



مطبوعة بيداغوجية تحت عنوان:

محاضرات

في مقياس الأدوات الرياضية للقرار

تخصص: مالية كمية

موجهة لطلبة: الدكتوراه

من إعداد الدكتور: سعيد عبد الحكيم

قسم: علوم التسيير

الفهرس

الصفحة

مقدمة

الباب الأول:	6
الفصل الأول: تحليل الانحدار	6
1-1- الانحدار الخطي البسيط	6
1-1-1-مدلول الانحدار الخطي البسيط	6
1-1-2-المعادلة التقديرية وتقدير معاملات نموذج الانحدار الخطي البسيط	7
2-1- الانحدار الخطي المتعدد	10
1-2-1- عرض نموذج الانحدار الخطي المتعدد	10
2-2-1- تقدير معاملات نموذج الانحدار الخطي المتعدد	12
الفصل الثاني: تحليل السلاسل الزمنية	15
1-2- التعريف بالسلاسل الزمنية وأنواعها	15
2-2- مكونات السلاسل الزمنية	17
3-2- نماذج السلاسل الزمنية	20
4-2- تحليل مكونات السلاسل الزمنية	23
5-2- التنبؤ في السلاسل الزمنية	37
الفصل الثالث: نماذج شعاع الانحدار الخطي (نماذج الـ VAR)	39
1-3- بعض المفاهيم حول نماذج شعاع الانحدار الخطي	39
2-3- الصيغة الرياضية لنماذج شعاع الانحدار الخطي	39
3-3- خصائص نموذج شعاع الانحدار الخطي (نماذج الـ VAR)	43
4-3- تقدير نموذج شعاع الانحدار الخطي (نماذج الـ VAR)	44
الفصل الرابع: اختبار السببية ومراحله	47
1-4- مدلول العلاقة السببية	47
2-4- اختبار Granger للسببية	47

48.....	3-4-مراحل اختبار <i>Granger</i> للسببية
51.....	الفصل الخامس: استقرارية السلاسل الزمنية
51.....	1-5-مدلول الاستقرارية والغاية من دراستها
52.....	2-5-اختبارات الاستقرارية
53.....	3-5-مراحل اختبار استقرارية السلاسل الزمنية
55.....	الفصل السادس: التكامل المشترك ونماذج تصحيح الخطأ
56.....	1-6-مدلول التكامل المشترك واختبارات الكشف عنه
56.....	1-1-6-مدلول التكامل المشترك... <i>Cointegration</i>
57.....	2-1-6-اختبار التكامل المشترك
58.....	2-6-شعاع تصحيح الخطأ <i>ECM</i>
58.....	1-2-6-نموذج شعاع تصحيح الخطأ البسيط
62.....	2-2-6-عيوب طريقة أنجل وقرانجر <i>Engel – Granger</i> لتقدير <i>ECM</i>
62.....	3-2-6-طريقة يوهانسن <i>Johansen</i> للتكامل المشترك
64.....	الباب الثاني:
64.....	الفصل السابع: تذكير بالبرمجة الخطية
64.....	1-7-تعريف البرمجة الخطية
66.....	2-7-طرق حل نماذج البرمجة الخطية
66.....	1-2-7-طريقة الحل البياني
71.....	2-2-7-الطريقة المبسطة للحل... <i>Simplex</i>
74.....	3-2-7-طريقة <i>M</i> الكبرى... <i>Big M</i>
76.....	4-2-7-طريقة المرحلتين
78.....	5-2-7-الحالات الخاصة لطريقة السامبلاكس
79.....	الفصل الثامن: البرمجة غير الخطية... <i>Programmation non linéaire</i>
81.....	1-8-البرمجة التربيعية وشبه المحدودة

81.....	<i>Programmation Quadratique</i> ... البرمجة التربيعية
83.....	<i>Programmation semi définie</i> ... البرمجة شبه المحدودة
84	<i>Programmation hyperbolique</i> ... برمجة القطوع الزائدة
88.....	<i>Programmation dynamique</i> ... البرمجة الديناميكية
88.....	1-9-التعريف بسلاسل ماركوف <i>Chaine de MARKOV</i> وصيغتها الرياضية
94.....	2-9-سلاسل ماركوف والتنبؤ بحالة النظام في الفترة "n"
97.....	3-9-منحنيات سلاسل ماركوف
99.....	الفصل العاشر: الأساليب الإحصائية واتخاذ القرار
99.....	1-10-مفهوم الإحصاء ومقاييسه
110.....	2-10-نظرية صفوف الانتظار
115.....	3-10-نظرية الألعاب (المباريات) <i>Théorie des Jeux</i> ...
120.....	4-10-شجرة القرار
125.....	5-10-نماذج تسيير المخزون
128.....	6-10-الأساليب الإحصائية لقياس الجودة
132.....	الخاتمة
133.....	قائمة المراجع

مقدمة:

يمكن تعريف الأساليب الكمية بعدة تعاريف من بينها " مجموعة الطرق والصيغ والمعدات والنماذج التي تساعد في حل المشكلات على أساس عقلائي، وقد عرفها البعض بأنها تلك الأطر الرياضية أو الكمية التي من خلالها يتم استيعاب كافة مفردات المشكلة والتعبير عنها بالاعتماد على العلاقات الرياضية (معادلات أو متباينات) وذلك كخطوة أولى نحو معالجتها وحلها.¹ وبذلك نستطيع القول ان التحليلات الكمية تعتبر أداة مهمة تقدم وصفاً دقيقاً للظواهر الاقتصادية وتحديدًا للمشكلة المراد دراستها إذا تم بناء النموذج الاقتصادي وتهيئة بياناته بشكل صحيح يساعد على الوصول الى القرار الأنسب الواجب اتخاذه لحل تلك المشاكل والوصول بنا الى أحسن الوضعيات الممكنة في ظل ما هو متاح لنا.

تتميز الأساليب الكمية المستخدمة في اتخاذ القرار بأنها تحاول تقييم البدائل التي تم التوصل إليها بواسطة متخذ القرار. كما تتميز هذه الأساليب بسعيها للوصول إلى الرشد والعقلانية والابتعاد عن التحيزات الشخصية، فبخلاف الأساليب الكيفية المستخدمة في اتخاذ القرارات فان الأساليب الكمية تعتمد على لغة الأرقام من تحليل البيانات أو المعلومات حتى يمكن الوصول إلى القرار المناسب وذلك باستخدام طرق إحصائية مختلفة تشمل على معدلات وسلاسل زمنية وعينات تستخدم لتفسير مختلف الظواهر الاقتصادية كنظريات الطلب والعرض والعلاقة بين مستويات الدخل والانفاق الاستهلاكي، كما استخدمت الطرق الاحصائية في قياس درجة ذكاء الاشخاص وفي دراسة العلاقة بين المهارات والذكاء وقياس الجودة.

ومن الأساليب الكمية المساعدة على اتخاذ القرار أيضاً نجد الأساليب والنماذج الرئيسية لبحوث العمليات حيث يعتبر النموذج الرياضي الوسيلة أو الأسلوب الذي تتم معالجة المشكلات من خلاله، وفي هذا الصدد نحصي مجموعة من النماذج نذكر منها نموذج البرمجة الخطية، البرمجة غير الخطية، البرمجة التربيعية، البرمجة العشوائية، نظرية المباريات الاستراتيجية، نماذج صفوف الانتظار، نماذج المخزون.

¹ - مؤيد عبد الحسين الفضل، المنهج الكمي في إدارة الأعمال، الوراق للنشر والتوزيع، الطبعة الأولى، عمان، 2006، ص33.

الفصل الأول: تحليل الانحدار

سنعمد في هذا الفصل الى تحليل الانحدار من خلال استعراض نموذج الانحدار الخطي البسيط ثم نعرض على نموذج الانحدار الخطي المتعدد وذلك بعرض صيغتيهما الرياضية والمعادلات التقديرية لكليهما لنصل في الأخير الى تقدير هذه النماذج

1-1- الانحدار الخطي البسيط:

سنحلل الانحدار الخطي البسيط من خلال التطرق الى مدلوله أولاً ثم نستعرض المعادلة التقديرية له وكيفية تقدير معالمها

1-1-1-مدلول الانحدار الخطي البسيط:

نعني الانحدار إيجاد العلاقة الرياضية الخطية التي تربط بين متغير داخلي (y) ومتغير مستقل (x)، ويسمى الانحدار الخطي بسيطاً عندما يكون هناك متغير مستقل واحد ونجد التابع بناءً على قيمه، وبالتالي فإن العلاقة التي تكون بين المتغير والتابع تعطى بالشكل²:

$$y = \alpha + \beta x$$

حيث: y : التابع ، x : المتغير المستقل، α : معامل ثابت، β : ميل الانحدار

يتم حساب هذه المعادلة من خلال تقدير قيمة α و β ميل المستقيم، ولتقدير معالم هذا النموذج توجد مجموعة من الطرق من بينها طريقة المربعات الصغرى العادية (OLS) التي سنأتي الى عرضها فيما بعد

²- للاطلاع أكثر أنظر: حسين علي بخيت وسحر فتح الله، الاقتصاد القياسي، دار اليازوري العلمية للنشر والتوزيع، عمان، 2007 ، ص34-78.

-محمد بلال الزعبي وعباس الطلافحة، النظام الاحصائي SPSS فهم وتحليل البيانات الإحصائية، دار وائل للنشر والتوزيع، الطبعة الثالثة، عمان، 2006، ص222-244.

-Xavier GOUYON , statistique et économétrie, Ellipses édition, paris, 2001, p11-22.

-Régis Bourbonnais, économétrie, 9ième édition, édition Dunod, paris, 2015, p13-46.

- جمال فروخي، نظرية الاقتصاد القياسي، ديوان المطبوعات الجامعية، الجزائر، 1993، ص1-24.

1-1-2- المعادلة التقديرية وتقدير معاملات نموذج الانحدار الخطي البسيط:

من غير المتوقع أن تقع النقاط تماماً على خط الانحدار وبالتالي فإن المعادلة ستحتوي خطأ عشوائياً يرمز له بالرمز e_t حيث يمثل انحراف القيم المقدرة عن القيم الحقيقية وعليه يكتب نموذج الانحدار الخطي البسيط بالشكل: $y_t = \hat{\alpha} + \hat{\beta}x_t + e_t$ والصيغة المقدرة له هي:

$$\hat{y}_t = \hat{\alpha} + \hat{\beta}x_t$$

نقدر معاملات النموذج بطريقة المربعات الصغرى العادية التي تضمن تصغير مربعات البواقي

$$\text{MIN} \sum e_t^2$$

$$e_t = y_t - \hat{y} = y_t - \hat{\alpha} - \hat{\beta}x_t$$

$$\sum e_t^2 = \sum (y_t - \hat{\alpha} - \hat{\beta}x_t)^2$$

$$\text{MIN} \sum e_t^2 \Rightarrow \text{MIN} \sum (y_t - \hat{\alpha} - \hat{\beta}x_t)^2$$

تمثل $\text{MIN} \sum e_t^2$ نقطة انعطاف دنيا ولتحديد هذه النقطة يجب اشتقاق بالنسبة لمتغيرات الدالة

$$\frac{\partial \sum e_t^2}{\partial \hat{\alpha}} = 0 \Rightarrow \sum (y_t - \hat{\alpha} - \hat{\beta}x_t)^2 = 0$$

$$\Rightarrow -2 \sum (y_t - \hat{\alpha} - \hat{\beta}x_t) = 0 \Rightarrow \sum e_t = 0$$

لدينا العلاقة التالية: $\sum y_t = n\hat{\alpha} + \hat{\beta} \sum x_t$

$$\frac{\sum y_t}{n} = \hat{\alpha} + \hat{\beta} \frac{\sum x_t}{n}$$

$$\Rightarrow \bar{y} = \hat{\alpha} + \hat{\beta}\bar{x} \Rightarrow \hat{\alpha} = \bar{y} - \hat{\beta}\bar{x}$$

$$\frac{\partial \sum e_t^2}{\partial \hat{\alpha}} = 0 \Rightarrow -2 \sum (y_t - \hat{\alpha} - \hat{\beta}x_t)x_t = 0 \Rightarrow \sum e_t x_t = 0$$

$$\sum y_t x_t - \hat{\alpha} \sum x_t - \hat{\beta} \sum x_t^2 = 0$$

$$\sum y_t x_t = \hat{\alpha} \sum x_t + \hat{\beta} \sum x_t^2$$

نعوض $\hat{\alpha}$ بالقيمة التي وجدناها سابقاً فنجد:

$$\begin{aligned}\sum y_t x_t &= (\bar{y} - \hat{\beta} \bar{x}) \sum x_t + \hat{\beta} \sum x_t^2 \\ &= (\bar{y} - \hat{\beta} \bar{x}) n \bar{x} + \hat{\beta} \sum x_t^2\end{aligned}$$

$$\sum y_t x_t = n \bar{x} \cdot \bar{y} - \hat{\beta} n \bar{x}^2 + \hat{\beta} \sum x_t^2$$

$$\sum y_t x_t - n \bar{x} \cdot \bar{y} = \hat{\beta} (\sum x_t^2 - n \bar{x}^2)$$

$$\hat{\beta} = \frac{\sum y_t x_t - n \bar{x} \cdot \bar{y}}{\sum x_t^2 - n \bar{x}^2}$$

$$\hat{\beta} = \frac{\sum (y_t - \bar{y})(x_t - \bar{x})}{\sum (x_t - \bar{x})^2}$$

مثال: أوجد نموذج الانحدار لمعطيات الجدول التالي:

y_t	10	8	7	13	12	10
x_t	5	3	2	4	6	4

نعلم أن معادلة الانحدار البسيط تأخذ الشكل:

$$y = \alpha + \beta x$$

والصيغة المقدرة لها هي:

$$\hat{y}_t = \hat{\alpha} + \hat{\beta} x_t$$

وحتى نجد الصيغة المقدرة يجب تحديد قيمتي $\hat{\alpha}$ و $\hat{\beta}$

وانطلاقاً من الجدول المعطى سابقاً نستطيع حساب كتابة الجدول التالي:

$(y_t - \bar{y})$	$(x_t - \bar{x})^2$	$(x_t - \bar{x})$	y_t	x_t
0	1	1	10	5
-2	1	-1	8	3
-3	4	-2	7	2
3	0	0	13	4
2	4	2	12	6
0	0	0	10	4

$y_t x_t$	x_t^2	$(y_t - \bar{y})(x_t - \bar{x})$
50	25	0
24	9	2
14	4	6
52	16	0
72	36	4
40	16	0

وعليه يكون لدينا ما يلي:

$$\begin{aligned} \sum x_t &= 24, \bar{x} = \frac{\sum x_t}{n} = \frac{24}{6} = 4 \\ \sum y_t &= 60, \bar{y} = \frac{\sum y_t}{n} = \frac{60}{6} = 10 \\ \sum (x_t - \bar{x})^2 &= 10, \sum (y_t - \bar{y})(x_t - \bar{x}) = 12 \\ \sum y_t x_t &= 252, \sum x_t^2 = 106 \end{aligned}$$

وعليه نستطيع حساب $\hat{\beta}$ بالعلاقة التالية:

$$\hat{\beta} = \frac{\sum y_t x_t - n\bar{x}\bar{y}}{\sum x_t^2 - n\bar{x}^2} = \frac{252 - 6(4)(10)}{106 - 6(16)} = 1.2$$

كما نستطيع حساب $\hat{\beta}$ انطلاقاً من العلاقة التالية:

$$\hat{\beta} = \frac{\sum (y_t - \bar{y})(x_t - \bar{x})}{\sum (x_t - \bar{x})^2} = \frac{12}{10} = 1.2$$

ونستطيع حساب $\hat{\alpha}$ انطلاقاً من العلاقة التالية:

$$\hat{\alpha} = \bar{y} - \hat{\beta}\bar{x} = 10 - 1.2(4) = 5.2$$

وعليه يكون لدينا نموذج الانحدار البسيط المقدر التالي:

$$\hat{y}_t = \hat{\alpha} + \hat{\beta}x_t = 5.2 + 1.2x_t$$

1-2-1- الانحدار الخطي المتعدد:

يتضح مما سبق أن الانحدار الخطي البسيط يركز على دراسة العلاقة بين متغيرين فقط، أحدهما المتغير المستقل x والآخر المتغير التابع y ، لكن في الواقع نجد أن العلاقات الاقتصادية أكثر تعقيداً من هذا حيث نجد أن أية متغيرة اقتصادية تتأثر بمجموعة من المتغيرات ولذلك سيعجز نموذج الانحدار الخطي البسيط عن التعبير عن هذه العلاقة مما يلزمنا اللجوء إلى نموذج الانحدار الخطي المتعدد، سنحلل الانحدار الخطي البسيط من خلال التطرق إلى مدلوله أولاً ثم نستعرض المعادلة التقديرية له وكيفية تقدير معالمها

1-2-1- عرض نموذج الانحدار الخطي المتعدد:

هذا النموذج يدرس تفسير متغير تابع بواسطة جملة من المتغيرات المستقلة تحت فرضيات كلاسيكية معروفة.

لنفترض أنه لدينا التابع y_t نريد أن نفسره بجملة من المتغيرات $x_t = (x_{1t}, x_{2t}, \dots, x_{kt})$ وبافتراض وجود علاقة خطية بين التابع والمتغيرات المستقلة نستطيع عندئذ أن نعبر عن تلك العلاقة بالمعادلة التالية³:

$$y_t = \beta_1 x_{1t} + \beta_2 x_{2t} + \dots + \beta_k x_{kt} + u_t$$

$$x_{1t} = 1 \forall t \quad \text{حيث:}$$

وعليه تصبح العلاقة كما يلي:

$$y_t = \beta_1 + \beta_2 x_{2t} + \dots + \beta_k x_{kt} + u_t$$

حيث: $\beta_i, i = 1, 2, \dots, k$ معالم النموذج المراد تقديرها

³ - للاطلاع أكثر أنظر: حسين علي بخيت وسحر فتح الله، الاقتصاد القياسي، مرجع سابق، ص 133-186.

-محمد بلال الزعبي وعباس الطلافحة، النظام الإحصائي SPSS فهم وتحليل البيانات الإحصائية، مرجع سابق، ص 257-269.

-Régis Bourbonnais, économétrie, op cit, p47-105.

- جمال فروخي، نظرية الاقتصاد القياسي، مرجع سبق ذكره، ص 51-62.

مثال: حسب النظرية الكينزية يفسر الطلب على النقود " M_t " كدالة في سعر الفائدة « i »، السيولة النقدية " L_t "، الدخل القومي « PIB »، بافتراض أن العلاقة خطية نستطيع أن نكتب:

$$M_t = f(i, L_t, PIB_t)$$

$$M_t = \beta_1 + \beta_2 i + \beta_3 L_t + \beta_4 PIB_t + u_t$$

تتمثل فرضيات النموذج فيما يلي:

$$E(u_t) = 0 \quad (1)$$

$$E(u_t)^2 = var(u_t) \quad (2)$$

$$E(u_t u_s) = 0, \forall t \neq s \quad (3)$$

$$u_t \sim N(0, \sigma^2) \quad (4)$$

$$cov(x_t, u_t) = 0 \quad (5)$$

نستطيع أن نكتب النموذج السابق بالشكل التالي:

$$y_1 = \beta_1 + \beta_2 x_{21} + \dots + \beta_k x_{k1} + u_1$$

$$y_2 = \beta_1 + \beta_2 x_{22} + \dots + \beta_k x_{k2} + u_2$$

$$\vdots \quad \quad \quad \ddots \quad \quad \quad \vdots$$

$$y_t = \beta_1 + \beta_2 x_{2t} + \dots + \beta_k x_{kt} + u_t$$

كما يكتب في شكل مصفوفي كما يلي:

$$Y_{(TX1)} = X_{(TXk)} \cdot B_{(kX1)} + U_{(TX1)}$$

أي أن:

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_{21} & x_{31} & \cdot & \cdot & \cdot & x_{k1} \\ 1 & x_{22} & x_{32} & \cdot & \cdot & \cdot & x_{k2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_{2t} & x_{3t} & \cdot & \cdot & \cdot & x_{kt} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \cdot \\ \beta_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \cdot \\ u_t \end{bmatrix}$$

1-2-2- تقدير معاملات نموذج الانحدار الخطي المتعدد:

نعني بتقدير هذا النموذج إيجاد قيم المعلمات $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k$ بطريقة المربعات

الصغرى "OLS" التي تعمل على تدنئة مجموع مربعات البواقي وذلك وفق الخطوات التالية:

$$Y = X.\hat{B} + e \Rightarrow e = Y - X.\hat{B}$$

$$MIN \sum e_t^2 = MIN \acute{e}.e$$

$$\acute{e}.e = [e_1 \quad e_2 \quad \cdot \quad \cdot \quad e_T] \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_T \end{bmatrix} = \sum_{t=1}^T e_t^2$$

$$\acute{e}.e = (Y - X.\hat{B})'(Y - X.\hat{B}) = (Y' - \hat{B}'X')(Y - X.\hat{B})$$

$$\acute{e}.e = Y'Y - Y'X\hat{B} - \hat{B}'X'Y + \hat{B}'X'X\hat{B}$$

$$\acute{e}.e = Y'Y - 2\hat{B}'X'Y + \hat{B}'X'X\hat{B}$$

$$\frac{\partial \acute{e}.e}{\partial \hat{B}} = -2X'Y + 2X'X\hat{B} = 0 \Rightarrow (X'X)\hat{B} = X'Y$$

$$\hat{B} = (X'X)^{-1}(X'Y)$$

حيث:

$$X'X = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \\ x_{21} & x_{22} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & x_{2T} \\ x_{31} & x_{32} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & x_{3T} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{k1} & x_{k2} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & x_{kt} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & x_{21} & x_{31} & \cdot & \cdot & \cdot & x_{k1} \\ 1 & x_{22} & x_{32} & \cdot & \cdot & \cdot & x_{k2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_{2t} & x_{3t} & \cdot & \cdot & \cdot & x_{kt} \end{bmatrix}$$

$$X'X = \begin{bmatrix} T & \sum x_{2T} & \sum x_{3T} & \cdot & \cdot & \cdot & \sum x_{kT} \\ \sum x_{2T} & \sum x_{2T}^2 & \sum x_{2T}x_{3T} & \cdot & \cdot & \cdot & \sum x_{2T}x_{kT} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \sum x_{kT} & \sum x_{kT}x_{2T} & \sum x_{kT}x_{3T} & \cdot & \cdot & \cdot & \sum x_{kT}^2 \end{bmatrix}$$

$$X'Y = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \\ x_{21} & x_{22} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & x_{2T} \\ x_{31} & x_{32} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & x_{3T} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_{k1} & x_{k2} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & x_{kT} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ y_T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum y_t \\ \sum x_{2t}y_t \\ \cdot \\ \cdot \\ \sum x_{kt}y_t \end{bmatrix}$$

مثال: أوجد نموذج الانحدار الخطي المتعدد لمعطيات الجدول التالي:

y_t	1	4	1	3	2	4
x_{1t}	1	8	3	5	6	10
x_{2t}	2	8	1	7	4	6

نعلم أن معادلة الانحدار الخطي المتعدد تأخذ الشكل:

$$y_t = \beta_1 + \beta_2 x_{2t} + \dots + \beta_k x_{kt} + u_t$$

وفي حالتنا هذه:

$$y_1 = \beta_1 + \beta_2 x_{11} + \beta_3 x_{21} + u_1$$

$$y_2 = \beta_1 + \beta_2 x_{12} + \beta_3 x_{22} + u_2$$

$$\vdots \quad \quad \quad \ddots \quad \quad \quad \vdots$$

$$y_6 = \beta_1 + \beta_2 x_{16} + \beta_3 x_{26} + u_6$$

أي أن:

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_{11} & x_{21} \\ 1 & x_{12} & x_{22} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_{16} & x_{26} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_6 \end{bmatrix}$$

$$X'X = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdot & \cdot & 1 \\ x_{11} & x_{12} & \cdot & \cdot & x_{16} \\ x_{21} & x_{22} & \cdot & \cdot & x_{26} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & x_{11} & x_{21} \\ 1 & x_{12} & x_{22} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & x_{16} & x_{26} \end{bmatrix}$$

$$X'X = \begin{bmatrix} 6 & \sum x_{1t} & \sum x_{2t} \\ \sum x_{1t} & \sum x_{1t}^2 & \sum x_{1t}x_{2t} \\ \sum x_{2t} & \sum x_{1t}x_{2t} & \sum x_{2t}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 33 & 28 \\ 33 & 235 & 188 \\ 28 & 188 & 170 \end{bmatrix}$$

$$X'Y = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdot & \cdot & 1 \\ x_{11} & x_{12} & \cdot & \cdot & x_{16} \\ x_{21} & x_{22} & \cdot & \cdot & x_{26} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum y_t \\ \sum x_{1t}y_t \\ \sum x_{2t}y_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 \\ 103 \\ 88 \end{bmatrix}$$

مقدرات النموذج هي:

$$\hat{B} = (X'X)^{-1}(X'Y)$$

$$(X'X)^{-1} = 5690 \begin{bmatrix} 4606 & -346 & -376 \\ -346 & 236 & -204 \\ -376 & -204 & 321 \end{bmatrix}$$

$$(X'X)^{-1}(X'Y) = 5690 \begin{bmatrix} 4606 & -346 & -376 \\ -346 & 236 & -204 \\ -376 & -204 & 321 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 15 \\ 103 \\ 88 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.064 \\ 0.205 \\ 0.28 \end{bmatrix}$$

$$\hat{B} = \begin{bmatrix} \widehat{\beta}_1 \\ \widehat{\beta}_2 \\ \widehat{\beta}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.064 \\ 0.205 \\ 0.28 \end{bmatrix}$$

وعليه يكون لدينا نموذج الانحدار المتعدد المقدر التالي:

$$\hat{y}_t = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 x_{1t} + \hat{\beta}_3 x_{2t}$$
$$\hat{y}_t = 0.064 + 0.205x_{1t} + 0.28x_{2t}$$

الفصل الثاني: تحليل السلاسل الزمنية:

يعتمد تحليل السلاسل الزمنية على تتبع الظاهرة أو المتغير خلال فترة زمنية معينة، ثم نقوم بتوقع المستقبل بناءً على القيم المختلفة التي ظهرت في السلسلة وعلى نمط نمو القيم فيها، وسنتطرق الى تحليل السلاسل الزمنية من خلال عرض تعريف السلاسل الزمنية وأنواعها المختلفة ونماذجها لنصل في الأخير الى تحليل مكونات السلاسل الزمنية

1-2-التعريف بالسلاسل الزمنية وأنواعها:

نستهل هذا المدخل بعرض تعريف للسلاسل الزمنية ثم نعرض على أنواعها المختلفة حسب مجموعة من الاعتبارات

1-1-2-تعريف السلاسل الزمنية:

نعني بالسلسلة الزمنية مجموعة من الأرقام أو القيم المسجلة حسب الزمن كالسنين أو الفصول أو الشهور أو الأيام أو أية وحدة زمنية أخرى لمتغير واحد أو أكثر، والسلسلة الزمنية عبارة عن السجل التاريخي لظاهرة ما يتم الاستعانة به لفهم تغيراتها عبر الزمن كما يتم اعتماده لبناء التوقعات المستقبلية للظاهرة المدروسة.

2-1-2-أنواع السلاسل الزمنية:

يمكن تصنيف السلاسل الزمنية حسب مجموعة من المعايير ممثلة في:

-نوعية قيم السلسلة

-طبيعة الزمن الذي تحدث فيه السلسلة الزمنية

-عدد القيم التي تأخذها السلسلة الزمنية عند كل قياس

-التغيرات التي تحدث في السلسلة الزمنية عبر الزمن

أولاً: تصنيف السلاسل الزمنية حسب نوعية القيم التي تأخذها:

تنقسم السلاسل الزمنية حسب نوعية القيم التي تأخذها الى قسمين هما السلاسل الزمنية المتصلة وغير المتصلة، فالسلسلة الزمنية المتصلة هي تلك السلاسل التي نقيس فيها ظاهرة متغيرة خلال فترة من الزمن مثل اليوم أو الشهر أو السنة كقياس استهلاك الطاقة الكهربائية شهرياً أو عدد المواليد خلال السنة. أما السلسلة الزمنية المنقطعة أو غير المتصلة فهي تلك السلاسل التي نقيس فيها قيم ظاهرة متغيرة عند لحظة من الزمن مثل عدد سكان مدينة معينة في اليوم الأول من كل سنة.

ثانياً: تصنيف السلاسل الزمنية حسب طبيعة الزمن الذي تحدث فيه:

قد يكون الزمن الذي تحدث فيه السلسلة محدد أو غير محدد فإذا كان زمن السلسلة الزمنية محدداً مسبقاً تسمى السلسلة الزمنية عندئذ سلسلة زمنية غير نقطية مثل معدل الدخل السنوي للأفراد. أما إذا كانت فترة السلسلة الزمنية غير متوقعة وغير محددة مسبقاً تسمى السلسلة الزمنية عندئذ بالسلسلة الزمنية النقطية وكمثال على هذا النوع من السلاسل نجد سلاسل حدوث الأعاصير أو الزلازل أو الكوارث الطبيعية

ثالثاً: تصنيف السلاسل الزمنية حسب عدد القيم التي تأخذها:

يمكن تصنيف السلاسل الزمنية حسب عدد القيم التي تأخذها عند كل قياس فنجد السلاسل الزمنية الثنائية وهي تلك السلاسل التي تأخذ إحدى قيمتين (الصفر والواحد) أو (النجاح والفشل) وتظهر مثل هذه السلاسل في المتغير الأصم (موجود أو غير موجود) في القياس الاقتصادي كما نجد مثل هذه السلاسل في الهندسة الكهربائية وبعض المجالات الأخرى. كما نجد أيضاً السلاسل الزمنية غير الثنائية وهي تلك السلاسل التي تأخذ أكثر من قيمتين مثل أعداد المواشي

رابعاً: تصنيف السلاسل الزمنية حسب التغيرات التي تحدث فيها عبر الزمن:

وفق هذا المعيار يمكن أن نصنف السلاسل الزمنية في الأنواع التالية:

-سلاسل زمنية ذات الاتجاه المتزايد والتي يكون ميل رسمها البياني موجباً مثل سلاسل الدخل الوطني

-سلاسل زمنية ذات الاتجاه المتناقص والتي يكون ميل رسمها البياني سالباً مثل مساحة الأراضي الزراعية في منطقة معينة والتي هي في تناقص مستمر بسبب انتشار الأبنية عليها

-سلاسل زمنية ذات الاتجاه الثابت والتي يكون ميل رسمها البياني صفرياً مثل سلسلة الطاقة الكهربائية المستهلكة في اضاءة الإشارات الضوئية

-سلاسل زمنية ذات التغيرات المتكررة على فترات متباعدة فنجد أن القيم التي تأخذها هذه السلاسل قد تتأثر بأمر فصلي أو سنوية مثل سلسلة مبيعات ملابس ومعدات السباحة

2-2-مكونات السلاسل الزمنية:

تكون السلاسل الزمنية عرضة لنوعين من التغيرات، تغيرات منتظمة وأخرى غير منتظمة وهذه التغيرات يطلق عليها اسم عناصر أو مكونات السلاسل الزمنية. فالتغيرات المنتظمة هي تلك التغيرات التي يتكرر حدوثها في السلسلة في مواضع ذات صفات محددة وتتمثل في الاتجاه العام والتغيرات الموسمية أو الفصلية والتغيرات الدورية، أما التغيرات غير المنتظمة أو التغيرات العرضية فهي تلك التغيرات الفجائية التي تحدث في السلسلة الزمنية دون إمكانية التنبؤ بحدوثها وتسمى بالمركبة العشوائية، وعليه يمكن تفكيك السلسلة الزمنية الى المركبات التالية:

-مركبة الاتجاه العام

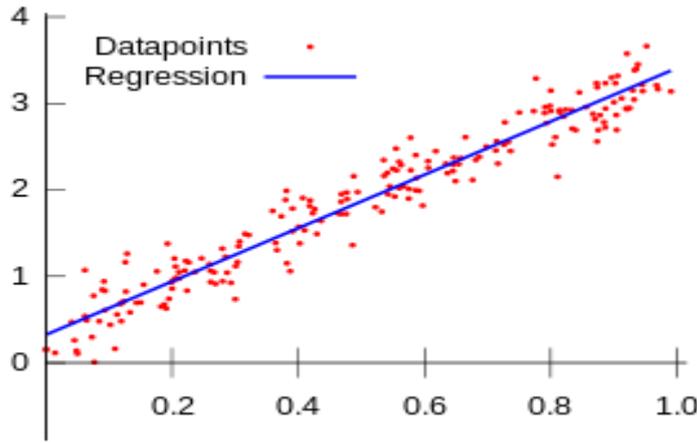
-المركبة الفصلية(الموسمية)

-مركبة التغيرات الدورية

-المركبة العشوائية

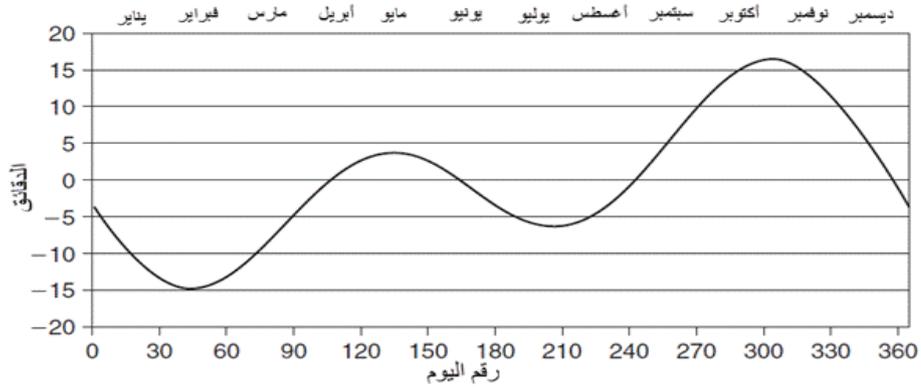
أ-مركبة الاتجاه العام:

نقصد بالاتجاه العام الحركة المنتظمة للسلسلة الزمنية عبر فترة زمنية طويلة، فنقول أن السلسلة الزمنية ذات اتجاه عام موجب إذا كانت قيم مشاهداتها تتجه نحو التزايد دوماً بمرور الوقت، ونقول أن السلسلة الزمنية ذات اتجاه عام سالب إذا كانت قيم مشاهداتها تتجه نحو التناقص دوماً بمرور الوقت. ويعبر عن الاتجاه العام رياضياً بشكل خطي (خط مستقيم) أو غير خطي (مثل المنحنى الاسي أو منحنى القطع المكافئ)



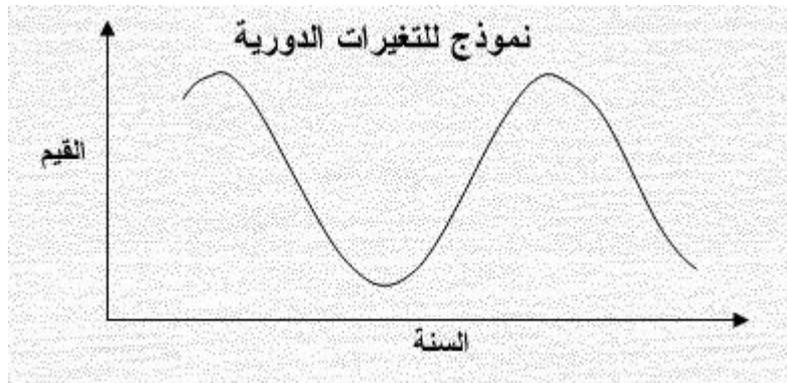
ب-المركبة الفصلية (الموسمية):

نعني بالفصلية هنا تلك التغيرات التي تحدث على السلسلة الزمنية في الفترة القصيرة (لا تزيد في الغالب عن سنة) فهي قد تكون أسبوعية أو شهرية أو فصلية وهي ناتجة في الغالب عن الطقس أو التقاليد السائدة في المجتمع أو الاحتفالات والمواسم الدينية... الخ، فنجد مثلاً أن بعض المنتوجات يكثر عليها الطلب شتاءً ويقل صيفاً أو يكثر عليها الطلب في المناطق الحارة ويقل في المناطق الأقل حرارة حتى داخل البلد الواحد كما نجد أن بعض المنتوجات يكثر عليها الطلب في شهر رمضان مقارنة بالشهور الأخرى.



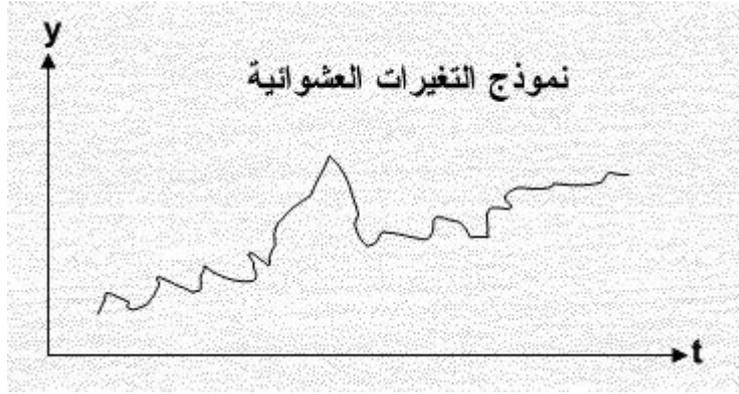
ج-مركبة التغيرات الدورية:

هي تلك التغيرات التي تطرأ على قيم السلسلة الزمنية بصورة منتظمة وتعتبر عن الانتقال من حالة الى أخرى كالانتقال من حالة الكساد الى حالة الركود في اقتصاد ما، وتكون مدة هذه التغيرات تتجاوز السنة بينما تكون منحنياتها مشابهة لدوال الجب أو التجب (الدوال المثلثية) ولكن ذلك يحدث بساعات وأطوال مختلفة



د-مركبة التغيرات العشوائية:

هي عبارة عن تغيرات غير منتظمة فهي عرضية أو فجائية لا يمكن التنبؤ بها، وتعتبر عن تحركات السلسلة لأعلى وأسفل بعد استبعاد التغيرات الأخرى والاتجاه العام، وغالباً ما يشار إليها بالتغيرات المتبقية عند دراسة السلاسل الزمنية لكونها تضم ما تبقى من العوامل التي لم يشر إليها في عناصر السلسلة الثلاثة السابق ذكرها، ومن أمثلة التغيرات العشوائية ما يحدث للنشاط الاقتصادي في بلد ما نتيجة الزلازل أو الفيضانات أو الأعاصير أو الحروب غير المتوقعة



2-3- نماذج السلاسل الزمنية:

نقصد بنماذج السلاسل الزمنية الصيغة الرياضية التي تربط بين قيم المشاهدات المسجلة في السلسلة وقيم المركبات المختلفة لهذه السلسلة، قبل إعطاء النماذج الرياضية للسلاسل الزمنية يجب الاتفاق على الرموز المستخدمة فيها والتي هي كالتالي:

T: دليل الاتجاه العام

S: المركبة الفصلية (الموسمية)

C: دليل المركبة الدورية

e: دليل المركبة العشوائية

X: مشاهدات السلسلة المدروسة

يمكن أن نحصي في نماذج السلاسل الزمنية كل من النموذج الجمعي والنموذج الجدائي والنموذج المختلط ويتم تحديد النموذج الأنسب لسلسلة ما انطلاقاً من الملاحظة البيانية أو الحساب الاحصائي

2-3-1- تحديد النموذج الأنسب للسلسلة الزمنية بيانياً:

يمكن تحديد النموذج الأنسب للسلسلة الزمنية بيانياً بناءً على التغيرات المختلفة التي تحدث على مستوى السلسلة، فإن استطعنا حصر تلك التغيرات بمستقيمين متوازيين (لهما نفس الميل مهما كان ذلك الميل) واحد من الأعلى والآخر من الأسفل نقول عندئذ أن السلسلة التي بحوزتنا سلسلة جمعية أو تجميعية، أما إذا كانت تغيرات السلسلة محصورة بين مستقيمين كما سبق الإشارة إليه سابقاً لكن هذين المستقيمين غير متوازيين وإنما يكونان متقاربين في الأول ثم يزداد تباعدهما مع مرور

الوقت نقول عندئذ أن السلسلة التي نحن بصددنا سلسلة جدائية، والحالة الثالثة التي يمكن أن نلاحظها عند تفحص المنحنى البياني لسلسلة ما أن نجد تغيراتها محصورة بين مستقيمين واحد أعلاها والآخر أسفل منها لكن هذين المستقيمين يكونان تارة متوازيان وتارة أخرى متقاربان عند بدايتهما ويزداد تباعدهما مع الزمن نقول عندئذ أن سلسلتنا الزمنية سلسلة مختلطة

2-3-2- تحديد النموذج الأنسب للسلسلة الزمنية احصائياً:

يمكن أن نحدد النموذج الأنسب للسلسلة الزمنية احصائياً من خلال النتائج التي نتوصل إليها بعد تقدير معاملات المعادلة التالية:

$$\delta_i = a + b\bar{y}_i$$

حيث:

$$i = 1, 2, 3, \dots, n \text{ : مؤشر السنة}$$

$$j = 1, 2, 3, \dots, p \text{ : مؤشر الفصل أو الشهر حسب معطيات السلسلة}$$

$$\delta_i = \sqrt{\frac{1}{p} \sum_{j=1}^p (y_{ij} - \bar{y}_i)^2}, \quad \bar{y}_i = \frac{1}{p} \sum_{j=1}^p y_{ij}, \quad \hat{b} = \frac{cov(\delta_i, \bar{y}_i)}{var(\bar{y}_i)}$$

بعد تقدير المعادلة السابقة نصل الى القرار التالي:

-السلسلة تجميعية اذا كان: $\hat{b} < 0.05$

-السلسلة مختلطة اذا كان: $0.05 \leq \hat{b} \leq 0.10$

-السلسلة جدائية اذا كان: $\hat{b} > 0.10$

مثال: اليك معطيات الجدول التالي:

السنة/الفصل	1	2	3	4
2013	155	158	163	172
2014	153	156	162	172
2015	162	164	173	181

المطلوب: حدد شكل العلاقة بين مركبات هذه السلسلة الزمنية

الحل: بغية تقدير معاملات المعادلة التي سبق ذكرها نقوم بحساب أعمدة جديدة في الجدول حتى يسهل علينا حساب المقدرات بعدئذ فكان لدينا الجدول التالي:

δ_i	\bar{y}_i	4	3	2	1	السنة/الفصل
6.057	161.75	172	163	158	155	2013
7.26	160.75	172	162	156	153	2014
7.58	170	181	173	164	162	2015

$$\hat{b} = \frac{cov(\delta_i, \bar{y}_i)}{var(\bar{y}_i)} = \frac{\sum \delta_i \bar{y}_i - n\bar{\delta}_i \bar{\bar{y}}}{\sum \bar{y}_i - n\bar{\bar{y}}^2} = 0.09$$

وعليه نستطيع القول أن السلسلة التي بحوزتنا سلسلة مختلطة

2-3-3- عرض الصيغة الرياضية لنماذج السلاسل الزمنية:

فيما يلي سنقوم بعرض النموذج الجمعي للسلاسل الزمنية يتلوه عرض النموذج الجدائي على أن يكون النموذج المختلط مزيج بين الشكلين السابقين

أ-النموذج الجمعي للسلاسل الزمنية:

يفترض هذا النموذج أن قيمة الظاهرة المشاهدة (X) في أي لحظة زمنية ما (t) ما هي الا حاصل جمع مركباتها الأربع بمعنى أن:

$$X_t = T_t + S_t + C_t + e_t$$

ويفترض هذا النموذج تشابه وحدات قياس جميع المركبات ووحدة قياس المشاهدات (X_t) وتصلح هذه الصيغة عندما نريد تقدير قيم المركبات لا نسبها، كما يفترض هذا النموذج أيضاً أن جميع المركبات مستقلة عن بعضها البعض بالإضافة الى أن مجموع قيم المركبة الفصلية يكون معدوماً

على مدار السنة، فإذا فرضنا سلفاً أن الدورية منعدمة في السلسلة ($C_t = 0$) يمكن كتابة النموذج عندئذ بالشكل التالي:

$$X_t = T_t + S_t + e_t$$

$$\sum_{i=1}^p S_i = \sum_{i=1}^T S_{t+i} = 0 \forall t$$

ب-النموذج الجدائي للسلسلة الزمنية:

يفترض هذا النموذج أن قيمة الظاهرة المشاهدة (X) في أي لحظة زمنية ما (t) ما هي الا جداء مركباتها الأربع بمعنى أن:

$$X_t = T_t \times S_t \times C_t \times e_t$$

ويتم اللجوء الى هذا الشكل في الغالب اذا كانت المركبات S_t, C_t, e_t في شكل نسب مئوية وأن حدوث بعضها يؤثر في الآخر رغم اختلاف مصادر كل منها، فإذا فرضنا مثلاً خلو السلسلة الزمنية من التغيرات الدورية ($C_t = 0$) نستطيع عندئذ أن نكتب:

$$X_t = T_t \times S_t \times e_t$$

$$\sum_{i=1}^p S_i = \sum_{i=1}^T S_{t+i} = p \forall t$$

4-2-تحليل مكونات السلاسل الزمنية:

الهدف من تحليل السلاسل الزمنية هو كشف مركباتها الأساسية كمرحلة أولى ثم مقارنة هذه السلاسل بعد استبعاد تلك المركبات بالإضافة الى محاولة بناء نموذج تنبؤي لتلك السلاسل انطلاقاً من معرفة نوع المركبة التي تحويها السلسلة

4-2-1-كشف مركبات السلسلة الزمنية:

يمكن الكشف عن مركبات السلسلة الزمنية اما بيانياً أو احصائياً باستخدام مجموعة من المقاييس

الحررة أو المقاييس الخاضعة لتوزيعات معروفة

أ-الكشف البياني عن مركبات السلسلة الزمنية:

يمكن كشف بعض مركبات السلاسل الزمنية بالعين المجردة حيث تظهر مركبة الاتجاه العام بخط مستقيم يتناقص أو يتزايد مع الزمن، بينما تظهر المركبة الفصلية في شكل قمم أو انخفاضات تحدث في أوقات محددة مثل زيادة استهلاك المشروبات الباردة في فصل الصيف. إلا أنه في حالات أخرى يصعب مشاهدة تلك المركبات بيانياً وبالتالي نكون مجبرون عندئذ باللجوء الى الاختبارات الإحصائية لكشف مركبات السلسلة الزمنية

ب-المقاييس الإحصائية لكشف مركبات السلسلة الزمنية:

هناك بعض المقاييس الإحصائية التي تسمح لنا بكشف مركبات السلسلة الزمنية وسنذكر البعض منها فيما يلي:

ب-1-اختبار RUN : يصلح هذا الاختبار لكشف مدى كون السلسلة الزمنية عشوائية أو ذات اتجاهات ويصاغ هذا الاختبار في الشكل التالي:

$$\begin{cases} H_0: & \text{سلسلة عشوائية} \\ H_1: & \text{سلسلة ذات عام اتجاه} \end{cases}$$

ويتم هذا الاختبار على المراحل التالية:

أولاً: تحديد رتبة الوسيط بعد ترتيب السلسلة الزمنية تصاعدياً

$$n = \frac{T+1}{2} \text{ إذا كانت البيانات فردية}$$

$$n = \frac{T}{2} \text{ إذا كانت البيانات زوجية}$$

ثانياً: حساب الوسيط md أو القيمة المقابلة للرتبة N في السلسلة

$$md=c(n) \text{ سلسلة فردية}$$

$$md=\frac{C(n)+C(n+1)}{2} \text{ سلسلة زوجية}$$

ثالثاً: إعطاء إشارة موجبة للقيم أكبر من الوسيط وسالبة للأخرى في السلسلة الزمنية
رابعاً: حساب R ومقارنته بقيم R (عدد مرات تغيير الإشارة) والمجدولة وتتخذ القرار بعدئذ بناءً

على ما يلي: قبول H_0 إذا كان: $R_u < R_n$

في العينات الصغيرة ($n < 20$): $R_u < R < R_l$

في العينات الكبيرة قبول H_0 إذا كان: $|Z| < Z_{\frac{\alpha}{2}}$

$$\text{حيث: } U_R = n + 1, Z = \frac{R - U_R}{\delta_R}, \delta_R = \sqrt{\frac{n(n+1)}{2n-1}}$$

مثال: أكتشف مركبة الاتجاه العام في السلسلة التالية:

181	173	164	162	172	162	156	153	172	163	158	155	المشاهدات
+	+	+	-	+	-	-	-	+	+	-	-	الإشارة
181	173	172	172	164	163	162	162	158	156	155	153	الترتيب

$$n = \frac{T}{2} = \frac{12}{2} = 6, md = \frac{[C(6) + C(7)]}{2} = \frac{162 + 163}{2} = 162.5$$

$R=6$: عدد مرات تغيير الإشارة

$$R_u < R < R_l, R_u = 3, R_l = 12$$

وبالتالي قبول H_0 بما يعني أن السلسلة عشوائية

ب-2- اختبار دانيال: يعتمد هذا الاختبار على معدل الارتباط ويستخدم لكشف مدى كون السلسلة

الزمنية عشوائية أو ذات اتجاهات ويصاغ هذا الاختبار في الشكل التالي:

$$\begin{cases} H_0: \text{سلسلة عشوائية} \\ H_1: \text{سلسلة ذات اتجاه عام} \end{cases}$$

يتم ترتيب السلسلة تصاعدياً (R_t) إضافة إلى الترتيب الزمني ثم حساب (d_t) وهو الفرق بين

الترتيب الزمني والترتيب التصاعدي ثم تربيعه وجمعه ومن ثمة نكون الاختبار وفق الصيغة

الرياضية التالية:

$$\delta_S = \frac{1 - 6 \sum (d_t)^2}{T(T^2 - 1)}$$

ويتخذ القرار كما يلي:

قبول H_0 إذا كان: $|\delta_S| < \frac{\delta_{\alpha}}{2}$ في العينات الصغيرة ($T < 30$):

في العينات الكبيرة قبول H_0 إذا كان: $|Z| < Z_{\frac{\alpha}{2}}$

$$\text{حيث: } U_{RS} = 0, Z = \frac{(\delta_S - U_{RS})}{\delta_{RS}}, \delta_{RS} = \frac{1}{\sqrt{T-1}}$$

مثال: باستعمال نفس معطيات المثال السابق قم بالكشف عن الاتجاه العام باستخدام اختبار دانيال

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
المشاهدات	155	158	163	172	153	156	162	172	162	164	173	181
R_t	2	4	7	9	1	3	5	10	5	8	11	12
d_t	-1	-2	-4	-5	4	3	2	-2	4	2	0	0
$(d_t)^2$	1	4	16	25	16	9	4	4	16	4	0	0

$$\sum (d_t)^2 = 99$$

$$\delta_S = \frac{1 - 6 \sum (d_t)^2}{T(T^2 - 1)} = \frac{1 - 6(99)}{12(144 - 1)} = 0.65, \alpha = 5\%, \frac{\delta_{\alpha}}{2} = 0.5804$$

$$\delta_S > \frac{\delta_{\alpha}}{2}$$

ومنه نرفض الفرضية H_0 .

ب-3- اختبار الصعود والنزول: يستخدم هذا الاختبار عادة للكشف عن الفصلية في السلسلة الزمنية

وذلك بحساب ΔC_t وهو الفرق بين قيمة أي مشاهدة وقيمة المشاهدة السابقة لها حيث

$$\Delta C_t = C_t - C_{t-1}$$

مثال: باستعمال نفس معطيات المثال السابق قم بالكشف عن المركبة الفصلية باستخدام اختبار

الصعود والنزول

12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	t
181	173	164	162	172	162	156	153	172	163	158	155	C_t
8	9	2	-10	10	6	3	-19	9	5	3	-	ΔC_t
+	+	+	-	+	+	+	-	+	+	+		الإشارة

نلاحظ انتظام في إشارة ΔC_t وبالتالي نقول بوجود الفصلية

ب-4-اختبار Krustal-Wallis: يستخدم هذا الاختبار للكشف عن المركبة الفصلية فقط بعد إزالة مركبة الاتجاه العام ان وجدت ويشكل كما يلي:

$$\begin{cases} H_0: & \text{سلسلة عشوائية} \\ H_1: & \text{وجود مركبة فصلية} \end{cases}$$

يأخذ هذا الاختبار الصيغة الرياضية التالية:

$$KW = \sum_{i=1}^m n_i (R_i - \bar{R})^2 \sim \chi_{\alpha, (p-1)}^2$$

حيث P : الدورية إذا كانت فصلية=4 إن كانت شهرية=12

i: دليل السنة ، m: عدد السنوات

R_i : مجموع رتب المشاهدات للسنة i

\bar{R} : الوسط الحسابي

نقبل H_0 إذا كان : $KW < \chi_{\alpha, (p-1)}^2$

مثال: اختبر وجود الفصلية لمعطيات الجدول التالي باستعمال اختبار Krustal-Wallis

2014				2013				2012				السنة
4	3	2	1	4	3	2	1	4	3	2	1	الفصل
29	68	12	12	32	64	19	10	21	44	20	14	قيمة المشاهدة

2016				2015				السنة
4	3	2	1	4	3	2	1	الفصل
50	64	11	6	36	60	18	7	قيمة المشاهدة

الحل:

نقوم بوضع أسطر في الجدول من أجل استخدام نتائجها في حساب احصائية KW

2014				2013				2012				السنة
4	3	2	1	4	3	2	1	4	3	2	1	الفصل
29	68	12	12	32	64	19	10	21	44	20	14	قيمة المشاهدة
12	20	5	5	3	18	9	3	11	15	10	7	الرتبة
$R_3 = 42$				$R_2 = 43$				$R_1 = 43$				مجموع رتب السنة

2016				2015				السنة
4	3	2	1	4	3	2	1	الفصل
50	64	11	6	36	60	18	7	قيمة المشاهدة
16	18	4	1	14	17	8	2	الرتبة
$R_5 = 39$				$R_4 = 41$				مجموع رتب السنة

(أربع فصول في السنة) ، $n_i = 4$

$$\bar{R} = \frac{\sum R_i}{m} = \frac{43 + 43 + 42 + 41 + 39}{5} = 41.6$$

$$KW = \sum_{i=1}^m n_i (R_i - \bar{R})^2 = 4\{(43 - 41.6)^2 + (43 - 41.6)^2 + (42 - 41.6)^2 + (41 - 41.6)^2 + (39 - 41.6)^2\} = 44.8$$

$$\chi_{5\%, 3}^2 = 7.815$$

نرفض الفرضية H_0 لأن $KW > \chi_{5\%, 3}^2$ وبالتالي نقول بوجود المركبة الفصلية

مثال 2: تمثل المعطيات التالية تموين السيارات بالبنزين فصلياً في الفترة 2015-2013

السنة/الفصل	1	2	3	4
1047	920	1114	1310	1047
2014	953	1241	1468	1189
2015	1002	1343	1571	1314

1-اكتشف عن الاتجاه العام احصائياً

2-اكتشف عن الفصلية احصائياً بكل الطرق

الحل:

R_i	الإشارة	Δy_t	$(d_t)^2$	d_t	الرتبة R_t	الإشارة md	الترتيب التصاعدي	y_t	t
$R_1 = 19$	—	—	0	0	1	-	920	920	1
	+	194	9	-3	5	-	953	1114	2
	+	196	36	-6	9	-	1002	1310	3
	-	-263	0	0	4	-	1047	1047	4
$R_2 = 19$	-	-94	9	-3	2	-	1114	953	5
	+	288	4	-2	8	-	1189	1241	6
	+	227	1	1	6	+	1241	1468	7
	-	-270	25	5	3	-	1310	1189	8
	+	341	0	0	10	-	1343	1343	10
	+	228	16	4	7	+	1468	1571	11
	-	-255	1	1	11	-	1571	1341	12

$$\sum (d_t)^2 = 110$$

أولاً-اختبار RUN : يصلح هذا الاختبار لكشف مدى كون السلسلة الزمنية عشوائية أو ذات اتجاه

عام ويصاغ هذا الاختبار في الشكل التالي:

$$\begin{cases} H_0: & \text{سلسلة عشوائية} \\ H_1: & \text{سلسلة ذات عام اتجاه} \end{cases}$$

$$n = \frac{T}{2} = \frac{12}{2} = 6, md = \frac{[C(6) + C(7)]}{2} = \frac{1241 + 1468}{2} = 1354.5$$

R=5: عدد مرات تغير الإشارة

$$R_u < R < R_l, R_u = 3, R_l = 12$$

وبالتالي قبول H_0 بما يعني أن السلسلة عشوائية

ثانياً-اختبار دانيل: يصاغ هذا الاختبار في الشكل التالي:

$$\begin{cases} H_0: & \text{سلسلة عشوائية} \\ H_1: & \text{سلسلة ذات عام اتجاه} \end{cases}$$

$$\delta_S = \frac{1-6\sum(d_t)^2}{T(T^2-1)} = \frac{1-6(110)}{12(144-1)} = 0.61, \alpha = 5\%, \delta_{\frac{\alpha}{2}} = 0.5804$$

$$\delta_S > \delta_{\frac{\alpha}{2}}$$

ومنه نرفض الفرضية H_0 . بمعنى أن هذه السلسلة الزمنية تحوي اتجاه عام

ثالثاً-اختبار الصعود والنزول:

يهتم هذا الاختبار بعدد مرات صعود ونزول الإشارة من سالب الى موجب والعكس فمن الجدول

نلاحظ انتظام في الإشارة وبالتالي نقول بوجود الفصلية

رابعاً- اختبار **Kruskal-Wallis**: يستخدم هذا الاختبار للكشف عن المركبة الفصلية ويأخذ

الشكل التالي:

$$\begin{cases} H_0: & \text{سلسلة عشوائية} \\ H_1: & \text{وجود مركبة فصلية} \end{cases}$$

$$n_i = 4, \text{ (أربع فصول في السنة)}$$

$$\bar{R} = \frac{\sum R_i}{m} = \frac{19 + 19 + 40}{3} = 26$$

$$KW = \sum_{i=1}^m n_i (R_i - \bar{R})^2 = 4\{(19 - 26)^2 + (19 - 26)^2 + (40 - 26)^2\} = 1176$$

$$\chi_{5\%, 3}^2 = 7.815$$

نرفض الفرضية H_0 لأن $KW > \chi_{5\%, 3}^2$ وبالتالي نقول بوجود المركبة الفصلية

2-4-2- معالجة مركبات السلسلة الزمنية:

سنقوم فيما يلي بمعالجة الاتجاه العام ومعالجة الفصلية وصولاً الى معالجة التغيرات الدورية والعشوائية

أ-معالجة الاتجاه العام:

إذا كان الاتجاه العام خطياً (أي أن الظاهرة تزيد أو تنقص بمقدار ثابت كل فترة زمنية) فإن معادلة الاتجاه العام تأخذ الشكل الخطي التالي:

$$\hat{y} = \hat{a} + \hat{b}x$$

حيث: x : متغيرة الزمن ، \hat{a} و \hat{b} مقدرات طريقة المربعات الصغرى للمعادلة
أما إذا كان الاتجاه العام غير خطي خاصة مع الظواهر الاقتصادية التي تتصف بالتغير على المدى الطويل فسنستخدم عندئذ معادلة غير خطية مناسبة لقياس منحنى الاتجاه العام ومن أهم هذه الطرق أولاً: معادلة التجاه العام الأسّي وتأخذ الشكل التالي:

$$\hat{y} = \hat{a} \cdot (\hat{b})^x$$

من أجل الحصول على قيمة \hat{a} و \hat{b} نأخذ لوغاريتم الطرفين فتصبح لدينا المعادلة التالية:

$$\log \hat{y} = \log \hat{a} + x \log \hat{b}$$

وبنفس الأسلوب نقدر $\log \hat{a}$ و $\log \hat{b}$ ومن ثمة نجد \hat{a} و \hat{b}

ثانياً: معادلة التجاه العام التربيعي وتأخذ الشكل التالي:

$$\hat{y} = \hat{a} + \hat{b}x + \hat{c}x^2$$

من أجل الحصول على قيمة \hat{a} و \hat{b} و \hat{c} نستخدم طريقة المربعات الصغرى

ثالثاً: معادلة التجاه العام اللوجستي (يستخدم في تفسير الظواهر الاقتصادية التي يتوقف نموها بعد فترة معينة أي عند الاشباع) ومن بين أشكاله نجد الشكل التالي:

$$\hat{y} = \frac{1}{(\hat{b}_0 + \hat{b}_1 \cdot \hat{b}_2 x)}$$

مثال: حدد النموذج الملائم لمعادلة الاتجاه العام لمعطيات الجدول الموالي:

السنة	2005	2006	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015
العدد	210	250	260	240	300	310	330	380	470	530	560

من الشكل البياني لهذه السلسلة نلاحظ أن خط الاتجاه المستقيم لا يكون ملائماً وأن الشكل يوحي باستخدام النموذج الأسّي كالتالي:

$$\hat{y} = \hat{a} \cdot (\hat{b})^x$$

من أجل الحصول على قيمة \hat{a} و \hat{b} نأخذ لوغاريتم الطرفين فتصبح لدينا المعادلة التالية:

$$\log \hat{y} = \log \hat{a} + x \log \hat{b}$$

نفرض أن: $y_1 = \log \hat{y}$, $a_1 = \log \hat{a}$, $b_1 = \log \hat{b}$ والمعادلة تصبح بالشكل:

$$y_1 = a_1 + b_1 x$$

ونجد $\hat{a}_1 = \log \hat{a}$ و $\hat{b}_1 = \log \hat{b}$ ومن ثمة نجد \hat{a} و \hat{b}

بعد التقدير نجد: $b_1 = 0.04225$, $a_1 = 2.267$

ومنه تكون (نستخدم اللوغاريتم العشري):

$$\hat{a} = 10^{a_1} = 10^{2.267} = 184.927$$

$$\hat{b} = 10^{b_1} = 10^{0.04225} = 1.1022$$

ومعادلة الاتجاه العام المقدره هي:

$$\hat{y} = 184.927(1.1022)^x$$

ب-معالجة المركبة الفصلية:

يتم معالجة الفصلية اما بإزالتها من السلسلة ثم ارجاعها بعد التنبؤ وهذا يسهل عمليات الحساب

كثيراً وإما بنمذجة الفصلية مثل نموذج هولت وينترز *Holt Winters* أو نموذج بالوت

B. Ballot

ب-1-طرق إزالة الفصلية: يتم إزالة الفصلية اما بطرق لا تحسب المؤشرات الفصلية أو طرق

أخرى تحسب المؤشرات الفصلية

أولاً: إزالة الفصلية باستخدام الطرق التي لا تحسب المؤشرات الفصلية:

من الطرق المستخدمة لإزالة الفصلية دون حساب مؤشراتنا نجد طريقة الفروقات من الدرجة P وتشكيل سلسلة جديدة $w_t = \Delta^p y_t = y_t - y_{t-p}$ ثم نقوم بعد ذلك بتقدير المعادلة التالية

$$w_t = a + b.t + e_t$$

لنحصل على: $\widehat{w}_t = \widehat{a} + \widehat{b}.t$

ثم نبقى التغيرات العشوائية فقط وذلك بحساب z_t حيث: $z_t = w_t - \widehat{w}_t$

مثال: قم بإزالة الفصلية بطريقة الفروقات من الدرجة P (نأخذ مثلاً $p = 4$) على الجدول الموالي

12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	t
181	173	164	162	172	162	156	153	171	163	158	155	C_t
9	11	8	9	1	-1	-2	-2	—	—	—	—	$w_t = \Delta^4 C_t$
30.5	28.4	26.3	24.2	22.1	20.0	17.9	15.8	—	—	—	—	\widehat{w}_t

بعد التقدير نحصل على

$$\widehat{w}_t = 5.35 + 2.10t$$

ثانياً: إزالة الفصلية مع حساب مؤشراتنا:

من مميزات هذه الطريقة أنها بسيطة الحساب ولا تفرق بين أشكال العلاقة بين المركبات وتتم بالمرحل التالية:

- حساب الوسط الحسابي لمشاهدات كل سنة \bar{y}_i وفق الصيغة التالية:

$$\bar{y}_i = \frac{1}{p} \sum_{j=1}^p y_{ij}$$

حيث: $i = 1, 2, 3, \dots, n$: مؤشر السنة

$j = 1, 2, 3, \dots, p$: مؤشر الفصل

- حساب الوسط الحسابي العام \bar{y} بالصيغة:

$$\bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \bar{y}_i$$

-حساب المؤشرات الفصلية s_j بالصيغة التالية:

$$s_j = \frac{\bar{y}_j}{\bar{y}}$$

-حساب السلسلة الخالية من الفصلية y_{ij}^a بالصيغة:

$$y_{ij}^a = \frac{y_{ij}}{s_j}$$

مثال: باستعمال بيانات الاستهلاك التي تعرضنا لها سابقاً أوجد السلسلة الخالية من الفصلية

\bar{y}_i	4	3	2	1	السنة/الفصل
161.75	171	163	158	155	2013
160.75	172	162	156	153	2014
170	181	173	164	162	2015
$\bar{y} = 164.16$	174.66	166	159.33	156.66	\bar{y}_j
	1.06	1.01	0.97	0.95	s_j

والسلسلة الخالية من الفصلية y_{ij}^a بالجدول التالي:

4	3	2	1	السنة/الفصل
161.32	161.38	162.88	163.15	2013
162.26	160.39	160.82	161.05	2014
170.75	171.28	169.07	170.52	2015

ب-2-نمذجة الفصلية: من بين الطرق المستخدمة في نمذجة الفصلية نجد نموذج هولت وينترز *Holt Winters* أو نموذج بالوت *B. Ballot* أو نموذج بوكس جنكيز *Box – jenkins* وسنقتصر هنا على عرض نموذج هولت وينترز *Holt Winters* حيث يستخدم هذا النموذج للتمهيد والتنبؤ لسلسلة زمنية ذات اتجاه عام وعشوائية وفصلية ويعطى بالصيغة التالية:

$$\tilde{y}_t = \alpha(y_t - s_{t-p}) + (1 - \alpha)(y_{t-1} + e_{t-1})$$

$$e_t = \gamma(\tilde{y}_t - y_{t-1}) + (1 - \gamma)e_{t-1}$$

$$s_t = \beta(y_t - \tilde{y}_t) + (1 - \beta)s_{t-1}$$

حيث: اذا كانت السلسلة تجميعية:

$$y_{ij}^a = y_t - s_{t-p} , z_t = (y_t - \tilde{y}_t)$$

أما اذا كانت السلسلة جدائية:

$$y_{ij}^a = \frac{y_t}{s_{t-p}} , z_t = \frac{y_t}{\tilde{y}_t}$$

ج- معالجة التغيرات الدورية: هناك عدة طرق لمعالجة الدورية نذكر منها طريقة البواقي وهي

طريقة مبنية على أساس النموذج الجدائي وتتم بالمراحل التالية:

-حساب مركبة الاتجاه العام بإحدى الطرق المناسبة

-حساب المؤشرات الفصلية

-نستبعد الاتجاه العام من قيم الظاهرة (بقسمة قيم الظاهرة على القيم المقدرة لنموذج الاتجاه العام)

-نستبعد أثر الموسم أو الفصل بقسمة ناتج القسمة السابق على المؤشر الموسمي

-يتبقى لنا محصلة التغيرات الدورية والعشوائية ولفصل التغيرات العشوائية نستخدم طريقة

المتوسطات المتحركة لفترة قصيرة، وسنوضح هذه الطريقة من خلال المثال التالي:

مثال: إذا كنت لديك معطيات الجدول التالي (انتاج سلعة ما خلال السنوات 2013، 2014،

2015) قدر التغيرات الدورية للجدول التالي باعتبار أن طول الفترة ثلاث فصول مع العلم أن

المعادلة المقدرة للاتجاه العام هي $(\hat{y} = 18.015 + 2.357t)$ والمؤشرات الفصلية هي:

$$s_1 = 0.4097 , s_2 = 0.8082 , s_3 = 1.9765 , s_4 = 0.8054$$

2015	2014	2013	الفصل/السنة
13	12	10	1
25	30	20	2
70	80	50	3
40	30	20	4

الحل:

- نحسب أولاً مركبة الاتجاه العام ونشكل القيم الاتجاهية (نعوض بالزمن فقط في المعادلة المقدره للاتجاه العام لنحصل على النتائج)
- نستبعد الاتجاه العام (بقسمة القيم الاتجاهية على القيم الفعلية)
- نستبعد أثر الموسم بقسمة عناصر السلسلة الخالية من الاتجاه العام على المؤشر الفصلي المقابل
- الباقى هو محصلة التغيرات الدورية والعشوائية ولفصل التغيرات العشوائية نستخدم طريقة المتوسطات المتحركة لفترة قصيرة ولتكن ثلاث فصول من كل الخطوات السابقة حصلنا على الجدول التالي:

السنة	الفصل	القيم الفعلية	القيم الاتجاهية	مخلصة من اتجاه عام	مخلصة من الفصلية	المجموع المتحرك	المتوسط المتحرك
2013	1	10	20.37	0.49	1.2
	2	20	22.73	0.88	1.09	3.3	1.1
	3	50	25.085	1.99	1.01	3.01	1
	4	20	27.442	0.73	0.91	2.9	0.97
2014	1	12	29.798	0.40	0.98	3.04	1.01
	2	30	32.155	0.93	1.15	3.3	1.1
	3	80	34.51	2.32	1.17	3.33	1.11
	4	30	36.87	0.81	1.01	2.99	0.997
2015	1	13	39.225	0.33	0.81	2.56	0.85
	2	25	41.58	0.60	0.74	2.35	0.78
	3	70	43.94	1.59	0.80	2.61	0.87
	4	40	46.29	0.86	1.07

بعد استخدام المتوسطات المتحركة حصلنا على العمود الثامن في الجدول السابق الذي يمثل أثر التغيرات الدورية لكل فصل ونقرأه كما يلي: أثر التغير الدوري للفصل الأول من سنة 2015 مثلاً هو 0.15 حيث: $(0.15=0.85-1)$.

2-5-التنبؤ في السلاسل الزمنية:

سننظر هنا الى التنبؤ في النماذج التي تعتمد على إزالة مركبات السلسلة الزمنية ثم نتلوها بالتنبؤ من خلال نماذج التمهيد الأسي

2-5-1-التنبؤ في السلاسل الزمنية المعتمد على إزالة المركبات:

وفق هذه الطريقة سنعوض في معادلة الاتجاه العام الزمن (t) بـ $(t + 1)$ فنجد القيمة التنبؤية للسنة المقبلة أو الفصل المقبل أو الشهر المقبل (حسب المعطيات التي تكون بحوزتنا) ثم نضيف لهذه القيمة المؤشر الفصلي المناسب، بالرجوع الى مثال النتاج السابق وأردنا التنبؤ بقيمة الإنتاج لكل فصول سنة 2016 يكون لدينا

$$\hat{y}_{\frac{1}{2015}} = \hat{y}_{13} = 18.015 + 2.357(13) = 48.65$$

بعد الحساب نحصل على القيم التالية:

السنة	الفصل	الزمن	\hat{y}	$\hat{y} * s_j$
2016	1	13	48.65	19.93
	2	14	51.01	41.22
	3	15	53.37	105.48
	4	16	55.72	44.88

العمود الأخير يعبر عن تنبؤات سنة 2016 التي تأخذ بعين الاعتبار التغيرات الفصلية

2-5-2-التنبؤ في السلاسل الزمنية باستعمال نماذج التمهيد الأسي:

يكون نموذج التنبؤ للسلسلة الزمنية مرتبط بنوع المركبة التي تحويها هذه الأخيرة، فإذا كانت السلسلة الزمنية لا تحوي إلا مركبة اتجاه عام نستعمل أحد نماذج الاتجاه العام مثل نموذج التمهيد الأسي الأحادي... وهكذا، وعليه سننظر هنا الى نماذج التمهيد الأسي الأحادي والثنائي والثلاثي

أ-نماذج التمهيد الأسي الأحادي:

يستخدم هذا النموذج لتمهيد سلسلة زمنية ذات اتجاه عام وهو معطى وفق العلاقة التالية:

$$\tilde{y}_t = \alpha \sum_{r=0}^{\infty} (1 - \alpha)^r y_{t-r}$$

$$\tilde{y}_t = \alpha y_t + \alpha(1 - \alpha)y_{t-1} + \alpha(1 - \alpha)^2 y_{t-2} + \dots$$

$$y_{t-1}^{\sim} = \alpha y_{t-1} + \alpha(1 - \alpha)y_{t-2} + \alpha(1 - \alpha)^2 y_{t-3} + \dots$$

$$(1 - \alpha)y_{t-1}^{\sim} = \alpha(1 - \alpha)y_{t-1} + \alpha(1 - \alpha)^2 y_{t-2} + \alpha(1 - \alpha)^3 y_{t-3} + \dots$$

$$\tilde{y}_t - (1 - \alpha)y_{t-1}^{\sim} = \alpha y_t$$

$$\tilde{y}_t = \alpha y_t + (1 - \alpha)y_{t-1}^{\sim}$$

ونموذج التنبؤ لها هو:

$$y_{T+1/T}^{\sim} = \alpha y_T + (1 - \alpha)y_{T/T-1}^{\sim}$$

أ- نماذج التمهيد الأسّي الثنائي:

يستخدم هذا النموذج لتمهيد سلسلة زمنية ذات اتجاه عام وعشوائية وهو معطى بالمعادلتين التاليتين:

$$\tilde{y}_t = \alpha y_t + (1 - \alpha)y_{t-1}^{\sim} + \dots$$

$$y_t^{\sim} = \alpha \tilde{y}_t + (1 - \alpha)y_{t-1}^{\sim} + \dots$$

$$t = 1, 2, \dots, T$$

$$y_{T+1}^{\sim} = \alpha y_T + (1 - \alpha)y_T^{\sim}$$

$$y_{T+1}^{\sim} = \alpha y_T^{\sim} + (1 - \alpha)y_T^{\sim}$$

الفصل الثالث: نماذج شعاع الانحدار الخطي (نماذج الـ VAR)

نستهل تحليل نماذج شعاع الانحدار الخطي باستعراض بعض المفاهيم الأساسية حول نماذج شعاع الانحدار الخطي ثم سنخرج على صيغتها الرياضية، كما سنتطرق الى مختلف خصائص نماذج شعاع الانحدار الخطي لنصل في الأخير الى تقدير هذه النماذج

3-1- بعض المفاهيم حول نماذج شعاع الانحدار الخطي⁴:

اقتُرحت هذه النماذج من طرف christopher sims سنة 1980 بناءً على نظريته التي يرى فيها صعوبة معرفة وتحديد المتغير المستقل من المتغير الداخل فرأى أن كل المتغيرات سواء في هذا، ويعد نموذج شعاع الانحدار الخطي من أكثر النماذج مرونة في تحليل السلاسل الزمنية متعددة المتغيرات، حيث يقوم بوصف السلوك الحركي للسلاسل الزمنية الاقتصادية كما يساعد في التنبؤ، ويتكون نموذج شعاع الانحدار الخطي من منظومة من المعادلات وكل معادلة هي عبارة عن متغير داخلي وعلاقته بالارتدادات الزمنية للمتغير الداخلي فضلاً عن بقية المتغيرات الداخلية الأخرى. هذا يعني أن مجموعة من المتغيرات الزمنية يمكن التعبير عنها بنموذج شعاع الانحدار الخطي إذا كان كل واحد من هذه المتغيرات دالة خطية في قيمه السابقة والقيم السابقة للمتغيرات الأخرى في المجموعة.

3-2- الصيغة الرياضية لنماذج شعاع الانحدار الخطي أو نموذج الـ VAR

قبل تحديد الصيغة الرياضية العامة لنماذج شعاع الانحدار الخطي نبدأ بعرض نموذج ذو متغيرتين فإذا كانت لدينا x_{1t} و x_{2t} يمكن تشكيل نموذج الـ VAR ذو تأخير 2 إذا وجدت المعاملات φ_{ij} و γ_{ij} المتغيرتين وتكون عندئذ بالشكل التالي⁵:

$$x_{1t} = u_1 + \varphi_{11} x_{1t-1} + \varphi_{12} x_{1t-2} + \varphi_{21} x_{2t-1} + \varphi_{22} x_{2t-2} + u_{1t}$$

$$x_{2t} = u_2 + \gamma_{11} x_{1t-1} + \gamma_{12} x_{1t-2} + \gamma_{21} x_{2t-1} + \gamma_{22} x_{2t-2} + u_{2t}$$

يمكن التعبير عن ذلك مصفوفياً بالنموذج التالي:

$$\begin{pmatrix} x_{1t} \\ x_{2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{21} \\ \gamma_{11} & \gamma_{21} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{1t-1} \\ x_{2t-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varphi_{12} & \varphi_{22} \\ \gamma_{12} & \gamma_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{1t-2} \\ x_{2t-2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_{1t} \\ u_{2t} \end{pmatrix}$$

⁴-ERIC DOR, économétrie, synthèse de cours et exercice corrigés, collection synthex pearson éducation, France 2004 p209.

⁵-GILBERT COLLETAZ, les processus VAR notes du cours de séries temporelles multivariées, 2016 p4-33.

وأيضاً:

$$\begin{pmatrix} x_{1t} \\ x_{2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{21} \\ \gamma_{11} & \gamma_{21} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L x_{1t} \\ L x_{2t} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varphi_{12} & \varphi_{22} \\ \gamma_{12} & \gamma_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L^2 x_{1t} \\ L^2 x_{2t} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_{1t} \\ u_{2t} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_{1t} \\ x_{2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{21} \\ \gamma_{11} & \gamma_{21} \end{pmatrix} L \begin{pmatrix} x_{1t} \\ x_{2t} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varphi_{12} & \varphi_{22} \\ \gamma_{12} & \gamma_{22} \end{pmatrix} L^2 \begin{pmatrix} x_{1t} \\ x_{2t} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_{1t} \\ u_{2t} \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{21} \\ \gamma_{11} & \gamma_{21} \end{pmatrix} L - \begin{pmatrix} \varphi_{12} & \varphi_{22} \\ \gamma_{12} & \gamma_{22} \end{pmatrix} L^2 \right) \begin{pmatrix} x_{1t} \\ x_{2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_{1t} \\ u_{2t} \end{pmatrix}$$

$$X_t = U + \sum_{i=1}^p \phi_i X_{t-i} + U_t$$

إذا اعتبرنا متغيري الاستهلاك C_t والدخل R_t يمكن كتابة نموذج الـ VAR لهذين المتغيرين

بتأخر 2 أي $\text{var}(2)$ بالشكل التالي⁶:

$$C_t = U_1 + \rho_{11} C_{t-1} + \rho_{12} C_{t-2} + \rho_{13} R_{t-1} + \rho_{14} R_{t-2} + V_{1t}$$

$$R_t = U_2 + \rho_{21} C_{t-1} + \rho_{22} C_{t-2} + \rho_{23} R_{t-1} + \rho_{24} R_{t-2} + V_{2t}$$

و عليه نستطيع كتابته في شكل مصفوفي بالشكل:

$$\begin{pmatrix} C_t \\ R_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \rho_{11} & \rho_{13} \\ \rho_{21} & \rho_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_{t-1} \\ R_{t-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \rho_{12} & \rho_{14} \\ \rho_{22} & \rho_{24} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_{t-2} \\ R_{t-2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} V_{1t} \\ V_{2t} \end{pmatrix}$$

بإدخال معامل التأخير نستطيع أن نكتب:

$$\begin{pmatrix} C_t \\ R_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \rho_{11} & \rho_{13} \\ \rho_{21} & \rho_{23} \end{pmatrix} L \begin{pmatrix} C_t \\ R_t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \rho_{12} & \rho_{14} \\ \rho_{22} & \rho_{24} \end{pmatrix} L^2 \begin{pmatrix} C_t \\ R_t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} V_{1t} \\ V_{2t} \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \rho_{11} & \rho_{13} \\ \rho_{21} & \rho_{23} \end{pmatrix} L - \begin{pmatrix} \rho_{12} & \rho_{14} \\ \rho_{22} & \rho_{24} \end{pmatrix} L^2 \right) \begin{pmatrix} C_t \\ R_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} V_{1t} \\ V_{2t} \end{pmatrix}$$

⁶ -Taladidia thiombiano, économétries des séries temporelles, cours et exercices corrigés, l'Harmathan, paris 2008 p311.

بناءً على هذا نستطيع تعميم هذه الصيغة على نموذج VAR(p) بالشكل:

$$Y_t = U + \sum_{i=1}^p \phi_i Y_{t-i} + V_t$$

$$\left(I_n - \sum_{i=1}^p \phi_i L^i \right) Y_t = U + V_t$$

$$\phi(L) Y_t = U + V_t$$

بالرجوع الى مثال الاستهلاك والدخل نستطيع أن نجد أن:

$$Y_t = \begin{pmatrix} C_t \\ R_t \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix}, \quad \phi_1 = \begin{pmatrix} \rho_{11} & \rho_{13} \\ \rho_{21} & \rho_{23} \end{pmatrix}, \quad \phi_2 = \begin{pmatrix} \rho_{12} & \rho_{14} \\ \rho_{22} & \rho_{24} \end{pmatrix}$$

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad V_t = \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix},$$

$$\phi(L) = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \rho_{11} & \rho_{13} \\ \rho_{21} & \rho_{23} \end{pmatrix} L - \begin{pmatrix} \rho_{12} & \rho_{14} \\ \rho_{22} & \rho_{24} \end{pmatrix} L^2 \right)$$

وعليه يمكن كتابة VAR(p) لـ n متغير و p تأخير بالشكل:

$$Y_t = U + \phi_1 Y_{t-1} + \phi_2 Y_{t-2} + \dots + \phi_p Y_{t-p} + V_t \dots (1)$$

حيث:

$$Y_t = \begin{pmatrix} y_{1t} \\ y_{2t} \\ \vdots \\ y_{nt} \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}, \quad V_t = \begin{pmatrix} V_{1t} \\ V_{2t} \\ \vdots \\ V_{nt} \end{pmatrix}$$

$$\phi = \begin{pmatrix} \rho_{11} & \rho_{12} & \cdot & \cdot & \rho_{1n} \\ \rho_{21} & \rho_{22} & \cdot & \cdot & \rho_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \rho_{n1} & \rho_{n2} & \cdot & \cdot & \rho_{nn} \end{pmatrix}$$

بإدخال معامل التأخير على العلاقة (1) تصبح كمايلي:

$$(I_n - \phi_1 L - \phi_2 L^2 - \dots - \phi_p L^p) Y_t = U + V_t$$

$$\phi(L) Y_t = U + V_t$$

مثال: بالعودة الى المثال السابق VAR(1)

$$\begin{pmatrix} C_t \\ R_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.21 \\ 0.32 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.45 & 0.52 \\ -0.08 & 1.05 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_{t-1} \\ R_{t-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} U_{1t} \\ U_{2t} \end{pmatrix}$$

من أجل دراسة الاستقرارية نبحث عن قيم λ_i الناتجة من حساب المحدد التالي:

$$\det(I - \phi_1 \lambda_i - \phi_2 \lambda_i^2 - \dots - \phi_p \lambda_i^p) = 0$$

وفي حالتنا هذه يكون لدينا:

$$\det \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0.45 & 0.52 \\ -0.08 & 1.05 \end{pmatrix} \lambda \right) = 0$$

وعليه نجد مايلي:

$$\lambda_1 = 1.02, \quad \lambda_2 = 1.92, \quad \lambda_1 > 1, \quad \lambda_2 > 1$$

ومنه السلسلة التي بحوزتنا سلسلة مستقرة.

لدينا العلاقة التالية:

$$\phi(L) Y_t = U + V_t$$

إذا وضعنا:

$$U = \phi_0$$

نستطيع عندئذ أن نكتب:

$$\phi(L) Y_t = \phi_0 + V_t$$

إذا كان نموذج الـ VAR مستقراً فإنه يمكن إيجاد $\phi^{-1}(L)$ حيث:

$$\phi^{-1}(L) = I + \psi_1 L + \psi_2 L^2 + \dots \dots \dots$$

مع ψ_k مصفوفات مربعة بعدها $n \times n$ و $k=0,1,2,\dots$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \psi_k = 0 \quad \text{وتحقق:}$$

وعليه نستطيع كتابة النموذج كمايلي⁷:

$$\phi(L)Y_t = \phi_0 + V_t \Rightarrow Y_t = \phi^{-1}(L)(\phi_0 + V_t)$$

$$= \widetilde{\phi}_0 + \sum_{i=0}^{\infty} \psi_i U_{t-i} \quad , \quad \psi_0 = I$$

يكون Y_t مستقراً اذا كان توقع مساره ثابتاً، بالإضافة الى ذلك يجب أن يكون تباينه وتباينه

المشترك محدودان ومستقلان عن الزمن، بمعنى أننا نقول أن نموذج الـ VAR مستقراً إذا

حققت Y_t الشروط التالية:

$$E(Y_t) = \mu \quad , \quad \forall t$$

$$V(Y_t) < \infty$$

$$COV(Y_t, Y_{t+h}) = E[(Y_t - \mu)(Y_{t+h} - \mu)'] = \sigma_h \quad , \quad \forall h > 0$$

3-3- خصائص نموذج الـ VAR (نموذج شعاع الانحدار الخطي)

تتميز نماذج الـ VAR بمجموعة من الخصائص يمكن أن نقسمها الى مجموعة من المحاسن

ومجموعة من السلبيات التي كانت سبب الانتقادات التي وجهت لها ل يتم الرد عليها فيما بعد من

طرف مؤيدو نماذج الـ VAR وكانت كما يلي:

(أ)-**المحاسن**: يمكن أن نحصي لنماذج الـ VAR المحاسن التالية:

-أنها نماذج بسيطة، حيث أنها لا تتطلب التفرقة بين المتغيرات الداخلية والخارجية

⁷-william H. Green, Econometric analysis, pearson international Edition, United States 2003, p594.

-سهولة التقدير، حيث أنه يمكن تقدير كل معادلة على حده بطريقة المربعات الصغرى العادية

-التنبؤ بنماذج الـ VAR أفضل من التنبؤ بنماذج السلاسل الزمنية

(ب)-الانتقادات: تعرضت نماذج الـ VAR لمجموعة من الانتقادات نوجزها فيما يلي:

-ما يعاب على هذه النماذج أنها غير مبنية على النظرية الاقتصادية، حيث أن كل المتغيرات فيها يسبب الآخر وباستخدام الطرق الإحصائية يتم استبعاد المتغيرات التي تكون معاملاتها غير ذات دلالة إحصائية والإبقاء على المتغيرات التي تكون معاملاتها ذات دلالة وذلك باستخدام اختبار السببية من أجل الحصول على نموذج يتوافق مع النظرية الاقتصادية.

-صعوبة ترجمة وتفسير النتائج على اعتبار أن استخدام ارتدادات أو تباطؤات عديدة تفقدنا درجات الحرية بالإضافة الى نقص تفسيرات ذلك في النظرية الاقتصادية. وللتغلب على هذه الانتقادات قدم مؤيدو نماذج الـ VAR فكرة تقدير دوال نبض الاستجابة أو دوال الاستجابة اللحظية التي تختبر استجابة المتغير التابع في النموذج للصدمات التي تحدث في حد الخطأ، وهذه الدوال تمثل ردة فعل المتغيرات للصدمات التي يتعرض لها النظام.

4-3- تقدير نموذج الـ VAR (نموذج شعاع الانحدار الخطي)

يمكن كتابة نموذج الـ VAR(p) بالشكل التالي:

$$Y = \phi W + V$$

$$Y = (y_1, y_2, \dots, y_T), \quad \phi = (\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_p)$$

$$V = (V_1, V_2, \dots, V_T), \quad W = (W_1, W_2, \dots, W_{T-1})$$

مقدرات المربعات الصغرى تكون بالشكل:

$$\hat{\phi} = (\hat{\phi}_1, \hat{\phi}_2, \dots, \hat{\phi}_p) = YW'(WW')^{-1}$$

يجب الإشارة هنا أن عملية التقدير تقتضي تحديد رتبة التأخير المناسبة وهي ذلك العدد « p »

الذي يسمح بإعطاء نمذجة افضل لـ Y ويؤدي أيضاً الى بواقى تحقق الفرضيات الكلاسيكية، كما أن عدد المعلمات الواجب تقديرها هو pn^2 أو $(pn^2 + n)$ اذا أخذنا بعين الاعتبار الحدود الساكنة وتزداد هذه المعالم بـ n^2 مع زيادة كل تأخر جديد. عملياً يكفي تحديد حد أعلى لعدد التأخيرات p_{max} ثم تقدير نموذج الـ $VAR(p)$ من أجل $p = 1, 2, \dots, p_{max}$ ويتم في كل مرة حساب بعض المعايير AIC, SC, HQ والتأخر الأمثل هو ذلك العدد الذي يدنء معياري AIC و SC . لتحديد التأخير الأقصى اقترحت عدة معايير لذلك نوجزها فيما يلي⁸:

(1)-معيار خطأ التنبؤ النهائي (FPE) final predictor error criterion : يعطى هذا المعيار بالعلاقة التالية:

$$FPE = \left[\frac{N + p - n}{n - pn} \right]^n \det \Omega(p)$$

حيث Ω : مصفوفة التباينات المقدرة للبواقى،

n : عدد المتغيرات الداخلية

N : عدد المشاهدات الكلية

p : التأخير

نقوم بحساب قيم FPE المتعلقة بالقيم المتتالية لـ p حتى $K = \frac{N}{10}$ على الأكثر ثم نأخذ قيمة p

التي تدنء FPE وهي P_0 بمعنى:

$$FPE(p_0) = \min_{p=1}^K FPE(p)$$

(2)-معيار المعلومات لـ (AKAIKE) AKAIKE information criterion (AIC) :

يعطى هذا المعيار بالعلاقة التالية:

⁸- عثمان نفاذ ومنذر العواد، استخدام نماذج الـ var في التنبؤ ودراسة العلاقة السببية، مجلة جامعة دمشق للعلوم الاقتصادية والقانونية، المجلد 28 العدد الثاني 2012 ص 342.

$$AIC(p) = \log(\det\Omega(p)) + 2\left(\frac{n^2 p}{N}\right)$$

نأخذ قيمة التأخير p المناسبة أي تلك التي تدنء AIC بمعنى:

$$AIC(p_0) = \min_{p=1}^K AIC(p)$$

(3)- معيار المعلومات لـ (SCHWARTZ) (SC) schwartz information criterion :

ويعرف أيضاً بمعيار المعلومات البايزية BIC ويعطى هذا المعيار بالعلاقة التالية⁹:

$$SC(p) = \log(\det\Omega(p)) + \frac{\log N}{N} \cdot pn^2$$

تكون قيمة التأخير p المناسبة تلك التي تدنء SC بمعنى:

$$SC(p_0) = \min_{p=1}^K SC(p)$$

(4)- معيار المعلومات لـ (HANNAN&QUINN information criterion (HQic) :

يعطى هذا المعيار بالعلاقة التالية:

$$HQic(p) = \log(\det\Omega(p)) + (2n^2 \cdot p \cdot c \frac{\log N}{N})$$

حيث c مؤشر قوة المعيار وفي التطبيق العملي نأخذه $c = 2$

نأخذ قيمة التأخير p المناسبة أي تلك التي تدنء $HQic$ بمعنى:

$$HQic(p_0) = \min_{p=1}^K HQic(p)$$

مع الإشارة أنه يمكن أن نجد قيم التأخير الأنسب p_0 مختلف بين هذه المعايير لذلك سنأخذ أو نختار التباطؤ الزمني الذي حصلنا عليه في العدد الأكبر من المعايير.

⁹-LARDIC.S et MIGNON.V, économétrie des séries temporelles macro-économiques et financières, édition ECONOMICA, paris 2002, p97.

الفصل الرابع: اختبار السببية ومراحله

تهدف الدراسات القياسية في البحوث الاقتصادية الى إيجاد نماذج وصيغ رياضية تعبر عن

العلاقة بين المتغيرات الاقتصادية المدروسة، تلك العلاقات الرياضية تقتضي منا معرفة العلاقة السببية (ما هو المتغير المؤثر في الآخر) حتى تكون مفسرة للواقع.

4-1-مدلول العلاقة السببية: إذا قلنا بوجود علاقة سببية بين المتغيرتين X_t و Y_t هذا يعني أن أحدهما يؤثر في الآخر بتباطؤ زمني وعليه نكون أمام الحالات التالية:

$$Y_{t-} \text{ تسبب } X_t$$

$$X_t - \text{ تسبب } Y_t$$

$$Y_{t-} \text{ تسبب } X_t \text{ و } X_t \text{ تسبب } Y_t \text{ (سببية ثنائية الاتجاه)}$$

$$X_t \text{ و } Y_{t-} \text{ مستقلان عن بعضهما}$$

طور كل من Granger و Sims اختبارات لدراسة العلاقة السببية بين المتغيرات سنأتي الى تفصيلها في المحاور الموالية

4-2-اختبار Granger للسببية: ينطلق Granger في شرحه للسببية من افتراض أساسي مفاده

أن المعلومات الأساسية و الضرورية للتنبؤ بالمتغيرات X_t و Y_t تكون مجسدة في ماضي هذين السلسلتين¹⁰، هذا يعني أن X_{t+1} مرتبط بالقيم الحالية والماضية للسلسلة نفسها وكذلك بالقيم الحالية والماضية للمتغيرة Y_t ونفس الشيء بالنسبة للمتغيرة Y_t . عند الحديث عن السببية يجب أن نأخذ بالمسلمتين التاليتين:

-السببية لا تطبق الا على متغيرات عشوائية

-الماضي والحاضر يمكن أن يسبب المستقبل والعكس غير صحيح

¹⁰ -GOURIEROUX.C et MONFORT.A, séries temporelles et modèles dynamiques, édition ECONOMICA, paris 1990, p 442-4466.

3-4-مراحل اختبار Granger للسببية: حسب قرانجر إذا أردنا دراسة العلاقة السببية بين

المتغيرتين Y_t و X_t يجب أن نقوم بإجراء الخطوات التالية¹¹:

1-نقوم بتقدير المعادلة التالية بطريقة المربعات الصغرى

$$Y_t = \phi_1(L)Y_t + \phi_2(L)X_t + \varepsilon_t$$

حيث:

$$\phi_1(L) = \sum_{i=1}^p \phi_{1i} L^i$$

$$\phi_2(L) = \sum_{i=1}^q \phi_{2i} L^i$$

ثم نحسب مجموع مربعات الأخطاء (انحرافات القيم الفعلية عن المقدرة) ونرمز لها بالرمز

SCR1 أو RSS بمعنى RESIDUAL SUM OF SQUARES

2-نقوم بتقدير المعادلة التالية:

$$Y_t = \phi_1(L)Y_t + \varepsilon_t$$

ثم نحسب مجموع مربعات الأخطاء (انحرافات القيم الفعلية عن المقدرة) ونرمز لها بالرمز

SCR2

3-نقوم بتقدير إحصائية الاختبار F_c انطلاقاً من العلاقة التالية:

$$F_c = \frac{(SCR_2 - SCR_1)/p}{SCR_1(M - N)}$$

حيث: $N=p+q+2$ ، $M=T-\max(p,q)$

¹¹- LARDIC.S et MIGNON.V, OP cit, p 99-101.

T: عدد المشاهدات

p: عدد التباطؤات الزمنية للمتغيرات الداخلية

q: عدد التباطؤات الزمنية للمتغيرات الخارجية

4- نضع الفرضية H_0 التي تقول أن X_t لا تسبب Y_t ثم نقارن F_C المحسوبة مع F_α الجدولية ونقبل

الفرضية H_0 إذا كان: $F_C > F_\alpha(p, (M-N))$

مثال:

قمنا بدراسة العلاقة السببية بين التضخم والنمو الاقتصادي في الجزائر للفترة (1989-2012)

باستخدام احصائيات مصدرها الديوان الوطني للإحصاء حيث رمزنا للتضخم بـ inf وبينما رمزنا

للنمو الاقتصادي بـ $croi$ نستطيع عندئذ كتابة ما يلي¹²:

$$INF_t = \sum_{i=1}^n \alpha_i croi_{t-i} + \sum_{j=1}^n \beta_j INF_{t-j} + U_{1t} \dots \dots \dots 1$$

$$croi_t = \sum_{i=1}^n \lambda_i croi_{t-i} + \sum_{j=1}^n \delta_j INF_{t-j} + U_{2t} \dots \dots \dots 2$$

1- العلاقة من النمو الى التضخم:

أخذنا المتغيرات inf و coi بالشكل اللوغاريتمي فأصبحت $Linf$ و $Lcroi$

أقمنا بتقدير المتغيرة $Linf_t$ على المتغيرة $Linf_{t-1}$ و $Linf_{t-2}$ و $Lcroi_{t-1}$ و $Lcroi_{t-2}$

و $Lcroi_{t-2}$ فكانت لدينا المعادلة التالية:

$$\widehat{Linf}_t = 1.60 + 0.04Linf_{t-1} + 0.16Linf_{t-2} - 0.3Lcroi_{t-1} - 0.33Lcroi_{t-2}$$

$$R^2 = 0.17, \overline{R^2} = -0.12, R_{ss_{uR}} = SCR_1 = 7.06, F = 0.57$$

ب- قمنا بتقدير $Linf_t$ على المتغيرة $Linf_{t-1}$ و $Linf_{t-2}$ فكانت لدينا المعادلة التالية

11- سعيح عبد الحكيم، التضخم ومؤشرات الأداء الاقتصادي في الجزائر، دراسة قياسية للفترة (1989-2012)، مجلة دراسات اقتصادية، مركز البصيرة للبحوث والاستشارات والخدمات التعليمية، العدد 23 افريل 2014.

$$\widehat{\text{Linf}}_t = 0.33 + 0.48\text{Linf}_{t-1} + 0.29\text{Linf}_{t-2}$$

$$R^2 = 0.55, \overline{R^2} = 0.55, R_{SSR} = SCR_2 = 12.46, F = 11.74$$

ج- نقوم بحساب الإحصائية F_c من الصيغة التالية:

$$F_c = 7.64 \text{ عند الحساب وجدنا } F_c = \frac{(SCR_2 - SCR_1)/p}{SCR_1(M-N)}$$

$F_c > F_{tab}$ هذا يعني رفض فرضية العدم $\sum \alpha_i = 0$ بمعنى أن متغيرة النمو

تؤثر على التضخم.

2- العلاقة من التضخم إلى النمو: من أجل دراسة العلاقة السببية من التضخم إلى النمو الاقتصادي

قمنا بالخطوات التالية:

أ- قمنا بتقدير المتغيرة Lcro_t على المتغيرة Lcro_{t-1} و Lcro_{t-2} و Linf_{t-1}

و Linf_{t-2} فكانت لدينا المعادلة التالية:

$$\widehat{\text{Lcro}}_t = 1.41 - 0.03\text{Lcro}_{t-1} + 0.01\text{Lcro}_{t-2} - 0.06\text{Linf}_{t-1} - 0.16\text{Linf}_{t-2}$$

$$R^2 = 0.15, \overline{R^2} = -0.15, R_{SSUR} = SCR_1 = 3.17, F = 0.48$$

ب- قمنا بتقدير المتغيرة Lcro_t على المتغيرة Lcro_{t-1} و Lcro_{t-2} فكان لدينا:

$$\widehat{\text{Lcro}}_t = 1.04 + 0.01\text{Lcro}_{t-1} + 0.03\text{Lcro}_{t-2}$$

$$R^2 = 0.002, \overline{R^2} = -0.15, R_{SSR} = SCR_2 = 3.73, F = 0.01$$

ج- نقوم بحساب الإحصائية F_c من الصيغة التالية:

$$F_c = 1.86 \text{ عند الحساب وجدنا } F_c = \frac{(SCR_2 - SCR_1)/p}{SCR_1(M-N)}$$

$F_c < F_{tab}$ هذا يعني قبول فرضية العدم $\sum \alpha_i = 0$ بمعنى أن متغيرة النمو الاقتصادي لا

تؤثر على التضخم.

من كل هذا نستطيع القول بوجود علاقة سببية بين معدل التضخم ومعدل النمو وهي من النمو نحو التضخم، بمعنى أن التضخم يسبب النمو بينما العكس غير صحيح.

الفصل الخامس: إستقرارية السلاسل الزمنية

هناك فرق بين السلسلة الزمنية المستقرة وغير المستقرة، فالسلاسل الزمنية المستقرة تكون فيها الصدمات مؤقتة بعكس السلاسل غير المستقرة

5-1-مدلول الاستقرارية والغاية من دراستها:

بغرض اجراء تحليل السلاسل الزمنية بطريقة الـ VAR يجب أن تكون السلاسل مستقرة، فإن لم يتحقق هذا وجب معالجة السلاسل وجعلها مستقرة لأن تقدير علاقة انحدار بين عدد من المتغيرات في شكل سلاسل زمنية غير مستقرة يمكن أن يؤدي الى علاقة أو انحدار زائف¹³، بمعنى أن التغيير في المتغيرات يمكن أن يكون مرده الزمن الذي يؤثر فيها جميعاً مما يجعل تغيراتها متصاحبة، وبالتالي فإن العلاقة بينها هي علاقة اقتران أو ارتباط وليست علاقة سببية.

ان أحد حلول عدم استقرارية السلاسل هو أخذ الفرق، لكن اجراء الانحدار للمتغيرات في شكل فروق لكل سلسلة ليس بالحل الأمثل لأن هذا الإجراء قد يؤدي الى فقدان خصائص المدى الطويل ونتيجة لذلك ظهرت أبحاث لنماذج تحافظ على خصائص المدى القصير والطويل وتكون هذه النماذج مستقرة حتى لو كانت المتغيرات في الأصل غير مستقرة، وتتمثل هذه النماذج في فكرة التكامل المشترك التي سنتطرق اليها في الفصل الموالي.

5-2-اختبارات الاستقرارية: ان عدم استقرار السلاسل الزمنية يرجع في الغالب الى وجود جذر

الوحدة وهناك عدة اختبارات تختبر وجوده من عدمه منها اختبار ديكي فولر (Dickey-Fuller) وسنستعرض فيما يلي اختبار ديكي فولر واختبار ديكي فولر الموسع

اختبار ديكي فولر (Dickey-Fuller): هذا الاختبار مبني على نموذج الانحدار من الدرجة

12-كنعان عبد اللطيف عبد الرزاق وأنسام خالد حسن الجبوري، المجلة العراقية للعلوم الاقتصادية، IRAQI journal for Economic sciences، السنة العاشرة، العدد33، سنة2012، ص154.

الأولى ويعرف بثلاث نماذج نوردها فيما يلي¹⁴:

النموذج الأول (بدون اتجاه عام وبدون ثابت): يعطى هذا النموذج بالشكل التالي:

$$\Delta y_t = (\phi - 1)y_{t-1} + \varepsilon_t \quad \text{أو} \quad y_t = \phi y_{t-1} + \varepsilon_t \\ \Rightarrow \Delta y_t = \Upsilon y_{t-1} + \varepsilon_t$$

النموذج الثاني (بدون اتجاه عام وبوجود ثابت): يعطى هذا النموذج بالشكل التالي:

$$\Delta y_t = c + \Upsilon y_{t-1} + \varepsilon_t \quad \text{أو} \quad y_t = c + \phi y_{t-1} + \varepsilon_t$$

النموذج الثالث (باتجاه عام وبوجود ثابت): يعطى هذا النموذج بالشكل التالي:

$$\Delta y_t = c + bt + \Upsilon y_{t-1} + \varepsilon_t \quad \text{أو} \quad y_t = c + bt + \phi y_{t-1} + \varepsilon_t$$

ويشكل الاختبار كما يلي:

$$\begin{cases} H_0: \Upsilon = 0 \\ H_1: \Upsilon < 0 \end{cases}$$

ثم نقوم بحساب الإحصائية t فإذا كانت قيمة الإحصائية المحسوبة أكبر من قيمتها الجدولية نقبل فرضية العدم أي أن السلسلة غير مستقرة. لكن في هذه الحالة يمكن أن تكون نتائج النماذج الثلاث مختلفة ولهذا السبب سننطلق من النموذج الأكثر شمولاً (النموذج الثالث) ونقوم باختبار معنوية معلمته وفق الجدول الموالي:

¹⁴-Taladidia thiombiano, op cit, p192-195.

جدول (1): القيم الحرجة للاتجاه العام والثابت في اختبار DF

النموذج 3						النموذج 2			حجم العينة (T)
الاتجاه العام			الثابت			الثابت			
%10	%5	%1	%10	%5	%1	%10	%5	%1	
2.38	2.79	3.53	2.73	3.11	3.78	2.17	2.54	3.22	100
2.38	2.79	3.49	2.73	3.09	3.74	2.16	2.53	3.19	250
2.38	2.78	3.48	2.72	3.08	3.72	2.16	2.52	3.18	500
2.38	2.78	3.46	2.72	3.08	3.71	2.16	2.52	3.18	∞

3-5- مراحل اختبار استقرارية السلاسل الزمنية:

تمر عملية معرفة كون السلسلة مستقرة أم لا بثلاث مراحل نوجزها فيما يلي¹⁵:

المرحلة الأولى:

في هذه المرحلة نقوم بتقدير النموذج 3 ثم نختبر معنوية معلمة الميل (الاتجاه العام) باستخدام الجدول، فإن كانت غير معنوية نمر للمرحلة الثانية، أما ان كانت معنوية سنختبر عندئذ الفرضية H_0 فإن كانت -وفق قيم الجدول الموالي - H_0 محققة ومقبولة نقول بعدم استقرارية السلسلة، أما اذا رفضنا الفرضية H_0 فهذا يعني أن السلسلة مستقرة

جدول رقم (2) القيم الحرجة لاختبار $DF = 1 - \phi$

النموذج 3			النموذج 2			النموذج 1			حجم العينة
%10	%5	%1	%10	%5	%1	%10	%5	%1	
3.15-	3.45-	4.04-	2.58-	2.89-	3.51-	1.62-	1.95-	2.6-	100
3.13-	3.43-	3.99-	2.57-	2.88-	3.46-	1.62-	1.95-	2.58-	250
3.13-	3.42-	3.98-	2.57-	2.87-	3.44-	1.62-	1.95-	2.58-	500
3.12-	3.41-	3.96-	2.57-	2.86-	3.43-	1.62-	1.95-	2.58-	∞

¹⁵-Taladidia thiombiano, op cit, p200-203.

المرحلة الثانية:

نمر الى هذه المرحلة إذا كانت معلمة الاتجاه العام غير معنوية وبالتالي في هذه المرحلة نقوم بتقدير النموذج 2. نقوم الآن باختبار معنوية المعامل الثابت وفق الجدول (1)، فإذا كانت غير معنوية نمر للمرحلة الثالثة، أما إذا كانت معنوية فسنقوم عندئذ باختبار فرضية العدم H_0 وفق الجدول (2)، فإن قبلنا الفرضية H_0 نقول أن السلسلة غير مستقرة ونقوم بنفس العملية على سلسلة الفروقات الأولى وهكذا، أما إذا رفضنا الفرضية H_0 نقول عندئذ باستقرارية السلسلة.

المرحلة الثالثة:

إذا وجدنا عدم معنوية الثابت نمر الى هذه المرحلة وذلك بتقدير النموذج 1 ونقوم باختبار فرضية العدم H_0 باستخدام الجدول (2)، فإذا قبلنا الفرضية H_0 نقول بعدم استقرارية السلسلة ونقوم بنفس العملية على سلسلة الفروقات الأولى و.....حتى نصل الى سلسلة مستقرة، بينما إذا رفضنا الفرضية H_0 نقول عندئذ أن السلسلة مستقرة.

مثال:

قمنا بدراسة الاستقرارية لسلسلتين زمنيتين، الأولى سلسلة لوغاريتم اليد العاملة التي تحمل مؤهل دون الثانوي ونرمز لها بالرمز Lop و الثانية سلسلة لوغاريتم اليد العاملة التي تحمل مؤهل ثانوي والتي رمزنا لها بالرمز Ls وذلك لحالة الجزائر خلال الفترة (1989-2008) فكانت النتائج كما يلي¹⁶:

-استقرارية السلسلة Lop:

بتطبيق اختبار DF على هذه السلسلة نجد أن معامل التأخير ($\rho = 2$) هو التباطؤ الأنسب لأنه هو الذي يدنء اختباري AKAIKE و SCHWARZ للنماذج الثلاثة كما أن $T_{cal} > T_{tab}$ بما يعني قبول الفرضية H_0 والسلسلة غير مستقرة، حللنا سلسلة الفروقات الأولى للنماذج الثلاث من

15-سعيج عبد الحكيم، أثر التغيرات الكمية والنوعية لعناصر الإنتاج على النمو الاقتصادي-حالة الجزائر للفترة (1982-2008)، أطروحة دكتوراه في الاقتصاد القياسي، جامعة الجزائر3، سنة 2013، ص 205-207.

اجل ($\rho = 2$) فوجدنا في الحالات الثلاث $T_{cal} > T_{tab}$ وبالتالي قبول الفرضية H_0 وسلسلة الفروقات الأولى غير مستقرة، نحلل سلسلة الفروقات الثانية للنماذج الثلاث من أجل ($\rho = 2$) فنجد في الحالات الثلاث $T_{cal} < T_{tab}$ وبالتالي قبول الفرضية H_1 بمعنى أن سلسلة الفروقات الثانية مستقرة.

-استقرارية السلسلة LS :

بتطبيق اختبار DF على هذه السلسلة نجد أن معامل التأخير ($\rho = 0$) هو التباطؤ الأنسب لأنه بين اختباري AKAIKE و SCHWARZ للنماذج الثلاثة كما أن $T_{cal} > T_{tab}$ بما يعني قبول الفرضية H_0 والسلسلة غير مستقلة، حللنا سلسلة الفروقات الأولى للنماذج الثلاث من أجل ($\rho = 0$) فوجدنا في الحالات الثلاث $T_{cal} < T_{tab}$ وبالتالي قبول الفرضية H_1 بمعنى أن سلسلة الفروقات الأولى مستقرة.

الفصل السادس: التكامل المشترك ونماذج تصحيح الخطأ

سننظر فيما يلي إلى مدلول التكامل المشترك واختبارات الكشف عنه ثم بعد ذلك نقوم بعرض نموذج شعاع تصحيح الخطأ البسيط والمتعدد

6-1-1-مدلول التكامل المشترك واختبارات الكشف عنه:

نستهل تحليل التكامل المشترك إلى التطرق لمدلوله ثم نأتي فيما بعد إلى عرض اختبارات الكشف عنه وبصورة أدق اختبار Engel-Granger للكشف عن التكامل المشترك

6-1-1-1-مدلول التكامل المشترك Cointegration :

يعتبر قرانجر (1969) Granger أول من أشار إلى مفهوم التكامل المشترك أو الاندماج المشترك ليتم فيما بعد التوسع فيه من طرف قرانجر وأنجل Engel-Granger سنة 1987 ثم جاءت بعد ذلك عدة دراسات نذكر منها الدراسة التي قام بها يوهانسن johansen 1994,1991، 1988، للتكامل المشترك.

يعني التكامل المشترك أن تكون السلسلتان المتكاملتان ذات سلوك متشابه بمرور الزمن، وهو ما يشكل علاقة توازنية في الأجل الطويل ويجعل التركيبة الخطية بينهما ذات متوسط معدوم وتباين ثابت، كما أشرنا في استقرارية السلاسل الزمنية فإننا نكون عندئذ أمام إحدى الحالات التالية:

$$|\phi| < 1: \text{ تكون السلسلة مستقرة}$$

$$|\phi| > 1: \text{ تكون السلسلة منفجرة}$$

$$|\phi| = 1: \text{ تكون السلسلة غير مستقرة}$$

السلسلة غير المستقرة يتم تحويلها إلى سلسلة مستقرة بإجراء الفروقات عليها، فروقات أولى، ثانية... وهكذا. نقول أن السلسلة y_t متكاملة من الرتبة d ونكتب $y_t \rightarrow I(d)$ إذا كان تحويل السلسلة y_t إلى سلسلة مستقرة يتطلب إجراء العدد d من الفروقات، فإذا كانت $(d=0)$ نقول عندئذ أن السلسلة y_t مستقرة عند المستوى.

يرى Granger أن المتغيرات غير الساكنة هي التي تتحكم في سلوك العلاقات الناتجة عن دمج متغيرات مستقرة أو ساكنة وأخرى غير ساكنة هذا يعني أن¹⁷:

$$\begin{aligned} y_t &\rightarrow I(1) \\ x_t &\rightarrow I(0) \end{aligned} \Rightarrow y_t - \beta x_t \rightarrow I(1)$$

بصورة عامة نستطيع القول أن السلسلتين و متكاملتين فيما بينهما إذا كانتا متكاملتان من نفس الرتبة والتوليفة الخطية بينهما تسمح بالحصول على سلسلة مستقرة، هذا يعني أن:

$$\begin{aligned} y_t &\rightarrow I(d) \\ x_t &\rightarrow I(d) \end{aligned} \Rightarrow \theta_1 y_t + \theta_2 x_t \rightarrow I(0)$$

وتسمى الثنائية (θ_1, θ_2) عندئذ بشعاع التكامل.

إذا كانت لدينا تركيبة خطية بين y_t و x_t من الشكل:

$$\theta_1 y_t + \theta_2 x_t = u_t$$

¹⁷-Regis Bourbonnais, économetrie, 2 ieme édition, op cit , p273.

فإن العلاقة طويلة الأجل بين x_t و y_t يمكن كتابتها كما يلي:

$$y_t = -\frac{\theta_2}{\theta_1}x_t + U_t$$

وهو أساس مفهوم التكامل المشترك.

نقول ان السلسلتان x_t و y_t متكاملتان فيما بينهما من الدرجة (d , b) حيث

$d \geq b \geq 0$ ونكتب $CI(d, b) \rightarrow y_t x_t$ إذا كانت كل من x_t و y_t متكاملتان من نفس

الدرجة d وتوجد توليفة خطية بين السلسلتان تكون مثلاً بالشكل $\theta_1 y_t + \theta_2 x_t$ وتكون متكاملة من الدرجة (d-b).

2-1-6- اختبار التكامل المشترك:

قدم Engel-Granger منهجية لاختبار التكامل المشترك بين السلسلتان x_t و y_t وتتمثل في الخطوات التالية:

-إيجاد درجة تكامل كل من السلسلتان x_t و y_t فإن كانتا من نفس الرتبة نمر الى الخطوة الموالية، وإلا نقول بعدم وجود تكامل مشترك بينهما

-إذا كانت كل من السلسلتان x_t و y_t متكاملتان من نفس الرتبة نقول بوجود تكامل مشترك بينهما ونقوم بتقدير العلاقة بينهما للمدى الطويل بالشكل:

$$y_t = \alpha + \beta x_t + \varepsilon_t$$

لنجد قيم $\hat{\alpha}$ و $\hat{\beta}$ ، بعد ذلك يتم اختبار استقرارية سلسلة البواقي الناتجة عن التقدير باستعمال اختبار DF :

$$e_t = y_t - (\hat{\alpha} + \hat{\beta}x_t) \rightarrow I(0)$$

وفي حالة وجود k متغير يمكن تعميم الصيغة السابقة لتصبح بالشكل التالي:

$$y_t = \beta_0 + \beta_1 x_{1t} + \beta_2 x_{2t} + \dots + \beta_k x_{kt} + \varepsilon_t$$

$$e_t = y_t - (\widehat{\beta}_0 + \widehat{\beta}_1 x_{1t} + \widehat{\beta}_2 x_{2t} + \dots + \widehat{\beta}_k x_{kt}) \rightarrow I(0)$$

ان وجود تكامل مشترك بين السلاسل الزمنية يؤدي الى تقديرات زائفة لمعاملات الانحدار المقدره، وعليه يجب إضافة مقدار الخطأ الى المعادلات وهو ما يسمى نموذج شعاع تصحيح الخطأ المعروف بـ Vector Error correction model :VECM كما يعرف أيضاً بالصيغة Error correction model : ECM.

2-6-2- نموذج شعاع تصحيح الخطأ ECM:

عرف نموذج شعاع تصحيح الخطأ انتشاراً واسعاً نتيجة لمجموعة من الأسباب يمكن تلخيص أهمها في النقاط التالية:

- هو نموذج مناسب لقياس تصحيح اختلال التوازن في الفترة السابقة

- إذا كان هناك تكامل مشترك يصاغ باستخدام الفروقات الأولى التي تزيل المتجه من المتغيرات الداخلة في النموذج وتحل مشكلة الانحدار الزائف

- إن حد اختلال خطأ التوازن متغير مستقر، أي أن حالة التكيف في الأجل الطويل تمنع حد الخطأ من أن يكون كبيراً

2-6-1- نموذج شعاع تصحيح الخطأ البسيط:

في حالة التأكد من وجود علاقة تكامل مشترك بين متغيرتين x_t و y_t فإنه يمكن بناء وتقدير نموذج شعاع تصحيح الخطأ البسيط ECM باتباع المراحل التالية:

المرحلة الأولى: تستعمل طريقة المربعات الصغرى العادية لتقدير العلاقة بين x_t و y_t في المدى الطويل كما يلي:

$$y_t = \hat{\alpha} + \hat{\beta} x_t + e_t$$

المرحلة الثانية: نقوم باستعمال طريقة المربعات الصغرى العادية لتقدير العلاقة الديناميكية في الأجل القصير والطويل كما يلي:

$$\Delta y_t = \alpha_1 \Delta x_t + \alpha_2 e_{t-1} + u_t$$

$$\Delta y_t = \widehat{\alpha}_1 \Delta x_t + \widehat{\alpha}_2 (y_{t-1} - \widehat{\alpha} - \widehat{\beta} x_{t-1}) + \widehat{u}_t$$

حيث:

$\widehat{\alpha}_1$: تعبر عن العلاقة الموجودة بين المتغيرتين x_t و y_t في الأجل القصير

$\widehat{\beta}$: تعبر عن استجابة المتغيرة y_t للمتغير x_t في الأجل الطويل

$\widehat{\alpha}_2$: القوة الدافعة نحو التوازن أو ما يعرف بمعامل التعديل ويمكن أن نميز فيه الحالات التالية:

$\alpha_2 = 1$: تعبر عن تعديل بنسبة 100%

$\alpha_2 = 0.5$: العودة للتوازن قد تم تعديلها بنسبة 50%

$\alpha_2 = 0$: تعبر عن عدم وجود أي تعديل

$\alpha_2 < 0$: يشترط أن يكون معامل التعديل سالباً ومعنويته تختلف عن الصفر و إلا فإنه لا يمكن إعطاء تفسير اقتصادي للنموذج، وبالتالي لا يمكن استخدام منهجية التكامل المشترك.

في حالة وجود K متغير يمكن بناء نموذج تصحيح الخطأ كما يلي:

باستخدام طريقة المربعات الصغرى العادية نقوم بتقدير النموذج الكلاسيكي التالي:

$$y_t = \alpha_0 + \alpha_1 x_{1t} + \alpha_2 x_{2t} + \dots + \alpha_k x_{kt} + e_t$$

ثم نحسب سلسلة البواقي كما يلي:

$$e_t = y_t - \widehat{\alpha}_0 - \widehat{\alpha}_1 x_{1t} - \widehat{\alpha}_2 x_{2t} - \dots - \widehat{\alpha}_k x_{kt}$$

يمكن بعد ذلك استخدام منهجية قرانجر وأنجل لتقدير نموذج تصحيح الخطأ كما يلي:

$$\Delta y_t = \beta_1 \Delta x_{1t} + \beta_2 \Delta x_{2t} + \dots + \beta_k \Delta x_{kt} + \gamma_1 e_{t-1} + u_t$$

$$\Delta y_t = \widehat{\beta}_1 \Delta x_{1t} + \widehat{\beta}_2 \Delta x_{2t} + \dots + \widehat{\beta}_k \Delta x_{kt} + \widehat{\gamma}_1 (y_{t-1} - \widehat{\alpha}_0 - \widehat{\alpha}_1 x_{1t-1} - \widehat{\alpha}_2 x_{2t-1} - \dots - \widehat{\alpha}_k x_{kt}) + \widehat{u}_t$$

حيث: γ_1 : القوة الدافعة نحو التوازن

$(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k)$: العلاقة في الأجل القصير بين المتغير التابع والمتغيرات المستقلة

$(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k)$: العلاقة في الأجل الطويل بين المتغير التابع والمتغيرات المستقلة

مثال:

لتكن لدينا المتغيرتان x_t و y_t معطاة وفق الجدول¹⁸

المطلوب: تقدير العلاقة بين المتغيرتين من الشكل: $y_t = \hat{a}_0 + \hat{a}_1 x_t + e_t$ واختبر وجود التكامل المشترك بينهما (في حالة وجوده قدر نموذج تصحيح الخطأ)

المرحلة الأولى:

نختبر استقرارية السلسلتان فكانت لدينا النتائج المدرجة في الجدول التالي:

الاختبار	النموذج	x_t عند المستوى احصائية t	y_t عند المستوى احصائية t
DF	(1)	0.81	0.17
DF	(2)	0.05-	2.67-
DF	(3)	0.82-	3.05-

بمقارنة الإحصائية $t\hat{\phi}_i$ المحسوبة مع الجدولة نجد أنها أكبر من الجدولة وبالتالي فإن السلسلتان غير مستقرتان عند المستوى، أما سلسلة الفروقات الأولى لكلا السلسلتين كانت مستقرة وعليه فإن السلسلتان متكاملتان من الرتبة الأولى وبالتالي احتمال أن يكون هناك تكامل مشترك بينهما.

المرحلة الثانية:

اختبار التكامل المشترك يكون انطلاقاً من تقدير بواقي النموذج الموالي:

¹⁸-Regis Bourbonnais, économetrie, 8 ième édition, Dunod, paris, 2011 , p302-304.

$$y_t = a_0 + a_1x_t + e_t$$

بعد التقدير نجد:

$$y_t = 0.55x_t + 10.38$$

(6.3) (41.46)

$$n = 30 \quad R^2 = 0.58$$

نختبر استقرارية البواقي لهذا النموذج. إحصائية $t\hat{\phi}_l$ لسلسلة البواقي كانت وفق الجدول التالي:

اختبار DF		السلسلة
النموذج (2)	النموذج (1)	e_t
-5.30	-5.39	إحصائية $t\hat{\phi}_l$

وعليه فإن السلسلة مستقرة

المرحلة الثالثة:

نقدر الآن نموذج تصحيح الخطأ. نحسب أولاً البواقي (بتباطؤ واحد) حسب النموذج المقدر السابق فيكون لدينا:

$$e_{t-1} = y_{t-1} - 0.55x_{t-1} - 10.38$$

بعد ذلك نقدر النموذج الموالي بطريقة المربعات الصغرى العادية MCO

$$\Delta y_t = \alpha_1 \Delta x_t + \alpha_2 e_{t-1} + u_t$$

بعد التقدير نجد:

$$\Delta y_t = 0.61 \Delta x_t - 1.02 e_{t-1} + \hat{u}_t$$

(3.09) (5.22)

$$n = 29, \quad R^2 = 0.60$$

بما أن α_2 سالبة هذا يعني أنه يمكن تطبيق منهجية التكامل المشترك وعليه نستطيع كتابة ما يلي:

$$\Delta y_t = 0.61 \Delta x_t - 1.02(y_{t-1} - 0.55x_{t-1} - 10.38) + \hat{u}_t$$

حيث: $\alpha_1 = 0.61$: العلاقة بين x_t و y_t في الأجل القصير

$\beta = -0.55$: تعبر عن استجابة المتغيرة y_t للمتغير x_t في الأجل الطويل

$\alpha_2 = -1.02$: القوة الدافعة نحو التوازن أو ما يعرف بمعامل التعديل

2-2-6- عيوب طريقة أنجل وقرانجر Engel-Granger لتقدير ECM:

يعتبر نموذج لأنجل وقرانجر سهل الفهم والتطبيق لكن ما يعيبه أنه يأخذ y_t بدلالة x_t أي أن x_t يفسر y_t دون أن يقدم تفسير لذلك. بالإضافة الى ذلك إذا كان هناك أكثر من متغيرتين فاحتمال وجود أكثر من علاقة تكامل واحدة أمر وارد وهو ما لا يستطيع حساب البواقي من علاقة وحيدة التعامل معه، هذه النقائص تم معالجتها في طريقة يوهانسن للتكامل المشترك

3-2-6- طريقة يوهانسن Johansen للتكامل المشترك (التكامل المشترك في معادلات متعددة):

إذا كان هناك أكثر من متغيرتين في نموذج الـ VAR فإن هناك إمكانية أن يكون أكثر من شعاع واحد للتكامل المشترك، وبشكل عام إذا كان العدد n من المتغيرات فهناك احتمال وجود العدد $(n-1)$ من أشعة التكامل المشترك. حسب يوهانسن نوسع نموذج تصحيح الخطأ للمعادلة الواحدة الى نموذج متعدد المتغيرات. فإذا كان لدينا الـ $VAR(p)$ يمكن كتابة نموذج التكامل المشترك المتعدد بالشكل التالي:

$$y_t = A_0 + A_1 y_{t-1} + A_2 y_{t-2} + \dots + A_p y_{t-p} + \varepsilon$$

حيث: y_t : شعاع ذو بعد $K \times 1$

A_0 : شعاع ذو بعد $K \times 1$

A_i : مصفوفة ذات البعد $K \times K$

عندئذ نستطيع كتابة الفروقات الأولى بطريقتين أولهما تأخذ الشكل التالي:

$$\Delta y_t = A_0 - (A_1 - I)\Delta y_{t-1} + (A_1 + A_2 - I)\Delta y_{t-2} + \dots + (A_{p-1} + \dots + A_2 + A_1 - I)\Delta y_{t-p+1} + \Pi y_{t-p} + \varepsilon$$

أو بواسطة y_{t-1} وتكون بالشكل:

$$\Delta y_t = A_0 + \beta_1 \Delta y_{t-1} + \beta_2 \Delta y_{t-2} + \dots + \beta_{p-1} \Delta y_{t-p+1} + \Pi y_{t-1} + \varepsilon$$

حيث:

$$\beta_i = -(A_{i+1} + \dots + A_{i+p})$$

$$\Pi = \sum_{i=1}^p A_i - I$$

المصفوفات Π : تتضمن معاملات الأجل الطويل

β_i : تتضمن معاملات الأجل القصير

لتكن r رتبة Π أي أن $rk(\Pi) = r, (r = 1, 2, \dots, n)$.

- إذا كان $r = 0$ فإن النموذج يؤول الى نموذج الـ VAR

- إذا كان $r = n$ هذا يعني أن كل متغيرات الشعاع y مستقرة وتتكامل من الدرجة صفر. وبالتالي

النموذج يؤول الى نموذج الـ VAR

- إذا كانت $1 \leq r \leq n - 1$ فإن ذلك يعني وجود العدد r من علاقات التكامل في نموذج شعاع

تصحيح الخطأ و المنهجية الواجب استعمالها هي منهجية $VECM$ أما استعمال الـ VAR فيعتبر

غير دقيق.

الباب الثاني:

الفصل السابع: تذكير بالبرمجة الخطية

في هذا الفصل سنقوم بالتعريف بالبرمجة الخطية والخطوات المتبعة لبناء نموذج البرمجة الخطية،

كما سنتطرق الى مختلف الطرق المستخدمة في حل هذه النماذج مع استعراض الحالات الخاصة

التي يمكن أن تعترض كل طريقة من طرق الحل السابقة، كما سنستعرض مدلول النموذج المقابل واستخداماته المختلفة

7-1- التعريف بالبرمجة الخطية:

تعرف البرمجة الخطية بأنها أسلوب رياضي لتوزيع مجموعة من الموارد والامكانيات المحدودة على عدد من الحاجات المتنافسة عليها، وذلك من خلال بناء ما يعرف بنماذج البرمجة الخطية والقيام بحلها، وتتم عملية بناء نماذج البرمجة الخطية بالمراحل التالية¹⁹:

- تحديد المتغيرات الأساسية للنموذج وذلك من خلال حصر عددها والرمز لها كأن نقول أن نموذج

معين يحوي ثلاث متغيرات هي x_3, x_2, x_1

- تحديد دالة الهدف ومعرفة الهدف المنشود من ورائها، كأن نقول أن دالة الهدف لنموذج معين هي

دالة الربح والهدف منها هو البحث عن تعظيمها

- تحديد مختلف القيود الميدانية التي تعترض سعينا الى تعظيم أو تدنية دالة الهدف وعرضها في

شكل متراجحات أو معادلات

- افتراض خطية العلاقة بين المتغيرات الأساسية للنموذج سواء تعلق الأمر بدالة الهدف أو القيود

- الأخذ بشرط عدم سالبية المتغيرات الأساسية للنموذج أي افتراض أن كل المتغيرات تكون موجبة

أو معدومة

ولتفصيل مراحل بناء نموذج للبرمجة الخطية نستعرض المثال التالي:

مثال: تقوم إحدى المؤسسات بإنتاج ثلاثة أنواع من المنتجات والجدول الموالي يلخص ساعات

الإنتاج لكل وحدة في كل قسم من الأقسام التشغيلية الثلاثة التي تمر فيها المنتجات وساعات العمل

المتاحة في كل قسم وربح الواحدة من المنتجات الثلاثة

¹⁹- حسين علي مشرفي وزياد عبد الكريم القاضي، بحوث العمليات، دار المسيرة للتوزيع والطباعة، الطبعة الأولى، عمان،

الأردن، 1997، ص21-69.

المنتج/الوقت المستغرق	القسم الأول	القسم الثاني	القسم الثالث	الربح/وحدة
1	2	2	4	40
2	5	5	2	30
3	10	3	2	20
الوقت الكلي المتاح	900	400	600	...

شكل نموذج البرمجة الخطية لهذه المسألة

-نبدأ أولاً بتحديد المتغيرات الأساسية للنموذج والتي هي المتغيرات التالية:

x_1 : الكميات المنتجة من السلعة الأولى

x_2 : الكميات المنتجة من السلعة الثانية

x_3 : الكميات المنتجة من السلعة الثالثة

-دالة الهدف هي دالة الربح (π) (الربح الذي تجنيه المؤسسة من انتاجها) والهدف هو تعظيم هذا الربح $MAX(\pi)$ وعليه تكون لدينا دالة الهدف التالية (أخذنا هنا بالعلاقة الخطية بين متغيرات النموذج ونفس الأمر يحدث بالنسبة للقيود):

$$MAX(\pi) = 40x_1 + 30x_2 + 20x_3$$

-نعترض سعينا لتعظيم ربح المؤسسة مجموعة من القيود ممثلة في عدد ساعات العمل المتاحة في كل قسم والتي يمكن عرضها في المترجمات التالية:

$$2x_1 + 5x_2 + 10x_3 \leq 900 \text{ قيد عدد ساعات العمل المتاحة في القسم الأول:}$$

$$2x_1 + 5x_2 + 3x_3 \leq 400 \text{ قيد عدد ساعات العمل المتاحة في القسم الثاني:}$$

$$4x_1 + 2x_2 + 2x_3 \leq 600 \text{ قيد عدد ساعات العمل المتاحة في القسم الثالث:}$$

-نأخذ بشرط عدم سالبية متغيرات النموذج، بما يعني أن كل متغيرات النموذج موجبة أو معدومة

$$\text{وعليه يكون لدينا: } x_3 \geq 0, x_2 \geq 0, x_1 \geq 0$$

بعد التطرق للخطوات السابقة يمكننا عرض نموذج البرمجة الخطية للمسألة المطروحة في المثال السابق في الشكل التالي:

$$MAX(\pi) = 40x_1 + 30x_2 + 20x_3$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + 10x_3 \leq 900 \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 \leq 400 \\ 4x_1 + 2x_2 + 2x_3 \leq 600 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \end{cases} \text{ تحت القيود:}$$

7-2-2- طرق حل نماذج البرمجة الخطية: يمكن حل نموذج البرمجة الخطية باستخدام مجموعة من الطرق نذكر منها ما يلي:

-طريقة الحل البياني

-الطريقة المبسطة للحل *simplex*

-طريقة *M* الكبرى *Big M*

-طريقة المرحلتين

7-2-1- طريقة الحل البياني: هي طريقة من طرق حل نموذج البرمجة الخطية وتستخدم إذا كان عدد متغيرات النموذج لا يتجاوز اثنان، وفيما يلي نستعرض هذه الطريقة والحالات الخاصة لها

أ- عرض طريقة الحل البياني: تعتمد هذه الطريقة على التمثيلات البيانية لقيود النموذج الخطي ودالة هدفه وتمر طريقة الحل البياني لهذه المراحل التالية:

-جعل القيود في شكل معادلات ورسمها بيانياً

-تحديد منطقة الحل لكل قيد (المنطقة التي تعبر عن تحقق متراجحة القيد الفعلية)

-تحديد منطقة الحل المشتركة بين القيود

-تحديد النقطة المثلى ضمن المنطقة المشتركة للحل (النقطة التي تحقق أكبر قيمة لدالة الهدف في حالة التعظيم أو النقطة التي تحقق أقل قيمة لدالة الهدف في حالة التذنية) والتي تعتبر الحل الأمثل لنموذج البرمجة الخطية

مثال: أوجد حل نموذج البرمجة الخطية التالي بيانياً

$$MAX(Z) = x_1 + 4x_2$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \leq 0 \\ 2x_1 + x_2 \leq 5 \\ x_2 \leq 3 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases} \text{ تحت القيود:}$$

القيود الأول:

$$x_1 - x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = x_2$$

القيود الثاني:

$$2x_1 + x_2 = 5 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0, x_2 = 5 \\ x_2 = 0, x_1 = 5/2 \end{cases}$$

القيود الثالث:

$$x_2 = 3 \Rightarrow \begin{cases} x_2 = 3 \\ \forall x_1 \end{cases}$$

بعد رسم القيود الثلاثة وفق الاحداثيات المقترحة وتحديد منطقة حل متراجحات القيود تكون لدينا

المنطقة المشتركة للحل محدودة بالنقاط التالية: O, A, B, C, D, E حيث: O : نقطة بداية

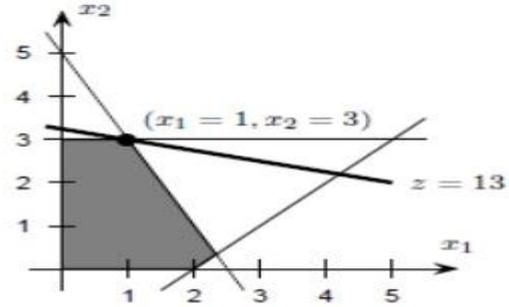
المعلم، B : تقاطع القيدين الثالث والرابع، C : تقاطع القيدين الأول والرابع، D : تقاطع القيدين

الأول والثاني، وسنختار النقطة المثلى للنموذج بناءً على الجدول التالي:

D	C	B	A	O	المتغير/النقطة
2	$\frac{7}{3}$	1	0	0	x_1
0	$\frac{1}{3}$	3	3	0	x_2
2	$\frac{11}{3}$	13	12	0	Z

Exemple de résolution graphique

- $\text{Max } z = x_1 + 4x_2$
- s.c.
 - $x_1 - x_2 \leq 2$
 - $2x_1 + x_2 \leq 5$
 - $x_2 \leq 3$
 - $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$
- de solution optimale :
 - $x_1 = 1, x_2 = 3$ et $z = 13$.



19

بمأن النموذج يمثل مشكل تعظيم فإن النقطة المثلى أو الحل الأمثل للنموذج هو:

$$x_1 = 1, x_2 = 3, Z = 13$$

ب-الحالات الخاصة لطريقة الحل البياني:

هناك بعض الحالات الخاصة التي يمكن أن تواجهنا عند استخدام الطريقة البيانية في حل بعض نماذج البرمجة الخطية ونوجزها في حالة تعذر الحل، حالة القيد الفائض، حالة عدم توفر الحدود، حالة تعدد الحلول المثلى وحالة الدورانية أو حالة التفسخ

أولاً: حالة تعذر الحل: في هذه الحالة توجد بعض القيود المتعارضة وبالتالي يستحيل تحديد منطقة

الحل الأمثل مما يعني عدم وجود حل لنموذج البرمجة الخطية

مثال: أوجد الحل البياني لنموذج البرمجة الخطية التالي:

$$\text{MAX}(Z) = 3x_1 + 2x_2$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \geq 80 \\ 3x_1 + 2x_2 \leq 60: \text{تحت القيود} \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

نلاحظ أن القيدين متناقضين وبالتالي لا نستطيع إيجاد منطقة حل مشتركة بينهما مما يدفعنا للقول بأننا في الحالة الخاصة المتمثلة في حالة تعذر الحل

ثانياً: حالة القيد الفائض: في هذه الحالة نجد أن قيد من بين القيود يكون في فضاء بعيد عن القيود الأخرى مما يجعله عديم التأثير على المنطقة المشتركة للحل وبالتالي نستطيع الاستغناء على هذا القيد ونبحث عن الحل الأمثل دون أن يكون لذلك تأثير على قيمة الحل الأمثل للنموذج

مثال: أوجد الحل الأمثل لنموذج البرمجة الخطية التالي بيانياً:

$$MIN(Z) = 2x_1 + 3x_2$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \leq 60 \\ 3x_1 + 2x_2 \leq 60 \\ x_1 \leq 90 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases} \text{ تحت القيود:}$$

في هذه الحالة نستطيع أن نستغني عن القيد الثالث (لأنه فائض لا يساهم في تحديد المنطقة المشتركة للحل) ونبحث عن الحل الأمثل دون أن يكون لذلك تأثير على قيمة الحل الأمثل

ثالثاً: حالة عدم توفر الحدود: تحدث هذه الحالة في مشاكل التعظيم ولا تحدث في مشاكل التذنية (لأن شرط عدم سالبية المتغيرات يحد المنطقة من الأسفل) وتتمثل في أن تكون منطقة حل النموذج غير محدودة من إحدى الجهات

مثال: أوجد الحل البياني للنموذج التالي:

$$MAX(Z) = 5x_1 + 3x_2$$

$$\begin{cases} x_1 \geq 10 \\ x_1 + x_2 \geq 15 \\ x_2 \geq 5 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases} \text{ تحت القيود:}$$

نجد منطقة الحل غير محدودة من الأعلى ودالة الهدف دالة تعظيم وبالتالي نقول أننا في حالة عدم توفر الحدود

رابعاً: حالة تعدد الحلول المثلى: تحدث هذه الحالة لما يكون قيداً أو أكثر موازي لدالة الهدف أو مطابق لها

مثال: أوجد الحل البياني للنموذج التالي:

$$MAX(Z) = 3x_1 + 15x_2$$

$$\begin{cases} 15x_1 + 15x_2 \leq 45 \\ 6x_1 + 30x_2 \leq 60 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

تحت القيود:

نلاحظ أن القيد الثاني موازي لدالة الهدف وبالتالي نقول أن للنموذج أكثر من حل أمثل وحيد
خامساً: حالة الدورانية أو التفسخ: تحدث هذه الحالة لما يكون الحل الأمثل منطبقاً على أحد المحورين (قيمة أحد المتغيرين في الحل الأمثل تكون معدومة)

مثال: أوجد الحل البياني للنموذج التالي:

$$MAX(Z) = 2x_1 + 10x_2$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 20 \\ 3x_1 + 4x_2 \leq 72 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

تحت القيود:

نلاحظ أن الحل الأمثل يقع على المحور العمودي وبالتالي نقول أننا في حالة الدورانية أو التفسخ

2-2-7- الطريقة المبسطة للحل simplex : هي طريقة من طرق حل نموذج البرمجة الخطية وتستخدم تقنية الجداول للوصول الى الحل الأمثل وتتبع الخطوات التالية:

-تحويل نموذج البرمجة الخطية الى الشكل القياسي أو المعياري وذلك بكتابة متراجحات القيود في شكل معادلات بعد إضافة المتغير المساعد المقابل لكل قيد، بالإضافة أننا ننقل الطرف الثاني لدالة الهدف الى الطرف الأول لتصبح معادلة طرفها الثاني صفراً

-بناء جدول الحل الابتدائي وذلك بصب محتويات الشكل القياسي في جدول تكون فيه الأسطر بعدد قيود النموذج مضاف إليه سطر أخير يعبر عن دالة الهدف

-الانتقال من جدول الى جدول موالي باستخدام التركيز بواسطة عنصر الارتكاز (*pivo*)

-تحديد جدول الحل النهائي وهو الجدول الذي يكون فيه سطر دالة الهدف (Z) معاملاته كلها موجبة في مشاكل التعظيم وكلها سالبة في مشاكل التذنية

-قراءة الحل الأمثل من جدول الحل النهائي وذلك بقراءة قيمة دالة الهدف (Z) و قيم المتغيرات الأساسية فقط (دون المتغيرات المساعدة أو الاصطناعية)، أما المتغيرات الأساسية التي لم تظهر في جدول الحل النهائي فتعتبر قيمها معدومة.

سنستعرض خطوات طريقة السامبلاكس *simplex* من خلال المثال التالي:

مثال: أوجد حل النموذج التالي باستخدام الطريقة المبسطة للحل

$$MAX(Z) = 3x_1 + 2x_2$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 6 \\ 2x_1 + x_2 \leq 8 \\ -x_1 + x_2 \leq 1 \\ x_2 \leq 2 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases} \text{ تحت القيود:}$$

الشكل القياسي للنموذج هو:

$$\begin{cases} z - 3x_1 - 2x_2 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + s_1 = 6 \\ 2x_1 + x_2 + s_2 = 8 \\ -x_1 + x_2 + s_3 = 1 \\ x_2 + s_4 = 2 \\ x_1, x_2, s_1, s_2, s_3, s_4 \geq 0 \end{cases}$$

تسمى المتغيرات x_1, x_2 بالمتغيرات الأساسية للنموذج، أما المتغيرات s_1, s_2, s_3, s_4 فهي متغيرات مساعدة كل منها مرتبط بقيد معين وعليه نستطيع تشكيل جدول الحل الابتدائي الذي يأخذ الشكل التالي:

	$\downarrow x_1$	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	b
s_1	1	2	1	0	0	0	6
$\leftarrow s_2$	2	1	0	1	0	0	8
s_3	-1	1	0	0	1	0	1
s_4	0	1	0	0	0	1	2
z	-3	-2	0	0	0	0	0

في مشاكل التعظيم المتغير الداخل هو ذلك المتغير الذي له أقل قيمة سالبة كعامل في سطر دالة الهدف (Z) أما بالنسبة لمشاكل التندنية فالمتغير الداخل فهو ذلك المتغير الذي له أكبر قيمة موجبة كعامل في سطر دالة الهدف (Z) وفي حالتنا هذه هو المتغير x_1 ، بينما يتحدد المتغير الخارج بعد قسمة عناصر عمود الثوابت b على العناصر المقابلة لها في عمود المتغير الداخل والمتغير الداخل هو صاحب أقل ناتج موجب أو معدوم عن العملية السابقة (يستثنى من ذلك السطر الذي يكون فيه ناتج العملية سالباً أو غير محدد) وفي حالتنا هذه هو المتغير s_2 ، تقاطع العمود الداخل والسطر الخارج هو عنصر الارتكاز (pivo)

أول شيء يكتب في الجدول الجديد هو سطر عنصر الارتكاز وهو سطر عمود الارتكاز في الجدول الأول مقسوم على عنصر الارتكاز ويسمى السطر الممهّد، أما القيم الأخرى في الجدول الجديد فيتم حسابها بناءً على العلاقة التالية:

$$\text{السطر الجديد} = \text{السطر القديم} - (\text{القيمة المقابلة له في عمود الارتكاز}) \times (\text{السطر الممهّد})$$

فيكون لدينا ما يلي:

$$s_1 = (0,1,2,1,0,0,0,6) - 1(0,1,\frac{1}{2},0,\frac{1}{2},0,0,4) = (0,0,\frac{3}{2},1,-\frac{1}{2},0,0,2)$$

وهكذا بالنسبة لبقية الأسطر فيكون لدينا الجدول الجديد التالي:

	x_1	$\downarrow x_2$	s_1	s_2	s_3	s_4	b
$\leftarrow s_1$	0	$\boxed{\frac{3}{2}}$	1	$-\frac{1}{2}$	0	0	2
x_1	1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0	0	4
s_3	0	$\frac{3}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	0	5
s_4	0	1	0	0	0	1	2
z	0	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{3}{2}$	0	0	12

ليست كل معاملات (Z) موجبة أو معدومة وبالتالي لسنا بصدد جدول الحل النهائي، نقوم بنفس الخطوات السابقة على هذا الجدول لنحصل على الجدول التالي:

	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	b
x_2	0	1	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0	0	$\frac{4}{3}$
x_1	1	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	0	0	$\frac{10}{3}$
s_3	0	0	-1	1	1	0	3
s_4	0	0	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	1	$\frac{2}{3}$
z	0	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{4}{3}$	0	0	$\frac{38}{3}$

بمأن كل معاملات (z) موجبة أو معدومة وغاية دالة الهدف (تعظيم Max) هذا يعني أننا بصدد

$$\text{جدول الحل النهائي والحل الأمثل هو: } z = \frac{38}{3}, x_2 = \frac{4}{3}, x_1 = \frac{10}{3}$$

3-2-7- طريقة M الكبرى Big M :

تستخدم هذه الطريقة لحل نماذج البرمجة الخطية إذا كانت متراجحات القيود مختلطة (أكبر من أو يساوي، أقل من أو يساوي، مساواة)، على أن نضيف للقيود غير الملائمة (أكبر من أو يساوي،

مساواة) في الشكل القياسي للنموذج متغيرات اصطناعية مرتبطة بالقيود R_i ، أما دالة الهدف في الشكل القياسي دائماً نضيف لها $-MR_1 - MR_2 - \dots$ في حالة التعظيم و

$+MR_1 + MR_2 + \dots$ في مشاكل التدنية

مثال: أوجد الحل الأمثل للنموذج التالي بطريقة $Big M$

$$MIN(Z) = 2x_1 + 3x_2$$

$$\begin{cases} -2x_1 + 3x_2 = 3 \\ 4x_1 + 5x_2 \geq 10 \\ x_1 + 2x_2 \leq 5 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases} \text{ تحت القيود:}$$

الشكل القياسي للنموذج هو:

$$-2x_1 + 3x_2 + R_1 = 3$$

$$4x_1 + 5x_2 - s_2 + R_2 = 10$$

$$x_1 + 2x_2 + s_3 = 5$$

$$z = 2x_1 + 3x_2 + MR_1 + MR_2$$

$$z = 2x_1 + 3x_2 + M(3 + 2x_1 - 3x_2) + M(10 - 4x_1 - 5x_2 + s_2)$$

$$z + (-2 + 2M)x_1 + (-3 + 8M)x_2 - Ms_2 = 13M$$

وعليه يكون لدينا الجدول الأول التالي:

	x_1	$\downarrow x_2$	s_2	s_3	R_1	R_2	b
$\leftarrow R_1$	-2	3	0	0	1	0	3
R_2	4	5	-1	0	0	1	10
s_3	1	2	0	1	0	0	5
z	$-2+2M$	$-3+8M$	$-M$	0	0	0	$13M$

باستعمال طريقة تركيز الجداول التي أشرنا إليها سابقاً نجد الجدول الثاني التالي:

	$\downarrow x_1$	x_2	s_2	s_3	R_1	R_2	b
x_2	$-2/3$	1	0	0	$1/3$	0	1
$\leftarrow R_2$	$22/3$	0	-1	0	$-5/3$	1	5
s_3	$7/3$	0	0	1	$-2/3$	0	3
z	$-4+22/3 M$	0	-M	0	$1-8/3 M$	0	$3+5M$

هذا الجدول ليس جدول الحل النهائي لأن هناك معامل موجب في سطر دالة الهدف وبالتالي نحدد عنصر الارتكاز ونركز الجدول لنحصل على الجدول التالي:

	x_1	x_2	s_2	s_3	R_1	R_2	b
x_2	0	1	$-1/11$	0	$2/11$	$1/11$	$16/11$
x_1	1	0	$-3/22$	0	$-5/22$	$3/22$	$15/22$
s_3	0	0	$7/22$	1	$-3/22$	$-7/22$	$31/22$
z	0	0	$-6/11$	0	$-M+1/11$	$6/11 - M$	$63/11$

بمأن كل معاملات (z) سالبة أو معدومة وغاية دالة الهدف (تدنية Min) هذا يعني أننا بصدد

$$جدول الحل النهائي والحل الأمثل هو: $x_1 = \frac{15}{22}$, $x_2 = \frac{16}{11}$, $z = \frac{63}{11}$$$

4-2-7- طريقة المرحلتين:

تعتبر هذه الطريقة بديلة لطريقة $Big M$ وتستخدم دالة هدف جديدة (r) (مجموع المتغيرات الاصطناعية في دالة الهدف) التي تعامل على أنها مشكل تدنية حتى وإن كانت الدالة (z) تعظيم

إذا وصلنا للجدول النهائي للمرحلة الأولى وكان ($r = 0$) نقول أن النموذج قابل للحل ونمر للمرحلة الثانية وإلا نقول أن النموذج غير قابل للحل.

الجدول الأول للمرحلة الثانية هو نفس الجدول الأخير للمرحلة الأولى بعد استبعاد أعمدة المتغيرات الاصطناعية والعودة الى دالة الهدف الأصلية (z) وتعامل كما هي عليه (إن كانت تعظيم تعامل معاملة مشاكل التعظيم وإلا فإنها تعامل معاملة مشاكل التذنية) وننتقل من جدول الى جدول موالي الى غاية الوصول الى جدول الحل النهائي وقراءة الحل الأمثل.

مثال: أوجد حل نفس المثال السابق (الذي استخدم في طريقة *Big M*) بطريقة المرحلتين

$$MIN(Z) = 2x_1 + 3x_2$$

$$\begin{cases} -2x_1 + 3x_2 = 3 \\ 4x_1 + 5x_2 \geq 10 \\ x_1 + 2x_2 \leq 5 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases} \text{ تحت القيود:}$$

الشكل القياسي للنموذج هو:

$$-2x_1 + 3x_2 + R_1 = 3$$

$$4x_1 + 5x_2 - s_2 + R_2 = 10$$

$$x_1 + 2x_2 + s_3 = 5$$

$$r = R_1 + R_2 = 3 + 2x_1 - 3x_2 + 10 - 4x_1 - 5x_2 + s_2$$

$$r = -2x_1 - 8x_2 + s_2 + 13$$

$$r + 2x_1 + 8x_2 - s_2 = 13$$

وعليه يكون لدينا الجدول الأول التالي:

	x_1	$\downarrow x_2$	s_2	s_3	R_1	R_2	b
$\leftarrow R_1$	-2	3	0	0	1	0	3
R_2	4	5	-1	0	0	1	10
s_3	1	2	0	1	0	0	5
r	2	8	-1	0	0	0	13

باستعمال طريقة تركيز الجداول التي أشرنا إليها سابقاً نجد الجدول الثاني التالي:

	$\downarrow x_1$	x_2	s_2	s_3	R_1	R_2	b
x_2	$-2/3$	1	0	0	$1/3$	0	1
$\leftarrow R_2$	$22/3$	0	-1	0	$-5/3$	1	5
s_3	$7/3$	0	0	1	$-2/3$	0	3
r	$22/3$	0	-1	0	$-8/3$	0	5

هذا الجدول ليس جدول الحل النهائي لأن هناك معامل موجب في سطر دالة الهدف وبالتالي نحدد عنصر الارتكاز ونركز الجدول لنحصل على الجدول التالي:

	x_1	x_2	s_2	s_3	R_1	R_2	b
x_2	0	1	$-1/11$	0	$2/11$	$1/11$	$16/11$
x_1	1	0	$-3/22$	0	$-5/22$	$3/22$	$15/22$
s_3	0	0	$7/22$	1	$-3/22$	$-7/22$	$31/22$
r	0	0	0	0	-1	-1	0

($r = 0$) نقول أن النموذج قابل للحل ونمر للمرحلة الثانية

بعد استبعاد المتغيرات الاصطناعية من القيد الأول في هذا الجدول نجد:

$$x_2 - \frac{1}{11}s_2 = \frac{16}{11} \Rightarrow x_2 = \frac{1}{11}s_2 + \frac{16}{11}$$

$$x_1 - \frac{3}{22}s_2 = \frac{15}{22} \Rightarrow x_1 = \frac{3}{22}s_2 + \frac{15}{22}$$

ودالة الهدف تصبح:

$$z = 2x_1 + 3x_2 = 2\left(\frac{3}{22}s_2 + \frac{15}{22}\right) + 3\left(\frac{1}{11}s_2 + \frac{16}{11}\right) = \frac{63}{11} + \frac{6}{11}s_2$$

$$z - \frac{6}{11}s_2 = \frac{63}{11}$$

والجدول الأول للمرحلة الثالثة هو:

	x_1	x_2	s_2	s_3	b
x_2	0	1	$-1/11$	0	$16/11$
x_1	1	0	$-3/22$	0	$15/22$
s_3	0	0	$7/22$	1	$31/22$
z	0	0	$-6/11$	0	$63/11$

بمأن كل معاملات (z) سالبة أو معدومة وغاية دالة الهدف (تدنية Min) هذا يعني أننا بصدد

جدول الحل النهائي والحل الأمثل هو: $x_1 = \frac{15}{22}$, $x_2 = \frac{16}{11}$, $z = \frac{63}{11}$

5-2-7- الحالات الخاصة لطريقة السامبلاكس $simplex$:

هناك بعض الحالات الخاصة في حل نماذج البرمجة الخطية بطريقة السامبلاكس $simplex$

نوجزها في النقاط التالية:

- أن يكون أحد المتغيرات سالباً، في هذه الحالة نعوضه بمتغير موجب مثلاً: $x_2 \leq 0$ نضع $x'_2 = -x_2$ حيث يكون $x'_2 \geq 0$ ونقوم بالحل

- أن يكون أحد المتغيرات غير محدود مثلاً: $\forall x_1$ نضع: $x_1 = x'_1 - x_1$ حيث كل من x'_1 و x_1 تكون موجبة ونقوم بالحل

- أن نصل الى جدول الحل النهائي ويبقى لنا في الأساس متغير اصطناعي، نقول عندئذ بعدم وجود حل أمثل للنموذج مع إمكانية وجود خطأ في تركيب النموذج

- أن تكون كل عناصر عمود الارتكاز سالبة أو معدومة عندها لا نستطيع أن نمر الى الجدول الموالي وبالتالي نقول بعدم محدودية الحل

- أن يكون متغيرين أو أكثر مرشحين للدخول ومتغيرين أو أكثر مرشحين للخروج، نختار عندئذ أحدها لا على التعيين ونقول أننا في حالة الانحلال والنموذج يقبل أكثر من حل أمثل وحيد

الفصل الثامن: البرمجة غير الخطية $programmation non linéaire$

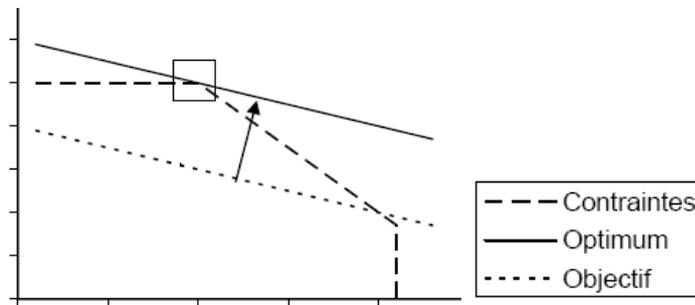
تعتبر البرمجة الخطية حالة خاصة من أنواع البرمجة وهي الصيغة المبسطة لها وهناك بعض الظواهر تتم برمجتها ببرمجة غير خطية²⁰، ولذلك يجب أن نأخذ بعين الاعتبار دوال الهدف

²⁰- للاطلاع أكثر أنظر

والقيود غير الخطية وفي هذه الحالة نجد لدينا إما دالة الهدف خطية والقيود غير خطية مثل النموذج التالي:

$$\begin{aligned} \text{MAX}(z) &= 3x_1 + 5x_2 \\ \text{s/c} : x_1 &\leq 4 \\ 9x_1^2 + 5x_2^2 &\leq 216 \\ x_1 &\geq 0, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

كما يبين ذلك الشكل التالي:



أو أن تكون دالة الهدف غير خطية والقيود خطية مثل النموذج التالي:

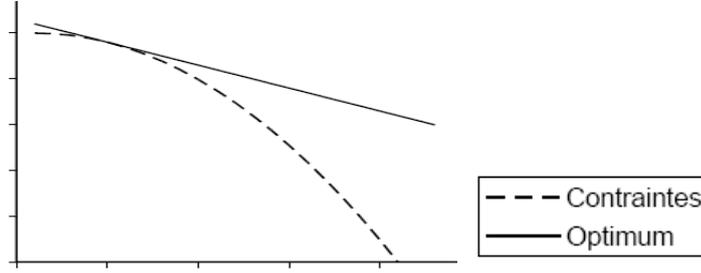
$$\begin{aligned} \text{MAX}(z) &= 3x_1 - 9x_1^2 + 182x_2 - 13x_2^2 \\ \text{s/c} : x_1 &\leq 4 \\ 2x_2 &\leq 12 \\ 3x_1 + 2x_2 &\leq 8 \\ x_1 &\geq 0, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

-Mohamed Ouriemchi , résolution de problèmes non linéaires par les méthodes de points intérieurs , thèse de doctorat de l'université du HAVRE, 2005, p3.

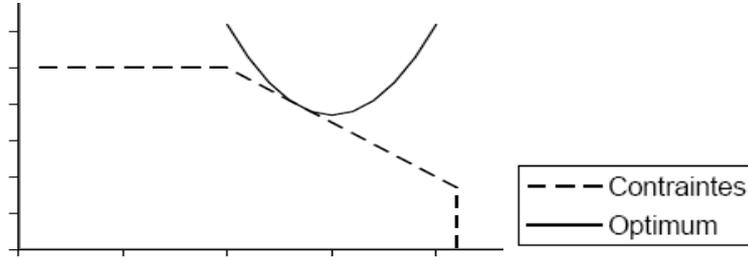
- J.M.BOUSSARD et J.DAUDIN, la programmation linéaire dans les modèles de production, édition Inva et masson, paris, 1988 , p114.

-MARIE-CHRISTINE PLATEAU, reformulation quadratique convexes pour la programmation quadratique thèse de doctorat en informatique, conservatoire nationale des Arts, France, 2006, p17.

كما يبين ذلك الشكل التالي:



أو أن تكون دالة الهدف غير خطية والقيود غير خطية كما يبين ذلك الشكل التالي:



في كل هذه الحالات يظهر أن البحث عن الأمثلية أكثر صعوبة من البرمجة الخطية' وفيما يلي عرض

البرمجة التربيعية وشبه المحدودة *programmation quadratique* و برمجة القطوع الزائدة *programmation hyperbolique*

1-8- البرمجة التربيعية وشبه المحدودة *programmation quadratique* :

نستهل تحليلنا بعرض نموذج البرمجة التربيعية لنشير فيما بعد للبرمجة غير المحدودة

1-1-8- البرمجة التربيعية *programmation quadratique* :

يمكن عرض مشكل البرمجة التربيعية وشبه المحدودة بالشكل التالي:

$$MAX(z) = \sum_{i=1}^n c_i x_i + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n h_{ij} x_i x_j$$

$$\sum_{i=1}^n a_{ij} x_i \leq 0 \quad \text{مع}$$

$$\forall j = 1, 2, \dots, m$$

والصيغة المصفوفية لها تكون بالشكل:

$$MIN(z) = CX + \frac{1}{2} X^T H X$$

$$AX \leq 0 \quad \text{مع}$$

حيث أن المصفوفة H تسمى المصفوفة الهيسية (مصفوفة المشتقات الجزئية الثانية).

مثال: ليكن لدينا النموذج التربيعي التالي:

$$MIN(z) = 3x_1 + 7x_2 + 5x_1^2 + 4x_2^2 + 6x_1x_2$$

$$s/c : 3x_1 + 4x_2 \leq 0$$

$$9x_1 + 2x_2 \leq 0$$

المطلوب: أكتب هذا النموذج بالشكل التربيعي

يكتب هذا النموذج في شكل مصفوفي كما يلي:

$$MIN(z) = CX + \frac{1}{2} X^T H X$$

$$AX \leq 0 \quad \text{مع}$$

حيث:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 9 & 2 \end{pmatrix}, H = \begin{pmatrix} 10 & 6 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}, C = (3, 7), X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x_1} = 3 + 10x_1 + 6x_2, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2} = 10$$

$$\frac{\partial z}{\partial x_2} = 7 + 8x_2 + 6x_1, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x_2^2} = 8$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial^2 z}{\partial x_2 \partial x_1} = 6$$

$$H = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 z}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 z}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 z}{\partial x_2^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 6 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$$

$$z = CX + \frac{1}{2}X^T H X = (3 \ 7) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}(x_1 \ x_2) \begin{pmatrix} 10 & 6 \\ 6 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$z = 3x_1 + 7x_2 + (5x_1 + 3x_2, \quad 3x_1 + 4x_2) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$z = 3x_1 + 7x_2 + 5x_1^2 + 3x_1x_2 + 3x_1x_2 + 4x_2^2$$

$$z = 3x_1 + 7x_2 + 5x_1^2 + 4x_2^2 + 6x_1x_2$$

تحت القيد:

$$AX \leq 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 9 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \leq 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 3x_1 + 4x_2 \\ 9x_1 + 2x_2 \end{pmatrix} \leq 0$$

8-1-2- البرمجة شبه المحدودة:

البرمجة شبه المحدودة هي حالة خاصة من البرمجة التربيعية تكون فيها المصفوفة الهيسية شبه محدودة موجبة بمعنى $X^T H X \geq 0 \forall X \in \mathbb{R}$ هذا الشرط يسمح بأن تكون الدالة التربيعية محدبة *convexité* (بالنسبة لدالة الهدف او القيود) وهو قيد ضروري في هذا التحليل، لأن التحدب الذي هو ميزة البرمجة التربيعية شبه المحدودة يضمن لنا وجود نقطة مثلى وحيدة.

سنعرض هذه البرمجة من خلال المثال الموالي

مثال: لنعتبر النموذج التالي:

$$\text{opt } z = x_1 + 3x_1x_2$$

$$s/c: x_1 + 2x_2 = 8$$

نستطيع كتابة دالة لاغرونج لهذا النموذج بالشكل التالي:

$$\mathcal{L}(x_1, x_2, \lambda) = x_1 + 3x_1x_2 + \lambda(8 - x_1 - 2x_2)$$

دالة لاغرونج تحول البحث عن أمثلية الحل لدالة ذات المتغيرتين في ظل وجود قيود الى الحل الأمثل لدالة ذات ثلاث متغيرات دون قيود. ووفق شروط الدرجة الأولى نكون في وضع الأمثلية إذا كان مشتق دالة لاغرونج الأول بالنسبة لمختلف متغيراتها معدوم أي أن:

$$\nabla_x \mathcal{L}(x_1, x_2, \lambda) = 0$$

هذا يعني أن:

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1} = 1 + 3x_2 - \lambda = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_2} = 3x_1 - 2\lambda = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = 8 - x_1 - 2x_2 = 0 \end{cases}$$

حل جملة المعادلات هذه يوصلنا الى الحل التالي:

$$x_1^* = \frac{26}{6}, x_2^* = \frac{11}{6}, \lambda^* = \frac{39}{6}$$

من المفترض أن نمر الى شروط الدرجة الثانية لمعرفة اذا كانت النقطة $(x_1^*, x_2^*, \lambda^*)$ قيمة عظمى أو دنيا

2-8- برمجة القطوع الزائدة *programmation hyperbolique*:

تعرف هذه النماذج بالشكل التالي²¹:

²¹- للاطلاع أكثر أنظر

- M.FLORIAN et P.ROBILLARD, programmation hyperbolique en variables bivalentes, revue française d'Automatique d'informatique et de recherche opérationnelle, tome2, 1971, p7.

$$MAX(z) = \frac{CX' + C_0}{D'X + D_0}$$

$$AX \leq b$$

$$X \geq 0$$

حيث الأشعة المعرفة لهذه الصيغة ذات الأبعاد التالية:

$$C_0, \text{ ثابت}, D_0, \text{ ثابت}, A_{(mx1)}, b_{(mx1)}, D_{(nx1)}, C_{(nx1)}$$

من بين الطرق المستخدمة في حل هذه النماذج نجد طريقة *charms cooper* التي تعتمد على القيام بتغييرات على النموذج لجعله خطياً ثم نقوم بحل هذا الأخير ولما نصل الى الحل نعود الى المتغيرات الأصلية للنموذج وذلك من خلال الخطوات التالية:

$$MAX(z) = \frac{CX'}{D'X + D_0} + \frac{C_0}{D'X + D_0} = C'U + C_0U_0$$

$$AX \leq b \Rightarrow AXU_0 \leq bU_0 \Rightarrow AU \leq bU_0, U \geq 0, U_0 \geq 0$$

$$D'X + D_0 = 1 \Rightarrow (D'XU_0 + D_0U_0) = 1 \Rightarrow (D'U + D_0U_0) = 1$$

نضع: والنموذج يصبح بالشكل:

$$MAX(z) = C'U + C_0U_0$$

$$S/C : AU \leq bU_0$$

$$D'X + D_0 = 1, U_0 \geq 0, U \geq 0$$

مثال: أوجد حل نموذج زائد القطع التالي بطريقة *charms cooper*

$$MAX(z) = \frac{x_1 - x_2 - 2x_3 - 2}{x_1 + 2x_2 + 2}$$

$$S/C : 2x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 14$$

$$x_j \geq 0, \forall j = 1,2,3$$

باستعمال طريقة *charms cooper* نستطيع كتابة هذا النموذج بالشكل التالي:

$$MAX(z) = U_1 - U_2 - 2U_3 - 2U_0$$

$$S/C : 2U_1 + U_2 + 2U_3 \leq 14U_0$$

$$U_1 + 2U_2 + 2U_0 = 1 \Rightarrow \begin{cases} U_1 + 2U_2 + 2U_0 \geq 1 \\ U_1 + 2U_2 + 2U_0 \leq 1 \end{cases}$$

والشكل القياسي للنموذج يكون كما يلي:

$$\begin{cases} 2U_1 + U_2 + 2U_3 + U_4 - 14U_0 = 0 \\ U_1 + 2U_2 + 2U_0 + U_5 = 1 \\ U_1 + 2U_2 + 2U_0 - U_6 + U_{100} = 1 \end{cases}$$

$$z = U_1 - U_2 - 2U_3 - 2U_0 - MU_{100}$$

$$z = U_1 - U_2 - 2U_3 - 2U_0 - M(1 - U_1 - 2U_2 - 2U_0 + U_6)$$

$$z = (1 + M)U_1 + (2M - 1)U_2 - 2U_3 + (2M - 2)U_0 - MU_6 - M$$

$$z - (1 + M)U_1 - (2M - 1)U_2 + 2U_3 - (2M - 2)U_0 + MU_6 = -M$$

ونحل هذا النموذج بطريقة M الكبرى كما يلي:

انطلاقاً من الشكل القياسي للنموذج نستطيع كتابة الجدول الأول التالي:

	U_0	U_1	$\downarrow U_2$	U_3	U_6	b
U_4	-14	2	1	2	0	0
U_5	2	1	2	0	0	1
$\Leftarrow U_{100}$	2	1	2	0	-1	1
Z	2	-1	1	2	0	0
M	-2	-1	-2	0	1	-1

هذا الجدول ليس جدول الحل النهائي (لأن هناك معاملات سالبة في سطر دالة الهدف) وعليه قمنا

بتحديد عنصر الارتكاز ومن ثمة حسبنا مكونات الجدول الجديد التي جاءت كما يلي:

$$U_4 = (-14, 2, 1, 2, 0, 0) - 1(1, \frac{1}{2}, 1, 0, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = (-15, -\frac{5}{2}, 0, 2, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$$

$$U_5 = (2, 1, 2, 0, 0, 1) - 2(1, \frac{1}{2}, 1, 0, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = (0, 0, 0, 0, 1, 0)$$

$$Z = (2, -1, 1, 2, 0, 0) - 1(1, \frac{1}{2}, 1, 0, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = (1, \frac{1}{2}, 1, 0, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$$

$$M = (-2, -1, -2, 0, 1, -1) + 2(1, \frac{1}{2}, 1, 0, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = (0, 0, 0, 0, 0, 0)$$

	U_0	$\downarrow U_1$	U_{100}	U_3	U_6	b
U_4	-15	$-\frac{5}{2}$	0	2	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$
U_5	0	0	0	0	1	0
$\Leftarrow U_2$	1	$\frac{1}{2}$	1	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
Z	1	$-\frac{3}{2}$	0	2	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$
M	0	0	0	0	0	0

هذا الجدول ليس جدول الحل النهائي أيضاً (لأن هناك معاملات سالبة في سطر دالة الهدف) وعليه قمنا بتحديد عنصر الارتكاز ومن ثمة حسبنا مكونات الجدول الجديد التي جاءت كما يلي:

$$U_4 = \left(-15, -\frac{5}{2}, 0, 2, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) + \frac{5}{2}(2, 1, 2, 0, 0, -1) = (-10, 0, 5, 0, -2, 2)$$

$$U_5 = (0, 0, 0, 0, 1, 0) - 0(2, 1, 2, 0, 0, -1) = (0, 0, 0, 0, 1, 0)$$

$$Z = \left(1, \frac{1}{2}, 1, 0, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) + \frac{3}{2}(2, 1, 2, 0, 0, -1) = (4, 0, 3, 2, -1, 1)$$

$$M = (0, 0, 0, 0, 0, 0) - 0(2, 1, 2, 0, 0, -1) = (0, 0, 0, 0, 0, 0)$$

	U_0	U_2	U_{100}	U_3	$\downarrow U_6$	b
U_4	-10	0	5	0	-2	2
$\Leftarrow U_5$	0	0	0	0	1	0
U_1	2	1	2	0	-1	1
Z	4	0	3	2	-1	1
M	0	0	0	0	0	0

هذا الجدول ليس جدول الحل النهائي (لأن هناك معاملات سالبة في سطر دالة الهدف) وعليه قمنا بتحديد عنصر الارتكاز ومن ثمة حسبنا مكونات الجدول الجديد التي جاءت كما يلي:

$$U_4 = (-10, 0, 5, 0, -2, 2) + 2(0, 0, 0, 0, 1, 0) = (-10, 0, 5, 0, 0, 2)$$

$$U_1 = (2, 1, 2, 0, -1, 1) - 1(0, 0, 0, 0, 1, 0) = (2, 1, 2, 0, 0, 1)$$

$$Z = (4,0,3,2, -1,1) + 1(0,0,0,0,1,0) = (4,0,3,2,0,1)$$

$$M = (0,0,0,0,0,0) - 0(0,0,0,0,1,0) = (0,0,0,0,0,0)$$

	U_0	U_2	U_{100}	U_3	U_5	b
U_4	-10	0	5	0	0	1
U_6	0	0	0	0	1	0
U_1	2	1	2	0	0	1
Z	4	0	3	2	0	1
M	0	0	0	0	0	0

هذا الجدول هو جدول الحل النهائي (لأن كل معاملات سطر دالة الهدف موجبة) ومنه الحل الأمثل

$$\text{هو: } U_0 = U_2 = U_3 = 0, U_1 = 1, Z = 1$$

بالرجوع الى متغيراتنا نجد: $x_1 = 1, x_2 = x_3 = 0, Z = 1$

الفصل التاسع: البرمجة الديناميكية

البرمجة الديناميكية هي تلك البرمجة التي تأخذ بالحسبان متغير الزمن وتأثيره على النموذج

المدرس²²، وهي بذلك تتيح لنا معرفة وضعية النظام بعد مرور فترة زمنية محددة انطلاقاً من معرفة الوضعية الحالية للنظام، ونستعرض البرمجة الديناميكية في هذا التحليل من خلال عرض سلاسل ماركوف.

9-1- التعريف بسلاسل ماركوف وصيغتها الرياضية:

نستهل هذا المدخل التحليلي لسلاسل ماركوف بالتعريف بصاحبها أو مكتشفها والأفكار التي بنيت عليها ثم نعد فيما بعد الى عرض الضيع والعلاقات الرياضية لها

²²- حسين علي مشرقي وزيايد عبد الكريم القاضي، بحوث العمليات، مرجع سابق، ص 271-289.

9-1-1-التعريف بسلاسل ماركوف *chains de MARKOV*:

تعود تسمية هذه السلاسل الى اسم مكتشفها وهو العالم الروسي أندريا ماركوف *A. MARKOV* الذي ولد سنة 1856 وتوفي سنة 1922، وتعتبر سلاسل ماركوف احدى أدوات البرمجة الديناميكية في بحوث العمليات وتعرف بأنها: "عملية عشوائية تحمل خاصية ماركوفية أي أن التكهن بالمستقبل يكون انطلاقاً من الحاضر فقط دون الحاجة الى معرفة الماضي". وتعتبر سلاسل ماركوف لبنة أساسية في نظرية العمليات العشوائية وطبقت في مجالات عدة منها النماذج الفيزيائية والبيولوجية و علم الاجتماع والهندسة والإدارة، وتسمح هذه الطريقة بمعرفة الحالة التي يكون عليها النظام خلال فترة زمنية ما²³.

تسمى عملية عشوائية ما $\{x_n, n \in T\}$ سلسلة ماركوف إذا حققت ما يلي:

-فضاء هذه الحالة يكون منفصلاً.

-فضاء المعلمة لهذه الحالة يكون منفصلاً.

-تحقق هذه العملية خاصية ماركوف (معرفة المستقبل انطلاقاً من الحاضر فقط دون الرجوع الى

معرفة الماضي) ويعبر عنها بالصيغة التالية²⁴:

$$p(x_{n+1} = j/x_n = i, x_{n-1} = i_{n-1}, \dots, x_1 = i_1) = p(x_{n+1} = j/x_n = i) = p_{ij}$$

حيث: p_{ij} تسمى الاحتمالات الانتقالية وتسمى المصفوفة المشكلة من هذه الاحتمالات والتي يعبر

$$p = [p_{ij}]$$

بمصفوفة الاحتمالات الانتقالية أو مصفوفة ماركوف *la matrice de MARKOV*

²³- للاطلاع أكثر أنظر: -شادي حسن، تحليل ماركوف، جامعة دمشق، كلية الاقتصاد.

17-JACQUES TEGHE, Recherche opérationnelle, édition ellipses , paris, 2013, p197.

9-1-2-الصيغة الرياضية لسلاسل ماركوف:

نبدأ عرض الصيغة الرياضية لسلاسل ماركوف بتحديد مصفوفة الاحتمالات الانتقالية لسلسلة ماركوف ثم الحديث عن القوة النونية لهذه الأخيرة بالإضافة الى المسار التقاربي لها، تتميز مصفوفة الاحتمالات الانتقالية لسلسلة ماركوف بالخصائص التالية²⁵:

-جميع عناصرها غير معدومة بما يعني أن: $p_{ij} \geq 0, \forall i, j \in T$

-مجموع عناصر أي سطر في هذه المصفوفة يساوي الواحد أي أن: $\sum_{j \in T} p_{ij} = 1, \forall i \in T$

مثال:

اثناء دراسة حالة سقوط الأمطار على مدينة معينة وجدنا أن سلسلة ماركوف بحالتين يمكن أن تصف ظاهرة حدوث الأيام الماطرة والجافة وصفاً جيداً، إذا فرضنا أنه إذا كان اليوم الحالي ماطراً فإن اليوم التالي يكون ماطراً باحتمال 0.8 أما إذا كان اليوم الحالي جافاً فإن اليوم التالي يكون ماطراً باحتمال 0.4.

المطلوب: أوجد مصفوفة الاحتمالات الانتقالية لهذه السلسلة

$$p = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix} \text{ لتكن:}$$

حيث: p_{11} : احتمال أن يكون اليوم الأول جافاً والثاني جافاً

p_{12} : احتمال أن يكون اليوم الأول جافاً والثاني ماطراً

p_{21} : احتمال أن يكون اليوم الأول ماطراً والثاني جافاً

p_{22} : احتمال أن يكون اليوم الأول ماطراً والثاني ماطراً

بناءً على معطيات المثال تحدد مصفوفة الاحتمالات الانتقالية لهذه السلسلة بالشكل التالي:

²⁵- لحسن عبد الله باشيوية، بحوث العمليات، دار اليازوري العلمية للنشر والتوزيع، عمان، الأردن، 2011، ص501.-

$$p = \begin{pmatrix} 0.6 & 0.4 \\ 0.2 & 0.8 \end{pmatrix}$$

يمكن الحديث أيضاً عن المصفوفة $p_{ij}^{(n)}$ وهي مصفوفة احتمالات الانتقال بعد n خطوة، ففي المثال السابق اذا حسبنا $p^{(2)}$ فهي احتمالات حالة الجو (ماطر، جاف) بعد يومين ويتم حسابها كما يلي:

$$p^{(2)} = p \cdot p = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.4 \\ 0.2 & 0.8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.6 & 0.4 \\ 0.2 & 0.8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.44 & 0.56 \\ 0.28 & 0.72 \end{bmatrix}$$

بمعنى أنه إذا كان اليوم الأول جافاً فإنه سيكون بعد يومين جافاً باحتمال 0.44 وإذا كان اليوم الأول مائطراً فاحتمال أن يكون مائطراً بعد يومين يقدر بـ 0.72. ويمكن حساب المصفوفة $p^{(n)}$ باتباع الخطوات التالية:

أولاً: نكتب المصفوفة p بالشكل التالي: $p = QDQ^{-1}$

حيث: D : مصفوفة قطرية عناصر قطرها الرئيسي مكون من القيم الذاتية للمصفوفة p .

Q : عبارة عن مصفوفة يمكن الحصول عليها من الأشعة الذاتية للمصفوفة p . (مصفوفة أعمدتها هي الأشعة الذاتية للمصفوفة p)

Q^{-1} : هي معكوس المصفوفة Q .

ثانياً: نحسب المصفوفة $p^{(n)}$ انطلاقاً من الصيغة التالية: $p^{(n)} = Q D^{(n)} Q^{-1}$

وسنوضح كيفية حساب هذه المصفوفات من خلال المثال الموالي

مثال:

إذا كانت لدينا مصفوفة الاحتمالات الانتقالية لسلسلة ماركوف بالشكل التالي:

$$p = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{bmatrix}$$

المطلوب: أوجد $p^{(n)}$ وعلق على النتائج بعد التطرق للمسار التقاربي لها

نقوم أولاً بحساب القيم الذاتية لهذه المصفوفة.

نستطيع تحديد القيم الذاتية لهذه المصفوفة (λ) انطلاقاً من العلاقة التالية: $\det(p - \lambda I) = 0$

وفي حالتنا هذه يكون لدينا:

$$p - \lambda I = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\lambda & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -\lambda & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & -\lambda \end{bmatrix}$$

$$\det(p - \lambda I) = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} -\lambda & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -\lambda & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & -\lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda + 1/2)^2 = 0$$

بحل هذه المعادلة نحصل على

$$(\lambda - 1)(\lambda + 1/2)^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda = 1 \\ \lambda = -1/2 \end{cases}$$

وبالتالي فإن القيم الذاتية للمصفوفة p هي: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1/2$, $\lambda_3 = -1/2$

نقوم بعدئذ بإيجاد الأشعة الذاتية لسلسلة ماركوف بتطبيق العلاقة التالية:

$$(p - \lambda I)V^T = 0$$

حيث: $V = (x, y, z)$ هو الشعاع الذاتي، V^T : مقلوب هذا الشعاع

انطلاقاً من العلاقة السابقة وبتطبيقها على مثالنا هذا نجد:

$$\begin{bmatrix} -\lambda & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -\lambda & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & -\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

بعد الحساب نحصل على جملة المعادلات التالية:

$$\begin{cases} -x\lambda + \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z = 0 \\ \frac{1}{2}x - \lambda y + \frac{1}{2}z = 0 \\ \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y - \lambda z = 0 \end{cases}$$

نقوم بحل جملة المعادلات هذه وذلك بإعطاء القيمة الذاتية في كل مرة قيمة من قيمها الثلاث

فنجد الأشعة الذاتية التالية: $(\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1/2, \lambda_3 = -1/2)$

$$V_1 = (1, 1, 1), V_2 = (-1, 1, 0), V_3 = (-1, 0, 1)$$

وعليه نستطيع كتابة مصفوفة الأشعة الذاتية Q بالشكل التالي:

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

أما المصفوفة Q^{-1} فتكون بالشكل:

$$Q^{-1} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

أما المصفوفة D فهي مصفوفة قطرية عناصر قطرها الرئيسي مكون من القيم الذاتية للمصفوفة p

وتكون بالشكل التالي:

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

نقوم فيما يلي بحساب المصفوفة $p^{(n)}$:

$$p^{(n)} = Q D^{(n)} Q^{-1} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (1)^n & 0 & 0 \\ 0 & (-\frac{1}{2})^n & 0 \\ 0 & 0 & (-\frac{1}{2})^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$p^{(n)} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2(-\frac{1}{2})^n & (-\frac{1}{2})^{n+1} & (-\frac{1}{2})^{n+1} \\ (-\frac{1}{2})^{n+1} & 2(-\frac{1}{2})^n & (-\frac{1}{2})^{n+1} \\ (-\frac{1}{2})^{n+1} & (-\frac{1}{2})^{n+1} & 2(-\frac{1}{2})^n \end{bmatrix}$$

المسلك التقاربي للمصفوفة $p^{(n)}$ هو $\lim_{n \rightarrow \infty} p^{(n)}$ وفي مثالنا هذا نجد أن:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (-\frac{1}{2})^n = \lim_{n \rightarrow \infty} (-\frac{1}{2})^{n+1} = 0$$

وعليه يكون المسلك التقاربي للمصفوفة $p^{(n)}$ التي بحورتنا كما يلي:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p^{(n)} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

9-2- سلاسل ماركوف والتنبؤ بحالة النظام في اللحظة (n):

من أجل التنبؤ بحالة النظام في اللحظة (n) يجب أولاً معرفة الوضعية الابتدائية للنظام والتي

نعرفها كما يلي: $a_j^{(0)} = p(x_0 = j)$ ونعرف الاحتمال المطلق غير المشروط في المرحلة

زفي اللحظة n بالشكل التالي: $a_j^{(n)} = p(x_n = j)$. يمكننا التنبؤ بحالة النظام في اللحظة n

بمعرفة الوضعية الابتدائية ومصفوفة الاحتمالات الانتقالية حسب المعادلة المعروفة بمعادلة

« *chapman – kolmogrov* » ويكون ذلك وفق العلاقة التالية²⁶:

$$a^{(n)} = a^{(0)} \cdot p^n$$

17-JACQUES TEGHEM, op cit, p197.

حيث: $a^{(n)}$: وضعية النظام في اللحظة n

$a^{(n)}$: شعاع الاحتمالات الابتدائية

p: مصفوفة الإحتمالات الانتقالية لفترة واحدة

مثال:

لدينا شركة سياحية A تتنافس مع ثلاث شركات أخرى مشابهة B, C, D ، تريد هذه الشركة دراسة رغبات الزبائن لتتنبأ بنصيبتها من طالبي الخدمات السياحية، فأخذت عينة عشوائية من المسافرين في عطلة نهاية الأسبوع (حجمها 100 شخص) وتم سؤال أفراد هذه العينة عن الشركة السياحية التي قدمت لهم الخدمة آخر مرة وعن الشركة السياحية التي يرغبون بتلقي الخدمة فيها في المرة القادمة، وكانت النتائج وفق الجدول التالي²⁷:

الشركة		الشركة التي ستقدم الخدمة في المرة القادمة				عدد المصطافين الذين تلقوا الخدمة
		A	B	C	D	
الشركة التي قدمت الخدمة	A	224	63	42	21	350
	B	45	201	30	24	300
	C	30	20	136	14	200
	D	24	12	15	99	150
العدد المتوقع للمصطافين		323	296	223	158	

نبحث أولاً عن الحالة الابتدائية للنظام (حصص الشركات من المسافرين) أي نبحث عن $a_j^{(0)}$ فيكون لدينا:

²⁷- شادي حسين، تحليل ماركوف، مرجع سبق ذكره ص.

$$a_1^{(0)}: A : \frac{350}{1000} \% = 0.35 , a_2^{(0)}: B : \frac{300}{1000} \% = 0.30$$

$$a_3^{(0)}: C : \frac{200}{1000} \% = 0.20 , a_4^{(0)}: D : \frac{150}{1000} \% = 0.15$$

ومنه يكون شعاع الدالة الابتدائية للنظام بالشكل:

$$a^{(0)} = (0.35 \quad 0.30 \quad 0.20 \quad 0.15)$$

أما مصفوفة الاحتمالات الانتقالية فهي:

$$p = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} & p_{14} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} & p_{24} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} & p_{34} \\ p_{41} & p_{42} & p_{43} & p_{44} \end{pmatrix}$$

$$p_{11} = \frac{224}{350} = 0.64 , p_{12} = \frac{63}{350} = 0.18 , p_{13} = \frac{42}{350} = 0.12 , p_{14} = \frac{21}{350} = 0.06 \quad \text{حيث :}$$

$$p_{21} = \frac{45}{300} = 0.15 , p_{22} = \frac{201}{300} = 0.67 , p_{23} = \frac{30}{300} = 0.10 , p_{24} = \frac{24}{300} = 0.08$$

$$p_{31} = \frac{30}{200} = 0.15 , p_{32} = \frac{20}{200} = 0.10 , p_{33} = \frac{136}{200} = 0.68 , p_{34} = \frac{14}{200} = 0.07$$

$$p_{41} = \frac{24}{150} = 0.16 , p_{42} = \frac{12}{150} = 0.08 , p_{43} = \frac{15}{150} = 0.10 , p_{44} = \frac{99}{150} = 0.66$$

وهكذا تكون لدينا المصفوفة التالية:

$$p = \begin{pmatrix} 0.64 & 0.18 & 0.12 & 0.06 \\ 0.15 & 0.67 & 0.10 & 0.08 \\ 0.15 & 0.10 & 0.68 & 0.07 \\ 0.16 & 0.08 & 0.10 & 0.66 \end{pmatrix}$$

أما التنبؤ بحصة كل شركة من المسافرين في نهاية الأسبوع الأول $a^{(1)}$ (المستوى الأول لتحليل

ماركوف) فيكون كما يلي:

$$a^{(1)} = a^{(0)} \cdot p = (0.35 \quad 0.30 \quad 0.20 \quad 0.15) \begin{pmatrix} 0.64 & 0.18 & 0.12 & 0.06 \\ 0.15 & 0.67 & 0.10 & 0.08 \\ 0.15 & 0.10 & 0.68 & 0.07 \\ 0.16 & 0.08 & 0.10 & 0.66 \end{pmatrix}$$

$$a^{(1)} = (0.323 \quad 0.296 \quad 0.223 \quad 0.185)$$

أما التنبؤ بحصة كل شركة من المسافرين في نهاية الأسبوع الثاني $a^{(2)}$ فيكون كما يلي:

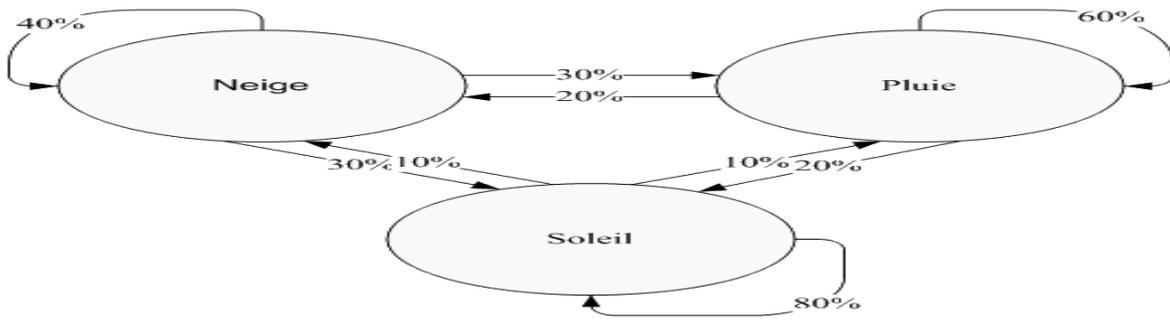
$$a^{(2)} = a^{(0)} \cdot p^2 = (0.3198 \quad 0.2914 \quad 0.2358 \quad 0.163)$$

9-3-منحنيات سلاسل ماركوف:

يمكن تمثيل مصفوفة الاحتمالات الانتقالية لماركوف بمنحنى، هذا المنحنى يسمى منحنى تمثيلي أو منحنى العبور لسلسلة ماركوف وسنأتي الى تفصيله من خلال الأمثلة التالية:

مثال 1:

إذا كانت لنا حالة الجو ممثلة في (1-ثلج Neige، 2-مطر Pluie، 3-شمس Soleil) وفق منحنى العبور التالي:



المطلوب: أوجد مصفوفة العبور لهذه الحالة

تكون لدينا الاحتمالات الانتقالية التالية:

$$p_{11} = 0.4, p_{12} = 0.3, p_{13} = 0.3$$

$$p_{21} = 0.2, p_{22} = 0.6, p_{23} = 0.2$$

$$p_{31} = 0.1, p_{32} = 0.1, p_{33} = 0.8$$

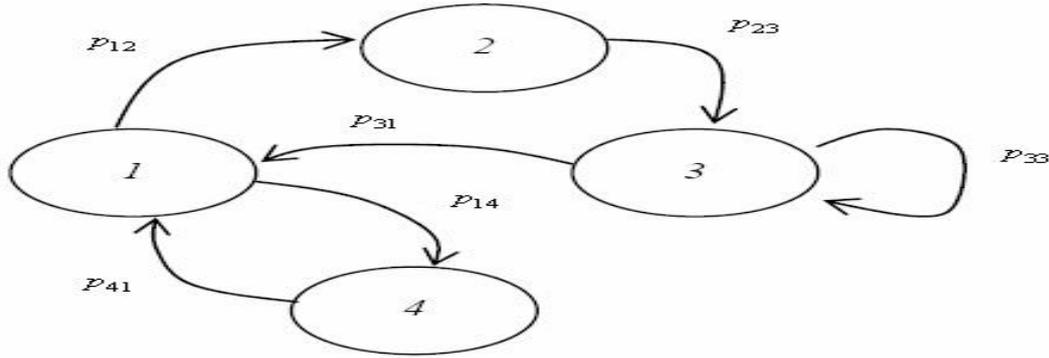
وعندئذ تكون لدينا الأشعة التالية:

$$V_1 = (0.4, 0.3, 0.3), V_2 = (0.2, 0.6, 0.2), V_3 = (0.1, 0.1, 0.8)$$

أما مصفوفة الاحتمالات الانتقالية فتكون بالشكل:

$$p = \begin{pmatrix} 0.4 & 0.3 & 0.3 \\ 0.2 & 0.6 & 0.2 \\ 0.1 & 0.1 & 0.8 \end{pmatrix}$$

مثال 2: إذا كان لديك مخطط الانتقال العشوائي التالي، أوجد التمثيل البياني لسلسلة ماركوف وكذلك مصفوفة الاحتمالات الانتقالية لها



الاحتمالات الانتقالية التالية لهذا المخطط هي:

$$p_{11} = 0, p_{12} = \frac{1}{2}, p_{13} = 0, p_{14} = \frac{1}{2}$$

$$p_{21} = 0, p_{22} = 0, p_{23} = 1, p_{24} = 0$$

$$p_{31} = \frac{1}{2}, p_{32} = 0, p_{33} = \frac{1}{2}, p_{34} = 0$$

$$p_{41} = 1, p_{42} = 0, p_{43} = 0, p_{44} = 0$$

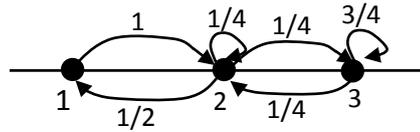
أما مصفوفة الاحتمالات الانتقالية فهي:

$$p = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

مثال 3: أعطي التمثيل البياني لمصفوفة الاحتمالات الانتقالية التالية:

$$P = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix} \end{matrix}$$

مصفوفة الاحتمالات الانتقالية لهذه السلسلة بفضاء حالة $S = \{1,2,3\}$ والتمثيل البياني لها يكون كما هو موضح بالشكل الموالي:



الفصل العاشر: الأساليب الإحصائية واتخاذ القرار

في هذا الفصل سنستعرض مجموعة من الأساليب الإحصائية المساعدة في اتخاذ القرار نذكر منها نظرية صفوف الانتظار ونظرية المباريات وشجرة القرار، بالإضافة الى استخدام الأساليب الإحصائية في تسيير المخزون وقياس الجودة، لكن قبل هذا لا بأس من أن نعرض على مفهوم الإحصاء واستعمالاته ومختلف مقاييسه.

1-10-1 مفهوم الإحصاء ومقاييسه:

سننطلق في هذا المدخل الى مفهوم الإحصاء واستعمالاته المختلفة بالإضافة الى مقاييس النزعة المركزية ومقاييس التشتت

1-1-10-1 مفهوم الإحصاء واستعمالاته:

نعني بالإحصاء مجموعة الطرق العلمية التي يمكن استخدامها لجمع المعطيات (البيانات والمعلومات عن الظواهر) وتبويبها وتقييمها والخروج منها باستنتاجات حول مجموع وحدات المجتمع من خلال اعتماد جزء من هذا المجتمع. ويمكن أن نحصي في الإحصاء نوعان هما الإحصاء الوصفي والإحصاء الاستدلالي، حيث يعنى الإحصاء الوصفي بطرق جمع المعلومات وتحليلها لتكون بصيغة مفهومة، أما الإحصاء الاستدلالي فيتعامل مع التعميم والتنبؤ والتقدير.

يستخدم الإحصاء في مجالات عدة منها استخداماته في العملية الإنتاجية والإدارية من خلال التخطيط والبحث عن الوضعيات المثلى وقياس الجودة والنوعية ومعالجة المشاكل والعراقيل التي تعترض السير الحسن لمختلف العمليات السابق ذكرها

10-1-2-مقاييس النزعة المركزية ومقاييس التشتت: نستطيع التعرف على خصائص أي

معطيات من خلال مقاييس النزعة المركزية ومقاييس التشتت. نعني بمقاييس النزعة المركزية تلك المقاييس التي بواسطتها نتمكن من تحديد موقع النقطة التي تتمحور حولها كافة القيم، أما مقاييس التشتت فيقصد بها المقاييس التي تبحث عن حالة الانتشار التي تكون عليها المعطيات حول المتوسط

أ-مقاييس النزعة المركزية: هناك عدة أنواع من المتوسطات هي الوسط الحسابي، الوسيط، المنوال، الوسط الهندسي، الوسط التوافقي

أولاً: الوسط الحسابي:

إذا كان لدينا مجموعة من القيم: x_1, x_2, \dots, x_n وسطها الحسابي هو \bar{x} حيث:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} \quad \text{مع } n: \text{ حجم العينة}$$

مثال 1: أوجد الوسط الحسابي للقيم التالية: 4،6،5،4،6

$$\bar{x} = \frac{4 + 6 + 5 + 6 + 4}{5} = \frac{25}{5} = 5$$

أما إذا كانت القيم غير متساوية من حيث أهميتها يحسب عندئذ \bar{x}_w الوسط الحسابي المرجح حيث:

$$\bar{x}_w = \frac{\sum x_i w_i}{\sum w_i} \quad \text{مع } w_i: \text{ وزن القيمة } x_i$$

مثال 2: إذا كان لدينا الجدول التالي (يمثل أسعار سلعة ما وكمياتها)

0.2	0.6	2	السعر
300	60	10	الكمية المطلوبة

حيث: $x_1 = 2, x_2 = 0.6, x_3 = 0.6$

$w_1 = 10, w_2 = 60, w_3 = 300$

$$\bar{x}_w = \frac{\sum x_i w_i}{\sum w_i} = \frac{2 * 10 + 0.6 * 60 + 0.2 * 300}{300 + 60 + 10} = \frac{116}{370} = 0.313$$

أما إذا كانت المعطيات مبوبة (في شكل فئات) فيكون لدينا عندئذ:

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i f_i}{\sum f_i}$$

حيث: f_i التكرار ، x_i : مركز الفئة

مثال 3: أوجد الوسط الحسابي للمعطيات المبوبة التالية:

المجموع	90-73	72-55	54-37	36-19	18-01	الفئة
50	6	3	16	11	14	التكرار f_i
.....	81.5	63.5	45.5	27.5	9.5	x_i
1843	498	190.5	728	302.5	133	$x_i f_i$

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i f_i}{\sum f_i} = \frac{1843}{50} = 36.86$$

ثانياً: الوسيط Me : هو القيمة الوسطية (يتم ترتيب المعلومات تصاعدياً أو تنازلياً) فعندما يكون

العدد فردياً تكون رتبة الوسيط: $\frac{n+1}{2}$ أما إذا كان العدد زوجياً فإن رتبة الوسيط عندئذ تكون

محصورة بين القيمتين $\frac{n}{2}$ و $\frac{n+2}{2}$ وبالتالي تكون قيمته محصورة بين القيمتين المقابلتين للقيمتين

السابقتين

مثال: إذا كانت لدينا المعطيات التالية (مرتبة تنازلياً): 94، 91، 86، 80، 75

$$Me = 86 \text{ وقيمته } \frac{n+1}{2} = \frac{5+1}{2} = 3$$

أما إذا كانت لدينا المعطيات التالية (مرتبة تنازلياً): 3.2، 2.9، 2.8، 2.4، 2.4، 2.1

فإن رتبة الوسيط عندئذ تكون محصورة بين القيمتين $3 = \frac{n}{2}$ و $4 = \frac{n+2}{2}$ وبالتالي تكون قيمته

$$Me = \frac{2.4+2.8}{2} = 2.6$$

محصورة بين القيمتين 2.4 و 2.8 و قيمته:

أما إذا كانت المعطيات مبوبة فيعطى الوسيط عندئذ بالعلاقة التالية:

$$Me = a + m \frac{\Delta}{ne}$$

حيث: a : الحد الأدنى للفئة الوسيطة

m : طول الفئة

ne : تكرار الفئة الوسيطة

Δ : الفرق بين ترتيب الوسيط والتكرار التجمعي الصاعد للفئة السابقة للفئة الوسيطة

مثال: حدد الوسيط للسلسلة المعطاة في الجدول التالي:

الفئة	-90	-100	-110	-120	-130	-140	-150	-160	المجموع
	99	109	119	129	139	149	159	169	
تكرار الفئة	5	9	16	25	13	7	3	2	80
التكرار المجمع الصاعد	5	14	30	55	68	75	78	80	...

لدينا: $\sum f_i = 80$ وبالتالي فإن الوسيط يقع بين القيمتين 40 و 41 وحسب عمود التكرار المجمع

الصاعد فإن تلك القيمة تقع في الفئة (120-129) وعليه يكون لدينا:

$$Me_{40} = a + m \frac{\Delta}{ne} = 120 + 10 \frac{40-30}{25} = 124$$

$$Me_{41} = a + m \frac{\Delta}{ne} = 120 + 10 \frac{41-30}{25} = 124.4$$

$$Me = \frac{Me_{40} + Me_{41}}{2} = 124.2$$

ثالثاً: **المنوال MO**: المنوال هو أكثر القيم تكراراً بين أرقام السلسلة

مثال: إذا كانت لدينا القيم التالية: 64، 61، 56، 65، 80، 56، 56، 78، 78، 70، 61، 65، 65

القيم المنوالية هي: 56 و 65 لأنها تكررت ثلاث مرات

أما إذا كانت المعطيات مبوبة فيتم تحديد الفئة المنوالية التي يقابلها أكبر تكرار فيكون لدينا:

$$MO = L + \frac{d_1}{d_1 + d_2} H$$

حيث: L : الحد الأدنى للفئة المنوالية

d_1 : تكرار الفئة المنوالية – تكرار الفئة السابقة

d_2 : تكرار الفئة المنوالية – تكرار الفئة اللاحقة

H : طول الفئة

مثال: أوجد المنوال للمعطيات المبوبة المعطاة وفق الجدول التالي:

المجموع	259-230	229-200	199-170	169-140	139-110	109-80	الفئات
282	8	14	34	122	78	26	التكرارات f_i

فيكون لدينا:

$L = 140$: الحد الأدنى للفئة المنوالية

$d_1 = 122 - 78 = 44$: تكرار الفئة المنوالية – تكرار الفئة السابقة

$d_2 = 122 - 34 = 88$: تكرار الفئة المنوالية – تكرار الفئة اللاحقة

$H = 30$: طول الفئة

$$MO = L + \frac{d_1}{d_1 + d_2} H = 140 + \frac{44}{(44 + 88)} 30 = 150$$

رابعاً: **الوسط التوافقي H**:

الوسط التوافقي لـ n قيمة هو العدد الذي يكون مقلوبه هو الوسط الحسابي لمقلوب تلك القيم، فإذا

كانت لدينا القيم التالية: x_1, x_2, \dots, x_n

فإن مقلوبها هو : $\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}, \dots, \frac{1}{x_n}$

إذا كان H هو الوسط التوافقي فإن:

$$\frac{1}{H} = \frac{1}{n} \left[\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n} \right]$$
$$H = \frac{n}{\left[\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n} \right]} = \frac{n}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i}}$$

أما الوسط التوافقي المرجح هو H_p حيث:

$$H_p = \frac{\sum w_i}{\sum_{i=1}^n \frac{w_i}{x_i}}$$

w_i : الترجيح

كما يمكننا الحديث أيضاً عن الوسط التربيعي Q والوسط التربيعي المرجح Q_p حيث:

$$Q^2 = \frac{1}{n} [x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2]$$

$$Q = \sqrt{\frac{1}{n} [x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2]}$$

$$Q_p = \sqrt{\frac{\sum w_i (x_i)^2}{\sum w_i}}$$

خامساً: الوسط الهندسي \bar{x}_g :

يعرف الوسط الهندسي بأنه الجذر النوني لمجموعة من القيم عددها n ، وعليه فإن الوسط الهندسي

لعينة حجمها n وقيمها x_1, x_2, \dots, x_n هو:

$$\bar{x}_g = \sqrt[n]{x_1 * x_2 * \dots * x_n}$$

وبإدخال اللوغاريتم يصبح لدينا:

$$\log \bar{x}_g = \frac{1}{n} \sum \log x_i$$

أما في حالة المعطيات المبوبة فيكون لدينا:

$$\bar{x}_g = \sqrt[\sum f]{x_1^{f_1} * x_2^{f_2} * \dots * x_n^{f_n}}$$

$$\log \bar{x}_g = \frac{1}{\sum f_i} \sum f_i \log x_i$$

مثال: أوجد الوسط الهندسي للقيم التالية: 1.67 ، 2.0 ، 1.67 ، 1.5 ، 1.2

$$\bar{x}_g = \sqrt[5]{(1.67) \cdot (2.0) \cdot (1.67) \cdot (1.5) \cdot (1.2)}$$

$$\log \bar{x}_g = \frac{1}{5} (\log 1.67 + \log 2.0 + \log 1.67 + \log 1.5 + \log 1.2)$$

$$\log \bar{x}_g = \frac{1}{5} (0.2227 + 0.2227 + 0.301 + 0.1761 + 0.0079) = 0.20202$$

$$\bar{x}_g = e^{0.20202}$$

ب-مقاييس التشتت:

هي تلك المقاييس التي تبحث عن حالة الانتشار التي تكون عليها المعطيات حول المتوسط

ونذكر منها المدى والانحراف المتوسط والانحراف المعياري ومعامل الاختلاف

أولاً: المدى R: يعتبر المدى من أبسط مقاييس التشتت وهو عبارة عن الفرق بين أكبر قيمة

وأصغر قيمة بين المعطيات المعنية فإذا كانت لدينا العينتين التاليتين:

$$A : 1.11, 1.03, 0.94 , 1.00 , 0.92$$

$$B : 1.14, 0.91, 0.88 , 1.01 , 1.06$$

$$R_A = 0.19 , \quad R_B = 0.26$$

ويمكن الحديث هنا عن المدى الربيعي وهو المدى بعد استبعاد أثر القيم المتطرفة، فبعد ترتيب القيم

تصاعدياً إذا استبعدنا الربع الأول والربع الأخير من القيم المرتبة تصاعدياً نكون أمام المدى

الربيعي، أما إذا استبعدنا أول عشر وآخر عشر من المعطيات نكون أمام المدى العشري.

إذا كانت المعطيات مبوبة فإن القيمة التقديرية للمدى تكون عبارة عن الفرق بين الحد الأعلى للفئة العليا والحد الأدنى للفئة الدنيا

ثانياً: الانحراف المتوسط D_m :

يعبر عن الانحراف المتوسط بالصيغة التالية:

$$D_m = \frac{\sum |x_i - \bar{x}|}{n}$$

أما في حالة المعطيات المبوبة فنعبر عن الانحراف المتوسط عندئذ بالصيغة:

$$D_m = \frac{\sum D_i f_i}{\sum f_i}$$

حيث: $D_i = |x_i - \bar{x}|$: قيم الانحرافات عن الوسط الحسابي

x_i : مراكز الفئات

مثال 1: أوجد الانحراف المتوسط للقيم التالية: 118، 127، 112، 108، 113

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} = \frac{578}{5} = 115.6$$

$$D_m = \frac{|118 - 115.6| + |127 - 115.6| + |112 - 115.6| + |108 - 115.6| + |113 - 115.6|}{5}$$

$$D_m = \frac{2.4 + 11.4 + 3.6 + 7.6 + 2.6}{5} = \frac{27.6}{5} = 5.52$$

مثال 2: أوجد الانحراف المتوسط لمعطيات الجدول الموالي:

الفئة	مركز الفئة x_i	التكرار f_i	$f_i x_i$	D_i	$D_i f_i$
14-2	8	7	56	38.02	266.14
27-15	21	9	189	25.02	225.18
40-28	34	12	408	12.02	144.24
53-41	47	14	658	0.98	13.72
66-54	60	9	540	13.98	125.82
79-67	73	8	584	26.98	215.84
92-80	86	7	602	39.98	279.86
.....	$\sum f_i = 66$	$\sum f_i x_i = 3037$	$\sum D_i f_i = 1270.8$

$$\bar{x} = \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i} = \frac{3037}{66} = 46.01$$

$$D_m = \frac{\sum D_i f_i}{\sum f_i} = \frac{1270.8}{66} = 19.25$$

ثالثاً: الانحراف المعياري: سنبدأ بإيجاد الانحراف المعياري في حالة المعطيات غير المبوبة لنصل الى حساب هذا الأخير في حالة المعطيات المبوبة

-حالة المعطيات غير المبوبة: يرمز لمربعه بـ S^2 في حالة العينة وبـ δ^2 في حالة المجتمع حيث:

$$S^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n - 1}, \quad \delta^2 = \frac{\sum (x_i - U)^2}{N}$$

ومن أجل إيجاد الانحراف المعياري يأخذ الجذر التربيعي لكل من S^2 و δ^2 فنجد:

$$S = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n - 1}}, \quad \delta = \sqrt{\frac{\sum (x_i - U)^2}{N}}$$

مثال: أوجد الانحراف المعياري للقيم التالية: 5، 8، 12، 3، 7

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} = \frac{35}{5} = 7$$

$$(x_i - \bar{x}) : -2, 1, 5, -4, 0 / (x_i - \bar{x})^2 : 4, 1, 25, 16, 0$$

$$\sum (x_i - \bar{x})^2 = 46, S = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{46}{4}} = \sqrt{11.5} = 3.39$$

-حالة المعطيات المبوبة: في هذه الحالة يمكن حساب الانحراف المعياري بالصيغة:

$$S = \sqrt{\frac{\sum f_i x_i^2 \frac{(\sum f_i x_i)^2}{n}}{n-1}}$$

$$n = \sum f_i \text{ : حيث}$$

مثال: أوجد الانحراف المعياري لتكرارات الجدول الموالي:

الفئة	مركز الفئة	التكرار	$f_i x_i$	x_i^2	$x_i^2 f_i$
32-22	27	4	108	729	2916
43-33	38	6	228	1444	2664
54-44	49	10	490	2401	24010
65-55	60	9	540	3600	32400
76-66	71	4	284	5041	20164
.....	$\sum f_i = 33$	$\sum f_i x_i = 1650$	$\sum x_i^2 f_i = 88154$

$$S = \sqrt{\frac{\sum f_i x_i^2 \frac{(\sum f_i x_i)^2}{n}}{n-1}} = 13.29$$

رابعاً: معامل الاختلاف (V) :

يعتبر معامل الاختلاف مقياساً مناسباً لمقارنة مقدار التشتت أو الاختلاف لمجموعتين أو أكثر عند

اختلاف الوسط الحسابي واختلاف الوحدات القياسية ويعطى بإحدى الصيغتين التاليتين:

$$V = \frac{S}{\bar{x}} * 100 , \quad V = \frac{\delta}{U} * 100$$

مثال: كان معدل انتاج العامل الواحد في مصنعي انتاج الأحذية خلال فترة شهر ومقدار الانحراف المعياري كما يلي:

$$S_A=1500 , \quad \bar{x}_A=500 \text{ :المعمل } A$$

$$S_B=1400 , \quad \bar{x}_B=400 \text{ :المعمل } B$$

فهل هذا يعني أن مقدار التشتت في A أكبر من B

$$V_A = \frac{S_A}{\bar{x}_A} * 100 = \frac{1500}{500} * 100 = 300$$

$$V_B = \frac{S_B}{\bar{x}_B} * 100 = \frac{1400}{400} * 100 = 350$$

من النتائج يتبين لنا أن تشتت معدل انتاج العامل في A أصغر من B

مثال2: أوجد أي من الدولتين المعبر عنهما في الجدول أقل تشتتاً في توزيع الدخل

الدولة	الوحدة القياسية (عملة الدولة)	متوسط الدخل	الانحراف المعياري
A	باون	1300	850
B	دينار	2100	1100

$$V_A = \frac{\delta_A}{U_A} * 100 = \frac{850}{1300} * 100 = 65.38$$

$$V_B = \frac{\delta_B}{U_B} * 100 = \frac{1100}{2100} * 100 = 52.38$$

نستطيع القول أن التشتت النسبي في توزيع الدخل في B هو أقل من A وبالتالي فإن B هي أكثر عدالة في توزيع الدخل على أفراد المجتمع

10-2-نظرية صفوف الانتظار:

ترجع بدايات هذه الطريقة الى المهندس الذي اهتم بدراسة وتحليل مشكلة الازدحام في المكالمات الهاتفية سنة 1959 وتهدف الى التقليل من وقت وتكلفة الانتظار، وسنتطرق في هذا المدخل الى مفهوم نظرية صفوف الانتظار والنموذج الرياضي لها

10-2-1-مفهوم نظرية صفوف الانتظار:

تعرف طريقة صفوف الانتظار بأنها أسلوب يستخدم في معالجة مشاكل نظم الانتظار المختلفة من حيث احتمالية وصول الزبائن المستفيدين من الخدمة وطريقة تقديم الخدمة وفترة وكلفة التأخير في الانتظار، وتسمح نظرية صفوف الانتظار بالإجابة على أسئلة متخذ القرار التالية²⁸:

-ما هو معدل وقت انتظار الزبائن في خط الانتظار

-ما هو معدل وقت تقديم الخدمة للزبون

-ما هو متوسط عدد الزبائن في خط الانتظار

-ما هو متوسط عدد الزبائن في النظام

-ما هو احتمال وجود عدد معين من الزبائن في النظام

10-2-2-النموذج الرياضي لصفوف الانتظار:

تظهر النماذج الرياضية لصفوف الانتظار في عدة أشكال وذلك راجع لنوع نظام الانتظار وأسلوب وصول الوحدات وطريقة تقديم الخدمة، وسنركز هنا على النموذجين التاليين:

-نموذج صف انتظار واحد ومركز خدمة واحد بمرحلة واحدة

- نموذج صف انتظار واحد وأكثر من مركز واحد للخدمة

²⁸- للاطلاع أكثر أنظر:

-حسين محمود الجناني، الأحدث في بحوث العمليات، دار الحامد للنشر والتوزيع، الأردن، 2010، ص259.

-محمود العبيدي ومؤيد عبد الحسين الفضل، بحوث العمليات وتطبيقاتها في إدارة الأعمال، مؤسسة الوراق للنشر، الأردن، 2004، ص447.

-حسين علي مشرفي وزياد عبد الكريم القاضي، بحوث العمليات، مرجع سابق، ص247-266

قبل استعراض النموذجين المشار اليهما أعلاه نتطرق الى مجموعة من الرموز المستخدمة في هذه النماذج وهي كما يلي:

N : عدد الوحدات في النظام

λ : معدل الوصول (معدل الوحدات الواصلة للنظام خلال وحدة زمنية)

u : معدل الخدمة (معدل عدد الوحدات التي تحصل على الخدمة خلال وحدة زمنية)

P_n : احتمال وجود العدد (n) من الوحدات في النظام

P_0 : احتمال عدم وجود وحدات في النظام (معامل عدم الاستخدام)

P : احتمال وجود العدد (n) من الوحدات في النظام خلال فترة زمنية (معامل الاستخدام)

L_s : عدد الوحدات المتوقع في النظام

L_q : عدد الوحدات المتوقع في خط الانتظار

W_s : الزمن الذي تستغرقه الوحدة في النظام

W_q : الزمن الذي تستغرقه الوحدة في خط الانتظار

K : عدد قنوات الخدمة

أ-نموذج صف انتظار واحد وقناة خدمة واحدة:

يرمز لهذا النموذج بالرمز ($M.M.1$) ومن أهم شروطه ما يلي:

1-معدل وصول الوحدات يتبع توزيع بواسون ($poisson$) بمقدار (λ) خلال وحدة زمنية

2-معدل تقديم الخدمة يتبع التوزيع الأسّي ($exponentiel$) بمقدار (u) خلال وحدة زمنية

3-معدل الخدمة أكبر من معدل الوصول $u > \lambda$

4-طريقة تقديم الخدمة هي الواصل أولاً يخدم أولاً

5-طاقة النظام غير محدودة

6-عدد طالبي الخدمة غير محدود

يستخدم هذا النموذج مجموعة من العلاقات لتحليل النظام نوجزها فيما يلي:

1-معامل الاستخدام: $P = \frac{\lambda}{u}$

$$P_0 = 1 - P \text{ :معامل عدم الاستخدام}$$

$$P_n = \left(\frac{\lambda}{u}\right)^n \cdot P_0 \text{ :احتمال وجود العدد (n) من الوحدات في النظام}$$

$$L_s = \frac{\lambda}{u-\lambda} \text{ :عدد الوحدات المتوقع في النظام}$$

$$L_Q = \frac{\lambda^2}{u(u-\lambda)} \text{ :عدد الوحدات المتوقع في خط الانتظار}$$

$$W_s = \frac{1}{u-\lambda} \text{ :متوسط الوقت الذي تستغرقه الوحدة في النظام}$$

$$W_Q = \frac{\lambda}{u(u-\lambda)} \text{ :متوسط الوقت الذي تستغرقه الوحدة في خط الانتظار}$$

نستعرض هذا النموذج من خلال المثال التالي:

مثال: من أجل بيع تذاكر لقاء كرة القدم خصصت إدارة الملعب شباك واحد لهذا الغرض وكان

معدل وصول الزبائن 15 زبون/ساعة ومعدل الخدمة 24 زبون/ساعة

المطلوب: 1- ما هو احتمال أن يكون الشباك شاغراً؟

2- ما هو متوسط عدد الزبائن في الشباك وفي خط الانتظار؟

3- ما هو متوسط الوقت الذي يستغرقه الزبون في خط الانتظار؟

4- ما هو متوسط الوقت الذي يستغرقه الزبون في النظام؟

5- ما هو احتمال وجود ثلاث زبائن في الشباك؟

الحل:

1- احتمال أن يكون الشباك شاغراً: لدينا: $\lambda = 15$ كم/سا , $u = 24$ كم/سا

$$P = \frac{\lambda}{u} = \frac{15}{24} = \frac{5}{8} = 0.62 \quad , \quad P_0 = 1 - P = 1 - \frac{5}{8} = \frac{3}{8} = 0.38$$

2- متوسط عدد الزبائن في الشباك:

$$L_s = \frac{\lambda}{u-\lambda} = \frac{15}{24-15} = \frac{15}{9} = \frac{5}{3} = 1.66$$

متوسط عدد الزبائن في خط الانتظار:

$$L_Q = \frac{\lambda^2}{u(u-\lambda)} = \frac{(15)^2}{24 * 9} = 1.04$$

3- متوسط الوقت الذي يستغرقه الزبون في خط الانتظار:

$$W_Q = \frac{\lambda}{u(u-\lambda)} = \frac{15}{24 * 9} = \frac{5}{8 * 9} = 0.069$$

4-متوسط الوقت الذي يستغرقه الزبون في النظام:

$$W_S = \frac{1}{u-\lambda} = \frac{1}{9} = 0.11$$

5-احتمال وجود ثلاث زبائن في الشباك:

$$P_3 = \left(\frac{\lambda}{u}\right)^3 \cdot P_0 = \left(\frac{15}{24}\right)^3 * \frac{3}{8} = 0.24 * 0.38 = 0.09$$

ب-نموذج صف انتظار واحد وقنوات متعددة:

يفترض هذا النظام وجود أكثر من قناة خدمة وحيدة أي قناتين فأكثر من القنوات التي تقدم نفس

الخدمة للزبائن ويفترض هذا النموذج ما يلي:

-معدل الوصول يتبع قانون بواسون

-معدل أوقات الخدمة يتبع القانون الأسي

-من يأتي أولاً يخدم أولاً

- K : عدد قنوات الخدمة

وتستخدم في هذا النموذج العلاقات الرياضية التالية:

$$1-معامل الاستخدام: $P = \frac{\lambda}{K.u}$$$

$$2-احتمال عدم وجود وحدات في النظام: $P_0 = \sum_{n=0}^{K-1} \frac{[\lambda/u]^n}{n!} + \frac{[\lambda/u]^K}{K!(1-\lambda/u)}$$$

3-احتمال وجود العدد (n) من الوحدات في النظام:

$$P_n = \frac{[\lambda/u]^n}{n!} P_0 , \quad n \leq K$$

$$P_n = \frac{[\lambda/u]^n}{k! K^{n-K}} P_0 , \quad n > K$$

$$4-معدل عدد الوحدات في خط الانتظار: $L_Q = \frac{P_0 [\lambda/u]^K}{k!(1-P)^2} P$$$

$$5-معدل عدد الوحدات في النظام: $L_S = L_Q + \frac{\lambda}{u}$$$

6- معدل الوقت الذي تستغرقه الوحدة في خط الانتظار: $W_Q = \frac{L_Q}{u}$

7- معدل الوقت الذي تستغرقه الوحدة في النظام: $W_S = W_Q + \frac{\lambda}{u}$

سنوضح هذا النموذج من خلال المثال التالي:

مثال: إذا كان معدل الوصول في إحدى محطات البنزين يتبع توزيع بواسون بمتوسط قدره 18

سيارة في الساعة وأن وقت تقديم الخدمة يتبع التوزيع الأسّي بمتوسط قدره 10 دقائق للسيارة

الواحدة وأن هناك أربع مضخات للوقود

المطلوب: أجب عن الأسئلة التالية:

1- ما هو احتمال حالة التوازن P_0 ؟

2- ما هو احتمال وجود $n < K$ من العناصر في النظام (عدد القنوات أكبر من عدد العناصر)؟

3- ما هو متوسط عدد الزبائن في خط الانتظار؟

الحل:

لدينا: سيارة/سا $\lambda = 18$, سيارة/سا $u = \frac{60}{6} = 10$, $K = 4$

محققة $6 * 4 > 18$, $K * u > \lambda$

1- احتمال حالة التوازن P_0 : من الجدول القيمة المقابلة لـ $\frac{\lambda}{u * \lambda} = \frac{18}{24} = 0.75$ وعدد القنوات 4 هي:

0.0355 ومنه: $P_0 = 0.355$

2- احتمال وجود $n < K$ من العناصر في النظام (عدد القنوات أكبر من عدد العناصر) في هذه

الحالة يكون لدينا ما يلي:

$$P_n = \frac{[\lambda/u]^n}{n!} P_0$$

$$P_1 = \frac{[18/6]^1}{1!} 0.0355 = 0.113$$

$$P_2 = \frac{[18/6]^2}{2!} 0.0355 = 0.159$$

$$P_3 = \frac{[18/6]^3}{3!} 0.0355 = 0.159$$

3- متوسط عدد الزبائن في خط الانتظار:

$$L_Q = \frac{P_0 [\lambda/u]^K}{k! (1-P)^2} P = \frac{0.0355 [18/6]^4 (\frac{18}{24})}{4! (1 - \frac{18}{24})^2} = 1.52 \text{ سيارة}$$

10-3-3- نظرية الألعاب (المباريات):

ظهرت هذه النظرية على يد الفرنسي *Emile Borel* خلال الحرب العالمية الأولى (1921) وفي سنة (1928) قام الهولندي *Von Neumann* بتطوير هذه النظرية، وسنتطرق الى هذه النظرية من خلال عرض مدلولها والتعريف بمصفوفة الدفع والعلاقات الرياضية لكل من اللاعب الأول والثاني

10-3-1- مدلول نظرية الألعاب (المباريات):

تعني كلمة مباراة المنافسة النشطة بين جهتين أو أكثر وفقاً لقاعدة محددة مسبقاً، وتستخدم في المنافسة بين الشركات في تحديد أسعار المنتجات²⁹، وتقوم نظرية الألعاب على مجموعة من الافتراضات هي أن الهدف الإنساني هو تحقيق أقصى عائد أو أدنى خسارة، وأن الإنسان يتصرف من واقع المنطق والعقلانية، وأن الشخص الآخر في الطرف المنافس ينتهج نفس هذه القواعد. ونظرية المباريات أو الألعاب عبارة عن دراسة للاستراتيجيات في حالة المراهنات والمنافسة والمواجهة بين طرفين (سواء كانوا فردين أو شركتين أو دولتين) أو أكثر يسمى كل منهما باللاعب، وأمامهم فرص لاختيار بدائل متاحة لهم، حيث أن كل بديل يؤثر على قيمة ما يحققه اللاعب الآخر من عائد، ونتيجة ذلك يحدث تعارض في الأهداف وكل طرف يحاول الحاق أكبر خسارة بالطرف الثاني، كما أن كل طرف حر في اختيار الاستراتيجية التي تناسبه. ان حالة المنافسة والصراع بين اللاعبين تؤدي الى تشكيل ما يعرف بمصفوفة الدفع

10-3-2- مصفوفة الدفع وقواعد اختزالها:

تعرف مصفوفة الدفع *pay off matrix* بأنها مقدار ما يدفعه اللاعب الثاني للاعب الأول في

²⁹- للاطلاع أكثر أنظر:

-دلال صادق وحמיד ناصر القتال، بحوث العمليات، دار اليازوري للنشر والتوزيع، الأردن، 2008، ص322.

حالة فوز هذا الأخير باستراتيجية معينة وتأخذ الصيغة التالية³⁰:

$$A = [a_{ij}] = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

حيث: $j = 1, 2, \dots, n$, $i = 1, 2, \dots, m$

قرارات اللاعب الأول هي عبارة عن أسطر مصفوفة الدفع وقرارات اللاعب الثاني عبارة عن أعمدها، ويمكن اختزال مصفوفة الدفع بعدد الأسطر أو عدد الأعمدة، مع العلم أن المصفوفة المختزلة تعبر عن تطلعات اللاعب الأول والثاني

-الاختزال بعدد الأسطر: إذا كان سطر في المصفوفة جميع عناصره أكبر أو يساوي عناصر سطر آخر فيمكن عندئذ استبعاد عناصر السطر الآخر

-الاختزال بعدد الأعمدة: إذا كان عمود في المصفوفة جميع عناصره أصغر أو يساوي عناصر عمود آخر فيمكن عندئذ استبعاد العمود الآخر

مثال: اختزل مصفوفة الدفع التالية الى أقل حجم ممكن

		اللاعب الثاني		
		y_1	y_2	y_3
اللاعب الأول	x_1	6	2	8
	x_2	3	4	5
	x_3	2	3	4

$$\begin{pmatrix} 6 & 2 & 8 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \Leftarrow \begin{pmatrix} 6 & 2 & 8 \\ 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{matrix} \text{مسيطر} \\ \text{ستبعد} \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \Leftarrow \begin{pmatrix} 6 & 2 & 8 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{matrix} \text{مستبعد} \\ \text{مسيطر} \end{matrix} \Leftarrow \text{الاختزال بعدد الأعمدة}$$

³⁰- للاطلاع أكثر أنظر:

- محمود العبيدي ومؤيد عبد الحسين الفضل، بحوث العمليات وتطبيقاتها في إدارة الأعمال، مرجع سابق، ص320.

10-3-3-العلاقات الرياضية للاعب الأول والثاني:

نفترض: p_1 : اللاعب الأول ، p_2 : اللاعب الثاني ، $[a_{ij}]$: مصفوفة الدفع ،

V_1 : قيمة الربح للاعب الأول ، V_2 : قيمة الربح للاعب الثاني

وفيما يلي العلاقات الرياضية لكل من اللاعب الأول والثاني

اللاعب الأول: إذا كانت لدينا مصفوفة الدفع a_{ij} فإن :

-اللاعب الثاني (j) يسعى الى تدنية العوائد التي يحصل عليها اللاعب الأول، بمعنى:

$$\text{Min}_j(a_{ij})$$

-اللاعب الأول (i) يسعى الى تعظيم أقل ربح يمكن أن يحصل عليه، بمعنى:

$$\text{Max}_i \text{Min}_j(a_{ij})$$

قيمة اللعبة أو المنافسة للاعب الأول هي:

$$V_1 = \text{Max}_i \text{Min}_j(a_{ij})$$

اللاعب الثاني: إذا كانت لدينا مصفوفة الدفع a_{ij} فإن :

-اللاعب الأول (i) يسعى الى تعظيم العوائد التي يمكن أن يحصل عليها، بمعنى:

$$\text{Max}_i(a_{ij})$$

-اللاعب الثاني (j) يسعى الى تدنية أكبر عائد يمكن أن يحصل عليه اللاعب الأول، بمعنى:

$$\text{Min}_j \text{Max}_i(a_{ij})$$

قيمة اللعبة أو المنافسة الثاني الأول هي:

$$V_2 = \text{Min}_j \text{Max}_i(a_{ij})$$

مثال: منشأتان متنافستان (لاعبان) تسعيان الى طرح ثلاث أنواع من المنتوجات في السوق وفق مصفوفة الدفع التالية:

		اللاعب الثاني p_2		
		y_1	y_2	y_3
اللاعب الأول p_1	x_1	12	6	0
	x_2	8	-12	-4
	x_3	8	-16	-12

المطلوب: حدد V_1 و V_2

		اللاعب الثاني p_2			
		y_1	y_2	y_3	Min
اللاعب الأول p_1	x_1	12	6	0	0
	x_2	8	-12	-4	-12
	x_3	8	-16	-12	-16
	Max	12	6	0

$$V_1 = \text{Max}_i \text{Min}_j (a_{ij}) = 0$$

$$V_2 = \text{Min}_j \text{Max}_i (a_{ij}) = 0$$

يمكن أن نحصي في حالات الألعاب الأنواع التالية:

أ-اللعب على أساس نقطة الالتقاء: وتحتوي استراتيجية وحيدة لكل لاعب من اللاعبين وتتميز

$$\text{بالصيغة: } V_1 = V_2$$

ب-اللعب على أساس الاستراتيجيات المختلطة: وتتميز باحتوائها على أكثر من استراتيجية وتحتوي

الاستراتيجيات التالية:

أولاً: اللعب على أساس أن ربح الأول هو خسارة الثاني ويعبر عنها بالصيغة التالية:

$$V_1 + V_2 = 0 \Rightarrow V_1 = -V_2$$

ثانياً: اللعب على أساس أن ربح الأول لا يساوي ربح الثاني ويعبر عنها بالصيغة التالية:

$$V_1 \neq V_2$$

مثال: أوجد V_1 و V_2 لمصفوفات الدفع التالية مع تحديد العلاقة بينهما

المصفوفة الأولى		اللاعب الثاني p_2			
		y_1	y_2	y_3	Min
اللاعب الأول p_1	x_1	12	6	0	0
	x_2	8	-12	-4	-12
	x_3	8	-16	-12	-16
	Max	12	6	0

$$V_1 = V_2 = 0$$

المصفوفة الثانية		اللاعب الثاني p_2			
		y_1	y_2	y_3	Min
اللاعب الأول p_1	x_1	-4	3	10	-4
	x_2	2	-3	-3	-3
	x_3	-2	5	8	-2
	Max	2	5	10

$$V_1 = \text{Max}_i \text{Min}_j (a_{ij}) = -2$$

$$V_2 = \text{Min}_j \text{Max}_i (a_{ij}) = 2$$

$$V_1 = -V_2$$

المصفوفة الثالثة		اللاعب الثاني p_2			
		y_1	y_2	y_3	Min
اللاعب الأول p_1	x_1	-2	3	10	-2
	x_2	2	-3	0	-3
	x_3	-1	5	8	-1
	Max	2	5	10

$$V_1 = \text{Max}_i \text{Min}_j (a_{ij}) = -1$$

$$V_2 = \text{Min}_j \text{Max}_i (a_{ij}) = 2$$

$$V_1 \neq V_2$$

10-4-4-شجرة القرار:

تعرف شجرة القرارات بأنها تمثيل بياني للعناصر المرتبطة بمشكلة القرار يحوي الكثير من الأفعال أو البدائل الممكنة ومن حالات الطبيعة وسنستعرض شجرة القرار من خلال عرض مكونات شجرة القرار وكيفية استخدامها

10-4-1-عرض مكونات شجرة القرار:

وتتشكل شجرة القرار من مربعات ودوائر وأسهم تصل بينها، حيث تشير المربعات في هذه الشجرة إلى المواقع التي يتخذ فيها القرار أما العقد الدائرية فتشير إلى المواقع التي تظهر فيها حالات الطبيعة وهناك أسهم تصل بين المربعات ويوضع عليها الاحتمالات المتوقعة لحالات

الطبيعة أما القيم النهائية المعروفة بالعوائد (نتائج القرار) توضع في نهاية الأسهم المعبرة عن كل نتيجة نحصل عليها من كل حالة من حالات الطبيعة³¹.

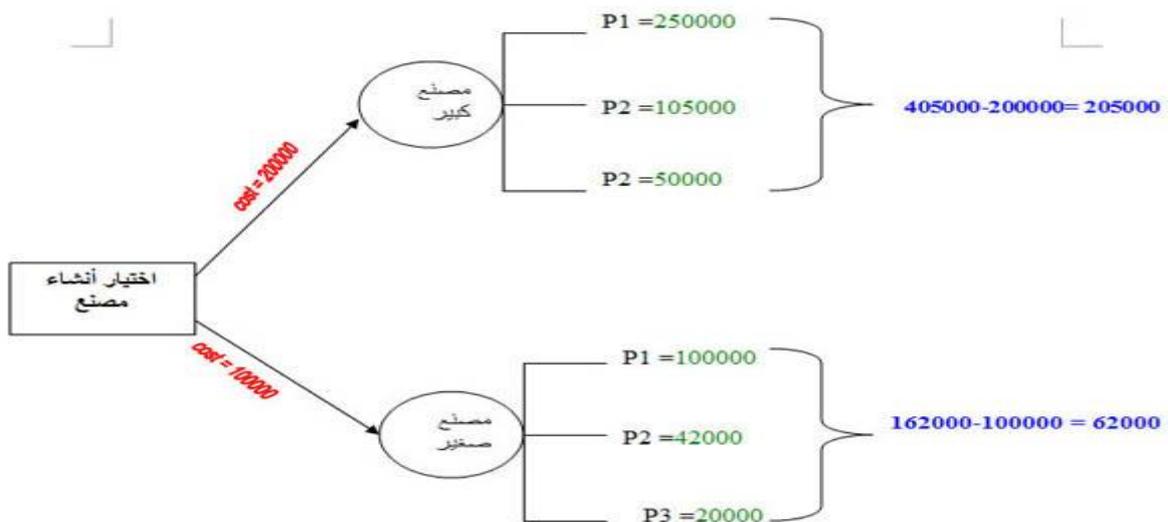
□ المواقع التي يتم اتخاذ قرار فيها

○ العقد الدائرية هي التي تظهر فيها حالات الطبيعة

→ سهم يوضع عليه الاحتمالات المتوقعة لحالات الطبيعة

R العائد المتوقع من كل بديل يوضع في نهاية السهم

وعليه نجد شجرة القرار (مثلاً شجرة القرار للاختيار بين انشاء مصنع كبير أو مصنع صغير) تأخذ الشكل التالي:



10-4-2- استخدام شجرة القرار:

تستخدم شجرة القرارات عندما يكون هناك صعوبة أمام متخذ القرار ببناء جدول النتائج الشرطية سواء كان معبراً عن هذه النتائج بالأرباح أو الخسائر أو المنفعة، وتسمح شجرة القرار بعرض البدائل المختلفة وتحليلها واستخراج البديل الأفضل باستخدام ما يسمى بالمرور التراجعي، أي تقييم البدائل باستخدام معيار القيمة المالية المتوقعة في نهاية الشجرة وصولاً الى عقدة القرار في بداية

³¹ - حسن علي مشرقي . نظرية القرارات الإدارية (مدخل كمي في الإدارة) . عمان - الأردن . دار المسيرة

الشجرة وأثناء التراجع يتم اسقاط البديل الذي لا يملك فرصة للمنافسة في المرحلة اللاحقة ووضع علامة على مساره لتمييز البدائل التي تمتلك فرصة للمنافسة

مثال:

شركة صناعية لديها بديلين في بداية عام **2003**

-البديل الأول تكلفته (4) مليون و.ن

-البديل الثاني تكلفته (11) مليون و.ن

في بداية عام **2004** لدى الشركة البدائل التالية :

في حال اختيار البديل الأول وكان الطلب مرتفعا خلال **2003** أما تبقي البديل كما هو أو تطوره بتكلفة قدرها (4) مليون و.ن .

أما إذا كان الطلب منخفضا خلال **2003** فإما تبقي البديل كما هو أو تخفض طاقته الإنتاجية بتكلفة (1) مليون و.ن .

في حال اختيار البديل الثاني وكان الطلب منخفضا خلال **2003** إما أن تبقي البديل كما هو أو تخفض طاقته الإنتاجية بتكلفة (1) مليون و.ن.

أما إذا كان الطلب مرتفعا فإما تبقي البديل كما هو عليه أو تطوره بتكلفة (3) مليون و.ن .

وقد قدرت العوائد على النحو الوارد في الجدول المرافق :

الطلب		البديل الثاني
مرتفع	منخفض	
8	6	دون تعديل
10	8	بعد التطوير
9	7	بعد التخفيض

الطلب		البديل الأول
منخفض	مرتفع	
3	4	دون تعديل
4	5	بعد التخفيض
5	7	بعد التطوير

تتوقع الشركة أن الطلب سيكون مرتفعاً خلال 2003 باحتمال قدره (0.5) ومنخفضاً باحتمال قدره (0.5) . خبرة الشركة أثبتت إذا كان الطلب مرتفعاً في العام الحالي سيكون كذلك في العام التالي باحتمال قدره (0.6) ومنخفضاً باحتمال قدره (0.4) وإذا كان الطلب منخفضاً في العام الحالي سيكون كذلك في العام التالي باحتمال قدره (0.7) ومرتفعاً باحتمال قدره (0.3)

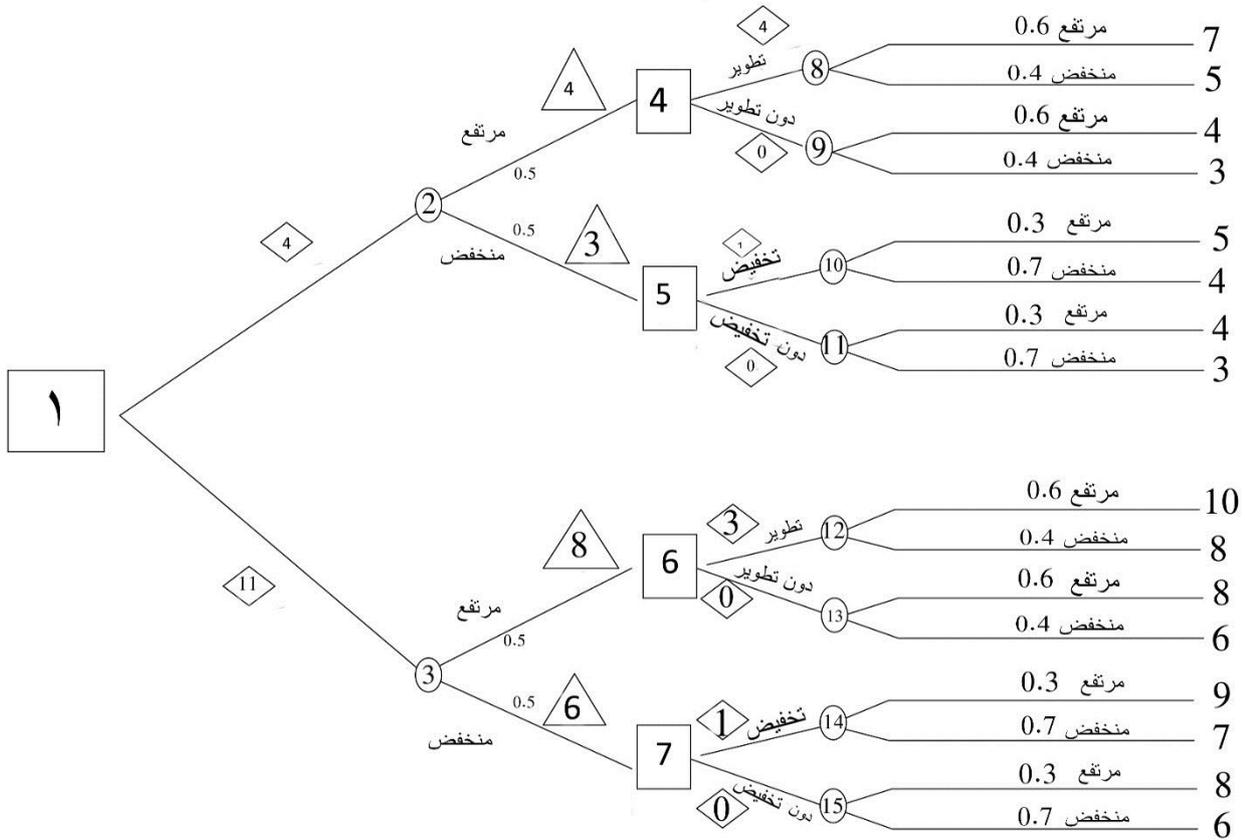
المطلوب:

مساعدة الشركة باختيار البديل المناسب مع العلم أن الشركة تنهي عملها في نهاية 2004 .

الحل:

نبدأ برسم عقدة القرار ثم تفرع بعدد البدائل ثم من كل بديل نرسم عقدة الحالات الطبيعية فكانت لدينا شجرة القرار التالية:

رسم الشجرة



نحسب كل عقدة على حدة وذلك من النهاية أ من آخر عقدة إلى أول عقدة بالترتيب أي من اليمين إلى اليسار ونبدأ بالحساب من النقطة ذات الرقم الأعلى (الأعظمي)

$$R15 = (0.3 * 8) + (0.7 * 6) = 6.6$$

$$R14 = (0.3 * 9) + (0.7 * 7) = 7.6$$

$$R13 = (0.6 * 8) + (0.4 * 6) = 7.2$$

$$R12 = (0.6 * 10) + (0.4 * 8) = 9.2$$

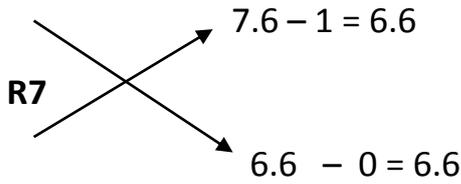
$$R11 = (0.3 * 4) + (0.7 * 3) = 3.3$$

$$R10 = (0.3 * 5) + (0.7 * 4) = 4.3$$

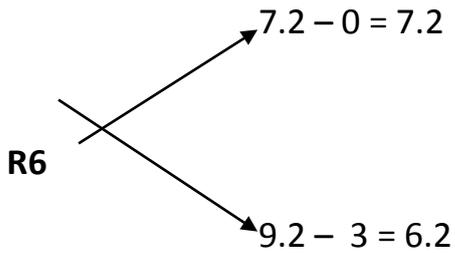
$$R9 = (0.6 * 4) + (0.4 * 3) = 3.6$$

$$R8 = (0.6 * 7) + (0.4 * 5) = 6.2$$

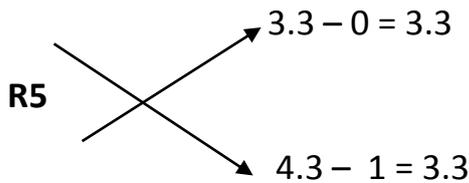
عند الدائرة: الاحتمال * النتائج ونأخذ مجموع حالات الطبيعة



نختار أحد البديلين



نختار هذا البديل



نختار أحد البديلين

$$R4 \begin{cases} 3.6 - 0 = 3.6 \\ 6.2 - 4 = 2.2 \end{cases}$$

نختار هذا البديل

$$R3 = (6.6 + 6) * 0.5 + (7.2 + 8) * 0.5 = 13.9$$

$$R2 = (3.3 + 3) * 0.5 + (3.6 + 4) * 0.5 = 6.95$$

$$R1 \begin{cases} 13.9 - 11 = 2.9 \\ 6.95 - 4 = 2.95 \end{cases}$$

نختار هذا البديل

أي الشركة تقوم باختيار البديل الأول ذو التكلفة (4 مليون) لأنه يحقق عائد أكبر ومقداره 2.95 مليون ون .

10-5- نماذج تسيير المخزون:

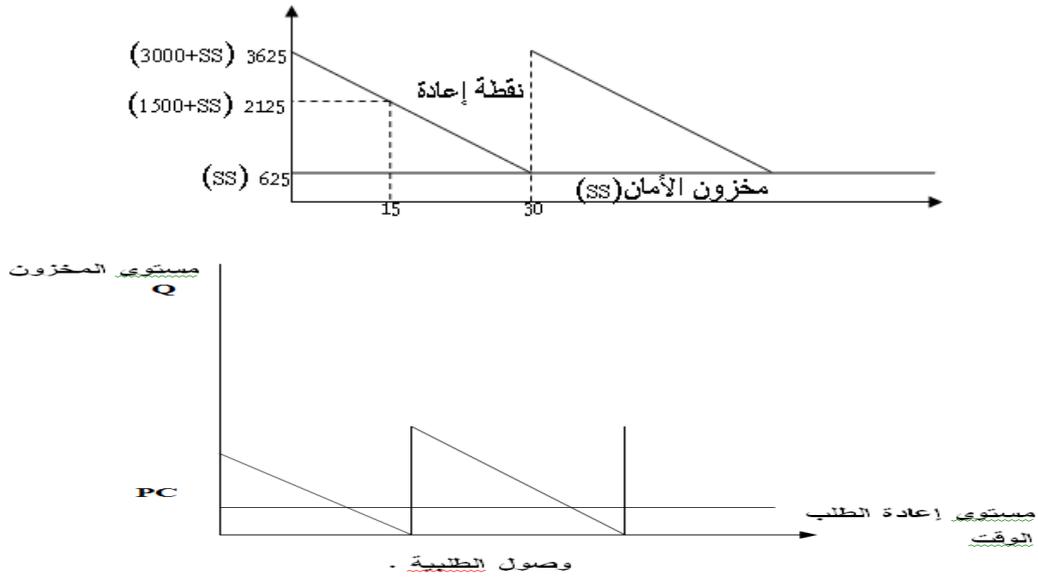
التخزين هو ادخار الفائض عن الحاجة من المنتج وتتمثل المخزونات في المواد الأولية أو المنتوجات تامة الصنع أو نصف التامة، لكل هذه المخزونات تكلفة وقرارات مناسبة يجب اتخاذها (متى وكم نخزن) حتى تساعد المؤسسة في تحقيق أهدافها، وهذا يتأتى من استخدام النماذج الرياضية لتسيير المخزون

10-5-1- هدف نماذج تسيير المخزون:

تهدف نماذج تسيير المخزون الى التقليل أو تدنية المخاطر المتعلقة بانقطاع التموين الذي يؤدي بدوره الى توقف دورة الإنتاج، ولذلك فإنه من أجل ضمان تسيير أمثل للمخزون يجب معرفة ما يلي: -عدد مرات التموين

-أزمنة التسليم

-مستويات مخزون الأمان(كما يبين ذلك الشكلين التاليين)



وسنقتصر هنا على نموذج *Wilson* لتسيير المخزون

10-5-2- نموذج *Wilson* لتسيير المخزون:

يعتمد هذا النموذج على الفرضيات الثلاثة الأساسية التالية:

-الكمية المطلوبة ثابتة

-الزمن مقسم الى فترات (أجزاء ثابتة)

-لا يوجد انقطاع في التخزين

يبحث النموذج عن الإجابة عن السؤال: متى؟ وكم؟

نعلم أن: التموين = الشراء + التخزين وعليه فإن:

$$\text{تكلفة التموين } (C_T) = \text{تكلفة الشراء } (C_a) + \text{تكلفة التخزين } (C_s)$$

تقوم المؤسسة بعدة طلبيات خلال فترة محددة عددها (N) وتحتوي كل طلبية الكمية (Q) كما أن

اجمالي الطلبيات خلال السنة هو (D) وعليه نستطيع أن نكتب:

$$D = Q * N \Rightarrow N = \frac{D}{Q} \Rightarrow Q = \frac{D}{N}$$

فإذا كانت: (C_a) تكلفة طلبية واحدة نستطيع عندئذ أن نعبر عن تكلفة الشراء بالصيغة:

$$C_a = c_a * N = c_a * \frac{D}{Q}$$

وإذا كانت: $\left(\frac{Q}{2}\right)$ متوسط المخزون و (u_x) سعر الوحدة و $(t\%)$ نسبة التخزين، نستطيع عندئذ أن نعبر عن تكلفة التخزين بالصيغة:

$$C_s = \left(\frac{Q}{2}\right) * u_x * t\% = \left(\frac{D}{2N}\right) * u_x * t\%$$

نعلم أن تكلفة التمويل: $C_T = C_s + C_a$

$$C_T = \left(\frac{D}{2N}\right) * u_x * t\% + c_a * N \quad \text{بدلالة عدد الطلبيات:}$$

$$C_T = \left(\frac{Q}{2}\right) * u_x * t\% + c_a * \frac{D}{Q} \quad \text{بدلالة الحجم الاقتصادي:}$$

نبحث عن قيمتي Q^* و N^* التي تدنى تكاليف التمويل (المشتقة الأولى بالنسبة للمتغير تكون معدومة) فيكون لدينا ما يلي:

$$C_T = \left(\frac{D}{2N}\right) * u_x * t\% + c_a * N \quad \text{بدلالة عدد الطلبيات:}$$

$$\frac{\partial C_T}{\partial N} = 0 \Rightarrow c_a - \left(\frac{D}{2N^2}\right) * u_x * t\% = 0 \Rightarrow 2N^2 c_a = D * u_x * t\%$$

$$N^* = \sqrt{\frac{D * u_x * t\%}{2c_a}}$$

$$C_T = \left(\frac{Q}{2}\right) * u_x * t\% + c_a * \frac{D}{Q} \quad \text{بدلالة الحجم الاقتصادي:}$$

$$\frac{\partial C_T}{\partial Q} = 0 \Rightarrow \frac{u_x * t\%}{2} - \frac{D * c_a}{Q^2} = 0 \Rightarrow 2D * c_a = Q^2 * u_x * t\%$$

$$Q^* = \sqrt{\frac{2D * c_a}{u_x * t\%}}$$

مثال: مؤسسة إنتاجية تقوم بإنتاج منتج (B) باستخدام مواد أولية (a)، المؤسسة تحتاج الى كمية تقدر بـ 100 وحدة يومياً من (a). إذا علمت أن تكلفة طلبية واحدة هي 30 دج ونسبة التخزين هي $t = 20\%$

-حدد معادلات التكاليف

-أحسب عدد الطلبيات الأمثل N^* والكمية الاقتصادية المثلى Q^* مع العلم أن المؤسسة تعمل لمدة

300 يوم

الحل:

1-تحديد المعادلات:

$$C_a = c_a * N = 30N$$

$$C_s = \left(\frac{D}{2N} \right) * u_x * t\% = \frac{(300 * 100)0.2}{2N} = \frac{3000}{N}$$

$$C_T = C_s + C_a = 30N + \frac{3000}{N}$$

2-حساب عدد الطلبيات الأمثل N^* والكمية الاقتصادية المثلى Q^*

$$N^* = \sqrt{\frac{D * u_x * t\%}{2c_a}} = \sqrt{\frac{300 * 100 * 0.2}{2 * 30}} = \sqrt{\frac{6000}{60}} = 10$$

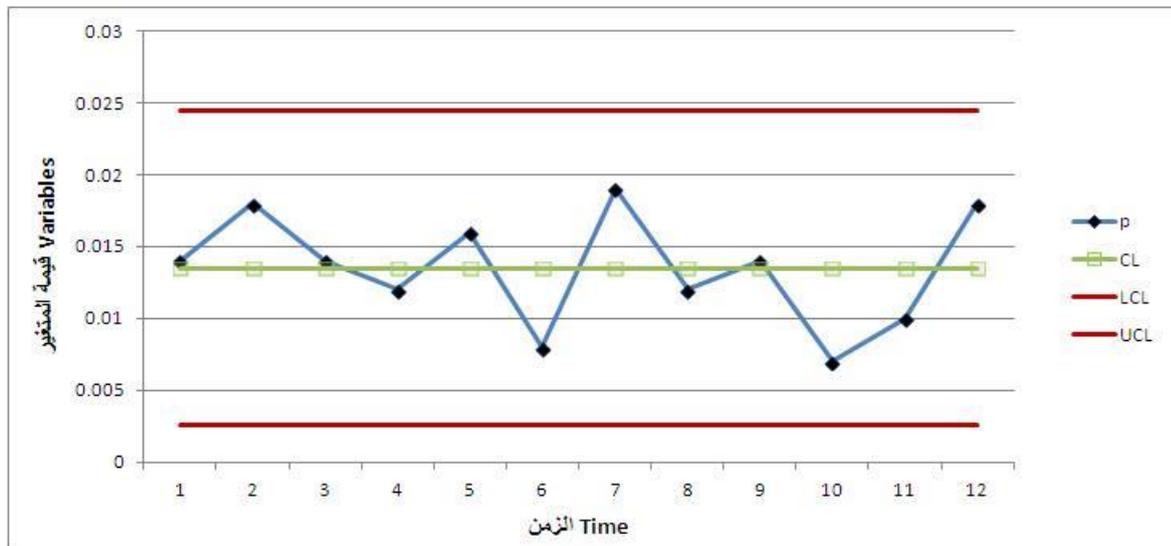
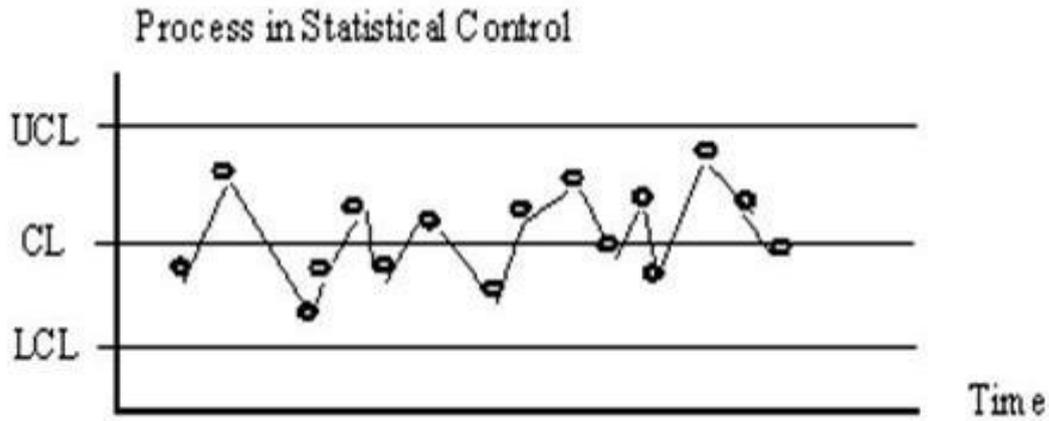
$$Q^* = \frac{D}{N^*} = \frac{30000}{10} = 3000$$

10-6-الأساليب الإحصائية لقياس الجودة:

هناك مجموعة من الأساليب الإحصائية لقياس الجودة وهي تشمل في الأساس جانبين هما مخططات أو خرائط السيطرة *Controle charts* وعينة أو خطة المعاينة وتعرف بـ *Acceptance Sample* وكلاهما يهدف الى التأكد من توفر النوعية القياسية ضمن الحدود الاقتصادية الممكنة.

10-6-1-مخططات السيطرة: هي عبارة عن شكل بياني يتكون من ثلاث أعمدة أفقية (خط الحد

الأعلى للسيطرة "*U.C.L*", الخط المركزي-القياس- "*C.L*", خط الحد الأدنى للسيطرة "*L.C.L*")، يتم أخذ عينات من الوحدات المنتجة بصورة دورية وتعيينها على الرسم البياني (كما يبين ذلك المنحنيين المواليين) لمعرفة إذا كان هناك تباين في العينات لأن وقوع عينة خارج هذه الحدود سيؤدي الى رفضها.



سننظر في عملية قياس الجودة الى اختبار الفروض ونكون عندئذ أمام الحالتين التاليتين:

- يمكن أن نرفض فرضية أن عملية الإنتاج هي تحت السيطرة بينما كان يجب قبولها فعندئذ نقع أمام خطأ من النوع الأول ويرمز له بالرمز (α) وينتج عن ذلك البحث عن مشكل غير موجود أصلاً وهو ما يؤدي بنا الى زيادة التكلفة وتضييع الوقت.

- أما إذا قبلنا فرضية أن عملية الإنتاج هي تحت السيطرة بينما كان يجب رفضها فعندئذ نقع أمام خطأ من النوع الثاني ويرمز له بالرمز (β) وينتج عن ذلك إغفال وجود مشكلة، وكحل لهذا الاشكال نختار الموازنة بين النوعين وذلك باستخدام (3σ) كحدي سيطرة، وفيما يلي نقوم بعرض مخطط السيطرة باستخدام الوسط الحسابي.

لنأخذ: i : الخاصة، j : العينة، n : حجم كل عينة، k : عدد العينات

$$\bar{x}_j = \frac{\sum_{i=1}^n x_{ij}}{n}$$

$$\delta_j^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_{ij} - \bar{x}_j)^2}{n-1} \quad \text{و التباين}$$

$$\bar{\bar{x}} = \frac{\sum_{j=1}^k \bar{x}_j}{k} \quad \text{الوسط الحسابي للعينات هو:}$$

$$\bar{\delta} = \sqrt{\frac{(\delta_1^2 + \delta_2^2 + \dots + \delta_k^2)/k}{n}}$$

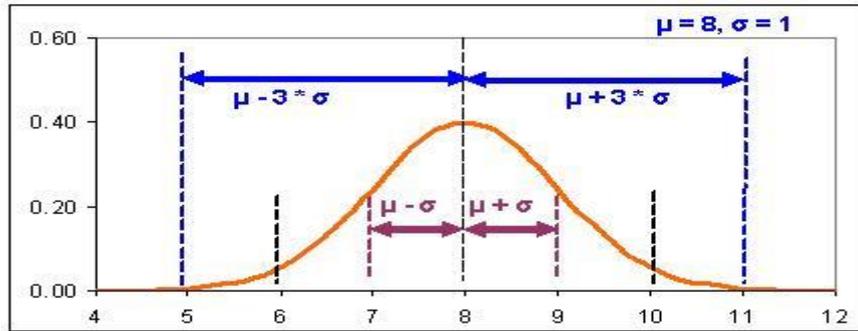
وعليه تكون لدينا الأعمدة الثلاث المشكلة لمخطط السيطرة عند المستويات التالية:

$$C.L = \bar{\bar{x}}$$

$$U.C.L = \bar{\bar{x}} + 3\bar{\delta}$$

$$L.C.L = \bar{\bar{x}} - 3\bar{\delta}$$

وكمثال على مخطط السيطرة باستخدام الوسط الحسابي نعطي الشكل التالي:



مثال: شركة لصناعة أشرطة الحاسوب اختارت عشوائياً 12 عينة من الأشرطة ($K = 12$) وكل عينة حجمها 4 ($n = 4$) وتم قياس الصرف الكهربائي لكل شريط وتدوينها في الجدول الموالي:

العينات												الوحدات
12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	
7.8	10.5	11.0	8.5	10.5	11.2	10.3	9.9	11.4	9.6	9.1	9.9	$i = 1$
10.7	12.2	9.8	10.3	9.5	11.1	9.8	10.6	9.4	9.4	9.8	9.9	$i = 2$
10.1	10.3	10.4	8.3	9.6	9.6	9.7	9.6	9.2	10.7	9.9	11.0	$i = 3$
10.1	13.3	8.9	8.3	10.6	10.0	9.9	10.0	7.9	9.9	11.2	9.8	$i = 4$
9.65	11.5	10.0	9.32	9.32	10.4	9.93	10.0	9.47	9.9	10.0	10.1	\bar{x}_j
1.58	2.05	0.80	1.15	0.34	0.64	0.07	0.18	2.02	0.32	0.77	0.32	$\bar{\delta}$

بعد الحسابات نجد:

$$\begin{aligned}C.L &= \bar{x} = 10.05 \\U.C.L &= \bar{x} + 3\bar{\delta} = 11.43 \\L.C.L &= \bar{x} - 3\bar{\delta} = 8.67\end{aligned}$$

10-6-2- عينة القبول: هي طريقة احتمالية تعتمد على تحديد حجم العينة التي يتم سحبها من الإنتاج الكلي بحيث تكون ممثلة لخصائص المجتمع، ويتم أخذ عينة وتصنيف وحداتها الى وحدات صالحة وأخرى غير صالحة، ويحدد عدد القبول (a) بالعدد المقبول لعدد الوحدات الصالحة، فإذا كان عدد الوحدات غير الصالحة أكبر من عدد الوحدات الصالحة ترفض الصفقة. كلما زادت نسبة الوحدات غير الصالحة (P) ينقص احتمال القبول $\{P(x)\}$ (كما يبين ذلك المنحنى الموالي) حيث:

$$P(x) = C_x^n P^x Q^{n-x}$$

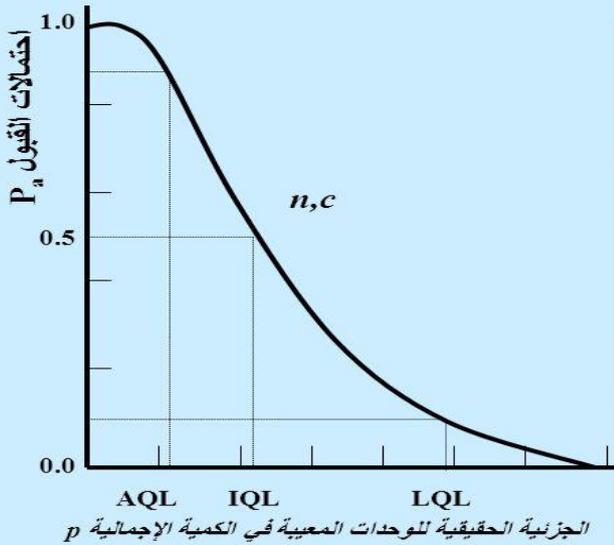
n : حجم العينة

P : عدد الوحدات غير الصالحة

$$x = 0, 1, \dots, n$$

$$Q = 1 - P$$

مؤشرات الجودة لخطط قبول العينات



- مؤشرات المنحنى :

- **مستوى الجودة المقبول AQL** : يمثل الحد الأعلى لعدد الوحدات الغير متوافقة لكل مائة وحدة.
- **مستوى الجودة المحدد LQL** : يمثل الجودة غير المرضية ، ولها عدة مسميات كالنسبة المئوية للتفاوت للوحدات المعيبة في الكمية الإجمالية LTPD في خطط دودج-رومنج.
- **مستوى الجودة الغير مهم IQL** : يمثل مستوى بين الجودة المقبولة AQL والجودة المحدد LQL .
- **مستوى حد الجودة المتدفق AOQL** : يمثل العلاقة التقريبية بين الجزئية الحقيقية للوحدات المعيبة في الكمية الإجمالية قبل الفحص (P) والجزئية الحقيقية للوحدات المعيبة في الكمية المتبقية بعد الفحص (AOQ) .

$$AOQ = P P_a$$

حيث:

الخاتمة

حدد بول سامويلسون (في كتابه "أساسيات التحليل الاقتصادي" عام 1947) البنى الرياضية العامة في عدة مجالات اقتصادية، وعن طريقها يتم تحليل المسائل والقضايا الاقتصادية بطريقة كمية للتعبير عنها بنظريات ومعادلات، وبعد ذلك استخدمت مجموعة من التقنيات الكمية بهدف تمكين متخذ القرار من الوصول الى القرار الأنسب، وتتمثل هذه التقنيات في مجموعة من الأدوات أو الطرق التي تستخدم من قبل متخذ القرار لمعالجة مشكلة معينة، أو لترشيد القرار الإداري المتخذ بخصوص حالة معينة بهدف الوصول الى البديل الأمثل في حدود الإمكانيات المتاحة، وذلك بناءً على بيانات تفصيلية ودراسة دقيقة للمخرجات وتقدير مخاطر كل البدائل المتاحة.

لقد جاءت هذه المحاضرات في بابين، الباب الأول عرضنا فيه تحليل الانحدار ومفاهيم عامة حول السلاسل الزمنية واستقراريتها، كما استعرضنا نماذج شعاع الانحدار الخطي واستخداماته في دراسة العلاقة السببية بين المتغيرات، بالإضافة الى مدلول التكامل المشترك ونماذج تصحيح الخطأ. أما الباب الثاني فقد خصص لعرض بعض نماذج بحوث العمليات ممثلة في التذكير بنموذج البرمجة الخطية والبرمجة غير الخطية والتربيعية والديناميكية، وهي كلها مفاهيم يستعين بها الطالب في فهم التحليل المعمقة في تخصصه، كما تطرقنا في هذا الباب أيضاً الى مجموعة من الأساليب المساعدة في اتخاذ القرار ممثلة في نظرية صفوف الانتظار ونظرية الألعاب وشجرة القرار بالإضافة الى نماذج تسيير المخزون والأساليب الإحصائية لقياس الجودة.

ان ما نشاهده اليوم من تطور في العلوم والاقتصاد وإدارة الأعمال والمحاسبة والاعلام الآلي ما هو الا نتيجة لاستخدام المفاهيم والتحليل الرياضية في مختلف هذه الميادين، كما أن استخدام الأساليب الرياضية الحديثة التي اعتمدت على البرامج الخطية وبحوث العمليات والتي تعتمد بدورها على المحددات والمصفوفات والاحتمالات ساعد الإنسان في الكشف عن الكثير من الابتكارات في مختلف المجالات العلمية.

قائمة المراجع

1-المراجع باللغة العربية

ا-الكتب باللغة العربية:

- جمال فروخي، نظرية الاقتصاد القياسي، ديوان المطبوعات الجامعية، الجزائر، 1993.
- حسن علي مشرقي، نظرية القرارات الإدارية (مدخل كمي في الإدارة)، عمان - الأردن، دار المسيرة للتوزيع والطباعة، عمان، الأردن، 2002.
- حسين علي بخيت وسحر فتح الله، الاقتصاد القياسي، دار اليازوري العلمية للنشر والتوزيع، عمان، 2007.
- حسين علي مشرقي وزياد عبد الكريم القاضي، بحوث العمليات، دار المسيرة للتوزيع والطباعة، الطبعة الأولى، عمان، الأردن، 1997.
- سليمان محمد مرجان، بحوث العمليات، دار الكتب الوطنية بن غازي، ليبيا، الطبعة الأولى، 2002.
- كمال خليفة أبو زيد و زينات محمد محرم، دراسات في استخدام بحوث العمليات في المحاسبة، المكتب الجامعي الحديث ، مصر ، 2006.
- لحسن عبد الله باشيوة، بحوث العمليات، دار اليازوري العلمية للنشر والتوزيع، عمان، الأردن، 2011.
- إبراهيم محمد مهدي وتوفيق البلقيني، أسس التحليل الرياضي للتجارين والاقتصاديين، مكتبة الجلاء الجديدة، المنصورة-مصر، 1988-1989.
- أنمار أمين البرواري وعربية عبد الرحمن داود، الرياضيات والبرمجة الخطية وتطبيقاتها الإدارية والاقتصادية، دار مجدلاوي للنشر والتوزيع، الطبعة الأولى، عمان، الأردن، 2010-2011.
- حسن ياسين طعمة، الرياضيات للاقتصاد والعلوم الإدارية والمالية، دار الصفاء للنشر والتوزيع، الطبعة الأولى، عمان-الأردن، 2010.

- حسين محمود الجناني، الأحدث في بحوث العمليات، دار الحامد للنشر والتوزيع، الأردن، 2010.
- خلود علي سلامة، الرياضيات الحديثة، دار صفاء للنشر والتوزيع، عمان-الأردن، 2008.
- دلال صادق وحميد ناصر القتال، بحوث العمليات، دار اليازوري للنشر والتوزيع، الأردن، 2008.
- رمضان محمد جهيمة، الرياضيات لدارسي العلوم الاقتصادية والإدارية والمالية، دار الكتاب الجديد المتحدة، بيروت-لبنان، 2006.
- سلطان محمد عبد الحميد، رياضيات الاعمال للتجارين، المكتبة العصرية، الطبعة الاولى، المنصورة-مصر، 2007.
- سليمان أبو صباح، الرياضيات للعلوم الاقتصادية والإدارية، مكتبة بغداد للنشر والتوزيع، الطبعة الأولى، عمان-الأردن، 1994.
- سهيلة عبد الله سعيد، الجديد في الأساليب الكمية وبحوث العمليات، دار حامد للنشر والتوزيع، الأردن، الطبعة الأولى، 2007.
- شفيق العتوم، بحوث العمليات، دار المناهج، الطبعة الأولى، 2006.
- شمعون شمعون، الرياضيات الاقتصادية، ديوان المطبوعات الجامعية، الطبعة الثالثة، الجزائر، 1998.
- عبد ذياب جزاع، بحوث العمليات، جامعة بغداد، الطبعة الثانية، 1686.
- علي الخطيب، مبادئ التحليل الرياضي، ديوان المطبوعات الجامعية، الطبعة الثانية، الجزائر، 1989.
- فتحي خليل حمدان، الرياضيات للعلوم الإدارية والمالية، دار وائل للنشر، الطبعة الأولى، عمان-الأردن، 2006.

-قيس الوهابي، المدخل الى الرياضيات الحديثة، مؤسسة الشرق للنشر والترجمة، الدوحة-قطر، 1985.

-لحسن عبد الله باشيوة، الرياضيات الاساسية وتطبيقاتها، دار المريخ للنشر والتوزيع، الرياض، 2011.

-محمد بلال الزعبي وعباس الطلافحة، النظام الاحصائي SPSS فهم وتحليل البيانات الإحصائية ، دار وائل للنشر والتوزيع، الطبعة الثالثة، عمان، 2006.

-محمود العبيدي ومؤيد عبد الحسين الفضل، بحوث العمليات وتطبيقاتها في إدارة الأعمال، مؤسسة الوراق للنشر، الأردن، 2004.

-مؤيد عبد الحسين الفضل، المنهج الكمي في إدارة الأعمال، الوراق للنشر والتوزيع، الطبعة الأولى، عمان، 2006.

-نجم عبود نجم، مدخل للأساليب الكمية مع تطبيق باستخدام ميكروسوفت اكسل، الوراق للنشر والتوزيع، الأردن، الطبعة الثانية، 2008.

-هوارد أنتون، ترجمة هادي مجيد حداد، الرياضيات وتطبيقاتها في العلوم الإدارية والاجتماعية، دار المريخ للنشر، الرياض-المملكة العربية السعودية، 1987.

ب-المجلات:

- عثمان نفاذ ومنذر العواد، استخدام نماذج الـ var في التنبؤ ودراسة العلاقة السببية، مجلة جامعة دمشق للعلوم الاقتصادية والقانونية، المجلد 28، العدد الثاني، 2012.

-سعيح عبد الحكيم، التضخم ومؤشرات الأداء الاقتصادي في الجزائر، دراسة قياسية للفترة (1989-2012)، مجلة دراسات اقتصادية، مركز البصيرة للبحوث والاستشارات والخدمات التعليمية، العدد 23، أبريل، 2014.

-كنعان عبد اللطيف عبد الرزاق وأنسام خالد حسن الجبوري، المجلة العراقية للعلوم الاقتصادية،
IRAQI journal for Economic sciences، السنة العاشرة، العدد33، 2012.

ج- الأطروحات والرسائل:

-سعيح عبد الحكيم، أثر التغيرات الكمية والنوعية لعناصر الإنتاج على النمو الاقتصادي-حالة
الجزائر للفترة (1982-2008)، أطروحة دكتوراه في الاقتصاد القياسي، جامعة الجزائر3، 2013.

A-LES LIVRES

2-الكتب باللغة الأجنبية

- Taladidia thiombiano, économétries des séries temporelles, cours et exercices corrigés, l'Harmathan, paris 2008.
- ERIC DOR, économétrie, synthèse de cours et exercice corrigés, collection synthex pearson éducation, France 2004.
- GOURIEROUX.C et MONFORT.A, séries temporelles et modèles dynamiques, édition ECONOMICA, paris 1990.
- Isabelle cotto et autres, mathématiques éléments de calcul différentiel pour l'économie, Ellipses Edition, paris, 2011.
- J.M.BOUSSARD et J.DAUDIN, la programmation linéaire dans les modèles de production, édition Inva et masson, paris, 1988.
- JACQUES TEGHE, Recherche opérationnelle, édition ellipses , paris, 2013.
- LARDIC.S et MIGNON.V, économétrie des séries temporelles macro-économiques et financières, édition ECONOMICA, paris 2002.
- NAILA Hayek et jean-pierre leca, mathématiques pour l'économie, Analyse-Algebre, Edition Dunod , 4ème édition, paris, 2011.
- Olivier ferrier, maths pour Economistes, Edition Boek Université, Bruxelles, Belgique, 2007.
- Regis Bourbonnais, Econométrie, 8 ième édition, édition Dunod, paris, 2011.

-Régis Bourbonnais, économétrie, 9ième édition, édition Dunod, paris, 2015.

-William H. Green, Econometric analysis, pearson international Edition, United States 2003.

-Xavier GOUYON, statistique et économétrie, Ellipses édition, paris, 2001.

B-REVUES :

- M.FLORIAN et P.ROBILLARD, programmation hyperbolique en variables bivalentes, revue française d'Automatique d'informatique et de recherche opérationnelle, tome2, 1971.

C-LES THESES :

-MARIE-CHRISTINE PLATEAU, reformulation quadratique convexes pour la programmation quadratique thèse de doctorat en informatique, conservatoire nationale des Arts, France, 2006.

-Mohamed Ouriemchi, résolution de problèmes non linéaires par les méthodes de points intérieurs, thèse de doctorat de l'université du HAVRE, 2005.