyris. Evaluation of the finite journal bearing characteristics, using the exact analytical solution of the reynolds equation. *Tribology International*, 57 :216–234, 2013.
- [21] Derman G Christopherson. A new mathematical method for the solution of film lubrication problems. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers*, 146(1) :126–135, 1941.

- [22] Colin W Cryer. The method of christopherson for solving free boundary problems for infinite journal bearings by means of finite differences. *Mathematics of computation*, 25(115) :435–443, 1971.
- [23] AA Raimondi and John Boyd. A solution for the finite journal bearing and its application to analysis and design : I. *ASLE Transactions*, 1(1) :159–174, 1958.
- [24] M Deligant, P Podevin, F Vidal, W Tyminski, S Guilain, and H Lahjaily. 3d thermal steady-state cfd analysis of power friction losses in a turbocharger’s journal bearing and comparison with finite difference method and experimentation. 12th eaec, 2009.
- [25] JF Booker and KH Huebner. Application of finite element methods to lubrication : an engineering approach. *Journal of Tribology*, 94(4) :313–323, 1972.
- [26] PE Allaire, JC Nicholas, and EJ Gunter. Systems of finite elements for finite bearings. *Journal of Tribology*, 99(2) :187–194, 1977.
- [27] Dara W Childs. *Turbomachinery rotordynamics : phenomena, modeling, and analysis*. John Wiley & Sons, 1993.
- [28] Arto Sorsimo, Mika Juntunen, Rolf Stenberg, and Juha Videman. Finite element analysis of the reynolds lubrication equation with cavitation. *J. Struct. Mech*, 45(4) :188–200, 2012.
- [29] N Raghavendra, MC Math, and Pramod R Sharma. Finite element method analysis of hydrodynamic journal bearing. *European Journal of Advances in Engineering and Technology*, 2(2) :92–101, 2015.
- [30] LR Gero and CM McC. Ettles. An evaluation of finite difference and finite element methods for the solution of the reynolds equation. *ASLE transactions*, 29(2) :166–172, 1986.
- [31] KP Gertzos, PG Nikolakopoulos, and CA Papadopoulos. Cfd analysis of journal bearing hydrodynamic lubrication by bingham lubricant. *Tribology International*, 41(12) :1190–1204, 2008.
- [32] M Deligant, P Podevin, and G Descombes. Cfd model for turbocharger journal bearing performances. *Applied Thermal Engineering*, 31(5) :811–819, 2011.

- [33] Priyanka Tiwari and Veerendra Kumar. Analysis of hydrodynamic journal bearing using cfd and fsi technique. *International Journal Of Engineering Research & Technology (IJERT) ISSN*, pages 2278–0181, 2014.
- [34] Sudhakar Gantasala, IR Praveen Krishna, and AS Sekhar. Dynamic analysis of rotors supported on journal bearings by solving reynolds equation using pseudospectral method. In *Proceedings of the 9th IFToMM International Conference on Rotor Dynamics*, pages 1009–1019. Springer, 2015.
- [35] Max Born. Arnold johannes wilhelm sommerfeld. 1868-1951. *Obituary Notices of Fellows of the Royal Society*, pages 275–296, 1952.
- [36] Heinrich Hertz. Über die berührung fester elastischer körper. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 92 :156–171, 1882.
- [37] AM Ertel. Hydrodynamic lubrication based on new principles. *Akad. Nauk. SSSR, Prikladnaya Matematika i Mekhanika*, 3(2) :41–52, 1939.
- [38] Carl Barus. Isothermals, isopiestic and isometrics relative to viscosity. *American journal of science*, (266) :87–96, 1893.
- [39] SC Jain and R Sinhasan. Performance of flexible shell journal bearings with variable viscosity lubricants. *Tribology international*, 16(6) :331–339, 1983.
- [40] Hamid Boucherit, Mustapha Lahmar, Benyebka Bou-Saïd, and John Tichy. Comparison of non-newtonian constitutive laws in hydrodynamic lubrication. *Tribology letters*, 40(1) :49–57, 2010.
- [41] GV Kolosov. *On an application of complex function theory to a plane problem of the mathematical theory of elasticity*. PhD thesis, Dissertation, Dorpat University, Yuriev, 1909.
- [42] NI Muskhelishvili. Some basic problems of the mathematical theory of elasticity, 1966.
- [43] Liviu Solomon. *Élasticité linéaire*. Masson et Cie Editeurs (online edition : Adriana Vasilescu), 1968.
- [44] CA Foord, WCj Hammann, and A Cameron. Evaluation of lubricants using optical elastohydrodynamics. *ASLE transactions*, 11(1) :31–43, 1968.
- [45] Ramsey Gohar. Oil film thickness and rolling friction in elastohydrodynamic point contact. *Journal of Lubrication Technology*, 93(3) :371–379, 1971.

- [46] R Gohar and A Cameron. The mapping of elastohydrodynamic contacts. *ASLE TRANSACTIONS*, 10(3) :215–225, 1967.
- [47] Lavern D Wedeven, D Evans, and Alastair Cameron. Optical analysis of ball bearing starvation. *Journal of Lubrication Technology*, 93(3) :349–361, 1971.
- [48] YP Chiu. Contact shape and non-newtonian effects in elastohydrodynamic point contacts. *Lub. Eng.*, 28 :48, 1972.
- [49] G Guangteng, PM Cann, and HA Spikes. A study of parched lubrication. *Wear*, 153(1) :91–105, 1992.
- [50] PM Cann, HA Spikes, and J Hutchinson. The development of a spacer layer imaging method (slim) for mapping elastohydrodynamic contacts. *Tribology Transactions*, 39(4) :915–921, 1996.
- [51] PM Cann and HA Spikes. Film thickness measurements of lubricating greases under normally starved conditions. *NLGI spokesman*, 56(2) :21–27, 1992.
- [52] PM Cann and HA Spikes. Thin film optical interferometry in the study of grease lubrication in a rolling point contact. *Acta Tribologica*, 2(1) :45–50, 1994.
- [53] Petrusevich A. I. Fundamental conclusions from the hydrodynamic contact theory of lubrication. *Izv. Akad. Nauk. SSSR (OTN)*, 2 :209, 1951.
- [54] D Dowson and GR Higginson. A numerical solution to the elasto-hydrodynamic problem. *Journal of Mechanical Engineering Science*, 1(1) :6–15, 1959.
- [55] Bernard J Hamrock and Duncan Dowson. Isothermal elastohydrodynamic lubrication of point contacts. 2 : Ellipticity parameter results. 1976.
- [56] KP Oh and SM Rohde. Numerical solution of the point contact problem using the finite element method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 11(10) :1507–1518, 1977.
- [57] HP Evans and RW Snidle. The isothermal elastohydrodynamic lubrication of spheres. *Journal of Lubrication Technology*, 103(4) :547–557, 1981.

- [58] Bernard J Hamrock and Duncan Dowson. Isothermal elastohydrodynamic lubrication of point contacts : Part 1—theoretical formulation. *Journal of Lubrication Technology*, 98(2) :223–228, 1976.
- [59] Bernard J Hamrock and Duncan Dowson. Isothermal elastohydrodynamic lubrication of point contacts. 2 : Ellipticity parameter results. 1976.
- [60] Bernard J Hamrock and Duncan Dowson. Isothermal elastohydrodynamic lubrication of point contacts : part iii—fully flooded results. *Journal of Lubrication Technology*, 99(2) :264–275, 1977.
- [61] Bernard J Hamrock and Duncan Dowson. Isothermal elastohydrodynamic lubrication of point contacts : Part iv—starvation results. *Journal of Lubrication Technology*, 99(1) :15–23, 1977.
- [62] AP Ranger, CMM Ettles, and A Cameron. The solution of the point contact elasto-hydrodynamic problem. In *Proceedings of the Royal Society of London A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, volume 346, pages 227–244. The Royal Society, 1975.
- [63] RJ Chittenden, D Dowson, JF Dunn, and CM Taylor. A theoretical analysis of the isothermal elastohydrodynamic lubrication of concentrated contacts. i. direction of lubricant entrainment coincident with the major axis of the hertzian contact ellipse. In *Proceedings of the Royal Society of London A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, volume 397, pages 245–269. The Royal Society, 1985.
- [64] HP Evans and RW Snidle. Inverse solution of reynolds' equation of lubrication under point-contact elastohydrodynamic conditions. *Journal of Lubrication Technology*, 103(4) :539–546, 1981.
- [65] CC Kweh, HP Evans, and RW Snidle. Elastohydrodynamic lubrication of heavily loaded circular contacts. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C : Mechanical Engineering Science*, 203(2) :133–148, 1989.
- [66] J Seabra and D Berthe. Elastohydrodynamic point contacts part i : Formulation and numerical solution. *Wear*, 130(2) :301–318, 1989.
- [67] Antonius Adrianus Lubrecht. *The numerical solution of the elastohydrodynamically lubricated line-and point contact problem, using multigrid techniques*. PhD thesis, Universiteit Twente, 1987.

- [68] Elastohydrodynamically Lubricated. Multigrid, an alternative method for calculating film thickness and pressure profiles in elastohydrodynamically lubricated line contacts. *Journal of tribology*, 108 :551, 1986.
- [69] Achi Brandt and AA Lubrecht. Multilevel matrix multiplication and fast solution of integral equations. *Journal of Computational Physics*, 90(2) : 348–370, 1990.
- [70] Cornelis Henricus Venner. *Multilevel solution of the EHL line and point contact problems*. University of Twente, 1991.
- [71] Cornelis H Venner and WE Ten Napel. Multilevel solution of the elastohydrodynamically lubricated circular contact problem part i : theory and numerical algorithm. *Wear*, 152(2) :351–367, 1992.
- [72] Cornelis H Venner and WE Ten Napel. Multilevel solution of the elastohydrodynamically lubricated circular contact problem part 2 : smooth surface results. *Wear*, 152(2) :369–381, 1992.
- [73] Y Ju and TN Farris. Spectral analysis of two-dimensional contact problems. *TRANSACTIONS-AMERICAN SOCIETY OF MECHANICAL ENGINEERS JOURNAL OF TRIBOLOGY*, 118 :320–328, 1996.
- [74] WZ Wang, H Wang, YC Liu, YZ Hu, and D Zhu. A comparative study of the methods for calculation of surface elastic deformation. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part J : Journal of Engineering Tribology*, 217(2) :145–154, 2003.
- [75] Olgierd Cecil Zienkiewicz, Robert Leroy Taylor, and Robert Lee Taylor. *The finite element method*, volume 3. McGraw-hill London, 1977.
- [76] H Lu, M Berzins, CE Goodyer, and PK Jimack. High-order discontinuous galerkin method for elastohydrodynamic lubrication line contact problems. *International Journal for Numerical Methods in Biomedical Engineering*, 21 (11) :643–650, 2005.
- [77] H Lu, M Berzins, CE Goodyer, PK Jimack, and M Walkley. Adaptive high-order finite element solution of transient elastohydrodynamic lubrication problems. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part J : Journal of Engineering Tribology*, 220(3) :215–225, 2006.

- [78] TG Hughes, CD Elcoate, and HP Evans. A novel method for integrating first-and second-order differential equations in elastohydrodynamic lubrication for the solution of smooth isothermal, line contact problems. *International journal for numerical methods in engineering*, 44(8) : 1099–1113, 1999.
- [79] M Hartinger, D Gosman, S Ioannides, and H Spikes. Two-and three-dimensional cfd modelling of elastohydrodynamic lubrication. In *Proc. 34th Leeds-Lyon Symp. Trib*, 2007.
- [80] Hong Yiping, Chen Darong, Kong Xianmei, and Wang Jiadao. Model of fluid–structure interaction and its application to elastohydrodynamic lubrication. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 191(37) :4231–4240, 2002.
- [81] Gregory M Hulbert and Thomas JR Hughes. Space-time finite element methods for second-order hyperbolic equations. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 84(3) :327–348, 1990.
- [82] Gregory Beylkin and Martin J Mohlenkamp. Algorithms for numerical analysis in high dimensions. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 26(6) : 2133–2159, 2005.
- [83] Amine Ammar, B Mokdad, Francisco Chinesta, and Roland Keunings. A new family of solvers for some classes of multidimensional partial differential equations encountered in kinetic theory modeling of complex fluids. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 139(3) :153–176, 2006.
- [84] Francisco Chinesta, Amine Ammar, François Lemarchand, Pierre Beauchene, and Fabrice Boust. Alleviating mesh constraints : Model reduction, parallel time integration and high resolution homogenization. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 197(5) :400–413, 2008.
- [85] Anthony Nouy. Proper generalized decompositions and separated representations for the numerical solution of high dimensional stochastic problems. *Archives of Computational Methods in Engineering*, 17(4) : 403–434, 2010.
- [86] Anindya Chatterjee. An introduction to the proper orthogonal decomposition. *Current science*, 78(7) :808–817, 2000.

- [87] L Cordier and M Bergmann. Réduction de dynamique par décomposition orthogonale aux valeurs propres (pod). *Ecole de printemps OCET*, pages 12–17, 2006.
- [88] Callery Allery, Claudine Béghein, and Aziz Hamdouni. Applying proper orthogonal decomposition to the computation of particle dispersion in a two-dimensional ventilated cavity. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 10(8) :907–920, 2005.
- [89] Kari Karhunen. *Über lineare Methoden in der Wahrscheinlichkeitsrechnung*, volume 37. Universitat Helsinki, 1947.
- [90] M Loeve. Probability theory. (the university series in higher mathematics.) princeton, 1963.
- [91] Francisco Chinesta, Pierre Ladeveze, and Elías Cueto. A short review on model order reduction based on proper generalized decomposition. *Archives of Computational Methods in Engineering*, 18(4) :395–404, 2011.
- [92] Francisco Chinesta, Amine Ammar, and Elías Cueto. Recent advances and new challenges in the use of the proper generalized decomposition for solving multidimensional models. *Archives of Computational methods in Engineering*, 17(4) :327–350, 2010.
- [93] Francisco Chinesta, Amine Ammar, Adrien Leygue, and Roland Keunings. An overview of the proper generalized decomposition with applications in computational rheology. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 166 (11) :578–592, 2011.
- [94] Jack Dongarra, Kaj Madsen, and Jerzy Wasniewski. *Applied Parallel Computing : State of the Art in Scientific Computing*, volume 3732. Springer Science & Business Media, 2006.