الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
République Algérienne Démocratique et Populaire

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
جامعة أمحمد بوقرة بومرداس
كلية العلوم الاقتصادية، التجارية وعلوم التسيير

Ministère de l'enseignement supérieur
Et de la recherche scientifique

Université M'Hamed BOUGARA de Boumerdès
Faculté Des Sciences Economiques , Commerciales
Etdes Sciences De Gestion

مطبوعة بيداغوجية تحت عنوان:

محاضـرات
فـي مقياس رياضيات1

موجهة لطلبة: السنة الأولى ليسانس ل.م.د **تخصص**: جذع مشترك

من اعداد الدكتور: سعيج عبد الحكيم **قسم** :علوم التسيير

السنة الجامعية: 2017/2016

الفهرس

الصفحة

مقدمـــة:

يمكن تعريف الرياضيات بأنها علم الدِّراسة المنطقيَّة لكمِّ الأشياء وكيفها وترابطها، كما أنه علم الدراسة المجردة البحتة التسلسلية للقضايا والأنظمة الرِّياضية، وتعرف الرياضيات أيضاً بأنها دراسة القياس والحساب والهندسة هذا بالإضافة إلى المفاهيم الحديثة نسبياً ومنها البنية، الفضاء أو الفراغ والتغير والأبعاد، ولقد ساعدت الرياضيات بفروعها المختلفة الانسان منذ القدم وحتى وقتنا الحاضر في دراسة وتحليل العلاقات بين الظواهر الطبيعية المختلفة والتعرف على بعض القوانين التي تحكم الكون من خلال اعتمادها على المنطق، فانطلاقاً من فرضيات قُبلت على نطاق واسع، استخدم علماء الرياضيات المنطق لاستخراج النتائج وتطوير نظم رياضية متكاملة وبهذا فالرياضيات والمنطق من المتلازمات، والعقل الّذي عن التفكير المنطقي لا بدّ له من أن يستعين بعلم الرياضيات، لأنّ الرياضيات من أهمّ وأفضل الطّرق الّتي تعلّم العقل البشري طريقة التفكير المنطقي، وبذلك فإن التحصيل الجيد للرياضيات يتطلب مهارات أهمها: التحليل الدقيق، والتّعليل الواضح، وتساعد تلك المهارات الناس على حل بعض الألغاز الصعبة التي تواجههم.

تنقسم الرياضيات إلى رياضيات بحتة ورياضيات تطبيقية، فالرياضيات التطبيقية تهتم بتطوير أساليب رياضية لتستخدم في العلوم والمجالات الأخرى كالفيزياء والكيمياء والأحياء والأدب كالمنطق والفلسفة والشريعة في المواريث وما شابه ولهذا سميت الرياضيات بأم العلوم، أما الرياضيات البحتة فتعنى بتطوير المعرفة الرياضية لذاتها وتشمل دراسة الأعداد والكميات والصيغ والعلاقات، فعلى سبيل المثال يدرس الحساب مسائل تتعلق بالأعداد،
ويتضمن الجبر حل معادلات تمثل الأحرف فيها كميات مجهولة، بينما تدرس الهندسة خواص وعلاقات الأشكال في الفضاء ،أما التحليل الرياضي الذي هو موضوع دراستنا هنا فهو فرع الرياضيات الذي يهتم بدراسة الدوال الرياضية وتحولاتها باستخدام أدوات ترتبط بمفاهيم النهاية، حيث تدرس خواص مثل الاستمرار والاشتقاق والتكامل والتفاضل، التقعر والانعطاف في منحنيات التوابع والدوال ذات المتغير الواحد أو الدوال ذات عدة متغيرات، وغالباً ما تدرس هذه المفاهيم على أعداد حقيقية أو أعداد عقدية.

الفصل الأول: مبادئ نظرية المجموعات

نستهل نظرية المجموعات باستعراض بعض المفاهيم الأولية في المنطق الرياضي، ومن ثمة سنعرج على تعريف المجموعات ومختلف العمليات عليها الإضافة الى أنواع العلاقات، حيث نفصل هنا علاقتي التكافؤ والترتيب لنصل في الأخير الى تحديد مدلول التطبيقات

1-1-مفاهيم أولية في المنطق الرياضي[1]:

نعني بالمنطق الرياضي لقضية أو نظرية أو نحوها التسلسل المنطقي في خطوات مناقشة القضية أو برهان القضية بشكل مقنع، ويستعمل المنطق الرياضي مجموعة من المفاهيم نوردها فيما يلي.

أ-التقرير أو القضية

التقرير أو القضية هي كل جملة نستطيع الحكم عليها بأنها صحيحة أو خاطئة ولا تكون صحيحة وخاطئة في نفس الوقت، مثلاً قولنا: الخرطوم عاصمة السودان أو كتابتنا: 4+2=8.

إذا حمل التقرير خبراً واحداً يسمى تقريراً بسيطاً، أما إذا حمل أكثر من خبر فيسمى عندئذ تقريراً مركباً، وكمثال على هذا نقول:

الخرطوم عاصمة السودان والجزائر عاصمتها الجزائر............تقرير مركب

أو نكتب: 4+2=8..........تقرير بسيط

ب-النفي

نقصد بالنفي عكس التقرير الأول، فإذا رمزنا للتقرير الأول بـ P فإن تقريره العكسي سنرمز له بالرمز P مثال لدينا التقرير P: الشمس تشرق من المشرق

---

[1]- للاطلاع أكثر أنظر: غوثي بوكلي حسن، الوجيز في الرياضيات، ديوان المطبوعات الجامعية، الطبعة الثالثة، الجزائر، 2008، ص09.

$\bar{P}$: الشمس لا تشرق من المشرق

وعليه فإن جدول قيم الصواب للتقريرP يكون كما يلي:

P	$\bar{P}$
V	F
F	V

حيث: V:التقرير صائبV

F:التقرير خاطئ

ج-الربط

تتمثل أدوات الربط فيما يلي[2]:: الوصل، الفصل، الشرط، الشرط ذو الاتجاهين

أولاً:أداة الوصل أوالعطف "و": ويرمز لها بالرمز "Λ" ، فإذا كان لدينا التقريرين P وq فإن جدول الحقيقة للتقرير المركب qΛp يكون

حسب الجدول التالي:

p	q	qΛp
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

فإذا كان لدينا التقريرين التاليين

P: الجزائر عاصمة الجزائر

q: الرباط عاصمة المغرب

فإن التقرير المركب بأداة الوصل "Λ"بين التقريرين P وq و المعرف بـ p^q يكون في الحالات التالية :

الجزائر عاصمة الجزائر والرباط عاصمة المغرب (VV)................V

الجزائر عاصمة الجزائر وتونس عاصمة المغرب (FV)................F

طرابلس عاصمة الجزائر والرباط عاصمة المغرب (VF)................F

طرابلس عاصمة الجزائر وتونس عاصمة المغرب (FF)................F

[2]- للاطلاع أكثر أنظر:

-NAILA Hayek et jean-pierre leca, mathématiques pour l'économie, Analyse-Algebre, Edition Dunod , 4éme édition, paris, 2011 ,p05

ثانياً- أداة الفصل أو التخيير "أو": ويرمز لها بالرمز "V"، فإذا كان لدينا التقريرين P وq فإن جدول الحقيقة للتقرير المركب بأداة الفصل "V"بين التقريرين P وq والذي نرمز له بالرمز(qV p) يكون حسب الجدول التالي:

p	q	(qV p)
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

فإذا كان لدينا التقريرين السابقين P وq

فإن التقرير المركب بأداة الفصل " V " بين التقريرين P وqوالمعرف بـ (qV p) يكون في الحالات التالية :

الجزائر عاصمة الجزائر أو الرباط عاصمة المغرب (VV)................V

الجزائر عاصمة الجزائر أو تونس عاصمة المغرب (FV).................V

طرابلس عاصمة الجزائر أو الرباط عاصمة المغرب (VF)................V

طرابلس عاصمة الجزائر أو تونس عاصمة المغرب (FF).................F

ثالثاً-أداة الشرط " إذا...فإن": ويرمز لها بالرمز "⟵" فإذا كان لدينا التقريرين P وq فإن جدول الحقيقة للتقرير المركب بأداة الشرط بين هذين التقريرين والذي نرمز له بالرمز(p→q) يكون حسب الجدول التالي:

p	q	(p→q)
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

فإذا كان لدينا التقريرين السابقين P وq

فإن التقرير المركب بأداة الشرط بين التقريرين P وq والمعرف بـ (p→q)يكون في الحالات التالية :

إذا الجزائر عاصمة الجزائر فإن الرباط عاصمة المغرب (VV)................V

إذا الجزائر عاصمة الجزائر فإن تونس عاصمة المغرب (FV)..................F

إذا طرابلس عاصمة الجزائر فإن الرباط عاصمة المغرب (VF)................V

إذا طرابلس عاصمة الجزائر فإن تونس عاصمة المغرب (FF).................V

رابعاً-أداة الشرط ذو الاتجاهين " إذا وفقط إذا ": ويرمز لها بالرمز "↔"

فإذا كان لدينا التقريرين P وq فإن جدول الحقيقة للتقرير المركب بأداة الشرط الثنائي بين هذين التقريرين والذي نرمز له بالرمز (q↔ p) يكون حسب الجدول التالي:

p	q	(q↔ p)
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

فإذا كان لدينا التقريرين السابقين P وq

فإن التقرير المركب بأداة الشرط الثنائي بين التقريرين P وq والمعرف بـ (p→q) يكون في الحالات التالية :

الجزائر عاصمة الجزائر إذا وفقط إذا الرباط عاصمة المغرب (VV)................V
الجزائر عاصمة الجزائر إذا وفقط إذا تونس عاصمة المغرب (FV)..................F

طرابلس عاصمة الجزائر إذا وفقط إذا الرباط عاصمة المغرب (VF)................F

طرابلس عاصمة الجزائر إذا وفقط إذا تونس عاصمة المغرب (FF)................V

د-التقارير المتكافئة: نقول أن التقريرP يكافئ التقريرq ونكتب P≡ q إذا كان لهما نفس قيم الصواب أو إذا صدقا معاً أو كذبا معاً، مثال التقريرينP و $\bar{\bar{P}}$

P	$\bar{P}$	$\bar{\bar{P}}$
V	F	V
F	V	F

لديهما نفس جدول الحقيقة وعليه نستطيع القول أنهما تقريرين متكافئين.

ه-الاقتضاء الرياضي: وينقسم الى الاقتضاء الرياضي في اتجاه واحد والاقتضاء الرياضي في اتجاهين متعاكسين

- الاقتضاء الرياضي في اتجاه واحد أو الاستلزام تكون فيه القضية الأولى تستلزم الثانية والعكس غير صحيح، مثال: إذا كانت لدينا القضيتان AوB التاليتان:

B : $x^2 = 16$ و A : x =4

$A \Rightarrow B$: وعليه نستطيع القول أن X=4 $\Rightarrow x^2 = 16$

أما $x^2 = 16 \nRightarrow x = 4$ أي أن: $B \nRightarrow A$

- الاقتضاء الرياضي في اتجاهين متعاكسين ويعرف أيضاً بالتكافؤ المنطقي تكون فيه القضية الأولى تستلزم الثانية والعكس غير صحيح، مثال: إذا كانت لدينا القضيتان C وD التاليتان:

$C : x = 2$ و $D : 3x = 6$

لدينا: x =2 بضرب طرفي المعادلة بالعدد (3) نجد: $3x = 6$ هذا يعني أن:

$x = 2 \Rightarrow 3x = 6$ أي أن: $C \Rightarrow D$

ولدينا أيضاً: $3x$ =6 بقسمة طرفي المعادلة على العدد (3) نجد: $x = 2$ هذا يعني أن:

$3x = 6 \Rightarrow x = 2$ أي أن: $D \Rightarrow C$

ومنه إذا كان: $C \Rightarrow D$ و $D \Rightarrow C$ نستطيع عندئذ أن نكتب $C \Leftrightarrow D$

2-1-تعريف المجموعات

المجموعة لفظ يطلق على تجمع من الأشياء المدركة حسياً أو بديهياً على أن تكون هذه الأشياء متمايزة ومحددة تماماً. ويرمز للمجموعات عادة بالرمز[3]**:** A ,B,C مثلاً ولعناصرها بالرمز a,b,c فنقول مثلاً أن $a \in A$ أو $b \notin B$ وهناك عدة طرق للتعبير عن المجموعات نذكر منها الطريقتين التاليتين:

الطريقة الأولى: وفق هذه الطريقة يتم التعبير عن المجموعة من خلال وضع كل عناصرها بين حاضنتين، فمثلاً إذا كانت عناصر المجموعة A هي: 3، 5، 8، 11 نكتب المجموعة Aعندئذ بالشكل: $A=\{3,5,8,11\}$

الطريقة الثانية: وفق هذه الطريقة يتم التعبير عن المجموعة من خلال إيجاد خاصية تجمع بين جميع عناصر المجموعة مثال المجموعة التالية

[3]- للاطلاع أكثر أنظر: أنمار أمين البرواري وعربية عبد الرحمن داود، الرياضيات والبرمجة الخطية وتطبيقاتها الإدارية والاقتصادية، دار مجدلاوي للنشر و التوزيع، الطبعة الأولى، عمان- الأردن، 2010-2011، ص13.

-NAILA Hayek et jean-pierre leca, mathématiques pour l’économie, Analyse-Algebre, op cit ,p15

B={ عدد زوجي موجب : x / x}

نلاحظ أن الطريقة الثانية تمكننا من التعبير عن المجموعات التي تحوي عدد كبير من العناصر وهو ما تعجز عنه الطريقة الأولى، ولابأس أن نشير هنا لوجود بعض المجموعات كثيرة الاستخدام مثل: $\mathbb{N}$ و$\mathbb{R}$ و$\mathbb{C}$ و$\mathbb{E}$ وغيرها حيث:

$\mathbb{N}$: مجموعة الأعداد الطبيعية . $\mathbb{R}$: مجموعة الأعداد الحقيقية

$\mathbb{C}$: مجموعة الأعداد المركبة . $\mathbb{E}$: مجموعة الأعداد الصحيحة

نقول عن مجموعتين A وB أنهما متساويتين إذا كان كل عنصر من A هو عنصر من B و كل عنصر من B هو عنصر منA فإذا كانت لدينا المجموعتان التاليتان:

A=$\{x\colon x^2 - 3x + 2 = 0\}$ والمجموعة B=$\{1,2\}$

وبالتالي نقول أن: A=B

المجموعة الجزئية[4]:

نقول أن المجموعة C مجموعة جزئية من D إذا كان كل عنصر من المجموعة C هو عنصر من D ونكتب: C ⊂ D

وبالتالي: C ⊂ D $\Leftrightarrow \forall x (x \in C \Rightarrow x \in D)$

هذا يعني أن: (A= B) $\Leftrightarrow ((A \subset B) \wedge (B \subset A))$

مثال: لدينا المجموعتان A وC التاليتان:

A={x: $x \in \mathbb{N}$, عدد فردي x }

C={x: $x \in \mathbb{N}$, عدد أولي أكبر من2 x }

فعندئذ نستطيع القول ان: C ⊂ A

[4]- للاطلاع أكثر أنظر: -أنمار أمين البرواري وعربية عبد الرحمن داود، الرياضيات والبرمجة الخطية وتطبيقاتها الإدارية والاقتصادية، مرجع سابق، ص13.

3-1-العمليات على المجموعات[5]:

نتطرق فيما يلي لمجموعة من العمليات على المجموعات بدأً بالفرق بين مجموعتين ثم تقاطع واتحاد مجموعتين بالإضافة الى الجداء الديكارتي والفرق التناظري بين مجموعتين

أ-فرق مجموعتين

الفرق بين المجموعتين E و F هي مجموعة العناصر الموجودة في E وغير موجودة في F ونرمز لهذه المجموعة بالرمز (E-F) وتعرف بالصيغة التالية:

$$\text{E-F} =\{x: x \in \mathrm{E} \ \wedge x \notin F \}$$

إذا كانت E ⊂ F نسمي المجموعة E-F متممة F في E ونرمز لها بالرمز C_E F

المجموعة الخالية هي المجموعة الوحيدة التي تحقق: E-E=∅ وتكون معرفة كما يلي:

$$\emptyset =\{x: x \in \mathrm{E} \ \wedge x \notin E \}$$

ب-اتحاد مجموعتين

نعني باتحاد مجموعتين مجموعة العناصر المنتمية للمجموعة الأولى أو الثانية فإذا كانت لدينا المجموعتين E و F نرمز لاتحادهما بالرمز EUF ونعرفه كما يلي:

$$\text{E}\cup\text{F} =\{x: x \in \mathrm{E} \ \vee x \in F \}$$

ج-تقاطع مجموعتين

نعني بتقاطع مجموعتين مجموعة العناصر المنتمية للمجموعة الأولى و الثانية في آن واحد، فإذا كانت لدينا المجموعتين E و F نرمز لتقاطعهما بالرمز E∩F ونعرفه كما يلي:

$$\text{E}\cap\text{F} =\{x: x \in \mathrm{E} \ \wedge x \in F \}$$

[5]- للاطلاع أكثر أنظر: شمعون شمعون، الرياضيات الاقتصادية، ديوان المطبوعات الجامعية، الطبعة الثالثة، الجزائر، 1998، ص17-24.

د-الجداء الديكارتي لمجموعتين

نعني بالجداء الديكارتي لمجموعتين مجموعة الثنائيات التي يكون عنصرها الأول ينتمي للمجموعة الأولى و عنصرها الثاني ينتمي للمجموعة الثانية، فإذا كانت لدينا المجموعتين E و F نرمز للجداء الديكارتي لهما بالرمز E×F ونعرفه كما يلي:

$$E\times F=\{(x,y)/\ x\in \mathrm{E}\ \land y\in F\}$$

مثال: إذا كانت لدينا المجموعات التالية:

$$B=\{5,6\}\qquad A=\{3,5\}\qquad \Omega=\{1,2,3,4,5,6,\}$$

نستطيع عندئذ أن نجد المجموعات التالية:

$$\Omega-A=\{x:\ x\in\Omega\ \land x\notin A\}\quad=\{1,2,4,6\}$$

$$\Omega-B=\{x:\ x\in\Omega\ \land x\notin B\}=\{1,2,3,4\}$$

$$C_{\Omega}\ A=\{1,2,4,6\}$$

$$C_{\Omega}\ B=\{1,2,3,4\}$$

$$A-\Omega=\{\emptyset\}$$

$$A\cap B=\{x:\ x\in \mathrm{A}\ \land x\in B\}\quad=\{5\}$$

$$A\cup B=\{x:\ x\in \mathrm{A}\ \lor x\in B\}=\{3,5,6\}$$

$$A\times B=\{(x,y):\ x\in \mathrm{A}\ \land y\in B\}\quad=\{(3,5),(3,6),(5,5),(5,6)\}$$

$$B\times A=\{(x,y):\ x\in \mathrm{y}\ \land x\in B\}\quad=\{(5,3),(5,5),(6,3),(6,5)\}$$

ه-الفرق التناظري لمجموعتين

نعني بالفرق التناظري لمجموعتين مجموعة العناصر المنتمية للمجموعة الأولى أو للمجموعة الثانية دون أن تنتمي الى كليهما معاً، فإذا كانت لدينا المجموعتين E و F نرمز لفرقهما التناظري بالرمز EΔF ونعرفه كما يلي:

$$E\Delta F=(A-B)\lor(B-A)\quad=(A\cup B)-(A\cap B)$$

مثال: إذا كانت لدينا المجموعات التالية:

$$B=\{5,6,7,8\} \qquad A=\{3,4,5,6\}$$

نستطيع عندئذ أن نجد المجموعات التالية:

$$A \cap B =\{x: x \in A \ \wedge x \in B \} =\{5,6\}$$

$$A \cup B =\{x: x \in A \ \vee x \in B \}=\{3,4,5,6,7,8\}$$

$$A\Delta B =(A\cup B)-(A\cap B)= \{3,4,7,8\}$$

4-1-أنواع العلاقات

يمكن أن نحصي هنا علاقتي التكافؤ والترتيب

أ-علاقة التكافؤ

نقول عن علاقة ثنائية لمجموعة E ولتكن $\mathcal{R}$ أنها علاقة تكافؤ إذا كانت انعكاسية وتناظرية ومتعدية حيث:

تكون $\mathcal{R}$ انعكاسية إذا حققت ما يلي: $\forall\ x \in E\ , x\mathcal{R}x$

تكون $\mathcal{R}$ تناظرية إذا حققت ما يلي: $\forall\ (x,y)\ \in E^2\ , x\mathcal{R}y \Rightarrow\ y\mathcal{R}x$

تكون $\mathcal{R}$ متعدية إذا حققت ما يلي: $\forall\ (x,y,z)\ \in E^3\ , x\mathcal{R}y\ \wedge y\mathcal{R}z\ \Rightarrow\ x\mathcal{R}z$

ب-علاقة الترتيب

نقول عن علاقة ثنائية لمجموعة E ولتكن $\mathcal{R}$ أنها علاقة ترتيب إذا كانت انعكاسية وضد تناظرية ومتعدية حيث:

تكون $\mathcal{R}$ انعكاسية إذا حققت ما يلي: $\forall\ x \in E\ , x\mathcal{R}x$

تكون$\mathcal{R}$ ضد تناظرية إذا حققت ما يلي: $\forall\ (x,y)\ \in E^2\ , x\mathcal{R}y\ \wedge y\mathcal{R}x \Rightarrow\ y=x$

تكون $\mathcal{R}$ متعدية إذا حققت ما يلي: $(x,y,z)\ \in E^3\ , x\mathcal{R}y\ \wedge y\mathcal{R}z\ \Rightarrow\ x\mathcal{R}z$

مثال: إذا عرفنا العلاقة أكبر من أو يساوي ($\leq$) في $\mathbb{R}$ هل هذه العلاقة علاقة تكافؤ أم علاقة ترتيب؟.

الحل: حتى نعرف ان كانت العلاقة أكبر من أو يساوي ($\leq$) في $\mathbb{R}$ علاقة تكافؤ أم علاقة ترتيب يجب اختبار ما يلي:

-هل تحقق العلاقة أكبر من أو يساوي ($\leq$) في $\mathbb{R}$ الخاصية الانعكاسية؟

لدينا : $\forall\ x \in \mathbb{R}\ , x \geq x$ وبالتالي فإن الخاصية الانعكاسية محققة

-هل تحقق العلاقة أكبر من أو يساوي ($\leq$) في $\mathbb{R}$ الخاصية التناظرية؟

لدينا ما يلي: $\forall\ (x,y)\ \in \mathbb{R}^2\ , x \geq y \nRightarrow\ y \geq x$

وبالتالي فإن الخاصية التناظرية غير محققة

-هل تحقق العلاقة أكبر من أو يساوي ($\leq$) في $\mathbb{R}$ الخاصية ضد التناظرية ؟

لدينا ما يلي : $\forall\ (x,y)\ \in \mathbb{R}^2\ , x \geq y\ \Lambda y \geq x \Rightarrow\ y = x$

وبالتالي فإن الخاصية ضد التناظرية محققة

-هل تحقق العلاقة أكبر من أو يساوي ($\leq$) في $\mathbb{R}$ الخاصية المتعدية؟

لدينا ما يلي: $(x,y,z)\ \in \mathbb{R}^3\ , x \geq y\ \Lambda y \geq z\ \Rightarrow\ x \geq z$

وبالتالي فإن الخاصية المتعدية محققة

بمأن العلاقة أكبر من أو يساوي ($\leq$) في $\mathbb{R}$ حققت الخاصية الانعكاسية وضد التناظرية والمتعدية فهي بذلك علاقة ترتيب

ج-صف التكافؤ

ليكن x عنصراً من المجموعة E تبعاً للعلاقة $\mathcal{R}$. نسمي صف تكافؤ x مجموعة العناصر y من E التي تكون في علاقة $\mathcal{R}$ مع x ونرمز لها بالرمز C_x حيث:

$$C_x = \{y \in \mathrm{E}/y\mathcal{R}x\}$$

د-مجموعة النسبة(القسمة)

نسمي مجموعة صفوف التكافؤ لعناصر E بمجموعة النسبة(القسمة) لـ E بواسطة $\mathcal{R}$ ونرمز لها بالرمز E/ $\mathcal{R}$ و تعرف بالشكل التالي:

$$\mathrm{E}/\ \mathcal{R} = \{C_x/x \in \mathrm{E}\}$$

1-5-التطبيقات

إذا كانت لدينا مجموعتان A و B فإن أي مجموعة جزئية من مجموعة الجداء الديكارتي بين A و B المعرفة بـ A×B تسمى علاقة ثنائية من A الى B

أ-تعريف التطبيقات

إذا كانت المجموعتين A و B غير خاليتين وكانت $\mathcal{R}$ علاقة ثنائية من A الى B ، نقول أن $\mathcal{R}$ تطبيق من A الى B إذا تحقق ما يلي[6]:

-كل عنصر من A يرتبط بعنصر وحيد منB وفق العلاقة $\mathcal{R}$

-مجموعة تعريف العلاقة $\mathcal{R}$ هي A نفسها

ونرمز لهذا بما يلي:

$$(x,y) \in \mathcal{R} \wedge (x,z) \in \mathcal{R} \Rightarrow \; y = z$$

إذا كانت العلاقة الثنائية من A الى B تطبيق فسنرمز لهذا التطبيق بالرمز f ونعبر عن ذلك بالرمز: $f: A \longrightarrow B$

فإذا كان $x \in A$ و $y \in B$ نستطيع أن نكتب: $f: A \longrightarrow B$

$$Y = f(x)$$

مثال: إذا كانت لدينا المجموعتان التاليتان:

$$A=\{a,b,c,d\} \qquad B=\{1,2,3,4,5\}$$

هل العلاقات التالية تطبيق أم لا؟

$$R_1 = \{(a,1),(b,2),(c,3),(d,1)\}$$

$$R_2 = \{(a,1),(a,2),(b,3),(b,1),(d,4)\}$$

$$R_3 = \{(a,1),(b,2),(c,3)\}$$

---

[6]- للاطلاع أكثر أنظر:

-NAILA Hayek et jean-pierre leca, mathématiques pour l'économie, Analyse-Algebre, op cit,p19

العلاقة R_1علاقة تطبيق لأن كل عنصر A من ارتبط بعنصر وحيد من B بالإضافة أن كل عناصر المجموعة A معرفة في هذه العلاقة

العلاقة R_2 ليست تطبيق لأن العنصرa من A ارتبط بعنصرين من B بالإضافة أن كل العنصرc من المجموعة A غير معرف في هذه العلاقة

العلاقة R_3 ليست تطبيق لأن العنصرd من المجموعة A غير معرف في هذه العلاقة

ب-الصورة والصورة العكسية للتطبيق

ليكن لدينا التطبيق f المعرف من E نحو F ، $f:E\longrightarrow F$ ولتكن A مجموعة جزئية من E نسمي f(A) مجموعة صورA بالتطبيق f وتعرف كما يلي:

$$f(A)=\{ y \in F \ / \ \exists \ x \in A, y = f(x) \}$$

الصورة العكسية: لتكن Bمجموعة جزئية من F نسمي $f^{-1}(B)$ مجموعة الصور العكسية لـ B بالتطبيق f وتعرف كما يلي:

$$f^{-1}(A)=\{ x \in E \ / \ \exists y \in B, y = f(x) \}$$

ج-تركيب تطبيقين

إذا كان لدينا التطبيقين f وg التاليين $f:A\longrightarrow B$ و $g:B\longrightarrow C$ نقول أن التطبيق $h:A\longrightarrow C$ تركيب التطبيقين f وg ونرمز له بالرمز gof حيث[7]::

$$g\circ f=h(x)=g(f(x))$$

مثال: إذا كانت $A=B=C=\mathbb{R}$ وكان: $f(x) = x + 1$ و $g(x) = x^2$

فأوجد fog و gof و fof

---

[7]- للاطلاع أكثر أنظر: لحسن عبد الله باشيوة، الرياضيات الاساسية وتطبيقاتها، دار المريخ للنشر والتوزيع،الرياض، 2011،ص168.

-Isabelle cotto et autres, mathématiques éléments de calcul différentiel pour l'économie, Ellipses Edition, paris, 2011, p19.

-jean pierre lecoutre , Analyse TD, Edition Dunod, 5éme édition, paris, 2013, p02

$fog = f(g(x)) = f(x^2) = x^2 + 1$

$gof = g(f(x)) = g(x+1) = (x+1)^2$

$fof = f(f(x)) = f(x+1) = x + 1 + 1 = x + 2$

د-التطبيق التقابلي

نقول عن تطبيق f أنه تقابلي إذا كان متبايناً وغامراً

يكون التطبيق f متبايناً إذا حقق ما يلي:

$$\forall\ (x_1, x_2) \in E^2\ , f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

أو تحقق: $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

يكون التطبيق f غامراً إذا حقق ما يلي:

$$\forall\ y \in E\ , \exists x \in E, y = f(x)$$

مثال: إذا كان لدينا التطبيق التالي $f: A \longrightarrow B$ المعرف بالشكل: $f(x) = x^2$

فهل هذا التطبيق تقابلي؟

يمكن هنا أن نحصي الحالتين التاليتين:

* إذا كان كانت $A=B=\mathbb{R}$

هل التطبيق f متبايناً ؟

يكون التطبيق f متبايناً إذا حقق ما يلي:

$$\forall\ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2\ , f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

$$x_1^2 = x_2^2 \nRightarrow x_1 = x_2$$

ومنه f غير متباين وهو ليس تقابلي

* إذا كان كانت $A=B=\mathbb{R}^+$

هل التطبيق f متبايناً ؟

يكون التطبيق f متبايناً إذا حقق ما يلي:

$$\forall\ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2\ , f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

$$x_1^2 = x_2^2 \Longrightarrow x_1 = x_2$$

ومنه f تطبيق متباين

هل التطبيق f غامراً ؟

يكون التطبيق f غامراً إذا حقق ما يلي:

$$\forall\, y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}, y = x^2$$

وهذا محقق وبالتالي فإن التطبيق f غامر، بما أن التطبيق f متباين وغامر فهو تطبيق تقابلي

1-6-التحليل التوفيقي

نعرف هنا أولاً مفهوم العاملي (! factoriel) ثم نتطرق الى مفهوم الترتيبات (Arrangement) والتوفيقات (Combinaison) وقانون ثنائي الحد

أولاً: مدلول العاملي (! factoriel) : نكتب (n !) ونقرأ n عاملي حيث $n \in \mathbb{N}$

ونعرفه بالشكل التالي: $0\,! = 1$ و $n\,! = n\,(n-1)(n-2) \times \ldots\ldots\ldots \times 1$

من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم

ثانياً:الترتيبات (Arrangement)

لتكن E مجموعة مكونة من n عنصر، وليكن p عدداً صحيحاً حيث: $1 \leq p \leq n$

نسمي A_n^p ترتيبية لعناصر n مأخوذة بدون تكرار ونعرفها بالشكل التالي:

$$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!} = n(n-1)(n-2) \ldots\ldots\ldots\ldots (n-p+1)$$

إذا كان: $p = n$ تصبح الترتيبة عندئذ تبديلة

ثالثاً: التوفيقات (combinaison)

لتكن E مجموعة مكونة من n عنصر، وليكن p عدداً صحيحاً حيث: $p \leq n$

نسمي C_n^p توفيقة لـ n عنصر ونعرفها بالشكل التالي[8]::

$$C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!} = \frac{A_n^p}{p!}$$

ولدينا
$$C_n^{n-p} = \frac{n!}{p!(n-p)!} = C_n^p$$

$$C_n^p = C_{n-1}^p + C_{n-1}^{p-1}$$

قانون ثنائي الحد: ليكن لدينا[9]: : $n \in \mathbb{N}, (a, b) \in \mathbb{R}^2$

يعرف قانون ثنائي الحد بالشكل التالي:

$$(a+b)^n = \sum_{p=0}^{n} C_n^p a^{n-p} b^p = \sum_{p=0}^{n} C_n^p a^p b^{n-p}$$

تمارين الفصل الأول

التمرين الأول:

ناقش العبارات التالية وبين أيها يمثل قضية

1) الواحد نصف الاثنين
2) بومرداس قطب علمي تكنولوجي
3) لا دخان بدون نار
4) ما أروع برتقال الجزائر
5) هل وجدت الحل؟
6) المثلث القائم متساوي الساقين
7) لنضع مخططاً لحل المشكلة
8) لا يأس مع الحياة ولا حياة مع اليأس
9) إذا ضاع الكل ضاع الجزء

الحل: تكون الإجابة كما يلي:

---

[8]- للاطلاع أكثر أنظر:

-NAILA Hayek et jean-pierre leca, mathématiques pour l'économie, Analyse-Algebre, op cit ,p35

[9]- للاطلاع أكثر أنظر:

-NAILA Hayek et jean-pierre leca, mathématiques pour l'économie, Analyse-Algebre, op cit ,p38

1) قضية صحيحة
2) قضية صحيحة
3) قضية صحيحة
4) قضية صحيحة
5) ليست قضية
6) قضية خاطئة
7) ليست قضية
8) قضية صحيحة
9) قضية صحيحة

التمرين الثاني: لتكن لدينا القضيتان P و Q التاليتان:

P : العدد 4 مضاعف للعدد 2 ، Q : العدد 4 مضاعف للعدد 3

عبر لغوياً عن القضايا التالية مبيناً الصحيحة منها والخاطئة

$$\bar{P}\ ,\ \bar{Q}\ , P \Rightarrow Q\ \ ,\ \ Q \Rightarrow P\ \ \ , P \Leftrightarrow Q$$

الحل:

$\bar{P}$: العدد 4 ليس مضاعف للعدد 2 (F)

$\bar{Q}$: العدد 4 ليس مضاعف للعدد 3 (V)

$P \Rightarrow Q$: إذا العدد 4 مضاعف للعدد 2 فإن العدد 4 مضاعف للعدد 3 (F)

$Q \Rightarrow P$: إذا العدد 4 مضاعف للعدد 3 فإن العدد 4 مضاعف للعدد 2 (V)

$P \Leftrightarrow Q$: العدد 4 مضاعف للعدد 2 إذا وفقط إذا العدد 4 مضاعف للعدد 3 (F)

التمرين الثالث:

بين باستعمال جدول الحقيقة أن القضايا التالية دوماً صحيحة مهما كانت القضيتان P و Q:

1) $P \Rightarrow (P \vee Q)$

2) $P \Rightarrow (Q \Rightarrow P)$

3) $P \wedge Q \Rightarrow P$

الحل:

P	Q	$P \vee Q$	$P \Rightarrow (P \vee Q)$	$Q \Rightarrow P$	$P \Rightarrow (Q \Rightarrow P)$	$P \wedge Q$	$P \wedge Q \Rightarrow P$
V	V	V	V	V	V	V	V
V	F	V	V	V	V	F	V
F	V	V	V	F	V	F	V
F	F	F	V	V	V	F	V

التمرين الرابع:

إذا كانت لدينا المجموعتان S و T التاليتان:

S={1,2,3,5} ، T={1,7,8} فأوجد المجموعات التالية:

(TXS)$\cap$ (SxT), (TxS) , SxS , SxT, TΔS, (S-T) ,(T-S)

الحل:

T -S $=\{x: x \in \mathrm{T} \wedge x \notin S\}$ $=\{7,8\}$

S -T $=\{x: x \in \mathrm{S} \wedge x \notin T\}=\{2,3,5\}$

$\mathrm{T}\Delta S = (T - S) \cup (S - T) = \{7,8,2,3,5\}$

$$S\times T=\{(x,y): x \in \mathrm{S} \wedge y \in T\}=\left\{\begin{matrix}(1,1),(1.7),(1,8),(2,1),(2,7),(2,8)\\(3,1),(3.7),(3,8),(5,1),(5,7),(5,8)\end{matrix}\right\}$$

$$T\times S=\{(x,y): x \in \mathrm{T} \wedge y \in S\}=\left\{\begin{matrix}(1,1),(1.2),(1,3),(1,5),(7,1),(7,2)\\(7,3),(7.5),(8,1),(8,2),(8,3),(8,5)\end{matrix}\right\}$$

$$S\times S=\{(x,y): x \in \mathrm{S} \wedge y \in S\}=\left\{\begin{matrix}(1,1),(1,2),(1,3),(1,5),(2,1),(2,2),\\(2,3),(2,5),(3,1),(3,2),(3,3),(3,5),\\(3,8),(5,1),(5,2),(5,3),(5,8)\end{matrix}\right\}$$

(TXS)$\cap$ (SxT)= {(1,1}

التمرين الخامس: لتكن لدينا العلاقة $\mathcal{R}$ معرفة كما يلي:

$$x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x^2 - y^2 = x - y$$

1-أثبت أن العلاقة $\mathcal{R}$ علاقة تكافؤ

2-أوجد صف تكافؤ العددين 1و2

الحل: لدينا

$$x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x^2 - y^2 = x - y$$

1- هل العلاقة $\mathcal{R}$ علاقة نكافؤ؟

هل العلاقة $\mathcal{R}$ انعكاسية؟

$x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x^2 - x^2 = x - x$ وهي محققة

هل العلاقة $\mathcal{R}$ تناضرية؟

$$x\mathcal{R}y \Rightarrow y\mathcal{R}x \ \ , x^2 - y^2 = x - y \Rightarrow y^2 - x^2 = y - x$$

وهي محققة وذلك بضرب طرفي المعادلة قبل الاستلزام بالعدد (-1)

هل العلاقة $\mathcal{R}$ متعدية؟

$$x\mathcal{R}y \wedge y\mathcal{R}z \Rightarrow x\mathcal{R}z$$

$$(x^2 - y^2 = x - y) \wedge (y^2 - z^2) = y - z)$$

نأخذ قيمة y من العلاقة قبل $\wedge$ ونعوضها في العلاقة بعد $\wedge$ فنجد

$x^2 - z^2 = x - z$ مما يعني

$x\mathcal{R}y \wedge y\mathcal{R}z \Rightarrow x\mathcal{R}z$ والعلاقة $\mathcal{R}$ متعدية

ومنه العلاقة $\mathcal{R}$ علاقة تكافؤ

2- صف تكافؤ العددين 1و2

صف تكافؤ العدد1 نرمز له بـ C_1

$$C_1 = \{y \in \mathrm{E} / y\mathcal{R}1\}$$

$$y\mathcal{R}1 \Leftrightarrow y^2 - 1^2 = y - 1 \ \ , y(y-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ y = 1 \end{cases}$$

ومنه $C_1 = \{0,1\}$

صف تكافؤ العدد2 نرمز له بـ C_2

$$C_2 = \{y \in \mathrm{E} / y\mathcal{R}2\}$$

$$y\mathcal{R}2 \Leftrightarrow y^2 - 2^2 = y - 2 \ , (y+1)(y-2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} y = -1 \\ y = 2 \end{cases}$$

ومنه $C_2 = \{-1,2\}$

التمرين السادس:

إذا كان لدينا التطبيقين التاليين:

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad g: [0, +\infty[\to \mathbb{R}$$

$$x \to 3x + 2 \qquad x \to \sqrt{x}$$

أوجد fog و gof و fof و gog

الحل:

$$fog = f(g(x)) = f(\sqrt{x}) = 3\sqrt{x} + 2$$

$$gof = g(f(x)) = g(3x + 2) = \sqrt{3x + 2}$$

$$fof = f(f(x)) = f(3x + 2) = 3(3x + 2) + 2 = 9x + 8$$

$$gog = g(g(x)) = f(\sqrt{x}) = \sqrt{\sqrt{x}} = \sqrt[4]{x}$$

التمرين السابع:

برهن العلاقة التالية : $C_n^p = C_{n-2}^p + 2C_{n-2}^{p-1} + C_{n-2}^{p-2}$

الحل:

$$C_{n-2}^p = \frac{(n-2)!}{p!(n-p-2)!} \ , C_{n-2}^{p-1} = \frac{(n-2)!}{(p-1)!(n-p-1)!} \ , C_{n-2}^{p-2} = \frac{(n-2)!}{(p-2)!(n-p)!}$$

$$C_{n-2}^p + 2C_{n-2}^{p-1} + C_{n-2}^{p-2} = \frac{(n-2)!}{p!(n-p-2)!} + 2\frac{(n-2)!}{(p-1)!(n-p-1)!} + \frac{(n-2)!}{(p-2)!(n-p)!}$$

$$= \frac{(n-2)!n(n-1)}{p!(n-p)!} = \frac{n!}{p!(n-p)!} = C_n^p$$

الفصل الثاني: مفاهيم عامة حول المتتاليات والسلاسل

2-1-المتتاليات

نتطرق فيما يلي الى مفهوم المتتاليات وخصائصها وأنواعها ونهاياتها ثم نعرج على مدلول المتتاليات المتجاورة

أ-مدلول المتتالية

إذا كانت لدينا المجموعة F. نسمي متتالية كل تطبيق U من $\mathbb{N}$ نحو F ونرمز له بالرمز U_n مع $n \geq 0$ ، حيث U_n صورة العدد n بواسطة التطبيق U ويسمى U_n عندئذ

بالحد العام للمتتالية[10]:

مثال: لدينا المتتالية التالية: $U: \ \mathbb{N} \longrightarrow F$

$$n \longrightarrow U_n = 2n+1$$

إذا كان: $F=\mathbb{R}$ نقول أن المتتالية U_n متتالية حقيقية، أما إذا كان: $F=\mathbb{C}$ فنقول عندئذ أن المتتالية U_n متتالية عقدية

ب-المتتالية المحدودة والمتتالية الرتيبة

أولاً: المتتالية المحدودة

نقول عن متتالية ما أنها محدودة إذا كانت محدودة من الأعلى ومن الأسفل في آن واحد

- لتكن U_n متتالية حقيقية، نقول أن U_n متتالية محدودة من الأعلى إذا وجد عدد حقيقي M يحقق ما يلي: $\forall n \in \mathbb{N} \ , \ U_n \leq M$

- لتكن U_n متتالية حقيقية، نقول أن U_n متتالية محدودة من الأسفل إذا وجد عدد حقيقي m يحقق ما يلي: $\forall n \in \mathbb{N} \ , \ U_n \geq m$

10- للاطلاع أكثر أنظر:

NAILA Hayek et jean-pierre leca, mathématiques pour l’économie, Analyse-Algebre, op cit ,p57.

ثانياً: المتتالية الرتيبة

نقول عن متتالية ما أنها رتيبة[11] إذا كانت متزايدة أو متناقصة

- نقول أن U_n متتالية متزايدة إذا حققت ما يلي: $\forall n \in \mathbb{N}\ ,\ U_n \leq U_{n+1}$

- نقول أن U_n متتالية متناقصة إذا حققت ما يلي: $\forall n \in \mathbb{N}\ ,\ U_n \geq U_{n+1}$

مثال: لتكن لدينا المتتالية U_n المعرفة بالشكل التالي: $U_n = (-1)^n$

هل U_n متزايدة أم متناقصة؟

-إذا كان n زوجي تكون لدينا القيمة $(-1)^n$ عندئذ موجبة، أما القيمة $(-1)^{n+1}$ تكون سالبة وعليه نستطيع القول أن: $U_n > U_{n+1}$ والمتتالية متناقصة

-إذا كان n فردي تكون لدينا القيمة $(-1)^n$ عندئذ سالبة، أما القيمة $(-1)^{n+1}$ فستكون موجبة وعليه نستطيع القول أن: $U_n < U_{n+1}$ والمتتالية متزايدة

كما نلاحظ فإن المتتالية مرة متزايدة ومرة متناقصة وبالتالي فهي ليست متزايدة وليست متناقصة

ج-المتتاليات المتجاورة

نقول عن متتاليتان حقيقيتان U_n و V_n أنهما متجاورتان إذا كانت إحداهما متزايدة و الأخرى متناقصة وكانت نهاية الفرق بينهما متقاربة للصفر بما يعني أن:

$$\lim_{n\to\infty} (U_n - V_n) = 0$$

مثال: هل المتتاليتان U_n و V_n التاليتان متجاورتان؟

حيث: $U_n = -\frac{1}{n}$ و $V_n = \frac{1}{n+1}$

نبحث أولاً ان كانت المتتاليتان متزايدتان أو متناقصتان

-هل المتتالية U_n متزايدة؟

حتى تكون المتتالية U_n متزايدة يجب أن تحقق: $\forall n \in \mathbb{N}\ ,\ U_n \leq U_{n+1}$

---

[11]- للاطلاع أكثر أنظر:

-jean pierre lecoutre , Analyse TD, op cit, p207.

أو: $U_{n+1} - U_n \geq 0$

لدينا : $U_{n+1} - U_n = -\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n} = \frac{n+1-n}{n(n+1)} = \frac{1}{n(n+1)} > 0$

ومنه المتتالية U_n متزايدة

-هل المتتالية V_n متزايدة؟

حتى تكون المتتالية V_n متزايدة يجب أن تحقق: $\forall n \in \mathbb{N}, V_n \leq V_{n+1}$

أو: $V_{n+1} - V_n \geq 0$

لدينا : $V_{n+1} - V_n = \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+1} = \frac{n+1-n-2}{(n+1)(n+2)} = \frac{-1}{(n+1)(n+2)} < 0$

ومنه المتتالية V_n متناقصة

نبحث الآن عن الفرق بين المتتاليتين ($V_n - U_n$) ثم نحسب نهايته

لدينا : $V_n - U_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n} = \frac{n+n+1}{n(n+1)} = \frac{2n+1}{n(n+1)}$

نبحث الآن عن نهاية المقدار ($V_n - U_n$)

لدينا: $\lim_{n\to\infty}(U_n - V_n) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n+1}{n(n+1)}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{n}\right) = 0$

وعليه نستطيع القول أن المتتاليتان U_n و V_n متجاورتان

د-نهاية متتالية

نقول أن المتتالية U_n تقبل العدد L كنهاية ونكتب $\lim_{n\to\infty}(U_n) = L$ إذا تحقق ما يلي:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall \varepsilon > 0, \exists n \leq n_0 \Rightarrow |U_n - L| < \varepsilon$$

مثال : إذا كانت لديك المتتالية U_n التالية: $\forall n \geq 1, U_n = \frac{1}{n}$

بين أن هذه المتتالية تقبل الصفر كنهاية أو أن: $\lim_{n\to\infty}(U_n) = 0$

نعلم أن تحقق النهاية $\lim_{n\to\infty}(U_n) = 0$ يعني:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall \varepsilon > 0, \exists n \leq n_0 \Rightarrow |U_n - L| < \varepsilon \Rightarrow \left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon$$

$\varepsilon \Rightarrow \frac{1}{n} < \varepsilon \Rightarrow n > \frac{1}{\varepsilon}$

نضع: $n_0 = \frac{1}{\varepsilon}$ فتكون النهاية عندئذ مبرهنة مما يعني أن المتتالية U_n متقاربة نحو الصفر

2-2-المتتالية الحسابية والمتتالية الهندسية[12]:

أولاً: المتتالية الحسابية

المتتالية الحسابية هي مجموعة من الأعداد المتوالية التي يمكن الحصول على أي عدد منها بإضافة أو طرح مقدار ثابت مثل الحدود التالية:

a , a+r , a+2r ,.............., a+n.r

وتأخذ المتتالية الحسابية الشكل العام التالي: $U_n = U_0 + n.r$

حيث: r: أساس المتتالية الحسابية

U_0 : الحد الأول للمتتالية الحسابية

n: عدد حدود هذه المتتالية

F: الحد الأخير لهذه المتتالية

فإذا عرفنا S_n بأنه مجموع حدود المتتالية الحسابية نستطيع عندئذ كتابة S_n بالشكل التالي:

S_n = a + (a+r) + (a+2r) +..............+(F-2r)+(F-r)+F ....(1)

ونستطيع كتابتها أيضاً بالشكل:

S_n =F + (F-r) + (F-2r) +..............+(a+2r)+(a+r)+a .....(2)

بجمع العلاقتين (1) و(2) نجد:

2 S_n =a+F + (a+F) + (a+F) +..............+(a+F)+(a+F)=n(a+F)

12- للاطلاع أكثر أنظر:

-NAILA Hayek et jean-pierre leca, mathématiques pour l’économie, Analyse-Algebre, op cit ,p74-78.

وعليه يكون لدينا: $S_n = \frac{n}{2}(a+F)$

ثانياً: المتتالية الهندسية[13]

المتتالية الحسابية هي عبارة عن مجموعة من المقادير المتوالية التي تكون فيها النسبة بين كل حد والحد الذي يليه مقداراً ثابتاً مثل الحدود التالية:

$$a , a.r , a.r^2 ,........................., a.r^n$$

وتأخذ المتتالية الحسابية الشكل العام التالي: $U_n = U_0\, r^n$

حيث: r: أساس المتتالية

U_0: الحد الأول للمتتالية

n: عدد حدود هذه المتتالية

F: الحد الأخير لهذه المتتالية

فإذا عرفنا S_n بأنه مجموع حدود المتتالية الهندسية نستطيع عندئذ كتابة S_n بالشكل التالي:

$$S_n = a + a.r + a.r^2 +..............+ a.r^{n-2}+ a.r^{n-1}+ a.r^n \quad ....(1)$$

بضرب طرفي المعادلة(1) بـ r نجد:

$$S_n = a.r + a.r^2 + a.r^3..............+ a.r^{n-1}+ a.r^n+ a.r^{n+1} \quad ....(2)$$

بطرح العلاقة (1) من العلاقة (2) نجد: $S_n\,(r-1) = -a+ a.r^{n+1}$

ومنه نجد أن: $S_n = \frac{a(r^{n+1}-1)}{r-1}$

3-2-السلاسل العددية

نتطرق فيما يلي الى مفهوم السلاسل العددية[14]

13- للاطلاع أكثر أنظر:سلطان محمد عبد الحميد، رياضيات الاعمال للتجاريين، المكتبة العصرية، الطبعة الاولى، المنصورة-مصر، 2007، ص211-215.

14- للاطلاع أكثر أنظر:

-NAILA Hayek et jean-pierre leca, mathématiques pour l’économie, Analyse-Algebre, op cit ,p 80-84

لتكن U_n متتالية عددية تسمى مجموع حدود هذه المتتالية والمعرفة بالشكل:

$U_1 + U_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + U_n$ بالسلسلة العددية وتسمى الأعداد U_1 , U_2 ,...

بحدود هذه السلسلة، بينما يسمى U_n الحد العام للسلسلة. ان مجموع n حد من السلسلة هو S_n حيث:

$$S_1 = U_1$$

$$S_2 = U_1 + U_2$$

....

....

$$S_n = U_1 + U_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + U_n$$

تسمى S_n أيضاً متتالية المجاميع الجزئية

4-2-تقارب وتباعد السلاسل العددية

أولاً: مفهوم تقارب وتباعد السلاسل

نقول عن سلسلة ما أنها متقاربة إذا كانت منتهية الى عدد معين ونقول أن السلسلة متقاربة الى ذلك العدد، أي إذا كان لدينا: $\lim_{n\to\infty} S_n = L$ نقول عندئذ أن السلسلة S_n تتقارب من العدد L .

-نقول عن سلسلة ما أنها متباعدة إذا كانت غير منتهية أو أن نهايتها غير محدودة، أي إذا كان لدينا: $\lim_{n\to\infty} S_n = \infty$

مثال: لتكن لدينا السلسلة S_n المعرفة بالشكل التالي:

$$S_n = \sum_{n=1}^{\infty} U_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$$

هل السلسلة S_n متباعدة أم متقاربة؟

نستطيع أن نكتب الحد العام لهذه السلسلة بالشكل:

$$U_n = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{(n+1)}$$

ولدينا:

$$S_n = U_1 + U_2 + \dots\dots\dots\dots\dots\dots + U_n$$

$$S_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \dots\dots\dots\dots - \frac{1}{n} + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

$$S_n = \sum_{n=1}^{\infty} U_n \quad = 1 - \frac{1}{n+1}$$

نبحث الآن عن نهاية هذه السلسلة

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1$$

وبالتالي نستطيع القول أن السلسلة S_n متقاربة من العدد (1)

ثانياً: معيار كوشي للتقارب

حتى تكون السلسلة $S_n = \sum U_n$ متقاربة يكفي أن تحقق متتالية المجاميع الجزئية معيار كوشي للتقارب والذي يمكن صياغته بالشكل التالي:

$$\forall \varepsilon > 0, \forall n \in \mathbb{N} \ , \forall p \in \mathbb{N}, \exists\, n_0 \in \mathbb{N}\ , n > n_0 \Longrightarrow |s_{n+p} - s_n| < \varepsilon$$

$$|s_{2n} - s_n| = |u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots + u_{n+p}|$$

مثال: لتكن لدينا السلسلة S_n المعرفة بالشكل التالي:

$$S_n = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$$

هل هذه السلسلة متباعدة أم متقاربة؟

لنأخذ مثلاً $\varepsilon = \frac{1}{4}$ لدينا ما يلي :

$$|s_{2n} - s_n| = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots\dots + \frac{1}{2n} > \frac{1}{2} > \varepsilon$$

وبالتالي فإن معيار كوشي للتقارب غير محقق والسلسلة متباعدة

تمارين الفصل الثاني

التمرين الأول:

لتكن لدينا المتتالية التالية:
$$\begin{cases} V_0 = 2 \\ V_n = 2 - \frac{1}{x_{n-2}}\ ,\ \forall n \geq 1 \end{cases}$$

1) برهن أن $\forall n \in \mathbb{N}\,,\quad V_n \geq 1$

2) أدرس رتابة المتتالية V_n

الحل:

1) نقوم ببرهنة أن $\forall n \in \mathbb{N}\,,\quad V_n \geq 1$ بطريقة البرهان بالتراجع

لدينا $V_0 = 2 \geq 1$ ، $V_1 = \frac{3}{2} \geq 1$

نفرض أن $V_n \geq 1$ ونبرهن $V_{n+1} \geq 1$

$$V_n \geq 1 \Rightarrow \frac{1}{V_n} \leq 1 \Rightarrow -\frac{1}{V_n} \geq -1 \Rightarrow 2 - \frac{1}{V_n} \geq 1$$

وذلك يعني أن $V_{n+1} \geq 1$

2) رتابة المتتالية V_n

$$\forall n \geq 0\,,\quad V_{n+1} - V_n = 2 - \frac{1}{V_n} - V_n = \frac{2\,V_n - {V_n}^2 - 1}{V_n}$$

$$= \frac{-(V_n - 1)^2}{V_n}$$

$V_{n+1} - V_n < 0$ هذا يعني أن V_n متناقصة وهي رتيبة

التمرين الثاني:

لتكن لدينا المتتالية التالية:

$$\forall \boldsymbol{n} \in \mathbb{N}^*\,, \begin{cases} H_0 = 2 \\ H_n = aH_{n-1} + 3\,,\ 0 < a < 1 \end{cases}$$

1) بين أن المتتالية L_n المعرفة بالشكل الموالي متتالية هندسية

$$\forall n \in \mathbb{N}\,,\ L_n = H_n + \frac{3}{a-1}$$

2) عين قيمة العدد a حتى تكون $\lim_{n\to+\infty} H_n = 5$

الحل:

1) تبيان أن المتتالية L_n هندسية

$$\forall \boldsymbol{n} \in \mathbb{N}^*, \quad \begin{cases} H_0 = 2 \\ H_n = aH_{n-1} + 3, \quad 0 < a < 1 \end{cases}$$

$$L_n = H_n + \frac{3}{a-1}$$

$$L_{n+1} = H_{n+1} + \frac{3}{a-1} = aH_n + 3 + \frac{3}{a-1} = aH_n + \frac{3a-3+3}{a-1}$$

$$= a(H_n + \frac{3}{a-1}) = aL_n$$

وبالتالي فإن المتتالية L_n متتالية هندسية أساسها a حدها الأول

$L_0 = 2 + \frac{3}{a-1}$ وحدها العام $L_n = a^n L_0$

ومنه $L_n = (2 + \frac{3}{a-1})a^n$

$$H_n = L_n - \frac{3}{a-1} = \left(2 + \frac{3}{a-1}\right) a^n - \frac{3}{a-1}$$

2) تعيين قيمة العدد a حتى تكون $\lim_{n\to+\infty} H_n = 5$

$$\lim_{n\to+\infty} H_n = \lim_{n\to+\infty}\left(\left(2 + \frac{3}{a-1}\right) a^n - \frac{3}{a-1}\right) =$$

$$\lim_{n\to+\infty}\left(2 + \frac{3}{a-1}\right) a^n - \lim_{n\to+\infty}\frac{3}{a-1} = -\frac{3}{a-1}$$

$$\lim_{n\to+\infty} H_n = 5 \Rightarrow -\frac{3}{a-1} = 5 \Rightarrow a = \frac{2}{5}$$

التمرين الثالث:

لتكن لدينا المتتالية التالية:

$$\forall \boldsymbol{n} \geq \boldsymbol{0},\ U_n = \sqrt[n]{n} = 1 + \propto_n$$

1) برهن أن :

$$n \geq 1 + \frac{n(n-1)}{2}(\propto_n)^2$$

2) استنتج نهاية U_n

الحل:

1) برهنة أن:

$$n \geq 1 + \frac{n(n-1)}{2}(\propto_n)^2$$

$$\sqrt[n]{n} = 1 + \propto_n \Rightarrow n = (1 + \propto_n)^n$$

$$(1 + \propto_n)^n = \sum_{p=0}^{n} C_n^p (1)^{n-p} (\propto_n)^p =$$

$$= C_n^n (\propto_n)^0 + C_n^{n-1} (\propto_n)^1 + C_n^{n-2} (\propto_n)^2 + \cdots \ldots + C_n^1 (\propto_n)^n$$

$$n = 1 + n \propto_n + \frac{n(n-1)}{2}(\propto_n)^2 + \cdots \ldots \ldots \ldots \ldots$$

بمأن $\propto_n \geq 0$ ، $n \geq 1$ فإن كل الحدود موجبة وبالتالي:

$$n \geq 1 + \frac{n(n-1)}{2}(\propto_n)^2$$

2) استنتاج نهاية U_n

$$n \geq 1 + \frac{n(n-1)}{2}(\propto_n)^2 \Rightarrow n - 1 \geq \frac{n(n-1)}{2}(\propto_n)^2$$

$$\Rightarrow \frac{2}{n} \geq (\propto_n)^2$$

ومنه $\lim\limits_{n \to +\infty} \propto_n = 0$ وعليه

$$\lim_{n \to +\infty} U_n = \lim_{n \to +\infty} (1 + \propto_n) = 1$$

التمرين الرابع:

لتكن لدينا السلسلة ذات الحد العام U_n التالية:

حيث: $U_n = \frac{2}{n(n+2)}$

1) أوجد متتالية المجاميع الجزئية S_n

2) استنتج طبيعة هذه السلسلة

الحل:

1) ايجاد متتالية المجاميع الجزئية S_n

$$U_n = \frac{2}{n(n+2)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}$$

$$U_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}, \quad U_2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}, \quad U_1 = 1 - \frac{1}{3}$$

ولدينا:

$$S_n = U_1 + U_2 + \dots + U_n$$

$$S_n = 1 - \frac{1}{3} + \dots - \frac{1}{(n+1)} - \frac{1}{n+2}$$

$$S_n = \frac{2}{3} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}$$

2) استنتاج طبيعة هذه السلسلة

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{3}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) = \frac{3}{2}$$

وبالتالي نستطيع القول ان السلسلة S_n متقاربة الى العدد $\frac{3}{2}$

الفصل الثالث: التطبيقات المستمرة

1-3-الدوال الحقيقية

ليكن لدينا f تطبيق من A نحو B ، $f: A \longrightarrow B$ نقول أن f دالة حقيقية إذا كان كل من A و B مجموعة جزئية من $\mathbb{R}$، وعندئذ نسمي صورة a والتي هي $f(a)$ بقيمة الدالة f عند النقطة a ونسمي مجموعة صور المجال A بمجموعة تعريف هذه الدالة

أولاً: مجموعة تعريف الدالة

تعرف مجموعة تعريف الدالةf حيث $f: A \longrightarrow B$ بأنها مجموعة صور المجال A بواسطة التطبيق f ويرمز لها بالرمز D_f حيث:

$D_f = \{x \in \mathbb{R}$ / x : يحقق الشرط التعريفي المرتبط بشكل الدالة$\}$

يمكن حصر الشرط التعريفي المرتبط بالأشكال المختلفة للدوال كما يلي:

-دالة كثير الحدود معرفة على مجمل $\mathbb{R}$

-الدالة الكسرية معرفة من أجل المقام يختلف عن الصفر

-الدالة الجذرية معرفة من أجل أن ما تحت الجذر أكبر أو يساوي الصفر

-الدالة اللوغاريتمية معرفة من أجل أن ما داخل اللوغاريتم أكبر تماماً من الصفر

مثال: أوجد مجموعة تعريف الدوال التالية: 1- $f(x) = x^3 + x^2 + 3$

2- $f(x) = \sqrt{x^2 - 5x + 6}$ 3- $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$

الدالة (1) دالة كثير حدود وهي معرفة على مجمل $\mathbb{R}$

الدالة (2) دالة جذرية معرفة من أجل أن ما تحت الجذر أكبر أو يساوي الصفر بمعنى:

$x^2 - 5x + 6 \geq 0$ لدينا: $x^2 - 5x + 6 = 0$

يتحقق من أجل $x = 2$ أو $x = 3$ وبالتالي فإن مجموعة تعريف هذه الدالة تكون بالشكل:

$D_f =]-\infty\ ,\ 2\ ] \cup [3\ ,\ \ +\infty[$

الدالة (3) دالة جذرية معرفة من أجل أن ما تحت الجذر أكبر أو يساوي الصفر بمعنى:

$1 - x^2 \geq 0$ لدينا: $1 - x^2 = 0$ يتحقق من أجل $x = 1$ أو $x = -1$

وبالتالي فإن مجموعة تعريف هذه الدالة تكون بالشكل: $D_f = [-1\ ,\ 1]$

ثانياً: الدالة في جوار نقطة[15]

يمكن أن نحصي هنا الدالة المعرفة عن يمين نقطة والدالة المعرفة عن يسار نقطة ما

*نقول أن الدالة f معرفة عن يمين النقطة x_0 إذا وجد عدد حقيقي موجب $\propto$ وكانت الفترة $[x_0\ ,\ \ x_0 + \propto[$ محتواة في مجموعة تعريف هذه الدالة

مثال: أوجد مجموعة تعريف الدالة التالية: $f(x) = \sqrt{x - 1}$

---

[15]- للاطلاع أكثر أنظر:

-Isabelle cotto et autres, mathématiques éléments de calcul différentiel pour l'économie, op cit, p16.

هذه الدالة معرفة على المجال $]1\ ,\ +\infty[$ بمأن الفترة $]1\ ,\ 1+\propto[$ محتواة في مجموعة تعريف هذه الدالة نقول أن هذه الدالة معرفة عن يمين الواحد

*نقول أن الدالة f معرفة عن يسار النقطة x_0 إذا وجد عدد حقيقي موجب $\propto$ وكانت الفترة $]x_0 - \propto\ ,\ x_0]$ محتواة في مجموعة تعريف هذه الدالة

مثال: أوجد مجموعة تعريف الدالة التالية: $f(x) = \sqrt{1-x}$

هذه الدالة معرفة على المجال $]-\infty, 1]$ بمأن الفترة $]1-\propto\ ,\ 1]$ محتواة في مجموعة تعريف هذه الدالة نقول أن هذه الدالة معرفة عن يسار الواحد

ثالثاً: الدالة الزوجية والدالة الفردية[16]

سنتطرق أولاً الى مدلول الدالة الزوجية ثم نستعرض بعد ذلك مفهوم الدالة الفرية مع أخذ أمثلة عن الحالتين

أ- الدالة الزوجية:

نقول عن دالة ما أنها زوجية إذا حققت ما يلي:

$$f(x) = f(-x) \quad :\text{وكان}\quad -x \in D_f, x \in D_f$$

مثال: إذا كانت لدينا الدالة التالية: $f(x) = \sqrt{1-|x|}$

هل هذه الدالة زوجية؟

لدينا: $f(-x) = \sqrt{1-|-x|} = \sqrt{1-|x|} = f(x)$

وبالتالي فإن $f(x)$ دالة زوجية

ب- الدالة الفردية:

نقول عن دالة ما أنها فردية إذا حققت ما يلي:

$$f(-x) = -f(x) \quad :\text{وكان}\quad -x \in D_f, x \in D_f$$

---

[16]- للاطلاع أكثر أنظر: لحسن عبد الله باشيوة، الرياضيات الاساسية وتطبيقاتها، مرجع سابق، ص168.

-jean pierre lecoutre , Analyse TD, op cit, p87

-Isabelle cotto et autres, mathématiques éléments de calcul différentiel pour l'économie, op cit , p53.

مثال: إذا كانت لدينا الدالة التالية: $f(x) = \sqrt{1+x+x^2} - \sqrt{1-x+x^2}$

هل هذه الدالة فردية أم زوجية؟

لدينا: $f(-x) = \sqrt{1+(-x)+(-x)^2} - \sqrt{1-(-x)+(-x)^2}$

$$f(-x) = \sqrt{1-x+x^2} - \sqrt{1+x+x^2}$$

$f(-x) = -f(x)$ وبالتالي فإن $f(x)$ دالة فردية

3-2-نهايات الدوال[17]

نقوم أولاً بالتطرق الى نهاية الدالة عند نقطة والنهاية عن يمين وعن يسار نقطة ما والنهاية غير المحدودة لنصل الى خواص النهايات ومعرفة حالات عدم التعيين وعرض بعض النهايات الشهيرة التي يستعان بها لحساب نهايات الدوال المشابهة لها

أولاً: النهاية عند نقطة

نتطرق هنا لنهاية الدالة عند نقطة معينة بالإضافة لنهاية الدالة عن يمين وعن يسار نقطة

أ-النهاية المحدودة عند نقطة

نقول أن الدالة $f(x)$ تقبل العدد L كنهاية لما يؤول x نحو x_0

ونكتب : $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$ إذا تحقق ما يلي:

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists\, \delta > 0 \,,\, 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

مثال1: أثبت باستخدام التعريف أن النهاية التالية محققة: $\lim_{x \to 0}(2x+3) = 3$

نستطيع كتابة هذه النهاية بالتعريف كما يلي:

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists\, \delta > 0 \,,\, 0 < |x - 0| < \delta \Rightarrow |2x + 3 - 3| < \varepsilon$$

لدينا: $|2x| < \varepsilon \Rightarrow 2|x| < \varepsilon \Rightarrow |x| < \frac{\varepsilon}{2}$

[17]- للاطلاع أكثر أنظر:

-NAILA Hayek et jean-pierre leca, mathématiques pour l’économie, Analyse-Algebre, op cit ,p 87.

يكفي أن نأخذ $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$ والنهاية مبرهنة بالتعريف

مثال2: أثبت باستخدام التعريف أن النهاية التالية محققة: $\lim_{x\to 1}\left(\frac{x^2-1}{x-1}\right) = 2$

تكتب هذه النهاية بالتعريف كما يلي:

$$\forall\varepsilon > 0,\ \ \exists\ \delta > 0\ ,\ 0< |x-1| < \delta \Rightarrow \left|\frac{x^2-1}{x-1} - 2\right| < \varepsilon$$

لدينا: $\left|\frac{x^2-1}{x-1} - 2\right| < \varepsilon \Rightarrow \left|\frac{(x+1)(x-1)}{x-1} - 2\right| < \varepsilon \ \Rightarrow |x-1| < \varepsilon$

يكفي أن نأخذ $\delta = \varepsilon$ والنهاية مبرهنة بالتعريف

ب- النهاية عن يمين وعن يسار نقطة[18]

- نقول أن الدالة $f(x)$ تقبل العدد L_1 كنهاية لما يؤول x نحو الجوار الأيمن لـ x_0 ونكتب : $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = L_1$ إذا تحقق ما يلي:

$$\forall\varepsilon > 0,\ \ \exists\ \delta > 0\ ,\ 0< x - x_0 < \delta \Rightarrow |f(x)\ \ - L_1| < \varepsilon$$

- نقول أن الدالة $f(x)$ تقبل العدد L_2 كنهاية لما يؤول x نحو الجوار الأيسر لـ x_0 ونكتب : $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = L_2$ إذا تحقق ما يلي:

$$\forall\varepsilon > 0\ ,\ \ \exists\ \delta > 0\ ,\ 0< x_0 - x < \delta \Rightarrow |f(x)\ \ - L_2| < \varepsilon$$

مثال: برهن النهاية التالية: $\lim_{x\to 0^+}(\frac{1}{\sqrt{x}+1}) = 1$

تكتب هذه النهاية بالتعريف كما يلي:

$$\forall\varepsilon > 0\ ,\ \ \exists\ \delta > 0\ ,\ x - 0 < \delta \Rightarrow \left|\frac{1}{\sqrt{x}+1} - 1\right| < \varepsilon$$

لدينا: $\left|\frac{1}{\sqrt{x}+1} - 1\right| < \varepsilon \Rightarrow \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} < \varepsilon$

بمأن: $1 + \sqrt{x}\ \ > 1$ فإن: $\frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} < \sqrt{x}$ وعليه نستطيع أن نكتب:

---

[18]- للاطلاع أكثر أنظر: -لحسن عبد الله باشيوة، الرياضيات الاساسية وتطبيقاتها، مرجع سابق،ص88.

- سلطان محمد عبد الحميد، رياضيات الاعمال للتجاريين، مرجع سابق، ص201-215.

$\frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} < \sqrt{x} < \varepsilon$ و $x < \varepsilon^2$

وبالتالي يكفي أن نأخذ $\delta = \varepsilon^2$ والنهاية مبرهنة بالتعريف

-نقول أن للدالة $f(x)$ نهاية L لما يؤول x الى x_0 إذا كانت لديها نهاية عن يمين وعن يسار x_0 وكان :

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0} f(x) = L$$

مثال: هل تقبل الدالة التالية نهاية عند الصفر؟

$$f(x) = \begin{cases} x & , x > 0 \\ \frac{2x}{3} & , x < 0 \\ 1 & , x = 0 \end{cases}$$

لدينا: $\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} (x) = 0$

ولدينا: $\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} \left(\frac{2x}{3}\right) = 0$

ومنه: $\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0} f(x) = 0$

وعليه نستطيع القول أن الدالة $f(x)$ تقبل نهاية عند الصفر

ج-النهاية غير المحدودة عند نقطة

ليكن لدينا $a \in \mathbb{R}$ ولتكن لدينا الدالة f معرفة على المجال J (يمكن أن تكون غير معرفة عند a) حيث: $J =]a-\alpha, a+\alpha[$ مع $\alpha > 0$. نقول أن الدالة f تؤول الى ما لانهاية لما يؤول x الى a ونكتب: $\lim_{x \to a} f(x) = \infty$ إذا تحقق ما يلي:

$$\forall A > 0 \ , \forall x \in J \ , \exists \ \eta_A > 0, |x - a| < \eta_A \Longrightarrow f(x) > A$$

مثال: $f : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longrightarrow f(x) = \frac{1}{x}$$

بالنسبة لهذه الدالة نجد : $\lim_{x \to 0^+} f(x) = \infty$

وعليه نقول أن لهذه الدالة نهاية غير محدودة في الجوار الأيمن للصفر

ثانياً: النهاية غير المحدودة

لتكن لدينا الدالة f معرفة على المجال H حيث: $H=]a\ ,\ +\infty\ [$ نقول أن الدالة f تقبل العدد L كنهاية لما يؤول x الى ∞ ونكتب: $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$ إذا تحقق ما يلي:

$$\forall\ \varepsilon\ > 0\ \ ,\forall\ x \in \mathrm{H}\ \ ,\exists\ \ A_{\varepsilon} > 0 \Longrightarrow |f(x)\ \ - L| < \varepsilon$$

مثال: بالنسبة لنفس دالة المثال السابق نجد: $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$

وعليه نقول هذه الدالة تقبل الصفر كنهاية لما يكون x في المجال غير المحدود (∞)

3-3-خواص النهايات

أولاً: عرض خواص النهايات وبرهنتها

إذا كانت لدينا الدالتان f و g المعرفتان على مجال مفتوح وآلتا الى L_1 و L_2 على الترتيب عندما يؤول x نحو x_0 فإن[19]:

1) $\lim_{x\to x_0} [f(x) \pm g(x)] = L_1 \pm L_2$

2) $\lim_{x\to x_0} [f(x).\, g(x)] = L_1.\, L_2$

3) $\lim_{x\to x_0} [\ K.\, f(x)] = K.\, L_1$ مع K ثابت كيفي

4) $\lim_{x\to x_0} [f(x)^n] = {L_1}^n$

5) $\lim_{x\to x_0} \left[\frac{1}{f(x)}\right] = \frac{1}{L_1}$ $\forall\ \ L_1 \neq 0$

6) $\lim_{x\to x_0} \left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{L_1}{L_2}$ $\forall\ \ L_2 \neq 0$

---

[19]- للاطلاع أكثر أنظر: حسن ياسين طعمة، الرياضيات للاقتصاد والعلوم الإدارية والمالية، دار الصفاء للنشر والتوزيع، الطبعة الأولى، عمان-الأردن، 2010، ص174.

أ)-برهان الخاصية[20] $\lim_{x\to x_0}[f(x)+g(x)] = L_1 + L_2$

نرجع للتعريف ونحاول إيجاد δ لكل ε

$$\exists\, \delta > 0\ ,\ 0< |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) + g(x) - (L_1 + L_2\ )\ | < \varepsilon$$

$$\forall \varepsilon > 0,$$

نستطيع أن نجد δ_1 بحيث: $0< |x - x_0| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) \ - L_1| < \frac{\varepsilon}{2}$

كما نستطيع أن نجد δ_2 بحيث: $0< |x - x_0| < \delta_2 \Rightarrow |g(x) \ - L_2| < \frac{\varepsilon}{2}$

وباختيار δ أقل القيمتين δ_1 وδ_2 نستطيع أن نكتب:

$$0< |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) \ - L_1| + |g(x) \ - L_2| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

ولدينا حسب خاصيات القيمة المطلقة ما يلي:

$$|f(x) - L_1 + g(x) - L_2\ | \le |f(x) \ - L_1| + |g(x) \ - L_2|$$

وعليه نستطيع أن نكتب:

$$0< |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - L_1 + \mathrm{g(x)} \ - L_2| < \varepsilon$$

وبالتالي فإن القانون أو الخاصية الأولى محققة

ب)- برهان الخاصية: $\lim_{x\to x_0}[\,K.f(x)] = K.L_1$

نستطيع كتابة هذه النهاية بالتعريف كما يلي:

$$\forall \varepsilon > 0,\ \ \exists\, \delta > 0\ ,\ 0< |x - x_0| < \delta \Rightarrow |Kf(x) \ - KL_1| < \varepsilon$$

يمكن وضع K عامل مشترك ونكتب:

$$|K|.|f(x) \ - L_1| < \varepsilon \Rightarrow |f(x) \ - L_1| < \frac{\varepsilon}{|K|}$$

يمكن إيجاد δ_1 لكل $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{|K|}$ وعندئذ نستطيع أن نكتب:

[20]- للاطلاع أكثر أنظر: تيدي س.ج ليفيت، ترجمة بولس بسيط وآخرون، النهايات والاتصال، الدار الدولية للنشر والتوزيع، الطبعة الثالثة، القاهرة-مصر، 1998، ص109-121.

$$0 < |x - x_0| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - L_1| < \varepsilon_1 \Leftrightarrow |Kf(x) - KL_1| < \varepsilon$$

وبهذا تكون الخاصية $\lim\limits_{x\to x_0} [K.f(x)] = K.L_1$ مبرهنة

ج)- برهان الخاصية: $\lim\limits_{x\to x_0} [f(x).g(x)] = L_1.L_2$

تكتب هذه الخاصية بالتعريف كما يلي:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \ \delta > 0 \ , 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x)g(x) - L_1L_2| < \varepsilon$$

نستطيع أن تكتب العلاقة التالية $(f(x)g(x) - L_1L_2)$ بالشكل:

$$f(x)g(x) - L_1L_2 = f(x)g(x) - f(x).L_2 + f(x).L_2 - L_1L_2$$

$$f(x)g(x) - L_1L_2 = f(x)[g(x) - L_2] + L_2[f(x) - L_1]$$

ولدينا حسب خاصيات القيمة المطلقة ما يلي:

$$|f(x).g(x) - L_1L_2| \le |f(x)||g(x) - L_2| + |L_2||f(x) - L_1|$$

يمكن أن نجد a لكل A بحيث:

$$\forall A > 0, \ \ \exists \ a > 0 \ , 0 < |x - x_0| < a \Rightarrow |f(x)| < A$$

كما يمكن ايجاد b لكل $\frac{\varepsilon}{2A}$ حيث:

$$\forall \frac{\varepsilon}{2A} > 0, \ \ \exists \ b > 0 \ , 0 < |x - x_0| < b \Rightarrow |g(x) - L_2| < \frac{\varepsilon}{2A}$$

هذا يعني أن: $|f(x)|.|g(x) - L_2| < A.\frac{\varepsilon}{2A}$

كما يمكن c إيجاد لكل $\frac{\varepsilon}{2}$ حيث:

$$0 < |x - x_0| < c \Rightarrow |L_2|.|f(x) - L_1| < \frac{\varepsilon}{2}$$

ولدينا:

$$|L_2|.|f(x) - L_1| < \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow |f(x) - L_1| < \frac{\varepsilon}{2|L_2|}$$

بأخذ d أصغر القيم الثلاثة c و b وa نجد:

$$0 < |x - x_0| < \mathrm{d} \Longrightarrow |f(x)||g(x) \quad - L_2| + |L_2||f(x) \quad - L_1| < \varepsilon$$

حيث جمعنا هنا ($\varepsilon = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}$)

وبمأن:

$$|f(x).g(x) - L_1 L_2 \quad| \leq |f(x)||g(x) \quad - L_2| + |L_2||f(x) \quad - L_1|$$

فإننا نستطيع أن نكتب عندئذ:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \;\; \mathrm{d} > 0 \;, 0 < |x - x_0| < \mathrm{d} \Longrightarrow |f(x)g(x) \quad - L_1 L_2| < \varepsilon$$

والخاصية مبرهنة

ثانياً: حالات عدم التعيين

ان الخواص السابقة صالحة في مجمل الحالات الا في بعض الحالات الخاصة والتي تسمى حالات عدم التعيين وهي الحالات التالية:

أ)- حالة عدم التعيين من الشكل($\frac{0}{0}$)

إذا كانت $\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$ و $\lim_{x \to x_0} g(x) = 0$ فإن $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0}$

ب)- حالة عدم التعيين من الشكل($\frac{\infty}{\infty}$)

إذا كانت $\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty$ و $\lim_{x \to x_0} g(x) = \infty$ فإن $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\infty}{\infty}$

ج)- حالة عدم التعيين من الشكل ($0.\infty$)

إذا كانت $\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$ و $\lim_{x \to x_0} g(x) = \infty$

فإن: $\lim_{x \to x_0} [f(x).g(x)] = 0.\infty$

د)- حالة عدم التعيين من الشكل ($\infty - \infty$)

إذا كانت $\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty$ و $\lim_{x \to x_0} g(x) = \infty$

فإن: $\lim_{x \to x_0} [f(x) - g(x)] = \infty - \infty$

مثال: أوجد النهاية التالية: $\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$

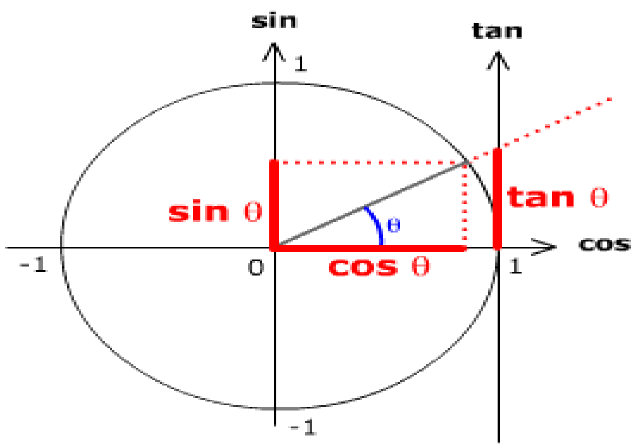
لدينا: $\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)=\infty-\infty$ وهي حالة عدم التعيين

لكن يمكننا كتابة ما يلي: $\frac{1}{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}=\frac{1-\sqrt{x}}{x}$

والنهاية تصبح: $\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)=\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1-\sqrt{x}}{x}\right)=\infty$

ثالثاً: نهايات الدوال المثلثية

يعبر عن الدوال المثلثية في دائرة نصف قطرها الواحد كما يلي:



x: هو طول القوس $\widehat{AB}$ المقابل للزاوية θ مقدر بالراديان[21] وذلك يعني أن:

$$\sin x<BC<AB<\widehat{AB}$$

وعليه نستطيع أن نكتب: $0\leq \sin x\leq x$

بإدخال النهاية على أطراف المتراجحة نجد:

$$\lim_{x\to 0^+}(0)\leq \lim_{x\to 0^+}(\sin x)\leq \lim_{x\to 0^+}(x)$$

وبالتالي:

$$0\leq \lim_{x\to 0^+}(\sin x)\leq 0$$

[21]- للاطلاع أكثر أنظر: لحسن عبد الله باشيوة، الرياضيات الاساسية وتطبيقاتها، مرجع سابق،ص254.

وعليه

$$\lim_{x\to 0^+}(\sin x)=0$$

لدينا $\sin x^2 + \cos x^2 = 1$ و $(\cos x^2) = 1 - (\sin x^2)$

ومنه $\lim_{x\to 0^+}(\cos x^2) = \lim_{x\to 0^+}(1) - \lim_{x\to 0^+}(\sin x^2) = 1$

$$\lim_{x\to 0^+}(\cos x^2) = 1 \Longrightarrow \lim_{x\to 0^+}(\cos x) = \sqrt{1} = 1$$

رابعاً: بعض النهايات الشهيرة[22]

فيما يلي نقوم بعرض بعض النهايات الشهيرة التي يستعان بها لحساب نهايات الدوال المشابهة لها

$$(1)\quad \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1 \quad , \quad (2)\quad \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}=0 \quad , (3)\quad \lim_{x\to \infty}(1+\frac{1}{x})^{x}=e$$

$$(4)\quad \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e \quad , (5)\quad \lim_{x\to 1}(\frac{x-1}{\ln x})=1 \quad , \quad (6)\quad \lim_{x\to 0}(\frac{e^{x}-1}{x})=1$$

مثال1: أوجد النهاية التالية: $\lim_{x\to\infty}\frac{\cos x}{1+x^2}$

نعلم أنه لما x يؤول الى ∞ فإن: $-1 \le \cos x \le 1$ وبقسمة أطراف المتراجحة على $(1+x^2)$ نجد: $-\frac{1}{1+x^2} \le \frac{\cos x}{1+x^2} \le \frac{1}{1+x^2}$

بإدخال النهاية على أطراف المتراجحة نجد:

$$\lim_{x\to\infty}(-\frac{1}{1+x^2}) \le \lim_{x\to\infty}\frac{\cos x}{1+x^2} \le \lim_{x\to\infty}\frac{1}{1+x^2}$$

ولدينا:

$$\lim_{x\to\infty}\left(-\frac{1}{1+x^2}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{1+x^2}=0$$

وبالتالي فإن: $\lim_{x\to\infty}\frac{\cos x}{1+x^2} = 0$

مثال2: أوجد النهاية التالية: $\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{\sqrt{x}}$

---

[22]- للاطلاع أكثر أنظر: لحسن عبد الله باشيوة، الرياضيات الاساسية وتطبيقاتها، مرجع سابق،ص268.

لدينا النهاية الشهيرة التالية: $\lim_{x\to0^+}\frac{\sin x}{x} = 1$

ولدينا: $\lim_{x\to0^+}\frac{\sin x}{\sqrt{x}} = \lim_{x\to0^+}\frac{\sqrt{x}\,.\sin x}{x} = \lim_{x\to0^+}\frac{\sin x}{x}\lim_{x\to0^+}\sqrt{x} = 1\times0 = 0$

4-3-استمرار الدوال

أولاً: الاستمرار عند نقطة

نقول عن دالة f أنها مستمرة على مجال يحوي x_0 إذا وجدت لها نهاية عند x_0 وكانت تلك النهاية تساوي قيمة الدالة عند x_0 أي أن: $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$

وبالتالي فإنه حتى تكون $f(x)$ مستمرة عند x_0 يجب أن يتحقق ما يلي[23]:

- أن تكون $f(x)$ معرفة عند x_0
- أن تكون $f(x)$ تقبل نهاية عند x_0
- أن تكون: $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$

مثال1: لتكن لدينا الدالة التالية: $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$

هل $f(x)$ مستمرة عند النقطة $x = 1$ ؟.

مجال تعريف هذه الدالة هو: $D_f=]-\infty\,,1[\,\cup\,]1\,,+\infty[$

هذه الدالة غير معرفة عند الواحد وبالتالي هي غير مستمرة عنده

مثال2: لتكن لدينا الدالة التالية: $f(x) = \begin{cases}0\,, x\neq0\\ 1\,, x=0\end{cases}$

هل $f(x)$ مستمرة عند النقطة $x = 0$ ؟.

-مجال تعريف هذه الدالة هو: $D_f=]-\infty\,,+\infty[$

---

[23]- للاطلاع أكثر أنظر: حسن ياسين طعمة، الرياضيات للاقتصاد والعلوم الإدارية والمالية، مرجع سابق، ص194.

-Isabelle cotto et autres, mathématiques éléments de calcul différentiel pour l'économie, op cit , p35.

- لحسن عبد الله باشيوة، الرياضيات الاساسية وتطبيقاتها، مرجع سابق،ص.118.

-jean pierre lecoutre , Analyse TD, op cit, p02

- $\lim_{x\to0^+} f(x) = \lim_{x\to0^-} f(x) = 0$ إذن الدالة تقبل نهاية عند الصفر

- $\lim_{x\to x_0} f(x) \neq f(x_0)$ ومنه هذه الدالة غير مستمرة عند الصفر

ثانياً: الاستمرار عن يمين وعن يسار نقطة

لتكن لدينا الدالة $f(x)$ المعرفة على المجال $]x_0-\propto , x_0]$ مع $\propto> 0$، نقول أن الدالة $f(x)$ مستمرة عن يسار x_0 إذا تحقق لنا ما يلي: $\lim_{x\to {x_0}^-} f(x) = f(x_0)$

إذا كانت لدينا الدالة $f(x)$ المعرفة على المجال $[x_0 , x_0+\propto[$ مع $\propto> 0$، نقول أن الدالة $f(x)$ مستمرة عن يمين x_0 إذا تحقق لنا ما يلي: $\lim_{x\to {x_0}^+} f(x) = f(x_0)$

نقول أن الدالة $f(x)$ مستمرة عند x_0 إذا وفقط إذا كانت $f(x)$ مستمرة عن يمين x_0 وعن يسار x_0 هذا يعني تحقق ما يلي:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) \Leftrightarrow \lim_{x\to {x_0}^+} f(x) = \lim_{x\to {x_0}^-} f(x) = f(x_0)$$

مثال: لتكن لدينا الدالة التالية: $f(x) = \begin{cases} 1 & ,0 \leq x \leq 1 \\ -x+3 & ,1 < x < 3 \end{cases}$

هل $f(x)$ مستمرة عن يسار وعن يمين النقطة $x = 1$ ؟.

لدينا : $\lim_{x\to1^-} f(x) = 1 = f(1)$ ومنه الدالة $f(x)$ مستمرة عن يسار العدد 1.

ولدينا أيضاً: $\lim_{x\to1^+} f(x) = \lim_{x\to1^+}(-x+3) = 2 \neq f(1)$ ومنه الدالة $f(x)$ غير مستمرة عن يمين العدد 1

بمأن الدالة $f(x)$ مستمرة عن يسار الواحد وغير مستمرة عن يمينه نقول أن الدالة $f(x)$غير مستمرة عند الواحد

ثالثاً: الاستمرار على مجال

إذا كان لدينا I مجال مفتوح غير خالي من $\mathbb{R}$، نقول أن f مستمرة على I إذا كانت مستمرة عند كل نقاط هذا المجال

نقول أن f مستمرة على المجال $[a, b]$ إذا كانت مستمرة على المجال المفتوح $]a, b[$ ومستمرة عن يمين a وعن يسار b.

نقول أن f مستمرة على المجال $]a,b]$ إذا كانت مستمرة على المجال المفتوح $]a,b[$ ومستمرة عن يسار b.

نقول أن f مستمرة على المجال $[a,b[$ إذا كانت مستمرة على المجال المفتوح $]a,b[$ ومستمرة عن يمين a .

3-5-الاستمرار بالتعريف وخواص الاستمرار

أولاً: الاستمرار بالتعريف[24]

بمأن الاستمرار عند نقطة ما يقتضي التعريف ووجود النهاية عند تلك النقطة وأن تكون تلك النهاية مساوية لقيمة الدالة عند تلك النقطة، فإننا نقول أن الدالة $f(x)$ مستمرة عند x_0 إذا تحقق ما يلي:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \ \delta > 0 \ , 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) \ - f(x_0)| < \varepsilon$$

ثانياً: خواص الاستمرار

إذا كانت f و g دالتان مستمرتان عند النقطة x_0 فإن الخصائص التالية محققة

1) $f \pm g$: مستمرة عند النقطة x_0

2) $K.f$: مستمرة عند النقطة x_0، مع K ثابت حقيقي

3) $f \, . g$: مستمرة عند النقطة x_0

4) $\frac{f}{g}$: مستمرة عند النقطة x_0، إذا كان $g(x) \neq 0$

تمارين الفصل الثالث:

التمرين الأول: أوجد مجموعة تعريف الدوال التالية:

1) $f(x) = \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$

2) $f(x) = \sqrt{x^2 + x - 2}$

3) $f(x) = \ln(\frac{2+x}{2-x})$

24- للاطلاع أكثر أنظر: تيدي س.ج ليفيت، ترجمة بولس بسيط وآخرون، النهايات والاتصال، مرجع سابق، ص124.

الحل:

$D_f=\{x \in \mathbb{R} \ \ / \ (x+1)(x-1) \geq 0 \wedge (x-1) \neq 0\}$ (1

$$(x+1)(x-1) \geq 0 \Rightarrow x \in]-\infty,-1] \cup [1,+\infty[$$

$$(x-1) \neq 0 \Rightarrow x \neq 1$$

ومنه: $D_f=]-\infty,-1] \cup]1,+\infty[$

$D_f=\{x \in \mathbb{R} \ \ / \ x^2+x-2 \geq 0\}$ (2

$$x^2+x-2 \geq 0 \Rightarrow x \in]-\infty,-1] \cup [1,+\infty[$$

$$(x-1) \neq 0 \Rightarrow x \neq 1$$

ومنه: $D_f=]-\infty,-1] \cup]1,+\infty[$

$D_f=\{x \in \mathbb{R} \ \ / \ (2+x)(2-x) > 0\}$ (3

$$(2+x)(2-x) > 0 \Rightarrow x \in]-2,2[$$

ومنه: $D_f=]-2,2[$

التمرين الثاني: لتكن لدينا الدالة التالية:

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{|x-3|}{x-3}, & x \neq 3 \\ 0, & x=3 \end{cases}$$

أوجد: $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)$

الحل: نستطيع كتابة هذه الدالة بعد نزع القيمة المطلقة كما يلي:

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x-3}{x-3}, x>3 \\ \dfrac{-(x-3)}{x-3}, x<3 \\ 0, x=3 \end{cases}$$

ومنه

$$\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^-} \frac{-(x-3)}{x-3} = -1$$

$$\lim_{x\to 3^+} f(x) = \lim_{x\to 3^+} \frac{x-3}{x-3} = 1$$

$$\lim_{x\to 3^-} f(x) \neq \lim_{x\to 3^-} f(x)$$

هذا يعني أن هذه الدالة لا تقبل نهاية عند العدد 3

التمرين الثالث: أوجد النهايات التالية:

1) $\operatorname{Lim}_{x\to 0} x^3 \sin\frac{1}{\sqrt{x}}$

2) $\operatorname{Lim}_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x}$

3) $\lim_{x\to\infty} (1+\frac{2}{x})^{2x}$

الحل:

1) لدينا $\lim_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt{x}} = \infty$

وبالتالي $-1 \le \sin\frac{1}{\sqrt{x}} \le 1$

بضرب الأطراف بـ x^3 نجد

$$-x^3 \le \sin\frac{1}{\sqrt{x}} \le x^3$$

بإدخال النهاية تصبح

$$\lim_{x\to 0}(-x^3) \le \lim_{x\to 0} \sin\frac{1}{\sqrt{x}} \le \lim_{x\to 0}(x^3)$$

$$0 \le \lim_{x\to 0} \sin\frac{1}{\sqrt{x}} \le 0$$

ومنه $\lim_{x\to 0} \sin\frac{1}{\sqrt{x}} = 0$

2) $$\operatorname{Lim}_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \operatorname{Lim}_{x\to 0} \frac{1}{x}\ln(1+x) = \lim_{x\to 0} \ln(1+x)^{\frac{1}{x}}$$

$$= \ln(\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}) = \ln e = 1$$

3) نضع $\propto = \frac{2}{x} \Rightarrow x = \frac{2}{\propto}$ لما $x\to\infty$ فإن $\propto\to 0$

$$\lim_{x\to\infty}(1+\frac{2}{x})^{2x} = \lim_{\propto\to 0}(1+\propto)^{\frac{4}{\propto}} = \lim_{\propto\to 0}\left[(1+\propto)^{\frac{1}{\propto}}\right]^{4} = e^{4}$$

التمرين الثالث: اختبر استمرارية الدوال التالية عند الصفر

1) $f(x) = \frac{1}{x}$

2) $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{|x|}, x \neq 0 \\ 2 \ , x = 0 \end{cases}$

3) $f(x) = \begin{cases} \frac{x(x+1)}{x}, x \neq 0 \\ 2 \ , x = 0 \end{cases}$

الحل:

1) هذه الدالة غير معرفة عند الصفر وبالتالي فهي ليست مستمرة عنده

2) نستطيع كتابة هذه الدالة بعد نزع القيمة المطلقة كما يلي:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{x}, x > 0 \\ \frac{x}{-x}, x < 0 \\ 2, x = 0 \end{cases}$$

ومنه:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-}\frac{x}{-x} = -1$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}\frac{x}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) \neq \lim_{x\to 0^-} f(x)$$

هذا يعني أن هذه الدالة لا تقبل نهاية عند الصفر وبالتالي فهي غير مستمرة عنده

3) لدينا:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}\frac{\boldsymbol{x(x+1)}}{\boldsymbol{x}} = \lim_{x\to 0}(x+1) = 1$$

$\lim_{x\to 0} f(x) \neq f(0)$ ومنه هذه الدالة غير مستمرة عند الصفر

التمرين الرابع:

برهن باستخدام تعريف الاستمرار أن الدالة التالية مستمرة عند الصفر

$$f(x) = x^3 + x + 1$$

الحل:

نستطيع كتابة استمرار هذه الدالة عند الصفر بالتعريف كالتالي:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \ \delta > 0 \ , 0< |x - 0| < \delta \Longrightarrow |x^3 + x + 1 \ \ - 1| < \varepsilon$$

لدينا $x \to 0 \Rightarrow |x| \leq 1 \Rightarrow |x^3| \leq |x|$

باستعمال المتراجحة المثلثية التالية:

$$|x + y| \leq |x| + |y| \Rightarrow |x^3 + x| \leq |x^3| + |x|$$

وكان لدينا سابقاً $|x^3| \leq |x|$ وبإضافة $|x|$ للطرفين نجد:

$$|x^3| + |x| \leq 2|x|$$

هذا يعني: $|x^3 + x| \leq 2|x| < \varepsilon \Rightarrow |x| < \frac{\varepsilon}{2}$

يكفي أن نأخذ $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$ والاستمرار مبرهن بالتعريف

الفصل الرابع: المشتقات

4-1-الدالة المشتقة: نتطرق فيما يلي الى تعريف الدالة المشتقة والتفسير الهندسي للمشتق

أولاً: تعريف الدالة المشتقة[25]

إذا كانت لدينا الدالة f معرفة على المجال $[a, b]$ وكانت النقطة x_0 تنتمي الى هذا المجال فإن مشتقة الدالة f عند النقطة x_0 تعرف كما يلي:

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

---

[25]- للاطلاع أكثر أنظر:

-Isabelle cotto et autres, mathématiques éléments de calcul différentiel pour l’économie, op cit , p44.

كما يمكن تعريف الدالة المشتقة بطرق أخرى مكافئة أيضاً بالشكل[26]:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

نقول أن الدالة f قابلة للاشتقاق عند النقطة x_0 إذا كانت لديها مشتقة عند تلك النقطة، إذا كانت f قابلة للاشتقاق عند النقطة x_0 فهي مستمرة عندها.

مثال1: أوجد مشتقة الدالة التالية: $f(x) = 2x^2 + 3x + 5$

نعطي المتغير x تغيراً طفيفاً قدره $\Delta x = h$ فيكون لدينا عندئذ:

$$f(x+h) = 2(x+h)^2 + 3(x+h) + 5$$

$$f(x+h) = 2x^2 + 4xh + 2h^2 + 3x + 3h + 5$$

$$f(x+h) - f(x) = 2x^2 + 4xh + 2h^2 + 3x + 3h + 5 - 2x^2 - 3x - 5$$

$$f(x+h) - f(x) = 4xh + 2h^2 + 3h = h(4x + 2h + 3)$$

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{h(4x + 2h + 3)}{h} = 4x + 2h + 3$$

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim_{h \to 0}(4x + 2h + 3) = 4x + 3$$

مثال2: أوجد مشتقة الدالة التالية: $f(x) = \sqrt{x}$ حيث: $1 \leq x \leq 5$

نعطي المتغير x تغيراً طفيفاً قدره $\Delta x = h$ فيكون لدينا عندئذ:

$$f(x+h) = \sqrt{x+h}$$

$$f(x+h) - f(x) = \sqrt{x+h} - \sqrt{x}$$

نضرب الطرف الثاني للمعادلة ونقسمه على المقدار $(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})$ فنجد:

$$f(x+h) - f(x) = \frac{(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})}{(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})}\sqrt{x+h} - \sqrt{x} = \frac{h}{(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})}$$

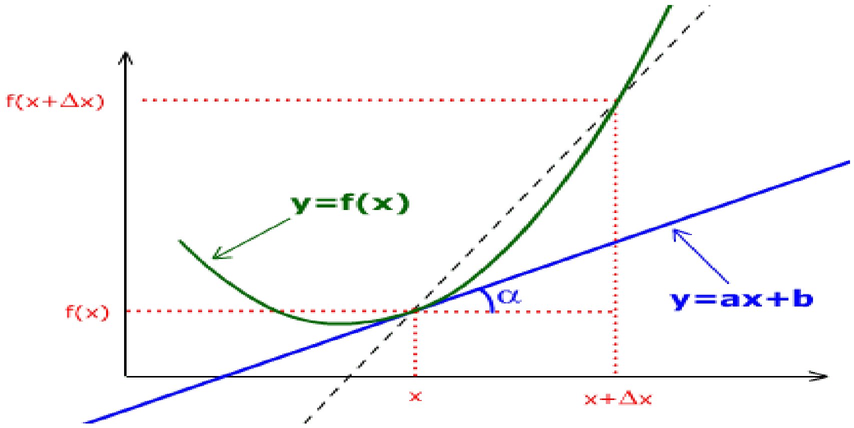
$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim_{h \to 0}\left(\frac{h}{(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}\right) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

---

[26]- للاطلاع أكثر أنظر: سليمان أبو صبحا، الرياضيات للعلوم الاقتصادية والإدارية، مكتبة بغدادي للنشر والتوزيع، الطبعة الأولى، عمان-الأردن، 1994، ص401.

ثانياً: التفسير الهندسي للمشتق[27]

لتكن لدينا الدالة f ذات المنحنى الممثل في الشكل ونحاول من خلاله تفسير المشتق هندسياً[28]



لدينا: $\frac{f(x+h)-f(x)}{\Delta x} = tang\ \theta$

و لدينا أيضا أنه لما $\Delta x \to 0$ فإن:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{\Delta x} = tang\ \alpha$$

و معادلة المماس عند النقطة x_0 هي:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

$$=> \quad f'(x_0) = \frac{y - f(x_0)}{x - x_0}$$

مثال: أوجد معادلة المماس للمنحنى الذي معادلته: $y = 2x^2 + 3x + 5$

عند النقطة $(10\,,1) = (f(x), x)$

---

[27]- للاطلاع أكثر أنظر: لحسن عبد الله باشيوة، الرياضيات الاساسية وتطبيقاتها، مرجع سابق،ص70.

- شمعون شمعون، الرياضيات الاقتصادية، مرجع سابق، ص66.

[28]- للاطلاع أكثر أنظر: تيدي س.ج ليفيت، ترجمة بولس بسيط وآخرون، النهايات والاتصال، مرجع سابق، ص143.

$$y - y_0 = f'(x_0)[x - x_0] = (4x_0 + 3)(x - 1) = 7(x - 1) \;=>$$
$$y = 7(x - 1) + 10$$

و لدينا: $f'(x) = 4x + 3$، $f'(1) = 7$ وهي ميل معادلة المماس عند الواحد

معادلة المماس هي........ $y = 7x + 3$ لدينا الميل هو 7.

ثالثاً: خواص الدوال القابلة للاشتقاق

يمكن أن نحصي للدوال المشتقة الخصائص التالية[29]:

1-) $\left(f(x) + g(x)\right)' = f'(x) + g'(x)$

2-) $\left(Kf(x)\right)' = Kf'(x)$, K : ثابت كيفي

3-) $\left(f(x).g(x)\right)' = f'(x).g(x) + g'(x).f(x)$

4-) $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f\prime(x).g(x) - g\prime(x).f(x)}{g(x)^2}$

كما يمكننا هنا الى خواص الدوال القابلة للاشتقاق المتضمنة في النظرية التالية:

نظرية:

-إذا كانت لدينا الدالة f قابلة للاشتقاق على المجال $]a\,,b[$ ومتزايدة على هذا المجال فإن: $f'(x) \geq 0$ لجميع قيم x المنتمية الى المجال $]a\,,b[$

البرهان: بمأن f متزايدة على المجال $]a\,,b[$ فإذا فرضنا أن $x + h$ تنتمي الى هذا المجال مع $h \geq 0$ يكون لدينا عندئذ: $f(x + h) - f(x) \geq 0$

بقسمة طرفي هذه المتراجحة على نجد: $\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \geq 0$

وبإدخال النهاية نجد: $\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \geq 0$

وهو ما يعني أن: $f'(x) \geq 0$

---

[29]- للاطلاع أكثر أنظر: حسن ياسين طعمة، الرياضيات للاقتصاد والعلوم الإدارية والمالية، مرجع سابق، ص208-212.

-jean pierre lecoutre , Analyse TD, op cit, p24.

-إذا كانت لدينا الدالة f قابلة للاشتقاق على المجال $]a\,,b[$ ومتناقصة على هذا المجال فإن: $f'(x) \le 0$ لجميع قيم x المنتمية الى المجال $]a\,,b[$

البرهان: بمأن f متناقصة على المجال $]a\,,b[$ فإذا فرضنا أن $x+h$ تنتمي الى هذا المجال مع $h \ge 0$ يكون لدينا عندئذ: $f(x+h)-f(x) \le 0$

بقسمة طرفي هذه المتراجحة على نجد: $\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \le 0$

وبإدخال النهاية نجد: $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \le 0$

وهو ما يعني أن: $f'(x) \le 0$

2-4-حساب مشتقات الدوال المختلفة

أولاً: قوانين حساب المشتقة

هناك بعض القوانين الشهيرة نستخدمها لحساب المشتقة نحصي منها ما يلي:

1) $[x^n]' = nx^{n-1}\ ,\ n \in \mathbb{N}$

2) $[\ln x]' = \frac{1}{x}$

3) $[e^x]' = e^x$

4) $[\sin x]' = \cos x$

5) $[\cos x]' = -\sin x$

6) $[\tan x]' = \left[\frac{\sin x}{\cos x}\right]' = \frac{(\cos x)^2+(\sin x)^2}{(\cos x)^2} = \frac{1}{(\cos x)^2}$

7) $[\cot x]' = \left[\frac{\cos x}{\sin x}\right]' = \frac{-(\sin x)^2-(\cos x)^2}{(\sin x)^2} = -\frac{1}{(\sin x)^2}$

ثانياً: مشتقات الدوال المركبة[30] لتكن لدينا الدالتان $f(x)$ و $g(x)$ فإن مشتقة تركيبهما تكون:

---

[30]- للاطلاع أكثر أنظر:

-NAILA Hayek et jean-pierre leca, mathématiques pour l'économie, Analyse-Algebre, op cit ,p 117-119.

$$(fog)' = f'(g(x)).g'(x)$$

وعليه نكون أمام الحالات التالية:

1) $h(x) = g(x)^n \,, \qquad h'(x) = n.g(x)^{n-1}.g'^{(x)}$

مثال: إذا كان لدينا: $f(x) = x^5$ و $g(x) = 2x + 3$ فإن تركيبهما يكون:

$$fog = f(2x + 3) = (2x + 3)^5$$

ومشتقتها عندئذ تكون:

$$((2x + 3)^5)' = 5.(2x + 3)^4.(2x + 3)' = 10(2x + 3)^4$$

2) $h(x) = \ln(g(x)) \,,\ h'(x) = \dfrac{g'(x)}{g(x)}$

مثال: إذا كان لدينا: $f(x) = \ln x$ و $g(x) = x^2 + 3$ فإن تركيبهما يكون:

$$fog = f(x^2 + 3) = \ln(x^2 + 3)$$

ومشتقتها عندئذ تكون:

$$(\ln(x^2 + 3))' = \frac{(x^2+3)'}{x^2+3} = \frac{2x}{x^2+3}$$

3) $h(x) = e^{g(x)} \,, h'(x) = g'(x).e^{g(x)}$

مثال: إذا كان لدينا: $f(x) = e^x$ و $g(x) = x^2 + 1$ فإن تركيبهما يكون:

$$fog = f(x^2 + 1) = e^{(x^2+1)}$$

ومشتقتها عندئذ تكون:

$$\left(e^{(x^2+3)}\right)' = (x^2 + 1)'e^{(x^2+1)} = 2x.e^{(x^2+1)}$$

ثالثاً: مشتقات الدوال المثلثية

نقصد بمشتقات الدوال المثلثية ما يلي[31]:

$$(\sin x)' = \cos x$$

[31]- للاطلاع أكثر أنظر: لحسن عبد الله باشيوة، الرياضيات الاساسية وتطبيقاتها، مرجع سابق،ص273-375.

$$(\cos x)' = -\sin x$$

$$(\tan x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{\cos x \cos x + \sin x \sin x}{(\cos x)^2} = \frac{1}{(\cos x)^2}$$

$$(\cot x)' = \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)' = \frac{-\sin x \sin x - \cos x \cos x}{(\sin x)^2} = -\frac{1}{(\sin x)^2}$$

رابعاً: مشتقات الدوال العكسية[32]

إذا كانت لدينا الدالة f متزايدة أو متناقصة على المجال $[\,a, b\,]$ وكانت مستمرة في هذا المجال فإن لهذه الدالة دالة عكسية لها وتكون مستمرة على نفس المجال، فإذا كانت لدينا الدالة : $y = f(x)$ فإن دالتها العكسية هي: $x = f^{-1}(y)$ حيث لما:

$y_0 = f(x_0)$ فإن: $x_0 = f^{-1}(y_0)$

إذا كانت لدينا الدالتان $y = f(x)$ و $x = \emptyset(y)$ واعتبرنا x و y متغيرتين عندئذ تكون الدالة $x = \emptyset(y)$ مناظرة للدالة $y = f(x)$ بالنسبة لمنصف الربع الأول للمعلم.

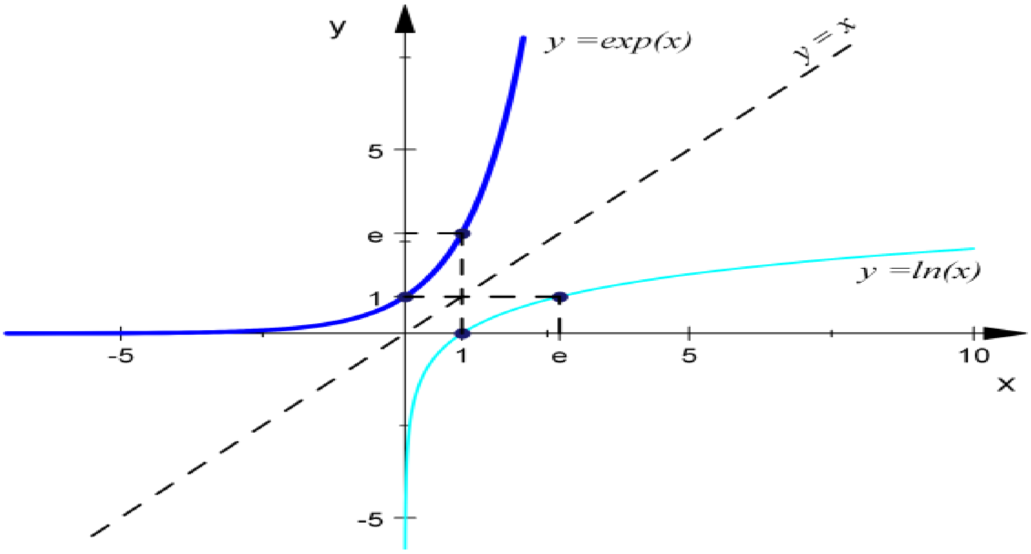
مثال إذا كان[33] $y = e^x \Longrightarrow x = \ln y$ تكون الدالة $x = \ln y$ مناظرة للدالة $y = e^x$ بالنسبة لمنصف الربع الأول للمعلم كما يبين ذلك الشكل الموالي[34]:

[32]- للاطلاع أكثر أنظر:

-NAILA Hayek et jean-pierre leca, mathématiques pour l'économie, Analyse-Algebre, op cit ,p 117.

[33]- للاطلاع أكثر أنظر: لحسن عبد الله باشيوة، الرياضيات الاساسية وتطبيقاتها، مرجع سابق،ص51.

[34]- للاطلاع أكثر أنظر: شمعون شمعون، الرياضيات الاقتصادية، مرجع سابق، ص105.



مشتقة الدالة $f(x)$ معرفة بالشكل $f'(x) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

وبالتالي فإن مشتقة الدالة العكسية لها تكون:

$$\left(f^{-1}(y)\right)' = \lim_{y \to y_0} \frac{f^{-1}(y)-f^{-1}(y_0)}{y-y_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{x-x_0}{f(x)-f(x_0)}$$

$$= \frac{\mathbf{1}}{\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}} = \frac{\mathbf{1}}{f\prime(x)}$$

مثال: لتكن لدينا الدالة $y = f(x) = 2x - 1$ دالتها العكسية هي $x = \frac{1}{2}(y+1)$

$$f'(x) = 2 \Longrightarrow x' = \frac{1}{2}$$

خامساً: مشتقات الدوال المثلثية العكسية

<u>مشتقة الدالة $y = arc\sin x$</u>

ليكن لدينا[35] $x = \sin y$ دالة معرفة على المجال $-\infty < y < +\infty$ وتأخذ قيمها في $-1 \le x \le 1$ هذه الدالة متزايدة على المجال $-\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}$ وعليه فإن لها

---

[35]- للاطلاع أكثر أنظر:

-Isabelle cotto et autres, mathématiques éléments de calcul différentiel pour l'économie, op cit , p58-60.

-jean pierre lecoutre , Analyse TD, op cit, p03.

دالة عكسية هي $y = arc\sin x$ أو $y = \sin^{-1} x$ هذه الدالة معرفة على المجال
$-1 \leq x \leq 1$ وتأخذ قيمها في المجال $-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$

لدينا $y = arc\sin x \Longrightarrow x = \sin y$

والمشتقة عندئذ تكون:

$$y' = \frac{1}{x'} = \frac{1}{(\sin y)'} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-(\sin y)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

مثال: أوجد مشتقة الدالة التالية $y = arc\sin\frac{1}{x}$

$$y' = \left(\frac{1}{x}\right)'\left(arc\sin\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{x}\right)^2}} = \frac{1}{x}\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$$

<u>مشتقة الدالة $y = arc\cos x$</u>

لدينا $y = arc\ \cos x \Longrightarrow x = \cos y$

والمشتقة عندئذ تكون:

$$y' = \frac{1}{x'} = \frac{1}{(\cos y)'} = \frac{1}{-\sin y} = \frac{1}{-\sqrt{1-(\cos y)^2}} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

مثال: أوجد مشتقة الدالة التالية $y = arc\cos\tan x$

$$y' = (\tan x)'\left(-\frac{1}{\sqrt{1-(\tan x)^2}}\right)' = -\frac{1}{(\cos x)^2}\frac{1}{\sqrt{1-(\tan x)^2}}$$

<u>مشتقة الدالة $y = arc\tan x$</u>

لدينا $y = arc\ \tan x \Longrightarrow x = \tan y$

والمشتقة عندئذ تكون:

$$y' = \frac{1}{x'} = \frac{1}{(\tan y)'}$$

$$(\tan y)' = \left(\frac{\sin y}{\cos y}\right)' = \frac{(\cos y)^2 + (\sin y)^2}{(\cos y)^2} = 1 + (\frac{\sin y}{\cos y})^2 = 1 + x^2$$

ومنه:

$$y' = \frac{1}{1+x^2}$$

مثال: أوجد مشتقة الدالة التالية $y = (arc\ \tan x)^4$

$$y' = 4(arc\ \tan x)^3 (arc\ \tan x)' = 4(arc\ \tan x)^3 \frac{1}{1+x^2}$$

مشتقة الدالة $\boldsymbol{y = arc\cot x}$

لدينا $y = arc\cot x \Longrightarrow x = \cot y$

والمشتقة عندئذ تكون:

$$y' = \frac{1}{x'} = \frac{1}{(\cot y)'}$$

$$(\cot y)' = \left(\frac{\cos y}{\sin y}\right)' = -\frac{(\sin y)^2 + (\cos y)^2}{(\sin y)^2} = -(1+x^2)$$

ومنه:

$$y' = -\frac{1}{1+x^2}$$

مثال: أوجد مشتقة الدالة التالية $y = arc\cot 2x$

$$y' = (arc\ \tan 2x)' = -2\frac{1}{1+4x^2}$$

سادساً: مشتقات الدوال الضمنية[36]

إذا كانت لدينا الدالة $y = f(x)$ معرفة ضمنياً بالشكل التالي : $y^2 + x^2 = c$

هذا يعني أن: $y = \pm\sqrt{c - x^2}$

نضع $F(x,y) = 0$ أي $y^2 + x^2 - c = 0$ ونشتق بالنسبة لـ x فنجد:

[36]- للاطلاع أكثر أنظر: -حسن ياسين طعمة، الرياضيات للاقتصاد والعلوم الإدارية والمالية، مرجع سابق، ص21.

-أنمار أمين البرواري وعربية عبد الرحمن داود، الرياضيات والبرمجة الخطية وتطبيقاتها الإدارية والاقتصادية، مرجع سابق، ص165

-علي الخطيب، مبادئ التحليل الرياضي، ديوان المطبوعات الجامعية، الطبعة الثانية، الجزائر، 1989،ص184.

$$2x + 2yy' = 0 \Longrightarrow y' = \frac{-2x}{2y} = -\frac{x}{y}$$

مثال: أوجد المشتقة $y' = \frac{\partial y}{\partial x}$ للدالة الضمنية المعرفة كما يلي:

$$(x + 2y)^2 + 2xy^2 = 6$$

نضع $F(x, y) = 0$ أي $(x + 2xy)^2 + 2xy^2 - 6 = 0$

نشتق بالنسبة لـ x فنجد:

$$2(x + 2y)(1 + 2y') + 2y^2 + 4xyy' = 0$$

$$\Longrightarrow 2x + 4xy' + 4y + 8yy' + 2y^2 + 4xyy' = 0$$

$$y'(4x + 8y + 4xy) = -(2x + 4y + 2y^2)$$

$$y' = \frac{-(2x + 4y + 2y^2)}{4x + 8y + 4xy} = \frac{-(x + 2y + y^2)}{2x + 4y + 2xy}$$

سابعاً: المشتقات من الرتب العليا[37]

لتكن لدينا الدالة $f(x)$ نسمي $f'(x)$ المشتقة الأولى للدالة $f(x)$

أي: $f'(x) = \frac{\partial y}{\partial x}$

ونسمي $f''(x)$ المشتقة الثانية للدالة $f(x)$ أي: $f''(x) = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$

ونسمي $f^{(n)}(x)$ المشتقة النونية للدالة $f(x)$ أي: $f^{(n)}(x) = \frac{\partial^n y}{\partial x^n}$

مثال1: أوجد المشتقة الثالثة للدالة $f(x) = \frac{1}{x-1}$

$$f'(x) = \frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{1}{(x-1)^2}$$

$$f''(x) = [f'(x)]' = \left[-\frac{1}{(x-1)^2}\right]' = \frac{2(x-1)}{(x-1)^4} = \frac{2}{(x-1)^3}$$

[37]- للاطلاع أكثر أنظر: -شمعون شمعون، الرياضيات الاقتصادية، مرجع سابق، ص69.

- سلطان محمد عبد الحميد، رياضيات الاعمال للتجاريين، مرجع سابق، ص201-215.

$$f'''(x) = [f''(x)]' = \left[\frac{2}{(x-1)^3}\right]' = \frac{-2.3(x-1)^2}{(x-1)^6} = -\frac{6}{(x-1)^4}$$

مثال2: أوجد المشتقة الثالثة للدالة $f(x) = \cos(2x)$

$$f'(x) = \frac{\partial y}{\partial x} = -2\sin(2x)$$

$$f''(x) = [f'(x)]' = [-2\sin(2x)]' = -4\cos(2x)$$

$$f'''(x) = [f''(x)]' = [-4\cos(2x)]' = 8\sin(2x)$$

3-4-القيم القصوى للدوال

في دراستنا للقيم القصوى للدوال سنبدأ أولاً للتطرق الى مفهوم القيم الحرجة للدوال ثم استعراض طرق إيجاد القيم القصوى المحلية للدوال باستخدام المشتقة الأولى والمشتقة الثانية لنصل الى تحديد القيم القصوى المطلقة للدوال

أولاً: القيم الحرجة للدوال

نسمي مجموع قيم x التي تنعدم عندها المشتقة الأولى للدالة $f(x)$ أو التي لا توجد عندها المشتقة بالنقاط الحرجة للدالة $f(x)$

مثال: أوجد النقاط الحرجة للدالة $f(x) = (x-2)^2$

$$f'(x) = 2(x-2)\,, f'(x) = 0 \Rightarrow x = 2$$

وبالتالي النقطة $x = 2$ نقطة حرجة لهذه الدالة

ثانياً: تحديد القيم القصوى المحلية للدوال باستخدام المشتقة الأولى[38]

إذا كانت الدالة f مستمرة عند النقطة x_0 وقابلة للاشتقاق على المجال

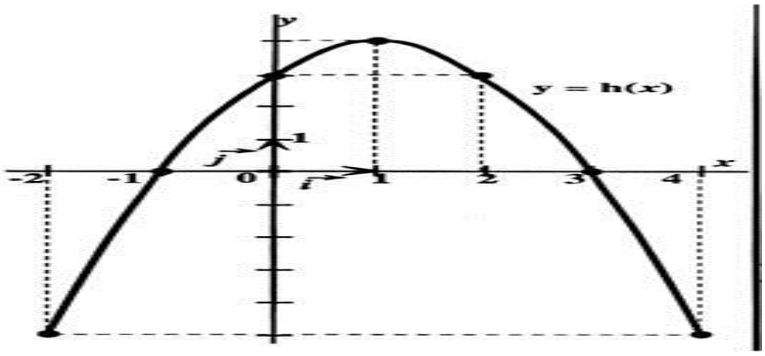
$]x_0 - h\,, x_0\ [\ \cup\ ]x_0, x_0 + h[$ وكانت اشارة المشتقة في المجال

[38]- للاطلاع أكثر أنظر: عبد الله محمد الراشد وصالح عبد الرحمن القويز، المدخل الى الدوال الحقيقية، مطابع جامعة الملك سعود، الطبعة الثانية، المملكة العربية السعودية، 1972، ص84.

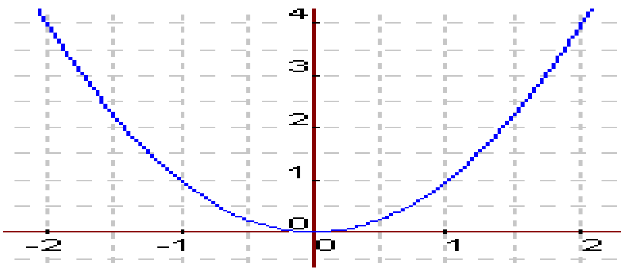
-Olivier ferrier, maths pour Economistes, Edition Boek Université, Bruxelles, Belgique, 2007, p203-213.

[$x_0 - h\,, x_0$ [تخالف اشارتها في المجال]$x_0, x_0 + h$[نقول عندئذ أن للدالة قيمة قصوى محلية عند النقطة x_0

فإن غيرت المشتقة اشارتها من موجبة قبل النقطة x_0 الى سالبة بعدها نقول عندئذ أن النقطة x_0 قيمة عظمى محلية مثل ما يوضح ذلك المنحنى الموالي($x_0 = 1$)



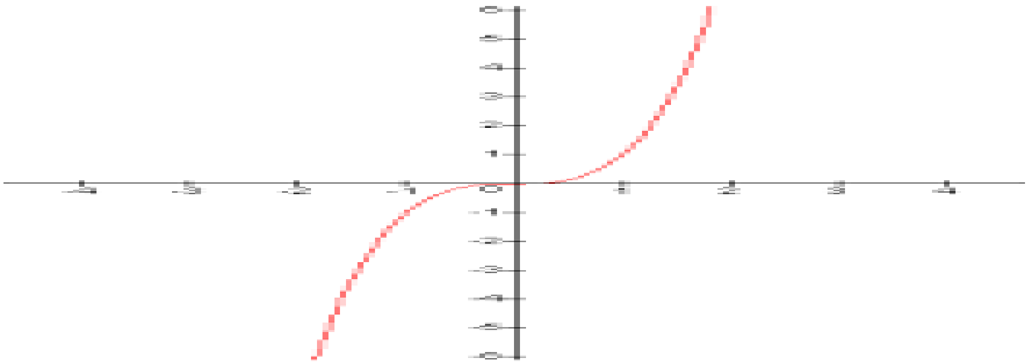
أما إذا غيرت المشتقة اشارتها من سالبة قبل النقطة x_0 الى موجبة بعدها نقول عندئذ أن النقطة x_0 قيمة صغرى محلية مثل ما يوضح ذلك المنحنى الموالي($x_0 = 0$)



يجب الإشارة هنا أن هناك بعض النقاط الحرجة للدوال تكون عندها المشتقة منعدمة أو غير موجودة ولا تتغير في جواريها إشارة المشتقة مما يعني عدم وجود قيم قصوى للدوال عندئذ وتسمى تلك النقاط في هذه الحالة بنقاط الانقلاب[39] مثل ما يوضح ذلك المنحنى الموالي($x_0 = 0$)

[39]- للاطلاع أكثر أنظر: سلطان محمد عبد الحميد، رياضيات الاعمال للتجاريين، مرجع سابق، ص310.

-فتحي خليل حمدان، الرياضيات للعلوم الإدارية والمالية، دار وائل للنشر، الطبعة الأولى، عمان-الأردن، 2006، ص187.



مثال: أوجد القيم القصوى المحلية باستخدام المشتقة الأولى للدالة التالية:

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$$

لدينا

$$f'(x) = 3x^2 - 6x$$

$$f'(x) = 0 \Longrightarrow 3x^2 - 6x = 0 \Longrightarrow= 3x(x-2) = 0$$

$$\Longrightarrow x = 0 \ \vee \ \ x = 2$$

لما $x = 2$ فإن: $f'(2) = 0$ ، $f'(3) = 9$ ، $f'(1) = -3$

بمأن المشتقة غيرت اشارتها من سالبة قبل النقطة $x_0 = 2$ الى موجبة بعدها

نقول عندئذ أن النقطة $x_0 = 2$ قيمة صغرى محلية

لما $x = 0$ فإن: $f'(0) = 0$ ، $f'(1) = -3$ ، $f'(-1) = 9$

بمأن المشتقة غيرت اشارتها من موجبة قبل النقطة $x_0 = 0$ الى سالبة بعدها

نقول عندئذ أن النقطة $x_0 = 0$ قيمة عظمى محلية

ثالثاً: تحديد القيم القصوى المحلية للدوال باستخدام المشتقة الثانية[40]

إذا كانت الدالة قابلة للاشتقاق للمرة الثانية عند النقطة x_0 وانعدمت مشتقتها الأولى عند نفس النقطة فإن للدالة:

---

[40]- للاطلاع أكثر أنظر:- أنمار أمين البرواري وعربية عبد الرحمن داود، الرياضيات والبرمجة الخطية وتطبيقاتها الإدارية والاقتصادية، مرجع سابق، ص169-171.

- سلطان محمد عبد الحميد، رياضيات الاعمال للتجاريين، مرجع سابق، ص321.

-قيمة عظمى محلية عند النقطة x_0 إذا كان: $f''(x) < 0$

- قيمة صغرى محلية عند النقطة x_0 إذا كان: $f''(x) > 0$

مثال1: أوجد القيم القصوى المحلية باستخدام المشتقة الثانية للدالة التالية:

$$f(x) = x^4 - 2x^2$$

لدينا

$$f'(x) = 4x^3 - 4x$$

$$f'(x) = 0 \Longrightarrow 4x^3 - 4x = 0 \Longrightarrow= 4x(x^2 - 1) = 0$$

$$\Longrightarrow x = 0 \lor x = -1 \lor x = 1$$

$$f''(x) = 12x^2 - 4$$

لما $x = 0$ فإن: $f'(0) = 0$ ، $f''(0) = -4$

بمأن المشتقة الثانية $f''(0) < 0$ هذا يعني أن النقطة $x_0 = 0$ قيمة عظمى محلية

لما $x = -1$ فإن: $f'(-1) = 0$ ، $f''(-1) = 8$

بمأن المشتقة الثانية $f''(-1) > 0$ هذا يعني أن النقطة $x_0 = -1$ قيمة صغرى محلية

لما $x = 1$ فإن: $f'(1) = 0$ ، $f''(1) = 8$

بمأن المشتقة الثانية $f''(1) > 0$ هذا يعني أن النقطة $x_0 = 1$ قيمة صغرى محلية

مثال2: أوجد القيم القصوى المحلية باستخدام المشتقة الثانية للدالة التالية:

$$f(x) = x^3 - 9x$$

لدينا

$$f'(x) = 3x^2 - 9$$

$$f'(x) = 0 \Longrightarrow 3x^2 - 9 = 0 \Longrightarrow= 3(x^2 - 3) = 0$$

$$\Longrightarrow \boldsymbol{x} = \sqrt{\mathbf{3}} \lor \boldsymbol{x} = -\sqrt{\mathbf{3}}$$

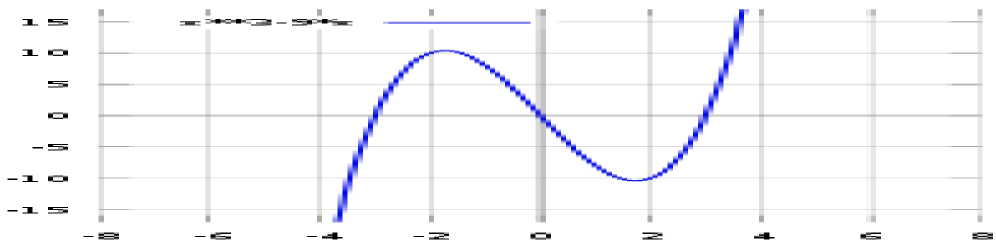
$$f''(x) = 6x$$

لما $x = \sqrt{\mathbf{3}}$ فإن: $f'(\sqrt{\mathbf{3}}) = 0$ ، $f''(\sqrt{\mathbf{3}}) = 6\sqrt{\mathbf{3}}$

بمأن المشتقة الثانية $f''(\sqrt{\mathbf{3}}) > 0$ هذا يعني أن النقطة $x_0 = \sqrt{\mathbf{3}}$ قيمة صغرى محلية

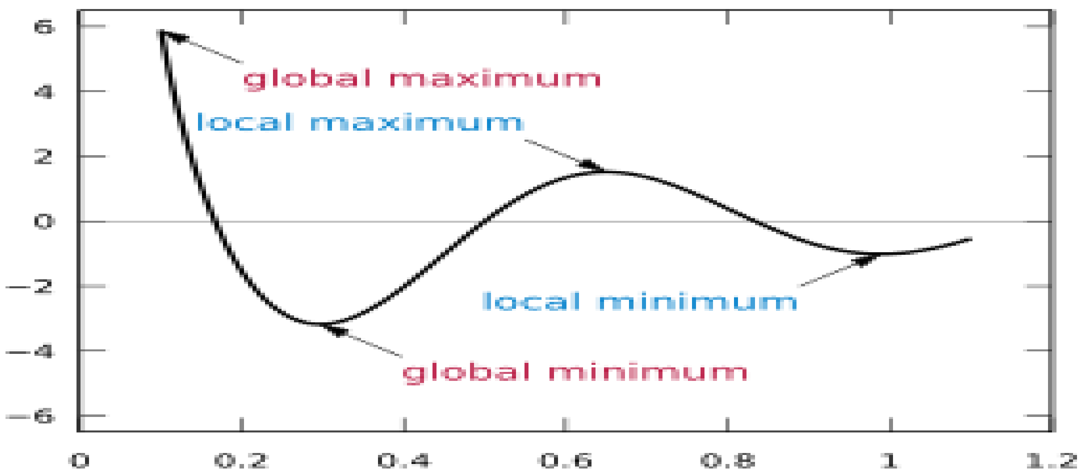
لما $x = -\sqrt{3}$ فإن: $f'(-\sqrt{3}) = 0$ ، $f''(-\sqrt{3}) = -\sqrt{3}$

بمأن المشتقة الثانية $f''(-\sqrt{\mathbf{3}}) < 0$ هذا يعني أن النقطة $x_0 = -\sqrt{\mathbf{3}}$ قيمة عظمى محلية كما يبين ذلك المنحنى الموالي



رابعاً: القيم القصوى المطلقة للدوال

لإيجاد القيم القصوى المطلقة العظمى منها والصغرى للدالة f المستمرة على المجال $[a, b]$ نبحث أولاً عن النقاط الحرجة للدالة المنتمية الى هذا المجال وقيمة الدالة عند تلك النقاط الحرجة، وثانياً نبحث عن قيمة الدالة عند طرفي المجال أي عند النقطتين a و b فأكبر كل هذه القيم هي القيمة العظمى المطلقة وأصغر كل هذه القيم هي القيمة الصغرى المطلقة، وفي الشكل الموالي نجد القيم القصوى المحلية والمطلقة



مثال: أوجد القيم القصوى المطلقة للدالة التالية:

$f(x) = x^3 - 12x$ على المجال $[-3, 1]$

لدينا

$$f'(x) = 3x^2 - 12$$

$$f'(x) = 0 \Longrightarrow 3x^2 - 12 = 0 \Longrightarrow= 3(x^2 - 4) = 0$$

$$\Longrightarrow x = 2 \lor x = -2$$

القيمة المقبولة هي $x = -2$ لأنها تنتمي للمجال المعطى

لما $x = 1$ فإن: $f(1) = -11$

لما $x = -2$ فإن: $f(-2) = 16$

لما $x = -3$ فإن: $f(-3) = 9$

القيمة العظمى المطلقة للدالة $f(x) = x^3 - 12x$ ضمن المجال $[-3, 1]$ هي أكبر القيم 16، 9، 11- وهي 16

القيمة الصغرى المطلقة للدالة $f(x) = x^3 - 12x$ ضمن المجال $[-3, 1]$ هي أصغر القيم 16، 9، 11- وهي 11-

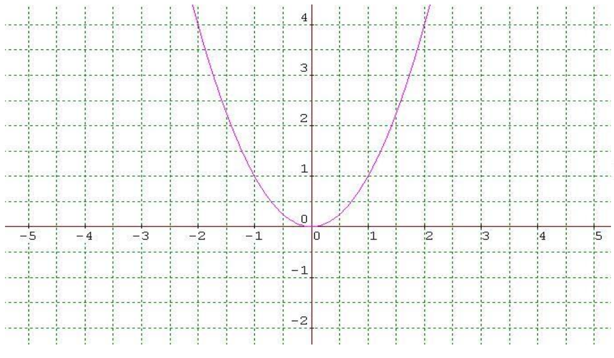
خامساً: تقعر وتحدب الدوال

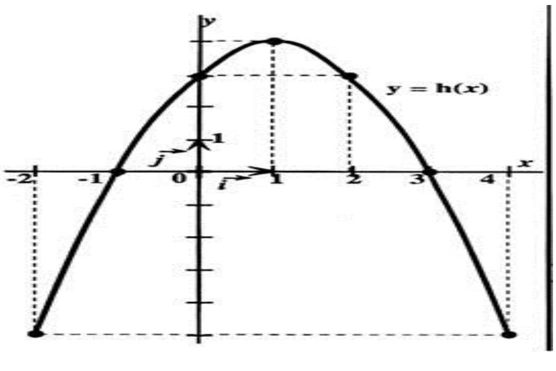
إذا كانت الدالة قابلة للاشتقاق للمرة الثانية عند النقطة x_0 وانعدمت مشتقتها الأولى عند نفس النقطة فإنه:

-تكون هذه الدالة محدبة إذا كان: $f''(x) < 0$

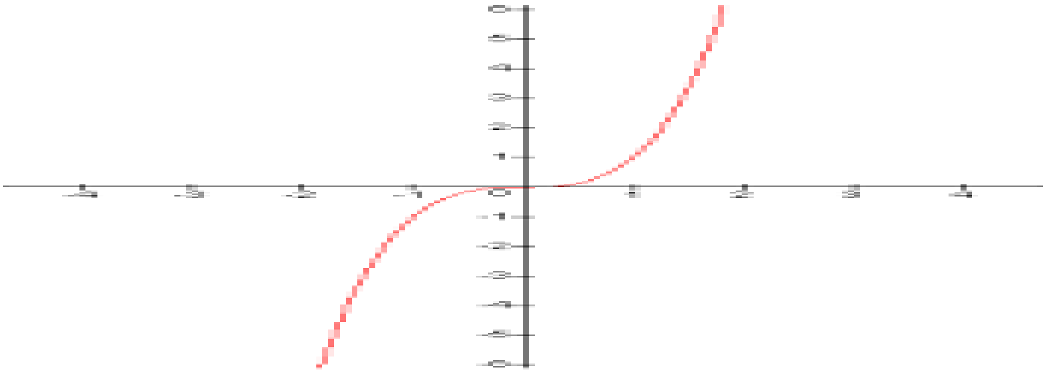
- تكون هذه الدالة مقعرة إذا كان: $f''(x) > 0$

- تقبل الدالة نقطة انقلاب إذا كان $f''(x_0) = 0$ وتغير وضعيتها من التقعر الى التحدب أو العكس عند النقطة x_0





في المنحنيين السابقين الدالة الأولى محدبة والثانية مقعرة أما الدالة ذات المنحنى المبين في الشكل الموالي فنجدها تقبل النقطة صفر كنقطة انقلاب وتغير شكلها من التحدب قبله الى التقعر بعده



مثال: أوجد فترة التقعر والتحدب ونقطة الانقلاب للدالة التالية:

$$f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x$$

لدينا

$$f'(x) = 3x^2 - 18x + 24$$

$$f''(x) = 6x\text{-}18$$

$$f''(x) = 0 \Longrightarrow 6x - 18 = 0 \Longrightarrow= 6(x-3) = 0 \Longrightarrow x = 3$$

لما $x > 3$ فإن: $f''(\boldsymbol{x}) > 0$ والدالة مقعرة

لما $x < 3$ فإن: $f''(\boldsymbol{x}) < 0$ والدالة محدبة

لما $x = 3$ فإن: $f''(\boldsymbol{x}) = 0$ والدالة تقبل نقطة انقلاب لما $x = 3$

سادساً: بعض النظريات الهامة

سنتطرق هنا الى كل من نظرية رول ونظرية التزايدات المحدودة

أ)-نظرية رول ROLLE[41]

إذا كانت لدينا الدالة f معرفة على المجال $[a,b]$ وحققت الشروط التالية:

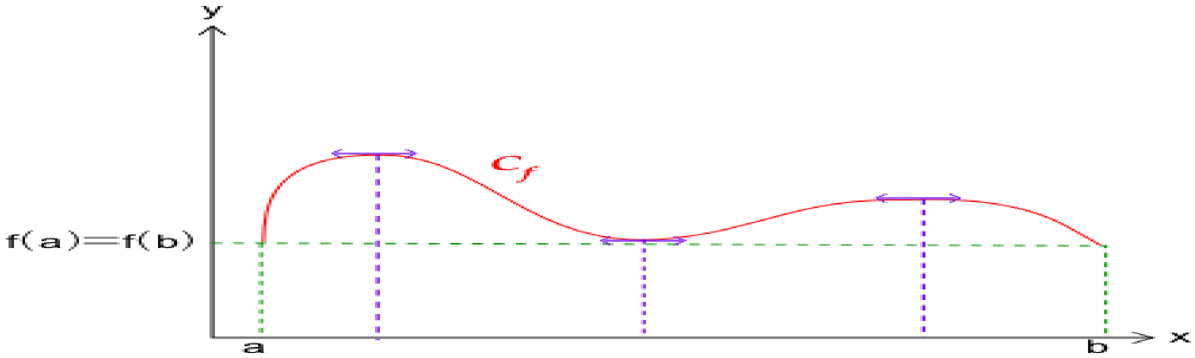
- f مستمرة على المجال $[a,b]$

[41]- للاطلاع أكثر أنظر: -علي الخطيب، مبادئ التحليل الرياضي، مرجع سابق، ص 197-199.

- لحسن عبد الله باشيوة، الرياضيات الاساسية وتطبيقاتها، مرجع سابق،ص127.

- f قابلة للاشتقاق على المجال $]a\,,b[$
- وكان $f(a) = f(b) = 0$

فإن هذا يقتضي وجود نقطة c تنتمي للمجال $]a\,,b[$ ويكون عندها $f'(c) = 0$



مثال1: هل نظرية رول محققة للدالة التالية:

$$f(x) = x^2 - 4x + 3 = (x-1)(x-3)$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 2x - 4 = 0 \Rightarrow x = 2$$

لدينا $f(1) = f(3) = 0$

f مستمرة على المجال $[1,3]$

f قابلة للاشتقاق على المجال $]1\,,3[$

بمأن $2 \in \,]1\,,3[$ فإن نظرية رول محققة لهذه الدالة

مثال2: هل نظرية رول محققة للدالة التالية:

$$f(x) = x^3 - x$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = \mp\frac{1}{\sqrt{3}}$$

لدينا $f(-1) = f(1) = 0$

f مستمرة على المجال $[-1,1]$

f قابلة للاشتقاق على المجال $]1\,,3[$

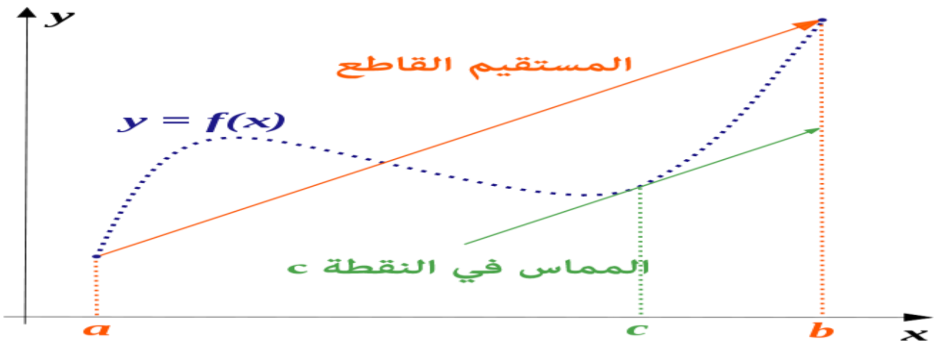
بمأن $\mp\frac{1}{\sqrt{3}} \in \,]-1\,,1[$ فإن نظرية رول محققة لهذه الدالة وتجد نقطتان هما

$c_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}$ و $c_1 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$

ب)-نظرية التزايدات المحدودة[42]

إذا كانت لدينا الدالة f مستمرة على المجال $[a,b]$ وقابلة للاشتقاق على المجال $]a\,,b[$ فإن هذا يقتضي وجود نقطة c تنتمي للمجال $]a\,,b[$ ويكون عندها

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$



لدينا AB القطعة المستقيمة الواصلة بين النقطتين a و b ميله هو حيث:

m= $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ وميل المماس عند النقطة c التي تنتمي للمجال $]a\,,b[$ هو $f'(c)$

عند هذه النقطة يكون فيها المماس موازي للقطعة المستقيمة AB ونعلم أن توازي مستقيمين يقتضي تساوي ميليهما هذا يعني أن:

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

مثال: هل نظرية التزايدات المنتهية محققة للدالة التالية على المجال $]2\,,5[$

$$f(x)=2x^2-7x+10$$

$$f'(c)=0\Longrightarrow 4c-7$$

لدينا $f(2)=4\ ,\ f(5)=25$

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\Longrightarrow\frac{25-4}{5-2}=4c-7$$

$$\Longrightarrow 7=4c-7\Longrightarrow c=\frac{14}{4}=3.5$$

42- للاطلاع أكثر أنظر: علي الخطيب، مبادئ التحليل الرياضي، مرجع سابق، ص 127.

بمأن $c = 3.5 \in]2,5[$ فإن نظرية التزايدات المنتهية محققة لهذه الدالة

4-4-نشرالدوال[43]

ان هدف نشر الدوال هو إيجاد طريقة سهلة لحساب قيم تقريبية لهذه الدوال، بالإضافة الى استخدام منشور الدوال في حساب نهايات بعض الدوال بعد رفع حالات عدم التعيين وسنتطرق فيما يلي الى منشور تايلور ومنشور ماك لوران والنشر المحدود للدوال بجوار الصفر

أولاً: منشور تايلور[44](Taylor)

إذا كانت لدينا الدالة f مستمرة على المجال $[a,b]$ ولها مشتقات حتى المرتبة n على المجال $[a,b]$ والمشتقة من المرتبة n+1 المعرفة بـ $f^{(n+1)}(x)$ موجودة على المجال المفتوح $]a,b[$ فإنه يكون لدينا ما يلي:

$$f(b) = f(a) + \frac{(b-a)}{1!}f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2!}f''(a) + \ldots + \frac{(b-a)^p}{p!}f^{(p)}(a) + \cdots + \frac{(b-a)^n}{n!}f^{(n)}(a) + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c)$$

حيث: $a < c < b$

ويسمى هذا المنشور بمنشور تايلور للدالة f بجوار العدد a

ثانياً: منشور ماك لوران (MAC-LAURIN) [45]

هو مشابه لمنشور تايلور لكن بأخذ $b = x$ و $c = a + \theta x$ حيث: $0 < \theta < 1$

فيصبح لدينا المنشور التالي:

43- للاطلاع أكثر أنظر:

- Jean VEODTS, cours de mathématiques, Ellipses Edition, paris, 2002,p338

-- سلطان محمد عبد الحميد، رياضيات الاعمال للتجاريين، مرجع سابق، ص201-215.

44- للاطلاع أكثر أنظر: شمعون شمعون، الرياضيات الاقتصادية، مرجع سابق، ص132.

45- للاطلاع أكثر أنظر:

-Olivier ferrier, maths pour Economistes, op cit, p174.

$$f(x) = f(a) + \frac{(x-a)}{1!} f'(a) \quad + \quad \frac{(x-a)^2}{2!} f''(a) + .. + \frac{(x-a)^p}{p!} f^{(p)}(a) + \cdots + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(a + \theta x)$$

ويسمى هذا المنشور بالنشر المحدود للدالة f بجوار العدد a

ثالثاً: النشر المحدود للدوال[46]

إذا كانت لدينا الدالة f مستمرة على مجال مفتوح مركزه الصفر (يمكن أن لا تكون معرفة

عند الصفر)، فإن f تقبل نشراً محدوداً من الرتبة n مع $n \epsilon \mathbb{N}$ بجوار الصفر إذا تحقق ما يلي:

$$f(x) = f(a) + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots\ldots\ldots + a_n x^n + E(x).x^n$$

حيث: $E(x) = \frac{x}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\theta x)$

وأيضاً $0 < \theta < 1$ و $\lim_{x \to 0} E(x) = 0$

مثال1: أوجد النشر المحدود للدالة $f(x) = e^x$ في جوار الصفر

لدينا: $f(0) = e^0 = 1$

$$f'(x) = e^x = f^{(n)}(x), \qquad f^{(n)}(0) = 1$$

وعليه: $f(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots\ldots\ldots + \frac{x^n}{n!} + E(x).x^n$

حيث: $E(x) = \frac{x}{(n+1)!} f^{(n+1)}(0 + \theta x) = \frac{x.e^{\theta x}}{(n+1)!}$

وأيضاً $0 < \theta < 1$ و $\lim_{x \to 0} E(x) = 0$

مثال2: أوجد النشر المحدود للدالة $f(x) = \log(1 + x)$ في جوار الصفر

لدينا: $f(0) = \log(1) = 0$

---

[46]- للاطلاع أكثر أنظر: -علي الخطيب، مبادئ التحليل الرياضي، مرجع سابق، ص243.

-رشيد توري، ترجمة عبد الحفيظ مقران، مدخل الى التحليل الرياضي، ديوان المطبوعات الجامعية، الطبعة الثانية، الجزائر، 1990، ص266.

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} = (1+x)^{-1}, \qquad f^{(n)}(0) = 1$$

$$f''(x) = -(1+x)^{-2}, \quad f''(0) = -1$$

$$f'''(x) = 2(1+x)^{-3}, \quad f'''(0) = 2$$

$$f^{(4)}(x) = -6(1+x)^{-4}, \quad f^{(4)}(0) = -6$$

والمشتقة النونية تكون بالشكل: $f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}(n-1)!\,(1+x)^{-n}$

وعليه نجد: $f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1}(n-1)!$

$$f^{(n)}(\theta x) = (-1)^{n}(n)!\,(1+\theta x)^{-(n+1)}$$

حيث: $E(x) = \frac{x}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\theta x) = \frac{x.(-1)^{n}(1+\theta x)^{-(n+1)}}{(n+1)}$

وعندئذ يكتب منشور هذه الدالة بجوار الصفر كالتالي:

$$f(x) = \log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots \ldots \ldots \ldots + \frac{(-1)^{n-1}x^n}{n} +$$

$$+ \quad \frac{x^n.x.(-1)^{n}(1+\theta x)^{-(n+1)}}{(n+1)}$$

تمارين الفصل الرابع:

التمرين الأول: أوجد المشتقة الرابعة للدوال التالية:

1) $f(x) = \sin(4x+15)$

2) $f(x) = \frac{1}{(x+3)^2}$

الحل:

1) $f'(x) = 4cos(4x+15)$

$$f''(x) = -(4)^2 \sin(4x+15)$$

$$f'''(x) = -(4)^3 cos(4x+15)$$

$$f^{(4)}(x) = (4)^4 \sin(4x+15)$$

2) $f'(x) = -2(x+3)^{-3}$

$$f''(x) = 6(x+3)^{-4}$$

$$f'''(x) = 24(x+3)^{-5}$$

$$f^{(4)}(x) = 120(x+3)^{-6}$$

التمرين الثاني:

باستعمال المشتقة الأولى أو الثانية أوجد القيم القصوى للدوال التالية إن وجدت

1) $f(x) = -x^4 + 2x^2$

2) $f(x) = 2 - (x-1)^{\frac{2}{3}}$

3) $f(x) = x^3 - 9x^2 + 15x$

الحل:

1) ايجاد القيمة القصوى لهذه الدالة باستعمال المشتقة الثانية

$$f'(x) = -4x^3 + 4x$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow -4x^3 + 4x = 0 \Rightarrow -4x(x^2-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \\ x = -1 \end{cases}$$

$$f''(x) = -12x^2 + 4$$

$f''(-1) = -8 < 0$ ومنه النقطة $x = -1$ قيمة عظمى محلية

$f''(0) = 4 > 0$ ومنه النقطة $x = 0$ قيمة صغرى محلية

$f''^{(1)} = -8 < 0$ ومنه النقطة $x = 1$ قيمة عظمى محلية

2) ايجاد القيمة القصوى لهذه الدالة باستعمال المشتقة الثانية

$$f'(x) = -\frac{2}{3}(x-1)^{-\frac{2}{3}}$$

$f'(x) \neq 0$ ومنه ليس لهذه الدالة قيم قصوى

3) ايجاد القيمة القصوى لهذه الدالة باستعمال المشتقة الأولى

$$f'(x) = 3x^2 - 18x$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 18x = 0 \Rightarrow 3x(x-6) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 6 \end{cases}$$

$$f'(7) = 21 \quad, f'(1) = -15 \;, \quad f'(-1) = 21$$

المشتقة الأولى غيرت اشارتها من موجبة قبل $x = 0$ الى سالبة بعده وبالتالي فإن

$x = 0$ قيمة عظمى محلية لهذه الدالة

المشتقة الأولى غيرت اشارتها من سالبة قبل $x = 6$ الى موجبة بعدها وبالتالي فإن

$x = 6$ قيمة صغرى محلية لهذه الدالة

التمرين الثالث:

أوجد القيم الحرجة والقصوى المطلقة للدوال التالية في المجالات المشار اليها

1) $f(x) = x^3 - 9x$ على المجال $[-3,1]$

2) $f(x) = x^{\frac{1}{7}}(x+8)$ على المجال $[0,1]$

الحل:

1) $f(x) = x^3 - 9x$

$$f'(x) = 3x^2 - 9$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 9 = 0 \Rightarrow 3(x^2 - 3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = +\sqrt{3} \\ x = -\sqrt{3} \end{cases}$$

القيمة المنتمية للمجال المعطى هي $x = -\sqrt{3}$

$$f(-\sqrt{3}) = 6\sqrt{3} \qquad , \ f(1) = -8 \qquad , \ f(-3) = 0$$

القيمة العظمى المطلقة لهذه الدالة في المجال المعطى هي أكبر القيم 0 ، -8 ، $6\sqrt{3}$

وهي $6\sqrt{3}$ وذلك لما $x = -\sqrt{3}$

القيمة الصغرى المطلقة لهذه الدالة في المجال المعطى هي أصغر القيم 0 ، -8، $6\sqrt{3}$ وهي -8 وذلك لما $x = 1$

2) $f(x) = x^{\frac{1}{7}}(x+8) = x^{\frac{8}{7}} + 8x^{\frac{1}{7}}$ على المجال $[0,1]$

$$f'(x) = \frac{8}{7}x^{\frac{1}{7}} + \frac{8}{7}x^{\frac{-6}{7}}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{8}{7}x^{\frac{1}{7}} + \frac{8}{7}x^{\frac{-6}{7}} = 0 \Rightarrow \frac{8}{7}x^{\frac{-6}{7}}(x+1) = 0 \Rightarrow x = -1$$

وهو لا ينتمي للمجال المعطى وبذلك فإنه ليس لهذه الدالة قيمة قصوى مطلقة في المجال المعطى

التمرين الرابع: أوجد منشور الدوال التالية حسب ما هو مشار اليه

1) $f(x) = e^{-2x}$ بجوار $a = 0$ ومن الرتبة $n = 5$

2) $f(x) = \sqrt{1+x}$ بجوار $a = 0$ ومن الرتبة $n = 4$

الحل:

1) $f(x) = e^{-2x}$

$$f'(x) = -2e^{-2x}, f'(0) = -2$$

$$f''(x) = 4e^{-2x}, f''(0) = 4$$

$$f'''(x) = -8e^{-2x}, f'''(0) = -8$$

$$f^{(4)}(x) = 16e^{-2x}, f^{(4)}(0) = 16$$

$$f^{(5)}(x) = -32e^{-2x}, f^{(5)}(0) = -32$$

$$f(x) = 1 - 2x + 4\frac{x^2}{2!} - 8\frac{x^3}{3!} + 16\frac{x^4}{4!} - 32\frac{x^5}{5!} + x^5E(x)$$

2) $f(x) = \sqrt{1+x} = (1+x)^{\frac{1}{2}}$

$$f'(x) = \frac{1}{2}(1+x)^{-\frac{1}{2}}, f'(0) = \frac{1}{2}$$

$$f''(x) = -\frac{1}{4}(1+x)^{-\frac{3}{2}}, f''(0) = -\frac{1}{4}$$

$$f'''(x) = \frac{3}{8}(1+x)^{-\frac{5}{2}}, \qquad f'''(0) = \frac{3}{8}$$

$$f^{(4)}(x) = -\frac{15}{16}(1+x)^{-\frac{7}{2}}, f^{(4)}(0) = -\frac{15}{16}$$

$$f(x) = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}.\frac{x^2}{2!} + \frac{3}{8}.\frac{x^3}{3!} - \frac{15}{16}.\frac{x^4}{4!} + x^4E(x)$$

الفصل الخامس: الدوال الأسية واللوغاريتمية

ستنطرق فيما يلي الى تعريف الدالة الأسية وخصائصها وتعريف الدالة اللوغاريتمية خصائصها ومشتقة كل من الدالة الأسية والدالة اللوغاريتمية

5-1-دراسة الدالة الاسية

أولاً: تعريف الدالة الأسية

نسمي الدالة المعرفة بالشكل $y = a^x$ مع $a \epsilon \mathbb{R}^+$ و $a \neq 1$ بالدالة الأسية ذات الأساس a ، كما يمكننا تعريف الدالة الأسية ذات الأساس e (وهو العدد النيبيري e =2.71) بالشكل: $y = e^x$

ثانياً: خصائص الدالة الأسية

تتميز الدالة الأسية بالخصائص التالية:

1) $\forall x_1 , x_2, \quad a^{x_1} . a^{x_2} = a^{x_1+x_2},$

2) $\forall x_1 , \quad a^{x_1} . a^{-x_1} = 1$

3) $\forall x_1 , x_2, \quad \frac{a^{x_1}}{a^{x_2}} = a^{x_1-x_2}$

4) $\forall x_1 , \forall n \in \mathbb{N}^+, (a^{x_1})^n = a^{nx_1}$

5) $\log a^x = x \log a$

6) $a^x = e^{x \log a}$

مثال: من أجل $a > 0$ و $b > 0$ و $x \in \mathbb{R}$ قارن بين α وβ حيث:

$$\alpha = (a.b)^x, \quad \beta = a^x . b^x$$

لدينا: $\log \beta = \log a^x + \log b^x = x(\log a + \log b)$

$$\log \alpha = \log(a.b)^x = x \log(a.b)$$

ومنه $\log \alpha = \log \beta$ أو $\alpha = \beta$

وبالتالي نستطيع القول أن:

$$\forall a > 0, \forall b > 0, \forall x \in \mathbb{R}, (a.b)^n = a^x . b^x$$

2-5-دراسة الدالة اللوغاريتمية

أولاً: تعريف الدالة اللوغاريتمية

إذا كانت الدالة الأسية التي عرفناها تقابلاً فإن لها دالة عكسية تسمى بالدالة اللوغاريتمية

بمعنى: $x = a^y \Longrightarrow y = \log_a x$

حيث x: عدد حقيقي موجب و $a > 1$

واللوغاريتم أو y هو الأس الذي يرفع اليه الأساس لنحصل على قيمة x

وكمثال على ذلك لدينا:

$10^3 = 1000$ تكتب في شكل لوغاريتمي ذو الأساس 10 كما يلي: $\log_{10} 1000 = 3$

$10^2 = 100$ تكتب في شكل لوغاريتمي ذو الأساس 10 كما يلي: $\log_{10} 100 = 2$

$10^{-1} = 0,1$ تكتب في شكل لوغاريتمي ذو الأساس 10 كما يلي: $\log_{10} 0,1 = -1$

$2^3 = 8$ تكتب في شكل لوغاريتمي ذو الأساس 2 كما يلي: $\log_2 8 = 3$

ثانياً: الدالة اللوغاريتمية الطبيعية

تسمى الدوال اللوغاريتمية ذات الأساس النيبيري" e حيث: $\ln e = 1$ " باللوغاريتمات الطبيعية ويرمز لها بالرمز " $\ln x$ " أو " $\log_e x$ " ومن أجل المرور من اللوغاريتم الطبيعي الى لوغاريتم في أساس كيفي أو العكس العلاقة التالية:

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$$ وعليه فإن: $$\log_e x = \frac{\ln x}{\ln e} = \ln x$$

ثالثاً: خصائص الدالة اللوغاريتمية

تتميز الدالة الوغاريتمية بالخصائص التالية:

1) $$\ln e^x = x \quad , e^{\ln x} = x$$

2) $$\log(ab) = \log a + \log b \quad , a > 0, b > 0$$

3) $$\log\left(\frac{a}{b}\right) = \log a - \log b \quad , a > 0, b > 0$$

3) $$\log a^n = n . \log a$$

4) $$\log \sqrt[n]{a} = \frac{1}{n} . \log a$$

مثال: أوجد قيم x في الحالات التالية:

1) $x=e^{4\ln 2}$

2) $e^{5x}=2$

1) **لدينا:** $x=e^{4\ln 2}=e^{\ln 2^4}$ بإدخال اللوغاريتم على الطرفين نجد:

$$\ln x=\ln e^{\ln 2^4}=\ln 2^4.\ln e=\ln 2^4$$

ومنه : $x=2^4=16$

2) **لدينا:** $e^{5x}=2$ بإدخال اللوغاريتم على الطرفين نجد:

$$\ln e^{5x}=\ln 2\Longrightarrow 5x\ln e=\ln 2\Longrightarrow 5x=\ln 2\Longrightarrow x=\frac{\ln 2}{5}$$

مثال: أوجد حل المعادلة التالية:

$$\log(x-1)+\log(x-2)=\log(2x+8)$$

هذه المعادلة معرفة من أجل $x>2$ نستطيع أن نكتب:

$\log(x-1)(x-2)=\log(2x+8)$ مما يعني

$$(x-1)(x-2)=(2x+8)\Longrightarrow x^2-5x-6=0$$

وحلول هذه المعادلة هي: $x=-1$ أو $x=6$ والحل المقبول بناءً على الشرط الذي وضعناه في الأول هو $x=6$

5-3-مشتقة الدالة الأسية

إذا كانت لدينا الدالة التالية $y=a^x$ نبحث عن مشتقة هذه الدالة أي أننا نبحث عن y' ومن أجل ذلك نقوم بالخطوات التالية:

لدينا $y=a^x$ ندخل اللوغاريتم على الطرفين فنجد $\ln y=\ln a^x=x\ln a$

نشتق الطرفين بالنسبة لـ x فنجد: $\frac{y'}{y}=\ln a$ ومنه $y'=y.\ln a=a^x\ln a$

وعليه فإن مشتق لوغاريتم x في الأساس a هو: $y'=a^x.\ln a$

مثال1: أوجد مشتقة الدالة التالية: $y=2^x$

ندخل اللوغاريتم على الطرفين فنجد $\ln y=\ln 2^x=x\ln 2$

نشتق الطرفين بالنسبة لـ x فنجد: $\frac{y'}{y} = \ln 2$ ومنه $y' = y.\ln 2 = 2^x \ln 2$

وعليه فإن مشتق لوغاريتم x في الأساس 2 هو: $y' = 2^x.\ln 2$

مثال2: أوجد مشتقة الدالة التالية: $f(x) = \frac{a^x}{e^x+1}$

$$f'(x) = \frac{(a^x)'(e^x+1) - (e^x+1)'a^x}{(e^x+1)^2} = \frac{a^x.\ln a\,(e^x+1) - e^x a^x}{(e^x+1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{a^x e^x(\ln a - 1) + a^x \ln a}{(e^x+1)^2}$$

مثال3: أوجد مشتقة الدالة التالية: $f(x) = \frac{e^{\frac{-x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}$

$$f'(x) = \frac{-x.e^{\frac{-x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}$$

4-5-مشتقة الدالة اللوغاريتمية وعلاقتها بالمرونة[47]

أولاً: مشتقة الدالة اللوغاريتمية

إذا كانت لدينا الدالة اللوغاريتمية في الأساس الكيفي a التالية: $y = \log_a x$

نحول هذه الدالة الى دالة لوغاريتم طبيعي فنجد: $\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a} = \frac{1}{\ln a}\ln x$

نشتق الطرفين بالنسبة لـ x فنجد: $y' = \frac{1}{\ln a}.(\ln x)' = \frac{1}{x}.\frac{1}{\ln a} = \frac{1}{x}.\log_a e$

مثال: أوجد مشتقة الدالة التالية: $f(x) = \log_{10}(x^2 - 1)$

تحسب المشتقة كما يلي: $y' = \frac{1}{\ln 10}.(\ln(x^2-1)' = \frac{2x}{(x^2-1)}.\frac{1}{\ln 10}$

ثانياً: المشتق اللوغاريتمي والمرونة

نرمز للمرونة بالرمز e وتعرف مرونة الدالة f بالنسبة للمتغير x بالشكل التالي:

---

[47]- للاطلاع أكثر أنظر: - شمعون شمعون، الرياضيات الاقتصادية، مرجع سابق، ص102.

-رمضان محمد جهيمة، الرياضيات لدارسي العلوم الاقتصادية والإدارية والمالية، دار الكتاب الجديد المتحدة، بيروت-لبنان، 2006، ص68.

$$e = \frac{\frac{\Delta f(x)}{f(x)}}{\frac{\Delta x}{x}} = \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} \cdot \frac{x}{f(x)} = \frac{f(x)'}{f(x)} \cdot x$$

ونعلم أن مشتقة الدالة $\ln f(x)$ هو $\frac{f(x)'}{f(x)}$

وعليه فإن: $e = \frac{f(x)'}{f(x)} . x = [\ln f(x)]' . x$

تمارين الفصل الخامس:

التمرين الأول: أوجد مشتقة الدالتين التاليتين

1) $f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt[3]{x}}$

2) $g(x) = \frac{e^x}{\sqrt[4]{x^3}}$

الحل:

1) $f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt[3]{x}} = x^{\frac{-1}{3}} . \ln x$

$$f'(x) = -\frac{1}{3} x^{\frac{-4}{3}} . \ln x + \frac{1}{x} x^{\frac{-1}{3}} = x^{\frac{-4}{3}} (-\frac{1}{3} \ln x + 1)$$

2) $g(x) = \frac{e^x}{\sqrt[4]{x^3}} = x^{\frac{-3}{4}} e^x$

$$g'(x) = -\frac{3}{4} x^{\frac{-5}{4}} e^x + x^{\frac{-3}{4}} e^x = x^{\frac{-5}{4}} e^x (-\frac{3}{4} + x)$$

التمرين الثاني: أوجد الشكل المبسط للدالة التالية:

$$f(x) = xe^{\frac{1}{2}|logx^2|}$$

الحل:

من أجل $x > 0$ لدينا $logx^2 = 2logx$

من أجل $x \geq 1$ لدينا $|logx| = logx$

والدالة تصبح:

$$f(x) = xe^{logx} = x.x = x^2$$

من أجل: $0 < x < 1$ لدينا $|logx| = -logx$

والدالة تصبح:

$$f(x) = xe^{-logx} = x.\frac{1}{x} = 1$$

التمرين الثالث: أوجد حل المعادلة التالية:

$$e^x - e^{-x} = \frac{8}{3}$$

الحل:

نضع: $y = e^x$ *فتصبح المعادلة بالشكل التالي:*

$$y - \frac{1}{y} = \frac{8}{3}$$

نضرب طرفي المعادلة بـ فتصبح

$$3y^2 - 8y - 3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} y = 3 \\ y = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

الحل السالب مرفوض ومنه

$$y = e^x = 3 \Rightarrow x = \ln 3$$

الفصل السادس: الدوال الأصلية وحساب التكامل

6-1-مفهوم الدالة الأصلية والتكامل

نستعرض فيما يلي مفهوم الدالة الأصلية ثم نتبعه بمفهوم التكامل من أجل تمحيص كلا المفهومين

أولاً: مفهوم الدالة الأصلية

لتكن لدينا الدالتانF و f معرفتان على نفس المجال I من $\mathbb{R}$ وكانت F قابلة للاشتقاق على هذا المجال، نقول أن F دالة اصلية للدالة f إذا تحقق ما يلي:

$$\forall x \in \mathrm{I}, \qquad F(x)' = f(x)$$

مثال: لتكن لدينا الدوال التالية $F_1(x) = 3x^2 + 10x - 4$

$$f(x) = 6x + 10 \qquad , \quad F_2(x) = 3x^2 + 10x + 7$$

من خلال شكل هذه الدوال نستطيع القول أن كلاً من الدالتين F_1 و F_2 دالتين اصليتين للدالة f

ثانياً: مفهوم التكامل[48]

سنورد هنا مفهوم التكامل غير المحدود ثم نتبعه بمفهوم التكامل المحدود

أ)-التكامل غير المحدود

لدينا الدالة $F(x) = \int f(x)dx$ هي دالة أصلية لـ f ويسمى الرمز« $\int$ » بالتكامل غير المحدود، ولدينا أيضاً التكامل المحدود الذي يرمز له بالرمز $\int_a^b f(x)dx$

مثال: لتكن لدينا الدالتين التاليتين $f_1(x) = \ln x - 2$ و $f_2(x) = \frac{1}{x}$

نقول ان الدالة $f_2(x)$ هي مشتقة $f_1(x)$ بمعنى $f_1(x)' = f_2(x)$

نقول ان الدالة $f_1(x)$ هي أصلية $f_2(x)$ بمعنى $\int f_2(x)dx = f_1(x)$

هذا يعني ان: $F(x) = \int f(x)dx \Leftrightarrow F(x)' = f(x)$

فإذا كان لدينا التكامل غير المحدود نكتب: $\int f(x)dx = F(x) + c$

حيث: c ثابت كيفي

ب)- التكامل المحدود[49]

إذا كانت الدالة f مستمرة على مجال $[a, b]$ و F دالة أصلية لـ f فإن:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

---

[48]- للاطلاع أكثر أنظر: - سلطان محمد عبد الحميد، رياضيات الاعمال للتجاريين، مرجع سابق، ص201-215.

-Jean Franchini et jean-claude jacquens, cours de mathématiques, Ellipses Edition, paris, 2004,p213.

[49]- للاطلاع أكثر أنظر:

-CLAUDE Boy et ALAIN NIZARD, Analyse mathématique, Edition Armand Colin, paris, 1990,p117.

مثال: أوجد التكامل المحدود التالي: $\int_1^2 x^3 dx$

لدينا: $\int_1^2 x^3 dx = \left[\frac{x^4}{4}\right]_1^2 = \frac{2^4}{4} - \frac{1^4}{4} = 4 - \frac{1}{4} = \frac{15}{4}$

2-6: خواص التكامل[50]

يتميز التكامل غير المحدود والحدود بالخصائص التالية:

1) $\int [af(x) + bg(x)]dx = a\int f(x)dx + b\int g(x)dx$ مع a و b ينتميان الى $\mathbb{R}$

2) $\int_a^a f(x)dx = F(a) - F(a) = 0$

3) $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = -\big(F(a) - F(b)\big) = -\int_b^a f(x)dx$

4) $\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx$

مثال1: احسب التكامل G التالي: $G = \int \left(3x^7 - \frac{7}{x^2} + \frac{2}{x}\right) dx$

باستعمال خصائص التكامل نستطيع كتابة ما يلي:

$$G = \int \left(3x^7 - \frac{7}{x^2} + \frac{2}{x}\right) dx = 3\int x^7 dx - 7\int x^{-2} dx + 2\int x^{-1} dx$$

لدينا : $\int x^7 dx = \frac{x^8}{8} + c_1 \quad , \int x^{-2} dx = \frac{x^{-1}}{-1} + c_2$

$$, \int x^{-1} dx = \ln x + c_3$$

وبالتالي فإن: $G = \int \left(3x^7 - \frac{7}{x^2} + \frac{2}{x}\right) dx = 3\frac{x^8}{8} + x^{-1} + 2\ln x + K$

حيث : $K, \ c_1, \ c_2 \ , \ c_3$ ثوابت كيفية

مثال2: اذا كانت لدينا الدالة التالية: $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x \ , & x \le 2 \\ -x + 3 \ , & x > 2 \end{cases}$

أوجد التكامل I التالي: $I = \int_0^3 f(x)dx$

50- للاطلاع أكثر أنظر: شمعون شمعون، الرياضيات الاقتصادية، مرجع سابق، ص139.

لدينا $I = \int_0^3 f(x)dx = \int_0^2 \left(\frac{1}{2}x\right) dx + \int_2^3 (-x+3)dx$

$$\int_0^3 f(x)dx = \frac{1}{2}\int_0^2 xdx - \int_2^3 xdx + 3\int_2^3 dx$$

$$I = \int_0^3 f(x)dx = \frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^2 + \left[-\frac{x^2}{2} + 3x\right]_2^3 = \frac{3}{2}$$

3-6- استعمال مشتقات الدوال المركبة والمثلثية العكسية في إيجاد التكامل

نتطرق فيما يلي الى استعمال مشتقات الدوال المركبة ثم نتبعها باستخدام مشتقات الدوال المثلثية العكسية في إيجاد التكامل

أولاً: استعمال مشتقات الدوال المركبة في إيجاد التكامل

نستعمل فيما يلي مشتقة الدالة الخطية المرفوعة لقوة معينة ثم الدالة الخطية المركبة على دالة لوغاريتمية ثم المركبة على دالة اسية في حساب التكامل

أ)- استعمال مشتقة الدالة الخطية المرفوعة لقوة في إيجاد التكامل

تستعمل مشتقة الدالة الخطية المرفوعة لقوة معينة في حساب بعض التكاملات المشابهة للعلاقة العكسية لصيغة مشتقتها حيث تعطى مشتقة الدالة الخطية المرفوعة لقوة معينة بالصيغة التالية:

$$\left[\frac{f(x)^{n+1}}{n+1}\right]' = \frac{1}{n+1}(n+1)f(x)^n f(x)' = f(x)^n f(x)'$$

ومنه من أجل : $n \neq -1$ فإن: $\int f(x)^n f(x)'\,dx = \frac{f(x)^{n+1}}{n+1} + c$

مثال: احسب التكامل S التالي: $S = \int 10x(x^2+3)^{\frac{5}{2}}dx$

إذا وضعنا: $f(x) = x^2 + 3 \Rightarrow f(x)' = 2x$

وعندئذ نستطيع كتابة التكامل S كالتالي:

$$S = \int 10x(x^2+3)^{\frac{5}{2}}dx = 5\int 2x(x^2+3)^{\frac{5}{2}}dx = 5\,\frac{(x^2+3)^{\frac{5}{2}+1}}{\frac{5}{2}+1} + c$$

$$S = \int 10x(x^2+3)^{\frac{5}{2}}dx = 5\frac{(x^2+3)^{\frac{7}{2}}}{\frac{7}{2}} + c = \frac{10}{7}(x^2+3)^{\frac{7}{2}} + c$$

ب)- استعمال مشتقة الدالة الخطية المركبة على دالة لوغاريتمية في إيجاد التكامل

تستعمل مشتقة الدالة الخطية المركبة على دالة لوغاريتمية في حساب بعض التكاملات المشابهة للعلاقة العكسية لصيغة مشتقتها، وتعطى مشتقة الدالة الخطية المركبة على دالة لوغاريتمية بالصيغة التالية:

$$[\ln f(x)]' = \frac{f(x)'}{f(x)} \Longrightarrow \int \frac{f(x)'}{f(x)}dx = \ln|f(x)| + c$$

مثال: احسب التكامل H التالي: $H = \int \frac{dx}{x\ln x}$

إذا كان لدينا: $f(x) = \ln x \Rightarrow f(x)' = \frac{1}{x}$

ونستطيع كتابة التكامل H كالتالي:

$$H = \int \frac{dx}{x\ln x} = \int \frac{(\ln x)'}{\ln x}dx = \ln|\ln x| + c$$

ج)-استعمال مشتقة الدالة الخطية المركبة على دالة أسية في إيجاد التكامل

تستعمل مشتقة الدالة الخطية المركبة على دالة أسية في حساب بعض التكاملات المشابهة للعلاقة العكسية لصيغة مشتقتها، وتعطى مشتقة الدالة الخطية المركبة على دالة أسية بالصيغة التالية:

$$\left[e^{f(x)}\right]' = f(x)'e^{f(x)} \Longrightarrow \int f(x)'e^{f(x)}dx = e^{f(x)} + c$$

مثال: احسب التكامل J التالي: $J = \int 4x^2e^{-x^3}dx$

إذا وضعنا: $f(x) = -x^3 \Rightarrow f(x)' = -3x^2$

وعندئذ نستطيع كتابة التكامل J كالتالي:

$$J = \int 4x^2e^{-x^3}dx = -\frac{4}{3}\int -3x^2e^{-x^3}dx = -\frac{4}{3}\int f(x)'e^{f(x)}dx$$

$$J = -\frac{4}{3}e^{f(x)} + c = -\frac{4}{3}e^{-x^3} + c$$

ثانياً: استعمال مشتقات الدوال المثلثية العكسية في إيجاد التكامل

نستعمل فيما يلي مشتقة الدوال العكسية لكل من دالة الجب و التجب و الظل و التظل حساب التكامل

أ)- استعمال مشتقة دالة الجب العكسية في حساب التكامل

تستعمل مشتقة دالة الجب العكسية في حساب بعض التكاملات المشابهة للعلاقة العكسية لصيغة مشتقتها حيث يرمز لدالة الجب العكسية بالرمز $arc \sin x$ أو $\sin^{-1} x$

وتعطى مشتقتها بالصيغة التالية: $[arc \sin x]' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

لدينا:

$$[arc \sin x]' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \Longrightarrow \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = [arc \sin x] + c$$

مثال: احسب التكامل M التالي: $M = \int \frac{1.dx}{\sqrt{2-4x^2}}$

لدينا: $M = \int \frac{1.dx}{\sqrt{2-4x^2}} = \int \frac{1.dx}{\sqrt{2(1-2x^2)}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{1.dx}{\sqrt{1-(x\sqrt{2})^2}}$

$$M = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[arc \sin(\sqrt{2}.x)\right] + c$$

ب)- استعمال مشتقة دالة التجب العكسية في حساب التكامل

تستعمل مشتقة دالة التجب العكسية في حساب بعض التكاملات المشابهة للعلاقة العكسية لصيغة مشتقتها حيث يرمز لدالة التجب العكسية بالرمز $arc \cos x$ أو $\cos^{-1} x$

وتعطى مشتقتها بالصيغة التالية: $[arc \cos x]' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

لدينا:

$$[arc \cos x]' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \Longrightarrow \int -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = [arc \cos x] + c$$

مثال: احسب التكامل F التالي: $F = \int \frac{-3.dx}{\sqrt{4-2x^2}}$

لدينا: $F = \int \frac{-3dx}{\sqrt{4-2x^2}} = \int \frac{-3.dx}{\sqrt{4(1-\frac{1}{2}x^2)}} = \frac{3}{2}\int \frac{-1.dx}{\sqrt{1-(\frac{1}{\sqrt{2}}x)^2}}$

$$F = \frac{3}{2}\left[arc\sin(\frac{1}{\sqrt{2}}x)\right] + c$$

ج)- استعمال مشتقة دالة الظل العكسية في حساب التكامل

تستعمل مشتقة دالة الظل العكسية في حساب بعض التكاملات المشابهة للعلاقة العكسية لصيغة مشتقتها حيث يرمز لدالة الظل العكسية بالرمز $arc\tan x$ أو $\tan^{-1}x$

وتعطى مشتقتها بالصيغة التالية: $[arc\tan x]' = \frac{1}{1+x^2}$

لدينا:

$$[arc\tan x]' = \frac{1}{1+x^2} \Longrightarrow \int \frac{1}{1+x^2}dx = [arc\tan x] + c$$

مثال: احسب التكامل S التالي: $S = \int \frac{dx}{2+9x^2}$

لدينا: $S = \int \frac{dx}{2+9x^2} = \int \frac{dx}{2(1+\frac{9}{2}x^2)} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{1+\left(\sqrt{\frac{9}{2}}x\right)^2}$

$$S = \frac{1}{2}\left[arc\tan(\sqrt{\frac{9}{2}}x)\right] + c$$

د)- استعمال مشتقة دالة التظل العكسية في حساب التكامل

تستعمل مشتقة دالة التظل العكسية في حساب بعض التكاملات المشابهة للعلاقة العكسية لصيغة مشتقتها حيث يرمز لدالة التظل العكسية بالرمز $arc\cot x$ أو $\cot^{-1}x$

وتعطى مشتقتها بالصيغة التالية: $[arc\cot x]' = -\frac{1}{1+x^2}$

لدينا:

$$[arc\cot x]' = -\frac{1}{1+x^2} \Longrightarrow \int \frac{-1}{1+x^2}dx = [arc\cot x] + c$$

مثال: احسب التكامل I التالي: $I=\int \frac{-5dx}{2+8x^2}$

لدينا: $I=\int \frac{-5dx}{2+8x^2}=\int \frac{-5dx}{2(1+4x^2)}=\frac{5}{2}\int \frac{-dx}{1+(2x)^2}$

$$I=\frac{5}{2}[arc\cot(2x)]+c$$

6-4-طرق حساب التكامل

نستعرض فيما يلي بعض قوانين الاشتقاق ثم نعرج على طريقتي تبديل المتغير والتكامل بالتجزئة

أولاً: بعض قوانين التكامل

يمكننا هنا عرض قوانين التكامل التالية:

1) $$\int x^n dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}+c \quad , \quad n\neq -1$$

2) $$\int f(x)^n f(x)'\,dx=\frac{f(x)^{n+1}}{n+1}+c$$

3) $$\int \frac{1}{x}dx=\ln x+c \quad , \quad \int \frac{f(x)'}{f(x)}dx=\ln|f(x)|+c$$

4) $$\int e^x dx=e^x+c \quad , \quad \int f(x)'e^{f(x)}dx=e^{f(x)}+c$$

5) $$\int \sin x\,dx=\cos x \ ,\int \sin f(x)\,dx=f(x)'\cos f(x)$$

6) $$\int \cos x\,dx=-\sin x \ , \ \int \cos f(x)\,dx=-f(x)'\sin f(\,x)$$

ثانياً: طريقة التكامل بتبديل المتغير(التعويض) [51]

لتكن U دالة قابلة للاشتقاق على المجال $[a,b]$ ولتكن F دالة اصلية للدالة f على المجال $[U(a)\ ,\ U(b)]$ إذا أردنا حساب التكامل I التالي:

$$I=\int_a^b u'(x)f(u(x))dx$$

مع $F(u(x)$ هي دالة أصلية للدالة $u'(x)f(u(x))$

[51]- للاطلاع أكثر أنظر: رمضان محمد جهيمة، الرياضيات لدارسي العلوم الاقتصادية والإدارية والمالية، مرجع سابق، ص188.

نستطيع أن نكتب:

$$\mathrm{I} = \int_a^b u'(x) f(u(x)) dx = F(u(b) - F(u(a)$$

بوضع: $t = u(x) \Rightarrow dt = u'(x)dx$

لما $x \longrightarrow a$ فإن $t \longrightarrow u(a)$ ولما $x \longrightarrow b$ فإن $t \longrightarrow u(b)$

وعليه نستطيع كتابة التكامل I كالتالي:

$$\mathrm{I} = \int_a^b u'(x) f(u(x)) dx = \int_{u(a)}^{u(b)} f(t) dt$$

مثال: اوجد التكامل I التالي: $\mathrm{I} = \int_1^8 \frac{dx}{(2x-1)} dx$

بوضع: $t = (2x - 1) \Rightarrow dt = 2dx$

لما $x \longrightarrow 1$ فإن $t \longrightarrow -1$ ولما $x \longrightarrow 8$ فإن $t \longrightarrow 15$

وعليه نستطيع كتابة التكامل I كالتالي:

$$\mathrm{I} = \int_1^8 \frac{dx}{(2x-1)} dx = \frac{1}{2} \int_{-1}^{15} \frac{1}{t} dt = [\ln|t|]_{-1}^{15} = \ln 15$$

ثالثاً: طريقة التكامل بالتجزئة

هذه الطريقة تسمح لنا بمكاملة جداء دالتين وهي مبنية أساساً على مفهوم اشتقاق جداء دالتين، حيث إذا كانت لدينا الدالتان U و V فإن:

$$[U.V]' = U'V + V'U$$

$$\int (U.V)' dx = \int (U'V) dx + \int (V'U) dx$$

$$U.V = \int (U'V) dx + \int (V'U) dx$$

$$\int (U'V) dx = U.V - \int (V'U) dx$$

مثال1: اوجد التكامل I التالي: $\mathrm{I} = \int \ln x \, dx$

بوضع: $\begin{cases} U' = 1 \\ V = \ln x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} U = x \\ V' = \frac{1}{x} \end{cases}$

وعليه نستطيع كتابة التكامل I كالتالي:

$$\mathrm{I} = \int \ln x\, dx = x \ln x - \int \frac{1}{x} x dx = x \ln x - x + c$$

مثال2: اوجد التكامل J التالي: $\mathrm{J} = \int_1^2 x^2 \ln x$

بوضع: $\begin{cases} U' = x^2 \\ V = \ln x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} U = \frac{x^3}{3} \\ V' = \frac{1}{x} \end{cases}$

وعليه نستطيع كتابة التكامل I كالتالي:

$$\mathrm{J} = \int_1^2 x^2 \ln x = \left[\frac{x^3}{3} \ln x\right]_1^2 - \int_1^2 \frac{x^3}{3} \frac{1}{x} dx$$

$$\mathrm{J} = \left[\frac{x^3}{3} \ln x\right]_1^2 - \frac{1}{3}\left[\frac{x^3}{3}\right]_1^2 = \frac{8}{3} \ln 2 - \frac{7}{9}$$

5-6- تكامل ريمان و التكامل على مجال غير محدود

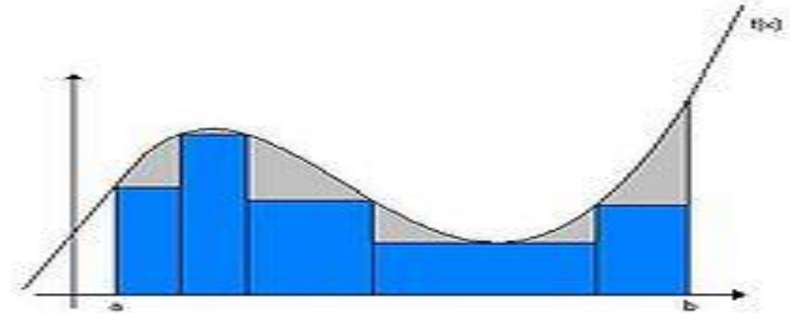
أولاً: تكامل ريمان[52]

ليكن لدينا المجال $[a\,,b]$ حيث $a < b$ ولتكن x_i عناصر تنتمي لهذا المجال، ولتكن D أجزاء هذا المجال حيث $D = \{x_i\}_{0 \le i \le n}$ حيث لدينا $x_0 = \mathrm{a}$ و

$x_n = \mathrm{b}$ و $x_i = a + i\,\frac{(b-a)}{n}$

[52]- للاطلاع أكثر أنظر: -أسماء عبد الكريم عيسى، الرياضيات المعاصرة مسائل وحلول، دار صفاء للنشر والتوزيع، الطبعة الأولى، عمان-الأردن، 2009، ص169.

-رشيد توري، ترجمة عبد الحفيظ مقران، مدخل الى التحليل الرياضي، مرجع سابق، ص144.



ولتكن f مستمرة بالأجزاء على المجال $[a\,,b]$ هذا يعني أن:

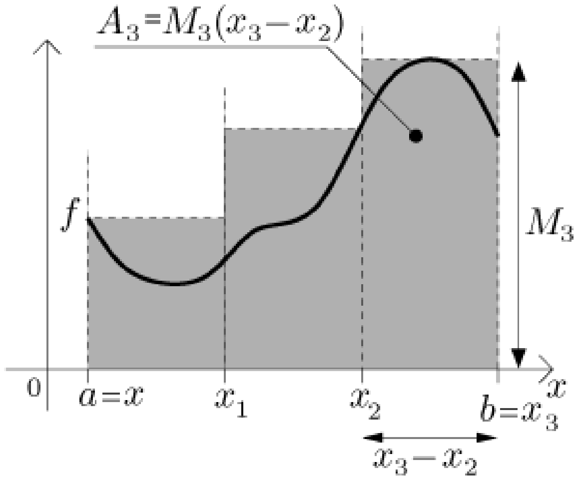
-يمكن تجزئة المجال $[a\,,b]$ الى أجزاء $D=\{x_i\}_{0\leq i\leq n}$

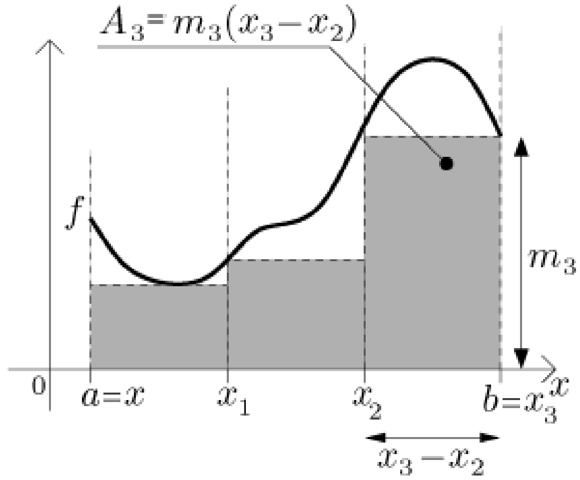
-تكون f مستمرة على كل الأجزاء $]x_{i-1},x_i[$ وتقبل نهاية عن يمين ويسار هذه التجزئة

-تقبل نهاية عن يمين a ويسار b

لدينا الدالة f تأخذ في كل تجزئة $]x_{i-1},x_i[$ القيمة f_i وبالتالي فإن المساحة المحصورة لهذا المدرج مع المحور هي(عند هذه التجزئة):$f_i(x_i-x_{i-1})$ والمساحة الكلية لهذا المدرج على المجال $[a\,,b]$ هي: $\sum_{i=1}^{n} f_i(x_i-x_{i-1})$

إذا كانت لدينا الدالة $f(x)$ تأخذ الشكل التالي وأردنا حساب مساحتها بطريقة المدرجات





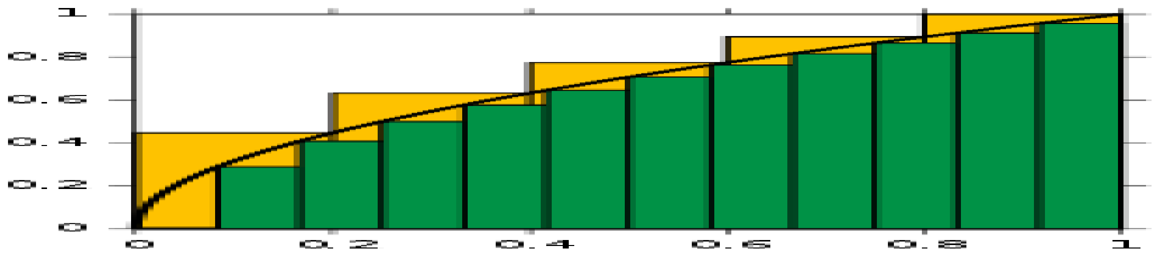
فإننا نكون أمام احدى المساحتين$S(f,d)\ =\sum_{i=1}^{n} M_i(x_i-x_{i-1})$ أو $s(f,d)=\sum_{i=1}^{n} m_i(x_i-x_{i-1})$ وفي الحالتين نكون إما حسبنا مساحات زائدة عن المساحة الفعلية أو أنقصنا بعض الأجزاء من المساحة الفعلية، ومن أجل تقريب قيمة

تكامل هذه الدالة نحسب قيمة الدالة عند منتصف كل تجزئة ويصبح تكامل هذه الدالة المحسوب في شكل مدرج بالشكل:

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1})f(c_i)$$

وكلما كثرت التجزئات كلما اقتربنا من القيمة الحقيقية للتكامل، وليكن

$$s_{(\delta)} \leq \sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1})f(c_i) \leq S_{(\delta)}$$



وبالتالي فإنه عندما يكون لدينا عدد لا نهائي من التجزئات أي أن $n \to +\infty$ فإن:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1})f(c_i)$$

مثال: لتكن لدينا الدالة $f(x) = x^2$ على المجال أوجد تكامل $f(x)$ على المجال المعطى باستعمال تكامل ريمان

نحسب أولاً $S(f,d)$ ثم نحسب ثانياً $s(f,d)$ ونقارن بينهما

$$S(f,d) = \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1})$$

$$S = \frac{1}{n}f\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n}f\left(\frac{2}{n}\right) + \cdots \dots \dots \dots + \frac{1}{n}f\left(\frac{n}{n}\right)$$

$$S = \frac{1}{n}\left[f\left(\frac{1}{n}\right) + f\left(\frac{2}{n}\right) + \cdots \dots \dots \dots + f\left(\frac{n}{n}\right)\right]$$

$$S = \frac{1}{n}\left[\frac{1^2}{n^2} + \frac{2^2}{n^2} + \cdots \dots \dots \dots + \frac{n^2}{n^2}\right]$$

$$S = \frac{1}{n^3}[1^2 + 2^2 + \cdots \dots \dots \dots + n^2]$$

ولدينا: $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

هذا يعني أن:

$$S = \frac{1}{6n^3}[n(n+1)(2n+1)] = \frac{2n^3+3n^2+n}{6n^3} = \frac{2}{6} + \frac{3}{6n} + \frac{1}{6n^2}$$

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{2}{6} + \frac{3}{6n} + \frac{1}{6n^2}\right) = \frac{1}{3}$$

نحسب الأن $s(f,d)$

$$s(f,d) = \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1})$$

$$s = \frac{1}{n}f(0) + \frac{1}{n}f\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n}f\left(\frac{2}{n}\right) + \cdots \dots \dots \dots + \frac{1}{n}f\left(\frac{n-1}{n}\right)$$

$$s = \frac{1}{n}\left[f(0) + f\left(\frac{1}{n}\right) + f\left(\frac{2}{n}\right) + \cdots \dots \dots \dots + f\left(\frac{n-1}{n}\right)\right]$$

$$s = \frac{1}{n}\left[0 + \frac{1^2}{n^2} + \frac{2^2}{n^2} + \cdots \dots \dots \dots + \frac{(n-1)^2}{n^2}\right]$$

$$s = \frac{1}{n^3}[0+1^2 + 2^2 + \cdots \dots \dots \dots + (n-1)^2]$$

ولدينا: $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

$$\sum_{i=1}^{n-1} i^2 = \frac{(n-1)(n)(2n-1)}{6}$$

هذا يعني أن:

$$s = \frac{1}{6n^3}[(n-1)(n)(2n-1))] = \frac{2n^3-3n^2+n}{6n^3} = \frac{2}{6} - \frac{3}{6n} + \frac{1}{6n^2}$$

$$\lim_{n\to+\infty} s_n = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{2}{6}-\frac{3}{6n}+\frac{1}{6n^2}\right)=\frac{1}{3}$$

ومنه: $S(f,d) = s(f,d)$

وعليه فإن: $\int_0^1 f(x)dx = \lim_{n\to+\infty} s_n = \lim_{n\to+\infty} S_n = \frac{1}{3}$

ثانياً: التكامل على مجال غير محدود[53]

سنتطرق فيما يلي الى التكامل على مجال غير محدود جهة اليمين ثم التكامل على مجال غير محدود جهة اليسار ثم التكامل على مجال غير محدود الطرفين

أ)-التكامل على مجال غير محدود من جهة واحدة

لتكن لدينا الدالة f المستمرة على المجال $[a\ ,\ +\infty[$ مثلاً، نفرض أنه من أجل $x \geq 0$ فإن $F(t)=\int_a^x f(t)dt$ نستطيع أن نكتب هذا التكامل بالصيغة التالية:

$$F(t)=\int_a^{+\infty} f(t)dt = \lim_{x\to+\infty}\int_a^x f(t)dt$$

وبنفس الطريقة فإنه إذا كانت الدالة f مستمرة على المجال $]-\infty\ , b]$ فإن:

$$\int_{-\infty}^{b} f(t)dt = \lim_{x\to-\infty}\int_x^b f(t)dt$$

إذا كانت F تقبل نهاية محدودة لما $x \to +\infty$ نقول أن التكامل $\int_a^x f(t)dt$ متقارب، وإذا كانت F لا تقبل نهاية محدودة لما $x \to +\infty$ نقول عندئذ أن التكامل متباعد

مثال: ما هي القيم التي تجعل التكامل I التالي متقارب؟ $I = \int_a^{+\infty}\frac{dx}{x^{\propto}}$

إذا كان $\propto \neq 1$ فإن $\int \frac{dx}{x^{\propto}} = \frac{x^{-\propto+1}}{-\propto+1}+c$

---

[53]- للاطلاع أكثر أنظر:

-Jean- Marie Monier , Analyse, Edition Dunod, paris, 1997, p158.

$$\int_a^x \frac{dx}{x^\propto} = \frac{1}{1-\propto}[x^{-\propto+1}]_a^x = \frac{1}{1-\propto}[x^{-\propto+1} - a^{-\propto+1}]$$

لدينا من أجل:

$$-\propto +1 < 0 \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} x^{-\propto+1} = 0 \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} \int_a^x \frac{dx}{x^\propto} = -\frac{a^{-\propto+1}}{1-\propto}$$

والتكامل I متقارب

ولدينا:

$$\propto +1 > 0 \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} x^{-\propto+1} = +\infty \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} \int_a^x \frac{dx}{x^\propto} = +\infty$$

ومنه فإن التكامل I متباعد

أما من أجل:

$$\propto = 1 \Rightarrow \int_a^x \frac{dx}{x^\propto} = [\ln x]_a^x = \ln x - \ln a \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} \int_a^x \frac{dx}{x^\propto} = +\infty$$

والتكامل متباعد

هذا يعني أنه حتى يكون التكامل I متقارب يجب أن تكون: $\propto > 1$

ب)-التكامل على مجال غير محدود الجهتين

نفرض أن f مستمرة على $\mathbb{R}$ إذا كان لدينا كلاً من التكاملين $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ و $\int_{-\infty}^{a} f(t)dt$ متقاربين نقول أن التكامل $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt$ متقارب وإلا فإنه متباعد

مثال: هل التكامل I التالي متقارب أم متباعد ؟ $I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$

$$s_1 = \int_a^x \frac{dt}{t^2} = \left[-\frac{1}{t}\right]_a^x = \frac{1}{a} - \frac{1}{x} \quad , \quad \lim_{x\to+\infty} s_1 = \frac{1}{a}$$

ومنه التكامل $\int_a^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$ متقارب

$$s_2 = \int_x^a \frac{dt}{t^2} = \left[-\frac{1}{t}\right]_x^a = -\frac{1}{a} + \frac{1}{x} \quad , \quad \lim_{x\to+\infty} s_2 = -\frac{1}{a}$$

و التكامل $\int_{-\infty}^{a} \frac{dt}{t^2}$ متقارب

وعليه فإن التكامل $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$ متقارب

6-6-مفهوم التفاضل وتفسيره الهندسي

أولاً: مفهوم التفاضل[54]

نعلم أن ميل المنحنى y هو $\frac{y-y_0}{x-x_0} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ فإذا كانت الدالة $y = f(x)$ قابلة للاشتقاق

عند النقطة x_0 وكانت $\Delta x \neq 0$ فإن القيمة $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ تنتهي الى $f'(x)$ لما

$\Delta x \to 0$ أي أن: $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x)$ أي أن الفرق بين كلا القيمتين

$f'(x)$ و $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ يكون صغير جداً أي: $\varepsilon = \frac{\Delta y}{\Delta x} - f'(x)$

بمعنى: $\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \varepsilon$ ....(1)

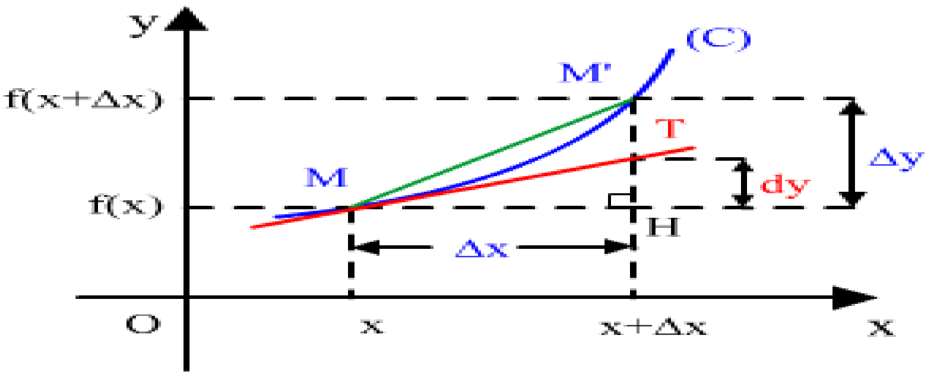
بضرب طرفي المعادلة (1) بـ Δx نجد: $\Delta y = f'(x)\Delta x + \varepsilon \Delta x$

ولدينا: $\lim_{\Delta x \to 0} \varepsilon \Delta x = 0$ وبالتالي فإن: $\Delta y \simeq f'(x)\Delta x$

أي أن: $dy = f'(x)dx$ ويسمى تفاضل y

ثانياً: التفسير الهندسي للتفاضل[55]

يمكن تفسير التفاضل من خلال المنحنى (C) التالي:



عندما تحركت النقطة M على المماس الى النقطة T فإن التغير الذي طرأ على Y هو:

[54]- للاطلاع أكثر أنظر: شمعون شمعون، الرياضيات الاقتصادية، مرجع سابق، ص76.

[55]- للاطلاع أكثر أنظر: -- لحسن عبد الله باشيوة، الرياضيات الاساسية وتطبيقاتها، مرجع سابق،ص88.

-- سلطان محمد عبد الحميد، رياضيات الاعمال للتجاريين، مرجع سابق، ص201-215.

$$\mathrm{d}y = \mathrm{HT} = \Delta\mathrm{x} \tan \propto = f'(x)\Delta x$$

أما التغير الذي طرأ على Y عندما تحركت النقطة M على المنحنى $y = f(x)$ الى النقطة 'M فهي: $\Delta y = HT + TM' = dy + \varepsilon\Delta x$

وبالتالي فإنه كلما قلت القيمة Δx أو كلما كانت $\Delta x \to 0$ فإن: $\Delta y \simeq dy$

مثال: أوجد Δy و dy للدالة المعرفة بالشكل $y = f(x) = x^2$ لما $\Delta x = 0.1$ و $x = 30$ ثم أوجد قيمة ε

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = (x + \Delta x)^2 - x^2 =$$

$$x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2 - x^2 = 2x\Delta x + \Delta x^2 =$$

$$2(30)(0.1) + (0.1)^2 = 6.01$$

$$\mathrm{d}y = f'(x)\Delta x = 2x\Delta x = 2(30)(0.1) = 6$$

الخطأ المرتكب هو: $\Delta y - dy = \varepsilon\Delta x = 6.01 - 6 = 0.01$

$$\varepsilon\Delta x = 0.01 \Longrightarrow \varepsilon = \frac{0.01}{\Delta x} = \frac{0.01}{0.1} = 0.1$$

6-7- المعادلات التفاضلية

أولاً: مدلول المعادلة التفاضلية[56]

المعادلة التفاضلية بشكل عام هي تلك المعادلة التي تربط بين متغيرتين أو أكثر ومشتقاتها أو تفاضلاتها وتكتب بإحدى الصيغتين التاليتين مثلاً:

$\frac{dy}{dx} = 4x$ وهي الصيغة التفاضلية

أو بالشكل $dy = 4xdx$ وهي الصيغة المشتقة

ثانياً: رتبة ودرجة المعادلة التفاضلية

نتطرق فيما يلي الى رتبة المعادلة التفاضلية ثم نستعرض درجة المعادلة التفاضلية

[56]- للاطلاع أكثر أنظر:

- Jean VEODTS, cours de mathématiques, op cit, p363.

أ)-رتبة المعادلة التفاضلية

نقصد برتبة المعادلة التفاضلية رتبة أعلى مشتق في المعادلة، فنقول عن المعادلة التفاضلية التالية $f(\frac{dy}{dx}, y, x)$ بأنها معادلة تفاضلية من الرتبة الأولى

والمعادلة التالية: $f(\frac{d^2y}{dx^2}, \frac{dy}{dx}, y, x)$ بأنها معادلة تفاضلية من الرتبة الثانية

وبصفة عامة فإن المعادلة التفاضلية من الرتبة n تأخذ الشكل التالي:

$$f(\frac{d^ny}{dx^n}, \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}, \dots\dots\dots\dots.., \frac{dy}{dx}, y, x)$$

ب)- درجة المعادلة التفاضلية

نقصد بدرجة المعادلة التفاضلية أعلى أس أو قوة يكون مرفوعاً اليه المشتق ذو الرتبة العليا في المعادلة التفاضلية فمثلا

$\frac{dy}{dx} = 5x + 4$: هي معادلة تفاضلية من الرتبة الأولى والدرجة الأولى

$(\frac{dy}{dx})^6 - 5x^3 = 0$: هي معادلة تفاضلية من الرتبة الأولى والدرجة السادسة

$\frac{d^2y}{dx^2} + (\frac{dy}{dx})^4 + x = 0$: هي معادلة تفاضلية من الرتبة الثانية والدرجة الأولى

$(\frac{d^3y}{dx^3})^5 + (\frac{d^2y}{dx^2})^4 + 25y = 0$: معادلة تفاضلية من الرتبة الثالثة والدرجة الخامسة

ثانياً: حل المعادلة التفاضلية

سنتطرق هنا الى حل المعادلة التفاضلية الخطية من الرتبة الأولى و حل المعادلة التفاضلية الخطية من الرتبة الثانية المتجانسة وذات المعاملات الثابتة

أ)-حل المعادلة التفاضلية الخطية من الرتبة الأولى

سنتطرق هنا الى حل المعادلة التفاضلية المتجانسة وغير المتجانسة

الصيغة العامة للمعادلة التفاضلية الخطية من الرتبة الأولى هي: $\frac{dy}{dx} + ay = b$

تكون هذه المعادلة متجانسة لما: $b = 0$

أ-1)-المعادلة المتجانسة

نقول أن المعادلة التفاضلية الخطية من الرتبة الأولى متجانسة إذا كان: $b = 0$

وتأخذ الشكل العام التالي: $\frac{dy}{dx} + ay = 0$ وعند الحديث عن حل هذه المعادلة يجب أن نفرق بين حلها العام وحلها الخاص، حيث يعطى حلها العام بالشكل: $y_t = Ae^{-ax}$

حيث A ثابت كيفي، أما الحل الخاص والنهائي فيكون بمعرفة الشرط الابتدائي أو y_0 ويأخذ الشكل: $y_t = y_0 . e^{-ax}$

مثال: أوجد حل المعادلة التفاضلية التالية: $\frac{dy}{dx} - 2y = 0$

وحلها الخاص لما: $y_0 = 1$

الحل العام لهذه المعادلة يكون بالشكل: $y_t = Ae^{2x}$ حيث A ثابت كيفي

أما الحل الخاص والنهائي فيكون بمعرفة الشرط الابتدائي $y_0 = 1$

ويأخذ الشكل: $y_t = y_0 . e^{-ax} = e^{-ax}$

أ-2)-المعادلة غير المتجانسة

نقول أن المعادلة التفاضلية الخطية من الرتبة الأولى غيرمتجانسة إذا كان: $b \neq 0$

وتأخذ الشكل العام التالي: $\frac{dy}{dx} + ay = b$

حلها العام يكون بالشكل: $y_t = Ae^{-ax} + \frac{b}{a}$ حيث A ثابت كيفي

في حين أن الحل الخاص والنهائي لها فيكون بمعرفة الشرط الابتدائي أو y_0 ويأخذ الشكل التالي: $y_t = \left[y_0 - \frac{a}{b}\right] e^{-ax} + \frac{b}{a}$

ويمكن أن نحصي هنا حالة خاصة لما: $a = 0$ فإن المعادلة التفاضلية عندئذ تأخذ الشكل التالي: $\frac{dy}{dx} = b$ وحلها يكون

$y_t = A + bx$ ويسمى بالحل العام

$y_t = y_0 + bx$ ويسمى بالحل الخاص

مثال1: أوجد حل المعادلة التفاضلية التالية: $\frac{dy}{dx} + 3y = 5$

وحلها الخاص لما: $y_0 = \frac{2}{5}$

الحل العام لهذه المعادلة يكون بالشكل: $y_t = Ae^{-3x} + \frac{5}{3}$ حيث A ثابت كيفي

أما الحل الخاص والنهائي فيكون بمعرفة الشرط الابتدائي $y_0 = \frac{2}{5}$

ويأخذ الشكل: $y_t = \left[\frac{2}{5} - \frac{3}{5}\right] e^{-3x} + \frac{5}{3} = -\frac{1}{5} e^{-3x} + \frac{5}{3}$

مثال2: أوجد حل المعادلة التفاضلية التالية: $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}$ وحلها الخاص لما: $y_0 = \frac{3}{2}$

الحل العام لهذه المعادلة يكون بالشكل: $y_t = A + \frac{1}{2}x$ حيث A ثابت كيفي

أما الحل الخاص والنهائي فيكون بمعرفة الشرط الابتدائي $y_0 = \frac{3}{2}$

ويأخذ الشكل: $y_t = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}x = \frac{1}{2}(3 + x)$

مثال3: أوجد حل المعادلة التفاضلية التالية: $\frac{dy}{dx} + x^2 y = 3x^2$

وحلها الخاص لما: $y_0 = 1$

الحل العام لهذه المعادلة يكون بالشكل: $y_t = Ae^{-ax} + \frac{b}{a} = Ae^{-x^3} + 3$ حيث A ثابت كيفي

أما الحل الخاص والنهائي فيكون بمعرفة الشرط الابتدائي $y_0 = 1$

ويأخذ الشكل: $y_t = \left[1 - \frac{1}{3}\right] e^{-x^3} + 3 = \frac{2}{3} e^{-x^3} + 3$

ب)- حل المعادلة التفاضلية الخطية من الرتبة الثانية[57]

تأخذ التفاضلية الخطية من الرتبة الثانية وذات المعاملات الثابتة والمتجانسة الشكل التالي: $y'' + a_1 y' + a_0 y = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots(1)$

نضع $y = \lambda^0$ ، $y' = \lambda^1$ ، $y'' = \lambda^2$ حيث أس هو درجة الاشتقاق وتصبح المعادلة (1) بالشكل: $\lambda^2 + a_1\lambda^1 + a_0 = 0 \ldots\ldots\ldots (2)$

[57]- للاطلاع أكثر أنظر: - شمعون شمعون، الرياضيات الاقتصادية، مرجع سابق، ص158-163.

-غوثي بوكلي حسن، الوجيز في الرياضيات، مرجع سابق، ص334.

حيث تسمى المعادلة (2) بالمعادلة المميزة للمعادلة (1)

مثال: لتكن لدينا المعادلة التفاضلية التالية

$y" + 3y' - 4y = 0$ المعادلة المميزة لهذه المعادلة التفاضلية هي:

$\lambda^2 + 3\lambda - 4 = 0$ يمكننا تحليل المعادلة المميزة الى

$$(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots.(3)$$

أو إيجاد حلول المعادلة (2) وليكونا λ_1 **و** λ_2 يمكن الحصول على حلول المعادلة (1) انطلاقاً من حلول المعادلة (3) ونحصي هنا ثلاث حالات

الحالة الأولى: إذا كان كل من λ_1 **و** λ_2 حقيقيان ومختلفان فإن المعادلة التفاضلية تقبل حلان مستقلان هما $e^{\lambda_1 x}$ و $e^{\lambda_2 x}$ ويكون الحل العام بالشكل:

$$y = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}$$

مثال1: أوجد حل المعادلة التفاضلية التالية: $y" - y' - 2y = 0$

المعادلة المميزة لهذه المعادلة التفاضلية هي: $\lambda^2 - \lambda - 2 = 0$

المعادلة المميزة تقبل حلان هما $\lambda_1 = -1$ و $\lambda_2 = 2$ لدينا كل من λ_1 و λ_2 حقيقيان ومختلفان وبالتالي فإن الحل العام للمعادلة التفاضلية يكون بالشكل:

$$y = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x} = c_1 e^{-x} + c_2 e^{2x}$$

مثال2: أوجد حل المعادلة التفاضلية التالية: $y" - 7y' = 0$

المعادلة المميزة لهذه المعادلة التفاضلية هي: $\lambda^2 - 7\lambda = 0$

المعادلة المميزة تقبل حلان هما $\lambda_1 = 0$ و $\lambda_2 = 7$ لدينا كل من λ_1 و λ_2 حقيقيان ومختلفان وبالتالي فإن الحل العام للمعادلة التفاضلية يكون بالشكل:

$$y = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x} = c_1 + c_2 e^{7x}$$

الحالة الثانية: إذا كان $\lambda_1 = \lambda_2$ فإن المعادلة التفاضلية تقبل حلان مستقلان هما $e^{\lambda_1 x}$ و $xe^{\lambda_1 x}$ ويكون الحل العام بالشكل:

$$y = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 x e^{\lambda_1 x}$$

مثال: أوجد حل المعادلة التفاضلية التالية: $y" = 0$

المعادلة المميزة لهذه المعادلة التفاضلية هي: $\lambda^2 = 0$

المعادلة المميزة تقبل حل مضاعف هو $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ وبالتالي فإن الحل العام للمعادلة التفاضلية يكون بالشكل:

$$y = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 x e^{\lambda_2 x} = c_1 + x c_2$$

الحالة الثالثة: إذا كان: $\lambda_1 = a + ib$ (عدد مركب) وبالتالي فإن الحل الثاني يكون بالشكل $\lambda_2 = a - ib$ وكان a_1 و a_2 في المعادلة (2) حقيقيان فإن المعادلة التفاضلية تقبل حلان مستقلان هما $e^{(a+ib)x}$ و $e^{(a-ib)x}$ ويكون الحل العام بالشكل:

$$y = d_1 e^{(a+ib)x} + d_2 x e^{(a-ib)x}$$

مثال: أوجد حل المعادلة التفاضلية التالية: $y" + 4y' + 5y = 0$

المعادلة المميزة لهذه المعادلة التفاضلية هي: $\lambda^2 + 4\lambda + 5 = 0$

المعادلة المميزة تقبل حلان هما $\lambda_1 = -2 - i$ و $\lambda_2 = -2 + i$ لدينا كل من λ_1 و λ_2 عددان مركبان و a_1 و a_2 في المعادلة التفاضلية حقيقيان فإن المعادلة التفاضلية تقبل حلان مستقلان هما $e^{(-2-i)x}$ و $e^{(-2+i)x}$ ويكون الحل العام بالشكل:

$$y = d_1 e^{(-2-i)x} + d_2 x e^{(-2+i)x}$$

تمارين الفصل السادس:

التمرين الأول: أوجد المساحة المحصورة بين منحنى y والمحور x لما:

1) $y = 3 + \frac{10}{x^2} \quad , x = 1, \ x = 3$

2) $y = x^3 - 3x + 2 \quad , x = -1, \ x = 2$

الحل:

1) إيجاد المساحة الأولى

$$\int_1^3 (3 + \frac{10}{x^2})\, dx = [3x]_1^3 + \left[-\frac{10}{x}\right]_1^3 = \frac{38}{3}$$

2) إيجاد المساحة الثانية

$$\int_{-1}^{2}(x^3-3x+2)\,dx=\left[\frac{x^4}{4}\right]_{-1}^{2}-3\left[\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{2}+2[x]_{-1}^{2}=\frac{21}{4}$$

التمرين الثاني: لتكن لدينا الدالة التالية:

$$f(x)=\begin{cases}-x\,, & x\le 1\\ -1\,, & 1<x\le 2\\ x-3\,, & x\ge 2\end{cases}$$

أوجد $\int_{-3}^{2}|f(x)|\,dx \quad , \int_{1}^{4}(3-5f(x))\,dx$

الحل:

$$\int_{-3}^{2}|f(x)|\,dx=\int_{-3}^{1}|-x|\,dx+\int_{1}^{2}|-1|\,dx=\left[\frac{x^2}{2}\right]_{-3}^{1}+2[x]_{1}^{2}=-3$$

$$\int_{1}^{4}\big(3-5f(x)\big)\,dx=\int_{1}^{2}8\,dx+\int_{2}^{4}(6-x)\,dx=$$

$$8[x]_{1}^{2}-\left[\frac{x^2}{2}\right]_{2}^{4}+6[x]_{2}^{4}=14$$

التمرين الثالث: هل التكاملات التالية متقاربة أو متباعدة؟

$$A=\int_{1}^{+\infty}-xe^{-x^2}dx$$

$$B=\int_{3}^{+\infty}\frac{\ln(x+2)}{\sqrt{x+2}}dx$$

الحل:

حل التكامل A : لنضع $U=-x^2\Rightarrow du=-2xdx$ والتكامل A يصبح:

$$A=\int_{1}^{+\infty}-xe^{-x^2}dx=\int_{1}^{+\infty}\frac{1}{2}e^{U}\,du=\lim_{x\to+\infty}\int_{1}^{x}\frac{1}{2}e^{U}du=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{2}e^{U}\right]_{1}^{x}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{2}e^{-x^2}\right]_{1}^{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{2}e^{-x^2}-\frac{1}{2e}\right)=-\frac{1}{2e}$$

ومنه فإن التكامل A متقارب

حل التكامل B: لنضع

$$\begin{cases} V=\ln(x+2) \\ U'=(x+2)^{-\frac{1}{2}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} V'=\frac{1}{x+2} \\ U=2(x+2)^{\frac{1}{2}} \end{cases}$$

$$\int \frac{\ln(x+2)}{\sqrt{x+2}}dx = 2(x+2)^{\frac{1}{2}}\ln(x+2) - \int \frac{2(x+2)^{\frac{1}{2}}}{x+2}dx$$

$$= 2(x+2)^{\frac{1}{2}}\ln(x+2) - 4(x+2)^{\frac{1}{2}} + c$$

$$\int_3^{+\infty} \frac{\ln(x+2)}{\sqrt{x+2}}dx = \lim_{x\longrightarrow+\infty}\left[2(x+2)^{\frac{1}{2}}\ln(x+2) - 4(x+2)^{\frac{1}{2}}\right]_3^x$$

$$= \lim_{x\longrightarrow+\infty}\left[2(x+2)^{\frac{1}{2}}\ln(x+2) - 2\right]_3^x = \infty$$

ومنه فإن التكامل B متباعد

التمرين الرابع:

أوجد تفاضل كل من Y_1 و Y_2 حيث:

$$Y_2 = e^{-2x} + \cos 3x \quad ، \quad Y_1 = x^2 - \ln x$$

الحل:

$$dY_1 = \frac{dy_1}{dx}dx = \frac{d(x^2-\ln x)}{dx}dx = \left(2x-\frac{1}{x}\right)dx$$

$$dY_2 = \frac{dy_2}{dx}dx = \frac{d(e^{-2x}+\cos 3x)}{dx}dx = -(2e^{-2x}+3\sin 3x)dx$$

الفصل السابع: الدالة ذات عدة متغيرات

نقصد بالدالة ذات عدة متغيرات أن الدالة أو التابع y يتغير عندما تتغير عناصر معينة ولنسميها متغيراته[58]، وصيغة الدالة التي تحوي متغيرتين تكون: $y=f(x_1\,,x_2)$ أما الدالة التي تحوي ثلاث متغيرات فتكون: $y=f(x_1,x_2\,,x_3)$ أما الدالة التي تحوي n متغير فتكون بالشكل: $y=f(x_1,x_2\,,\dots\dots\dots,x_n)$

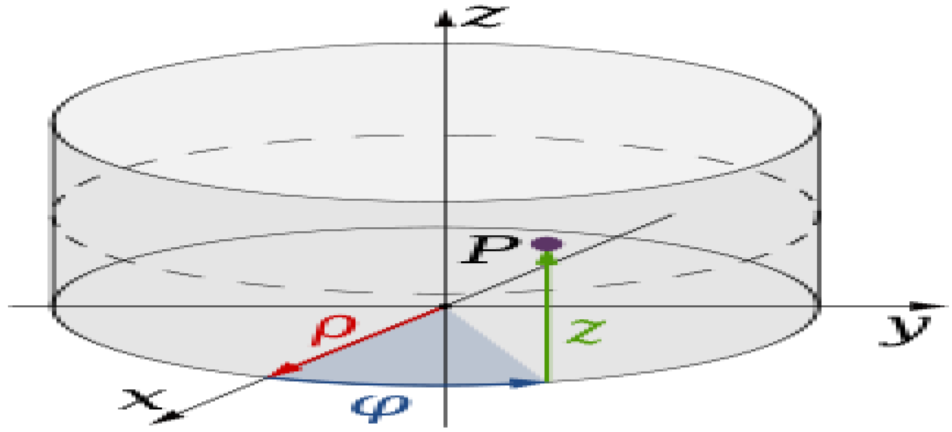
[58]- للاطلاع أكثر أنظر:

-Jean- Marie Monier , Analyse, Edition Dunod, paris, 1997, p509.

1-7)- الدالة ذات متغيرتين

أولاً: تعريف الدالة ذات متغيرتين

إذا كانت لدلينا الدالة ذات المتغيرتين التالية: $Z = f(x, y)$ يتم رسمها في معلم ثلاثي الأبعاد كما يبين ذلك الشكل البياني التالي:



من أجل معرفة مجموعة تعريف هذه الدالة ووضعية منحناها نأخذ المثالين التاليين

مثال1: لديك الدالة التالية:

$$Z = f(x, y) = x^2 + y^2$$

من أجل إيجاد منحنى هذه الدالة مثلاً

-إذا أخذنا $y=0$ فتصبح لدينا عندئذ الدالة الجزئية $f_x(x,0)$ وهي: $Z= x^2$

-إذا أخذنا $x=0$ فتصبح لدينا عندئذ الدالة الجزئية $f_y(0,y)$ وهي $Z= y^2$

إذا جعلنا $Z=C$ فإننا نحصل على $Z = C = x^2 + y^2$ مع $C\geq 0$

وبالتالي فإن منحنى Z هو دائرة مركزها النقطة$(0,0)$ ونصف قطرها $\sqrt{C}$

(على اعتبار أن معادلة الدائرة ذات المركز(x_0,y_0) ونصف القطر r يكون شكلها كما يلي: $((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$

مثال2: لديك الدالة ذات المتغيرتين في الشكل التالي:

$Z = f(x, y) = \ln(x - y + 1)$ فأوجد مجموعة تعريفها

$$D_f = \{(x, y), x - y + 1 > 0\}$$

وهو الجزء المحدود بالمستقيم ذو المعادلة $y=x+1$ كما يبين ذلك الرسم الموالي

ثانياً: مدلول نـهاية الدالة ذات متغيرتين وخصائصها

أ)- مدلول نـهاية الدالة ذات متغيرتين

نقول أن L هو نـهاية الدالة $f(x,y)$ لما تنتهي النقطة $M(x,y)$ الى النقطة $M'(x_0,y_0)$ ونكتب: $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=L$ أو $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=L$

هذا يعني أن:

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)=L \Longrightarrow \lim_{x\to a} f_x(x,b)=\lim_{y\to b} f_y(a,y)=L$$

مثال: أوجد النـهاية التالية $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{xy}{x^2+y^2}$

لنفرض أولاً أن النقطة $(x,y)=(0,0)$ تقع على المحور x أي أن $(x,y)=(x,0)$ وبالتالي فإن:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{xy}{x^2+y^2}=\lim_{\substack{x\to 0\\ y=0}} \frac{xy}{x^2+y^2}=0$$

لنفرض ثانياً أن النقطة $(x,y)=(0,0)$ تتحرك على المحور y أي أن $(x,y)=(0,y)$ وبالتالي فإن:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{xy}{x^2+y^2}=\lim_{\substack{y\to 0\\ x=0}} \frac{xy}{x^2+y^2}=0$$

لنفرض ثالثاً أن النقطة (x,y) ترسم المستقيم $y=mx$ حتى تؤول الى النقطة $(0,0)$ وبالتالي فإن:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=mx\to 0}} \frac{xy}{x^2+y^2}=\lim_{x\to 0} \frac{mx^2}{x^2+m^2x^2}=\frac{m}{1+m^2}$$ وهي مرتبطة *بقيمة* m

هذا يعني أنه ليست هناك نـهاية للدالة $f(x,y)$ لما تنتهي النقطة (x,y) الى النقطة $(0,0)$

ب)- **خصائص نـهاية الدالة ذات متغيرتين**

إذا كان لدينا: $\lim\limits_{x,y)\to(a,b)} f(x,y)=L_1$ و $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} g(x,y)=L_2$

تتميز نهاية الدالة ذات متغيرتين بالخصائص التالية:

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)}[f(x,y)+g(x,y)] = L_1 + L_2 \qquad (1$$

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)}[f(x,y).g(x,y)] = L_1.L_2 \qquad (2$$

مثال: أوجد النهاية التالية: $\lim_{(x,y)\to(2,-1)}(x^3+2x^2y-xy-2y^2)$

$$\lim_{(x,y)\to(2,-1)}(x^3+2x^2y-xy-2y^2) = \lim_{(x,y)\to(2,-1)}(x^3) +$$

$$\lim_{(x,y)\to(2,-1)}(2x^2y) - \lim_{(x,y)\to(2,-1)} xy - \lim_{(x,y)\to(2,-1)}(2y^2) =$$

=8-8+2-2=0

ثالثاً: استمرار الدالة ذات متغيرتين

إذا كانت لدينا الدالة f معرفة على منطقة A من المستوي oy , ox وكانت P$\in A$

نقول أن الدالة f مستمرة عند P إذا كانت:

$$M\in A \ , \quad \lim_{M\to P} f(M) = f(P)$$

مثال: لديك الدالة ذات المتغيرتين في الشكل التالي:

$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & ,(x,y)\neq(0,0) \\ 0 \ , & (x,y)=(0,0) \end{cases}$ هل هي مستمرة عند النقطة (0,0)؟.

لدينا: $\lim_{\substack{y\to 0\\ x=0}} f_y(0,y) = 0$ ، $\lim_{\substack{x\to 0\\ y=0}} f_x(x,0) = 0$

هذا يعني أن الدالتين الجزئيتين لهذه الدالة مستمرتين عند النقطة (0,0)

ورأينا سابقاً أن الدالة $f(x,y)$ لا تقبل نهاية عند النقطة (0,0) مما يعني أن هذه الدالة غير مستمرة عند النقطة (0,0) رغم أن دالتيها الجزئيتين مستمرتين عندها، وبالتالي نقول أنه إذا كانت دالة ما مستمرة عند نقطة معينة فإن ذلك يقتضي حتماً أن دالتيها الجزئيتين مستمرتين عند تلك النقطة والعكس غير صحيح.

7-2- المشتقة الجزئية وتكامل الدالة ذات متغيرتين

أولاً: المشتقة الجزئية للدالة ذات متغيرتين[59]

إذا كانت لدينا الدالة $f(x,y)$ معرفة من $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ وكانت قابلة للاشتقاق عند النقطة (x_0,y_0) نسمي $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ المشتقات الجزئية الأولى للدالة $f(x,y)$ حيث:

$$\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x} = \lim_{x\to x_0}\left(\frac{f(x,y_0)-f(x_0,y_0)}{x-x_0}\right)$$

$$\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y} = \lim_{y\to y_0}\left(\frac{f(x_0,y)-f(x_0,y_0)}{y-y_0}\right)$$

مثال1: لتكن لدينا الدالة $f(x,y)$ التالية $f(x,y) = x^3 + 3yx^2 - 2xy^3 + 7$

أوجد $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x^2 + 6xy - 2y^3$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 3x^2 - 6xy^2$$

مثال2: لتكن لدينا الدالة $f(x,y)$ التالية: $f(x,y) = e^{-\frac{x}{y}}$ أوجد $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{1}{y}e^{-\frac{x}{y}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x}{y^2}e^{-\frac{x}{y}}$$

ثانياً: التكامل الثنائي[60]

نستعرض هنا تعريف التكامل الثنائي وخصائصه وحساب التكامل الثنائي باستعمال

---

[59]- للاطلاع أكثر أنظر: شمعون شمعون، الرياضيات الاقتصادية، مرجع سابق، ص71.

[60]- للاطلاع أكثر أنظر: خلود علي سلامة، الرياضيات الحديثة، دار صفاء للنشر والتوزيع، عمان-الأردن، 2008، ص167.

الاحداثيات القطبية وصيغة قرين ريمان

أ)-تعريف التكامل الثنائي

ليكن في الفضاء ox ، oy مجال D محدود بالمنحنى $\mathcal{L}$ ، نعتبر في هذا المجال الدالة المستمرة $U = f(x,y)$ ، نجزئ المجال D الى n جزء Δs فتكون لدينا الأجزاء $\Delta s_1 , \Delta s_2, \dots \dots \dots , \Delta s_n$ ولنأخذ من كل مجال جزئي Δs_i نقطة p_i فتكون لدينا النقاط $p_1 \quad , p_2 \quad \dots \dots .., p_n$ ولتكن $f(p_i)$ قيمة الدالة عند النقطة p_i وليكن $V_n = \sum_{i=1}^{n} f(p_i) \Delta s_i$

حيث V_n مجموع تكامل للدالة $U = f(x,y)$ على المجال D

نسمي تكامل الدالة $U = f(x,y)$ على المجال D نهاية V_n لما $n \to \infty$ أي $\Delta s_i \to 0$ ونكتب:

$$\lim_{\Delta s_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(p_i) \Delta s_i = \iint_D (f(x,y)) dxdy$$

فإذا كان المجال D محدود بـ $y = y_1(x)$ و $y = y_2(x)$ و $x = a$ و $x = b$

حيث $\begin{cases} y_2(x) \geq y_1(x) \\ b > a \end{cases}$ نستطيع عندئذ أن نكتب:

$$\iint_D (f(x,y)) dxdy = \int_a^b \left[\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} ((f(x,y))\, dy \right] \mathrm{dx}$$

مثال: أوجد التكامل التالي:

$$I = \iint_D (x^2 + y^2) dxdy$$

حيث المجال D محدود بـ $y_1(x) = 0$ و $y_2(x) = x^2$ والمستقيمات $x = 0$ و $x = 1$

$$I = \iint_D (x^2 + y^2) dxdy = \int_0^1 \left[\int_0^{x^2} (x^2 + y^2) dy \right] dx =$$

$$=\int_0^1 \left[x^2y+\frac{y^3}{3}\right]_0^{x^2} dx = \int_0^1 \left(x^4+\frac{x^6}{3}\right) dx = (\tfrac{1}{5}x^5+\frac{x^7}{21})_0^1$$

$$=\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{21}\right)=\frac{26}{105}$$

ب)-خصائص التكامل الثنائي

لتكن $f(x,y)$ و $g(x,y)$ دالتين مستمرتين على مجال D فإن:

الخاصية1:

$$\iint_D (f(x,y)+g(x,y))dxdy=\iint_D (f(x,y))dxdy+\iint_D (g(x,y))dxdy$$

مثال: لتكن لدينا الدالتين f و g التاليتين والمجال D :

$$f(x,y)=2xy+y \text{ ، } g(x,y)=xy-2 \text{ ، } \mathrm{D}, \begin{cases} y=1\,, & y=2 \\ x=-1\,, & x=0 \end{cases}$$

نقوم بحساب تكامل الدالتين f و g ثم نحسب تكامل الدالة f وتكامل الدالة g

ونقارن بين النتيجتين

$$\iint_D (f(x,y)+g(x,y))dxdy=\iint_D (2xy+y+xy-2)dxdy=$$

$$\iint_D (3xy+y-2)dxdy=\int_1^2\left[\int_{-1}^0(3xy+y-2)\,dx\right]\mathrm{dy}=$$

$$\int_1^2\left[\frac{3}{2}x^2y+xy-2x\right]_{-1}^0 dy=\int_1^2\left(-\frac{1}{2}y-2\right)dy=$$

$$=\left[-\frac{1}{4}y^2-2y\right]_1^2=\left[-\frac{1}{4}2^2-2.2-(-\frac{1}{4}1^2-2)\right]=-\frac{11}{4}$$

نحسب الأن تكامل كل دالة على حدة

$$\iint_D f(x,y)dxdy=\iint_D (2xy+y)dxdy=$$

$$\int_1^2\left[\int_{-1}^0(2xy+y)\,dx\right]dy=\int_1^2[x^2y+xy]_{-1}^0 dy=$$

$$= \int_1^2 (-y+y)dy = 0$$

$$\iint_D g(x,y)dxdy = \iint_D (xy-2)dxdy =$$

$$\int_1^2 \left[\int_{-1}^0 (xy-2)\,dx\right] dy = \int_1^2 \left[\frac{1}{2}x^2 y - 2x\right]_{-1}^0 dy =$$

$$= \int_1^2 \left(-\frac{1}{2}y - 2\right) dy = \left[-\frac{1}{4}y^2 - 2y\right]_1^2 = -\frac{11}{4}$$

ومنه فإن:

$$\iint_D (f(x,y)+g(x,y))dxdy = \iint_D (f(x,y))dxdy + \iint_D (g(x,y))dxdy$$

الخاصية2:

إذا كان المجال D مجموع المجالين D_1 و D_2 فإن:

$$\iint_D (f(x,y))dxdy = \iint_{D_1} (f(x,y))dxdy + \iint_{D_2} (f(x,y))dxdy$$

مثال: إذا كانت لدينا الدالة f و المجالات D ، D_1 ، D_2

$f(x,y) = 2xy + y$ ، D , $\begin{cases} y=1, & y=3 \\ x=-1, & x=1 \end{cases}$, D_1 , $\begin{cases} y=1, & y=3 \\ x=-1, & x=0 \end{cases}$

D_2 , $\begin{cases} y=1, & y=3 \\ x=0, & x=1 \end{cases}$ قارن بين

$\iint_D (f(x,y))dxdy$ و $\iint_{D_1}(f(x,y))dxdy + \iint_{D_2}(f(x,y))dxdy$

لدينا :

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_D (2xy+y)dxdy =$$

$$\int_1^3 \left[\int_{-1}^1 (2xy+y)\,dx\right] dy = \int_1^3 [x^2y + xy]_{-1}^1 dy =$$

$$= \int_1^3 2y dy = [y^2]_1^3 = 8$$

ولدينا :

$$\iint_{D_1} (2xy + y) dxdy + \iint_{D_2} (2xy + y) dxdy =$$

$$\int_1^3 \left[\int_{-1}^0 (2xy + y)\, dx\right] dy + \int_1^3 \left[\int_0^1 (2xy + y)\, dx\right] dy =$$

$$= \int_1^3 [x^2 y + xy]_{-1}^0 dy + \int_1^3 [x^2 y + xy]_0^1 dy =$$

$$= \int_1^3 0.dy + \int_1^3 (2y) dy = 0 + [y^2]_1^3 = 8$$

ومنه نستطيع أن نكتب:

$$\iint_D (f(x,y)) dxdy = \iint_{D_1} (f(x,y)) dxdy + \iint_{D_2} (f(x,y)) dxdy$$

الخاصية3:

إذا كان لدينا λ ثابت فإن:

$$\iint_D \lambda(f(x,y)) dxdy = \lambda \iint_D (f(x,y)) dxdy$$

ج)-حساب التكامل الثنائي باستعمال الاحداثيات القطبية

من أجل حساب التكامل الثنائي باستعمال الاحداثيات القطبية نعوض x و y بـ

$\begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \end{cases}$ حيث: $0 \le \rho \le a$ ، $0 < \theta < 2\pi$

مثال: أوجد تكامل الجسم المحصور بين $-\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{\pi}{4}$ و $\rho = 0$ و $\rho = a\sqrt{\cos 2\theta}$

$$\iint_D \rho d\rho d\theta =$$

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\left[\int_0^{a\sqrt{\cos 2\theta}}\rho d\rho\right]d\theta = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\left[\frac{\rho^2}{2}\right]_0^{a\sqrt{\cos 2\theta}} d\theta =$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{a^2}{2}\cos 2\theta\, d\theta = \frac{a^2}{2}\left[\frac{\sin 2\theta}{2}\right]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} = \frac{a^2}{2}$$

د)- صيغة قرين ريمان

تسمح لنا هذه الصيغة بالمرور من حساب التكامل الثنائي على مجال D الى حساب التكامل عند " C" وهي حدود المجال D وتعطى صيغة قرين ريمان بالشكل التالي:

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy = \int_C P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

مثال: أوجد التكامل I التالي: $I = \int_C -x^2ydx + xy^2dy$

حيث أن C دائرة معادلتها $x^2 + y^2 = r^2$

لتكن: $P(x,y) = -x^2y \Longrightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = -x^2$

$$Q(x,y) = xy^2 \Longrightarrow \frac{\partial Q}{\partial x} = y^2$$

$$\int_C -x^2ydx + xy^2dy = \iint_D (\boldsymbol{x^2} + \boldsymbol{y^2})dxdy$$

نضع: $\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases}$ حيث: $0 \le \rho \le r$ ، $0 < \theta < 2\pi$

$$\iint_D (x^2 + y^2)dxdy = \int_0^{2\pi}\int_0^r \rho^2\rho d\rho d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^r \rho^3 d\rho =$$

$$= \int_0^{2\pi}\left[\frac{\rho^4}{4}\right]_0^r d\theta = \int_0^{2\pi}\left(\frac{r^4}{4}\right)d\theta = \frac{r^4}{4}[\theta]_0^{2\pi} = \frac{r^4}{2}\pi$$

3-7)- الدالة ذات أكثر من متغيرتين

سنتطرق فيما يلي الى المشتقة الجزئية وتفاضل دالة ذات عدة متغيرات

أولاً: المشتقة الجزئية والمشتقة الجزئية من الدرجة النونية لدالة ذات عدة متغيرات

أ)- المشتقة الجزئية لدالة ذات عدة متغيرات[61]

إذا كانت لدينا الدالة ذات عدة متغيرات التالية: $y = f(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n)$ فإن:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \lim_{\Delta x_i \to x_0} \left(\frac{f(x_1, x_2 .. x_i + \Delta x_i, .., x_n) - f(x_1, x_2, .., x_i, .., x_n)}{\Delta x_i}\right)$$

وتطبيقياً فإننا عندما نحسب المشتقة الجزئية لدالة ذات عدة متغيرات بالنسبة لمتغيرة ما فإننا نثبت باقي المتغيرات ونعتبر المتغير الذي نشتق بالنسبة اليه هو المتغير الوحيد

مثال: لتكن لدينا الدالة التالية $f(x, y, z) = 62 - 10x + 2y - z$

أوجد $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial f}{\partial z}$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -10 \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2 \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial z} = -1$$

ب)- **المشتقة الجزئية من الدرجة النونية لدالة ذات عدة متغيرات**

إذا كانت للدالة $f(x, y)$ مشتقتان جزئيتان $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ وكانت هذه المشتقات الجزئية قابلة للاشتقاق بالنسبة لـ x و y فإن المشتقات الجزئية الممكنة هي:

$$f'(x, y)_{xy} = \frac{\partial^2 y}{\partial x \partial y} \quad , \quad f'(x, y)_{yx} = \frac{\partial^2 y}{\partial y \partial x}$$

$$f'(x, y)_{xx} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \quad , \quad f'(x, y)_{yy} = \frac{\partial^2 y}{\partial y^2}$$

مثال: لتكن لدينا الدالة التالية $f(x, y) = xy^2 - 1$

أوجد $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, $f'(x, y)_{yx}$, $f'(x, y)_{xy}$, $f'(x, y)_{xx}$, $f'(x, y)_{yy}$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2\text{xy} \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial x} = y^2$$

$$f'(x, y)_{xy} = \frac{\partial^2 y}{\partial x \partial y} = 2y \quad , \quad f'(x, y)_{yx} = \frac{\partial^2 y}{\partial y \partial x} = 2y$$

---

[61]- للاطلاع أكثر أنظر:

-Jean- Marie Monier , Analyse, Edition Dunod, paris, 1997, p514.

$$f'(x,y)_{xx} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0 \quad , \qquad f'(x,y)_{yy} = \frac{\partial^2 y}{\partial y^2} = 2x$$

ثانياً: تفاضل دالة ذات عدة متغيرات

لتكن مثلاً دالة ذات متغيرتين $z = f(x,y)$ تتغير z في احدى الحالات التالية:

-إذا تغيرت x وبقيت y ثابتة

-إذا تغيرت y وبقيت x ثابتة

-إذا تغيرت x و y معاً

في الحالتين الأولى والثانية فإن التغير في z يكون بقياس المشتقات الجزئي $\Delta z \approx \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x$ و $\Delta z \approx \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y$ أما في الحالة الثالثة فيكون تغير كما يلي:

$$\Delta z \approx \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y$$

فإذا حدثت تغيرات طفيفة على كل من x و y فإن $\Delta x = dx$ و $\Delta y = dy$ وينتج عن ذلك حدوث تغيرات طفيفة على z بمقدار $\Delta z = dz$ وبالتالي يكتب التفاضل الكلي عندئذ بالشكل: $dz = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$

مثال: أوجد التفاضل الكلي للدالة التالية: $z = 4x^2 - 5xy + \frac{1}{y}$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -5x - \frac{1}{y^2} \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial x} = 8x - 5y$$

$$dz = (8x - 5y)dx + (-5x - \frac{1}{y^2})dy$$

وبنفس الطريقة يتم حساب التفاضل الكلي لدالة ذات ثلاث متغيرات فأكثر، فإذا كانت لدينا مثلاً الدالة التالية: $w = f(x,y,z)$ فإن:

$$dw = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz$$

مثال: أوجد التفاضل الكلي للدالة التالية:

$$w = f(x,y,z) = 4y^2 - 3x^2 + yz + 4z^2$$

$\frac{\partial f}{\partial z}$ = y+8z , $\frac{\partial f}{\partial y}$ = 8y +z , $\frac{\partial f}{\partial x} = -6x$

$$\mathrm{dw} = \quad (-6x)\mathrm{dx} + (\ 8\mathrm{y} + \mathrm{z})\mathrm{dy} + (y + 8z)\mathrm{dz}$$

4-7- التكامل الثلاثي و تعظيم دالة ذات عدة متغيرات

أولاً: التكامل الثلاثي

أ)-التعريف بالتكامل الثلاثي

ليكن في الفضاء ox ، oy ، oz مجال V محصور بالمساحة S ، نعتبر في هذا المجال الدالة المستمرة $U = f(x, y, z)$ ، نجزئ المجال V الى n مجال جزئي ΔV_1 , $\Delta V_2, \dots \dots \dots, \Delta V_n$ ولنأخذ من كل مجال جزئي ΔV_i نقطة p_i فتكون لدينا النقاط p_1 , p_2 ...., p_n ولتكن $f(p_i)$ قيمة الدالة عند النقطة p_i

نسمي تكامل ثلاثي للدالة $U = f(x, y, z)$ على المجال V المجموع التالي:

$$\lim_{\Delta V_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(p_i)\Delta V_i = \iiint_V \left(f(x, y, z)\right) dxdydz$$

ب)-حساب التكامل الثلاثي

التكامل الثلاثي لدالة مستمرة $f(x, y, z)$ على المجال V يحسب كما يلي:

$$\iiint_V \left(f(x, y, z)\right) dxdydz = \int_{z_1}^{z_2} \left[\iint_D \left(f(x, y, z)\right) dxdy\right] dz$$

مثال1: أوجد التكامل الثلاثي I التالي

$$I = \iiint_V \frac{dxdydz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

حيث Vهو جزء المخروط ذو المعادلة $x^2 + y^2 = z^2$ومحدود بالمستويz=1 وz=0

$$I = \iiint_V \frac{dxdydz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \int_0^1 \left[\iint_D \frac{dxdy}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\right] dz$$

$$J = \iint_D \frac{dxdy}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

نستعمل هنا الاحداثيات القطبية حيث $x = \rho.\cos\theta$ و $y = \rho.\sin\theta$ ، $0 < \rho < z$ ، $0 < \theta < 2\pi$

$$J = \iint_D \frac{\boldsymbol{dxdy}}{\sqrt{\boldsymbol{x^2+y^2+z^2}}} = \int_2^{2\pi}\left[\int_0^z \frac{\boldsymbol{\rho d\rho}}{\sqrt{\boldsymbol{\rho^2+z^2}}}\right]d\theta$$

نضع : $U = \rho^2 + z^2 \implies U' = 2\rho.d\rho$

$$K = \int_0^z \frac{\boldsymbol{\rho d\rho}}{\sqrt{\boldsymbol{\rho^2+z^2}}} = \int_0^Z \frac{1}{2}\frac{dU}{U^{\frac{1}{2}}} = \left[\rho^2 + z^2\right]_0^z = z^2$$

$$J = \int_2^{2\pi}[\,z^2]\,d\theta = \left[z^2\theta\right]_0^{2\pi} = 2\pi z^2$$

$$I = \int_0^1 2\pi z^2 dz = 2\pi\left[\frac{z^3}{3}\right]_0^1 = \frac{2\pi}{3}$$

مثال2: أوجد التكامل الثلاثي I التالي

$$I = \iiint_V z^2 dxdydz$$

حيث Vمعرفة بالعلاقتين $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ و z>0

اذن منطقة التكامل واقعة ضمن نصف الكرة $x^2 + y^2 + z^2 = 1$

$$I = \int_0^z \left[\iint_D dxdy\right] z^2 dz$$

$$z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$$

$$\int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} z^2 dz = \left[\frac{z^3}{3}\right]_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} = \frac{1}{3}(1 - x^2 - y^2)^{\frac{3}{2}}$$

D: هي الدائرة $x^2 + y^2 = 1$ ومنه

$$\boldsymbol{I} = \iint_D \frac{1}{3}(1-x^2-y^2)^{\frac{3}{2}}dxdy = \int_0^{2\pi}\int_0^1 \frac{1}{3}(1-\rho^2)^{\frac{3}{2}}\rho d\rho d\theta$$

نضع : $U = (1-\rho^2) \Rightarrow dU = -2\rho . d\rho$ ومنه

$$I = \int_0^{2\pi}\frac{1}{3}\left[\int_0^1 -\frac{1}{2}U^{\frac{3}{2}}dU\right] = \int_0^{2\pi}\frac{1}{3}\left[\frac{-1}{2}\frac{2}{5}U^{\frac{5}{2}}\right]=$$

$$= \int_0^{2\pi}\frac{1}{3}\left[\frac{-1}{5}(1-\rho^2)\right]_0^1 d\theta = \left[\frac{1}{3}\frac{1}{5}\theta\right]_0^{2\pi} = \frac{2\pi}{15}$$

ثانياً: تعظيم دالة ذات عدة متغيرات[62]

نتطرق هنا الى تعظيم دالة ذات عدة متغيرات في ظل عدم وجود قيود وفي حالة وجود قيود

أ)- تعظيم دالة ذات عدة متغيرات في حالة عدم وجود قيود

في هذه الحالة نبحث عن المشتقات الجزئية لهذه الدالة ونساويها للصفر، ثم نحل جملة معادلات مكونة من تلك المشتقات الجزئية وحلول تلك الجملة هي التي تعظم الدالة محل الدراسة

مثال1: أوجد القيم القصوى للدالة التالية:

$$\boldsymbol{f(x,y) = x^2 - xy + \frac{y^2}{2} - 2x - y + 1}$$

المشتقات الجزئية لهذه الدالة هي:

$$\begin{cases}\frac{\delta f(x,y)}{\delta x} = 0\\ \frac{\delta f(x,y)}{\delta y} = 0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}2x - y - 2 = 0 \dots\dots\dots\dots(1)\\ -x + y - 1 = 0 \dots\dots\dots\dots(2)\end{cases}$$

بجمع العلاقتين (1) و (2) نجد: $x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3$

وبتعويض x بما يساويه في احدى المعادلتين (1) أو (2) نجد: $y = 4$

ومنه النقطة $\boldsymbol{(x,y) = (3,4)}$ هي التي تعظم الدالة $\boldsymbol{f(x,y)}$

---

[62]- للاطلاع أكثر أنظر: شمعون شمعون، الرياضيات الاقتصادية، مرجع سابق، ص72.

ب)- تعظيم دالة ذات عدة متغيرات في ظل وجود قيود

في هذه الحالة نقوم اما بتعويض القيد أو القيود في المعالة ثم تعظيم المعادلة التي تنتج عن ذلك بالطريقة السابقة أو أننا نشكل دالة لاغرونج ونعظمها لأن تعظيم دالة لاغرونج يؤدي الى تعظيم دالة الهدف وتحقق القيد في آن واحد، وفيما يلي نأخذ مثال توضيحي لكل حالة من الحالتين

مثال: أوجد القيم القصوى للدالة $\boldsymbol{f(x,y)=x^2y}$ تحت القيد $\boldsymbol{y=-\frac{3}{4}x+60}$

أولاً: سنقوم بالحل بطريقة التعويض

$$\boldsymbol{f(x,y)=x^2y=x^2\left(-\frac{3}{4}x+60\right)=-\frac{3}{4}x^3+60x^2}$$

$$\frac{\delta f(x)}{\delta x}=-\frac{9}{4}x^2+120x=x\left(-\frac{9}{4}x+120\right)=0$$

$$\Longrightarrow\begin{cases}x=0 \quad \text{أو} \quad x=\dfrac{160}{3} \ (\text{نختارهذه القيمة}) \\ \qquad\qquad y=20\end{cases}$$

حيث اخترنا قيمة x التي تعظم الدالة

ثانياً: سنقوم بالحل بطريقة لاغرونج

تكتب دالة لاغرونج بالصيغة التالية:

$$\boldsymbol{\mathcal{L}(x,y,\lambda)=x^2y+\lambda(60-\frac{3}{4}x-y)}$$

نحسب مختلف المشتقات الجزئية لدالة لاغرانج ونجعلها مساوية للصفر فنجد:

$$\begin{cases}\dfrac{\delta\mathcal{L}(x,y,\lambda)}{\delta x}=0\\ \dfrac{\delta\mathcal{L}(x,y,\lambda)}{\delta y}=0\\ \dfrac{\delta\mathcal{L}(x,y,\lambda)}{\delta\lambda}=0\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}2xy-\frac{3}{4}\lambda=0\ \ldots\ldots\ldots\ldots..(1)\\ x^2-\lambda=0\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots..(2)\\ \boldsymbol{60-\frac{3}{4}x-y=0}\ \ldots\ldots\ldots\ldots(\boldsymbol{3})\end{cases}$$

بقسمة (1) على المعادلة (2) نجد: $\frac{2y}{x}=\frac{3}{4}\Longrightarrow x=\frac{8}{3}y$

بتعويض العلاقة $x=\frac{8}{3}y$ في المعادلة (3) نجد:

$x = \frac{160}{3}$ و $y = 20$ وهو نفس الحل المتوصل اليه بالطريقة الأولى

تمارين الفصل السابع:

التمرين الأول: اوجد النهايات التالية : $\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{x^2-xy+1}{x^2+y^2}$

$$\lim_{(x,y)\to(2,-1)} \frac{x^3 - 2x^2y - xy - y^2}{x + 2y}$$

الحل:

1) النهاية $\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{x^2-xy+1}{x^2+y^2}$

$$\lim_{(x,y)\to(1,0)} (x^2 - xy + 1) = 2$$

$$\lim_{(x,y)\to(1,0)} (x^2 + y^2) = 1$$

$$\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{x^2 - xy + 1}{x^2 + y^2} = \frac{2}{1} = 2$$

2) النهاية الثانية

$$\lim_{(x,y)\to(2,-1)} \frac{x^3 - 2x^2y - xy - y^2}{x + 2y} = \lim_{(x,y)\to(2,-1)} \frac{(x^2 - y)(x + 2y)}{x + 2y}$$

$$= \lim_{(x,y)\to(2,-1)} (x^2 - y) = 5$$

التمرين الثاني: اوجد المشتقات الجزئية الأولى للدالة التالية:

$$f(x, y, z) = x\, e^z \cos y$$

الحل:

$$f_x = \frac{\delta f(x, y, z)}{\delta x} = e^z \cos y$$

$$f_y = \frac{\delta f(x, y, z)}{\delta y} = -x\, e^z \sin y$$

$$f_z = \frac{\delta f(x, y, z)}{\delta z} = x\, e^z \cos y$$

التمرين الثالث: إذا كانت لدينا $z = f\left(\frac{y}{x}\right)$ بين أن:

$$x\frac{\delta z}{\delta x} + y\frac{\delta z}{\delta y} = 0$$

الحل:

نضع: $u = \frac{y}{x} \Rightarrow z = f(u)$

$$\frac{\delta z}{\delta x} = \frac{\delta z}{\delta u}.\frac{\delta u}{\delta x} = f'(u)\frac{\delta(\frac{y}{x})}{\delta x} = f'(u)\left(-\frac{y}{x^2}\right)$$

$$\frac{\delta z}{\delta y} = \frac{\delta z}{\delta u}.\frac{\delta u}{\delta y} = f'(u)\frac{\delta(\frac{y}{x})}{\delta y} = \frac{1}{x}.f'(u)$$

$$\frac{\delta z}{\delta x}x = -\frac{y}{x}.f'(u)$$

$$\frac{\delta z}{\delta y}y = \frac{y}{x}.f'(u)$$

ومنه:

$$x\frac{\delta z}{\delta x} + y\frac{\delta z}{\delta y} = -\frac{y}{x}.f'(u) + \frac{y}{x}.f'(u) = 0$$

التمرين الرابع:

عظم الدالة التالية $f(x,y) = 2x + 4y + xy + 8$

تحت القيد : $5x + 10y = 50$

الحل:

$$\mathcal{L}(x,y,\lambda) = 2x + 4y + xy + 8 + \lambda(50 - 5x - 10y)$$

من أجل تعظيم الدالة $f(x,y)$ تحت القيد المعطى يكفي تعظيم الدالة $\mathcal{L}\ (x,y,\lambda)$ وذلك بجعل كل مشتقاتها الجزئية الأولى مساوية للصفر

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 2 + y - 5\lambda = 0 \\ \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = 4 + x - 10\lambda = 0 \\ \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = 50 - 5x - 10y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{2+y}{5} = \dfrac{4+x}{10} \\ 50 - 5x - 10y = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 2y \\ 50 - 5x - 10y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = \dfrac{5}{2} \end{cases}$$

وقيمة الدالة $f(x,y)$ عندئذ تكون:

$f(x,y) = 2(5) + 4\left(\frac{5}{2}\right) + 5\left(\frac{5}{2}\right) + 8 = 40.5$

الخاتمة

الرياضيات عبارة عن مفاهيم مجردة واصطلاحات تدل على الكم وهي الدراسة المجردة البحتة التسلسلية للقضايا والأنظمة الرِّياضية، يستخدمها الانسان لفهم ما حوله من الظواهر والقوانين التي تحكمها، وهي واحدة من أكثر أقسام المعرفة الإنسانية فائدة، وتتجلى فائدتها في أنها تنشط الذهن وتصفيه وتساعد على التسريع من ردود الفعل، بالإضافة الى ما تقدمه من دفع للعلوم الأخرى بهدف ترقيتها وتطويرها لتسهيل الاستفادة منها.

من خلال هذه المحاضرات تم عرض مبادئ نظرية المجموعات ومفاهيم عامة حول المتتاليات والسلاسل كما استعرضنا الدوال ذات المتغير الواحد وذات عدة متغيرات، ونهاياتها واستمرارها ومشتقاتها وتفاضلها وقيمها القصوى بالإضافة الى التطرق للدوال الاصلية وحساب التكامل، وهي كلها مفاهيم يستعين بها الطالب في فهم التحاليل المعمقة في تخصصه، والتي تكون مبنية في الأساس على مجموعة من التقنيات الكمية، وما نشاهده في الوقت الحاضر من تطور في العلوم والاقتصاد وإدارة الأعمال والمحاسبة والاعلام الآلي الا نتيجة استخدام المفاهيم والتحاليل الرياضية في مختلف هذه الميادين، كما أن استخدام الأساليب الرياضية الحديثة التي اعتمدت على البرامج الخطية وبحوث العمليات والتي تعتمد بدورها على المحددات والمصفوفات والاحتمالات ساعد الإنسان في الكشف عن الكثير من الابتكارات في مختلف المجالات العلمية، حيث لعبت الرياضيات دورًا أساسيًا في تطور التقنية الحديثة .كالأدوات، والتقنيات، والمواد، ومصادر الطاقة التي جعلت حياتنا وعملنا أكثر يسرًا ، ونتيجة لذلك أصبحت الرياضيات تؤثر في كل جزء من حياتنا تقريبًا .

قائمة المراجع

ا-الكتب باللغة العربية:

-إبراهيم محمد مهدي وتوفيق البلقيني، أسس التحليل الرياضي للتجاريين والاقتصاديين، مكتبة الجلاء الجديدة، المنصورة-مصر، 1988-1989.

-أسماء عبد الكريم عيسى، الرياضيات المعاصرة مسائل وحلول، دار صفاء للنشر والتوزيع، الطبعة الأولى، عمان-الأردن، 2009.

-أنمار أمين البرواري وعربية عبد الرحمن داود، الرياضيات والبرمجة الخطية وتطبيقاتها الإدارية والاقتصادية، دار مجدلاوي للنشر و التوزيع، الطبعة الأولى، عمان-الأردن، 2010-2011.

-تيدي س.ج ليفيت، ترجمة بولس بسيط وآخرون، النهايات والاتصال، الدار الدولية للنشر والتوزيع، الطبعة الثالثة، القاهرة-مصر، 1998.

-حسن ياسين طعمة، الرياضيات للاقتصاد والعلوم الإدارية والمالية، دار الصفاء للنشر والتوزيع، الطبعة الأولى، عمان-الأردن، 2010.

-خلود علي سلامة، الرياضيات الحديثة، دار صفاء للنشر والتوزيع، عمان-الأردن، 2008.

-رشيد توري، ترجمة عبد الحفيظ مقران، مدخل الى التحليل الرياضي، ديوان المطبوعات الجامعية، الطبعة الثانية، الجزائر، 1990.

-رمضان محمد جهيمة، الرياضيات لدارسي العلوم الاقتصادية والإدارية والمالية، دار الكتاب الجديد المتحدة، بيروت-لبنان، 2006.

-سلطان محمد عبد الحميد، رياضيات الاعمال للتجاريين، المكتبة العصرية، الطبعة الاولى، المنصورة-مصر، 2007.

-سليمان أبو صبحا، الرياضيات للعلوم الاقتصادية والإدارية، مكتبة بغدادي للنشر والتوزيع، الطبعة الأولى، عمان-الأردن، 1994.

-شمعون شمعون، الرياضيات الاقتصادية، ديوان المطبوعات الجامعية، الطبعة الثالثة، الجزائر، 1998.
-عبد الله محمد الراشد وصالح عبد الرحمن القويز، المدخل الى الدوال الحقيقية، مطابع جامعة الملك سعود، الطبعة الثانية، المملكة العربية السعودية، 1972.
-عبد ربه إبراهيم علي وزغلول يحي سعد، مقدمة في الرياضيات، الدار الجامعية، الإسكندرية-مصر، 1988.
-علي الخطيب، مبادئ التحليل الرياضي، ديوان المطبوعات الجامعية، الطبعة الثانية، الجزائر، 1989.
-غوثي بوكلي حسن، الوجيز في الرياضيات، ديوان المطبوعات الجامعية، الطبعة الثالثة، الجزائر، 2008.
-فتحي خليل حمدان، الرياضيات للعلوم الإدارية والمالية، دار وائل للنشر، الطبعة الأولى، عمان-الأردن، 2006.
-قيس الوهابي، المدخل الى الرياضيات الحديثة، مؤسسة الشرق للنشر والترجمة، الدوحة-قطر، 1985.
-لحسن عبد الله باشيوة، الرياضيات الاساسية وتطبيقاتها، دار المريخ للنشر والتوزيع،الرياض، 2011.
-هوارد أنتون، ترجمة هادي مجيد حداد، الرياضيات وتطبيقاتها في العلوم الإدارية والاجتماعية، دار المريخ للنشر، الرياض-المملكة العربية السعودية، 1987.

ب-الكتب باللغة الأجنبية **LES LIVRES**

- Jean VEODTS, cours de mathématiques, Ellipses Edition, paris, 2002.
-Arezki Kessi et Abdelouahab Mahmoudi, les mathématiques a l'université, Imprimerie Top Colors, Constantine, 2001.

-B.Demidovitch, Recueil d’exercices et problèmes d’analyse mathématiques, Edition Mir, Moscou-Rusie, 1971.

-CLAUDE Boy et ALAIN NIZARD, Analyse mathématique, Edition Armand Colin, paris, 1990.

-Isabelle cotto et autres, mathématiques éléments de calcul différentiel pour l’économie, Ellipses Edition, paris, 2011.

-J.Quinet, Cours élémentaires de mathématiques supérieures, 6éme édition, Dunod, paris, 1976.

-Jean Franchini et jean-claude jacquens, cours de mathématiques, Ellipses Edition, paris, 2004.

-Jean- Marie Monier , Analyse, Edition Dunod, paris, 1997.

-jean pierre lecoutre , Analyse TD, Edition Dunod, 5éme édition, paris, 2013.

-N.Piskonov, calcul différentiel et intégrale, Tom2, 11éme édition, Edition Mir, Moscou-Rusie, 1980.

-NAILA Hayek et jean-pierre leca, mathématiques pour l’économie, Analyse-Algebre, Edition Dunod , 4éme édition, paris, 2011.

-Olivier ferrier, maths pour Economistes, Edition Boek Université, Bruxelles, Belgique, 2007.