

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE
SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE M'HAMED BOUGARA-BOUMERDES



Faculté des **Hydrocarbures** et de la **Chimie**

Thèse de Doctorat

Présentée par

Mr. TOUATI BRAHIM Ammar

Filière : Génie électrique

Option : Automatique appliquée et traitement du signal

Estimation et commande des systèmes mécaniques sous contraintes

Soutenue publiquement le : 16 /10 / 2018 devant le jury :

GROUNI	Said	Prof	UMBB	Président
KIDOUCHE	Madjid	Prof	UMBB	Rapporteur
CHAREF	Abdelfateh	Prof	UM Constantine	Examineur
DJENOUNE	Said	Prof	UMM Tizi-Ouzou	Examineur
MAIDI	Ahmed	Prof	UMM Tizi-Ouzou	Examineur
AHRICHE	Aimad	MC/A	UMBB	Examineur

Année Universitaire : 2017/2018

à mes chers parents

à ma famille

à l'âme de mon oncle

Remerciement

Je remercie très chaleureusement mon directeur de thèse, Madjid Kidouche, Professeur à l'Université de Boumerdes, pour avoir dirigé mes travaux et m'avoir fait découvrir le monde de la recherche. Merci pour vos échanges scientifiques, vos conseils et votre rigueur. Merci pour votre soutien scientifique et humain. Je voudrais aussi vous remercier d'avoir cru en mes capacités et de m'avoir fourni d'excellentes conditions me permettant d'aboutir à la production de cette thèse. Cette thèse n'aurait vu le jour sans votre confiance et votre générosité.

J'exprime également mes remerciements aux membres du jury, qui ont accepté d'évaluer mon travail de thèse. Merci à Monsieur Grouni Said, Professeur à l'Université M'hamad Bouguara Boumerdes, d'avoir accepté d'être président du jury de cette thèse, et à Messieurs Charef Abdelfateh Professeur à l'Université de Constantine, Djenoune Said Professeur à l'Université de Tizi-Ouzou, Maida Ahmed Professeur à l'Université de Tizi-Ouzou et Ahriche Aimad Maître de Conférences à l'Université de Boumerdes d'avoir accepté d'être les rapporteurs de ce manuscrit. Leurs remarques et suggestions lors de la lecture de mon rapport m'ont permis d'apporter des améliorations à la qualité de ce dernier.

Je remercie tous mes enseignants et mes collègues du département Automatisation et Electrification des Procédés Industriels de l'Université de Boumerdès.

Je voudrais remercier toute ma famille qui me soutienne à chaque instant de ma vie et m'encourage à poursuivre cette voie.

Résumé

L'objectif de cette thèse est la synthèse d'un observateur de vitesse adaptatif pour des systèmes mécaniques avec des contraintes non holonomes en présence des forces de frottement inconnues et des perturbations constantes. Après avoir rappelé quelques concepts fondamentaux sur la stabilité, l'observabilité des systèmes dynamiques et les principales techniques d'observation existantes pour les systèmes mécaniques, nous nous sommes intéressés à la synthèse des observateurs par la technique d'immersion et invariance (I&I) qui donne un observateur global avec une convergence exponentielle. Dans un premier temps, nous avons passé en revue les différents observateurs de type I&I qui existent dans la littérature. Dans ce contexte, nous avons remarqué certaines limitations liées aux ces observateurs telle que, l'absence de frottement et de perturbations dans les modèles dynamiques et l'exigence d'une solution explicite de certaines équations aux dérivées partielles qui ne peuvent être dérivées *a priori*. Ensuite, nous avons proposé une conception qui évite la solution des équations aux dérivées partielles et assure la convergence globale pour les systèmes mécaniques avec k -contraintes non holonomes. L'observateur est totalement constructif et donné par des expressions explicites. Les résultats de la simulation témoignent de l'efficacité et des caractéristiques robustes de l'observateur développé.

Mots clés : observateur adaptatif, immersion et invariance, système mécanique, perturbations inconnues, forces de frottement.

Abstract

This thesis presents an adaptive speed observer for general port-Hamiltonian mechanical systems with non-holonomic constraints in the presence of unknown friction forces and constant disturbances. Unlike the observers recently reported in literature which designed either under the assumptions of no friction and the absence of disturbances or for a specific class of mechanical systems with the requirement of an explicit solution of certain Partial Differential Equations (PDEs) which cannot be derived a priori, this observer proposes a design that obviate the solution of PDEs and ensures global convergence for general mechanical systems with k-non-holonomic constraints. The observer is totally constructive and given by explicit expressions. The simulation results testify to the effectiveness and the robust features of the developed observer.

Key words: adaptive observer, immersion and invariance, mechanical system, unknown disturbances, friction forces.

ملخص

تقدم هذه الأطروحة مقدر سرعة تكيفي للنظم الميكانيكية العامة المكتوبة وفق النمط هاميلتون المزود بمخارج مع وجود قيود من النوع الغير تكاملي و في ظل وجود قوى احتكاك مجهولة والاضطرابات المستمرة. على عكس المقدرات التي تم انتاجها في هذا المجال التي تعمل إما في إطار افتراضات عدم وجود احتكاك وغياب اضطرابات أو تخص فئة معينة و محدودة من الأنظمة الميكانيكية مع متطلبات وجود حل صريح لبعض المعادلات التفاضلية الجزئية (PDEs) التي لا يمكن اشتقاقها مسبقاً ، يقترح هذا المراقب تصميمًا يتجنب حل المعالجات PDE ويضمن التقارب العالمي للأنظمة الميكانيكية العامة مع وجود قيود من النوع الغير تكاملي. المراقب هو بناء بالكامل واجزؤه تكتب من خلال معادلات صريحة. تشهد نتائج المحاكاة على الفعالية والسمات القوية للمراقب المقدم.

الكلمات المفتاحية: المراقبة التكيفية ، الغمر والمثابرة ، النظام الميكانيكي ، الاضطرابات المجهولة ، قوى الاحتكاك.

Liste des publications de A. Touati Brahim

Dans des revues internationales :

A. Touati Brahim and M. Kidouche, “A Constructive Globally Convergent Adaptive Speed Observer For Port-Hamiltonian Mechanical Systems with Non-Holonomic Constraints,” Asian Journal of Control, Vol. 21, No. 3, pp. 1–12, May 2019.

Articles de conférences :

A. Touati Brahim and M. Kidouche “Robust Speed Observer for Mechanical Systems with Non-holonomic Constraints”. International Conference on Computational Mathematics and Engineering Sciences (CMES2017), Istanbul, Turkey, May. 2017.

A. Touati Brahim and M. Kidouche “Robust Speed Observer for General Euler-Lagrange Systems”. IV. European Conference on Renewable Energy Systems. (ECRES2016), Istanbul, Turkey, August. 2016.

A. Touati Brahim and M. Kidouche, “Immersion and Invariance Adaptive Backstepping Controller for Rotary Drilling System”. 2nd International Conference on Electro Energy (ICEE’2014), pp: 475-480, Skikda, Algeria. Nov. 2014.

A. Touati Brahim and M. Kidouche, “Adaptive Backstepping Controller Design for an Electro Hydraulic Servo System” 6th Chaotic Modeling and Simulation International Conference (CHAOS 2013), pp: 681-688, Istanbul, Turkey, June 2013.

Table des matières

Table des figures	xi
Notations et acronymes	xii
Introduction générale	1
Contexte du travail	5
Objectifs du travail de thèse	6
Structure du mémoire.....	7
Chapitre 1 Observation des systèmes non linéaires :un état de l’art	
1.1 Sur la stabilité des systèmes dynamiques	10
1.2 Sur l’observabilité des systèmes dynamiques.....	114
1.3 Observateurs d’état des systèmes non linéaires	20
1.3.1. Principe d’estimation d’état	20
1.3.2. Les différents types d’observateurs	23
1.3.2.1. Méthodes de transformations non linéaires.....	25
1.3.2.2. Observateurs étendus.....	28
1.3.2.3. Observateurs basés sur les fonctions de Lyapunov : observateurs de Thau	31
1.3.2.4. Observateurs à grand gain.....	33
1.3.2.5. Observateurs à mode glissant	35
1.3.2.6. Observateurs adaptatifs.....	37
1.4 Conclusion.....	39
Chapitre 2 Modélisation des systèmes mécaniques	
2.1 Systèmes Lagrangiens	40
2.2 Systèmes mécaniques complètement actionnés	42
2.3 Systèmes mécaniques sous actionnés.....	43

2.4	Systèmes mécaniques avec contraintes cinématiques.....	44
2.5	Méthode Hamiltonienne	46
2.6	Modèle Hamiltonien à ports.....	47
2.6.1.	Du équations Hamiltoniennes classiques aux systèmes Hamiltoniens à ports.....	48
2.6.2.	Du modélisation de réseau basée sur les ports aux systèmes Hamiltoniens à ports.....	51
2.6.3.	Structures de Dirac et systèmes Hamiltoniens à ports.....	54
2.6.4.	Définition géométrique d'un système Hamiltonien à ports	55
2.6.5.	Propriétés des systèmes Hamiltonien à ports.....	60
2.7	Forme Hamiltonienne à ports des systèmes mécaniques avec contraintes non holonome.....	64
2.8	Linéarisation partielle d'un système mécanique.....	67
2.8.1.	Caractérisation des systèmes PLvCC.....	69
2.8.2.	Etude de l'ensemble S_{PLvCC}	73
2.8.2.1.	Définitions des sous-ensembles de l'ensemble S_{PLvCC}	74
2.8.2.2.	Interprétation physique des ensembles $SZCS, SZRS, ST$	77
2.9	Forme pH des systèmes non holonome en présence des perturba- tions et frottements	81
2.10	conclusion.....	84
Chapitre 3 La méthode I&I : observation stabilisation et commande		
3.1	Bref état de l'art de la méthode I&I.....	87
3.2	Notion d'immersion et invariance	90
3.3	Principe de stabilisation par I&I.....	92
3.4	Les applications de la méthode I&I	98
3.4.1.	Robustification des lois de commande	98
3.4.2.	Systèmes mécaniques sous actionnés.....	101
3.4.3.	Systèmes en une structure spéciale	103
3.4.4.	Commande adaptative	103
3.4.5.	Contrôleur PI non linéaire	105

3.5	Principe d'observation en utilisant I&I.....	107
3.6	Conception d'observateur globale par I&I pour la classe des systèmes mécanique sous contraintes non holonomes.....	110
3.6.1.	Représentation Port-Hamiltonien appropriée.....	112
3.6.2.	Conception de l'observateur.....	113
3.7	Conclusion.....	121
Chapitre 4 Observateur de vitesse adaptatif de type I&I pour les systèmes mécaniques non holonome		
4.1	Introduction.....	123
4.2	Formulation dynamique du système.....	125
4.3	Conception d'observateur adaptatif.....	126
4.4	Exemple de simulation.....	139
4.5	Conclusion.....	148
Conclusion générale et perspectives		149
Annexes		152
Annexe A Quelques rappels mathématiques		152
A.1	Théorie des matrices.....	152
A.2	Forward-Completeness.....	152
A.3	Inégalité de Young.....	153
A.4	Operateur de projection.....	153
A.5	Algebre de Lie.....	155
Annexe B Preuves des Lemmes		157
B.1	Preuve du Lemme 2.4.....	157
B.2	Preuve du Lemme 2.5.....	158
B.3	Preuve du Lemme 4.1.....	159
Bibliography		

Table des figures

Figure 1.1	Principe d'estimation d'état	20
Figure 1.2	Structure d'un observateur à mode glissant.....	34
Figure 2.1	Circuit LC	47
Figure 2.2	Système Hamiltonien à ports.....	58
Figure 2.3	Les ensembles des matrices d'inertie.....	69
Figure 2.4	Pied robotique	73
Figure 3.1	Interprétation de submersion des méthodes basées sur Lyapunov	83
Figure 3.2	Illustration graphique de la correspondance entre les trajec- toires du système à contrôler et le système cible $p = 2$ et $n = 3$	86
Figure 3.3	Illustration graphique de l'approche d'immersion et d'invariance.....	88
Figure 3.4	Schéma de système de lévitation magnétique.....	92
Figure 3.5	Le système chariot et pendule inversé et la dynamique cible	94
Figure 4.1	Le système Traîneau de Chaplygin « Chaplygin Sleigh »	133
Figure 4.2	Comportement transitoire de la vitesse \dot{q} et son estimation	136
Figure 4.3	Erreur d'estimation de vitesse.....	136
Figure 4.4	Comportement transitoire de la vitesse \dot{q} et son estimation \hat{q} de l'observateur en [29].....	137
Figure 4.5	Erreur d'estimation de vitesse de l'observateur en [29].....	137
Figure 4.6	Comportement transitoire des perturbations \tilde{d} et de frottement \tilde{r}_1	138
Figure 4.7	Comportement transitoire de σ et son estimation $\hat{\sigma}$ avec le facteur d'échelle dynamique r	138
Figure 4.8	Comportement transitoire de la vitesse \dot{q} et son estimation \hat{q} avec bruit.....	139
Figure 4.9	Comportement transitoire de la vitesse \dot{q} et son estimation \hat{q} avec diffèrent valeur de perturbations d_1	139

Notations et acronymes

Ensembles

\mathbb{R}	Ensemble des nombres réels
\mathbb{R}^+	Ensemble des nombres réels positifs
\mathbb{R}^n	Espace réel euclidien de dimension n
$\mathbb{R}^{n \times m}$	Ensemble des matrices réelles de dimension $n \times m$
\mathcal{B}_r	Ensemble des $x \in \mathbb{R}^n$ tels que $\ x\ < r, r > 0$.
\mathcal{C}^1	Classe des fonctions indéfiniment continument différentiable
\mathcal{C}^∞	Classe des fonctions indéfiniment continument différentiable ou lisse
\mathcal{L}_{fh}	Dérivée de Lie d'une fonction h le long d'un champ de vecteur f

Acronymes

LMI	: Linear Matrix Inequalities
pH	: Hamiltonien à ports (port Hamiltonian)
I&I	: Immersion and Invariance
EDP	: équations aux dérivées partielles
LTI	: Linéaire à Temps Invariant
LTV	: Linéaire à temps variants
EKF	: Filtre de Kalman étendu (Extended Kalman Filter)
PLvCC	: Partially Linearizable via coordinate change
LCTG	: Inductance Capacitor Transformer Gyration

Introduction générale

Une bonne maîtrise d'un procédé passe en général par une bonne information sur ce procédé. Les variables directement mesurées ne couvrant généralement pas la totalité des grandeurs susceptibles de décrire le comportement du procédé (les états), on peut se poser le problème de reconstruction de l'information non directement mesurée au moyen de celle disponible : c'est le rôle de l'observateur, ou estimateur d'état. Le principe est le suivant : Le procédé étant modélisé comme un système dynamique soumis à l'action de grandeurs externes (entrées) faisant varier un ensemble de grandeurs mesurées (sorties), l'observateur consiste en un système dynamique auxiliaire dont les entrées sont les entrée-sorties mesurées du procédé, et les sorties sont supposées donner une estimation de son état interne [1].

La connaissance de l'état à chaque instant est indispensable pour la synthèse d'une commande ou le diagnostic et la détection des défauts des procédés industriels. Par ailleurs, en considérant des contraintes économiques et technologiques ou même de faisabilité, on a intérêt à minimiser le nombre de capteurs pour réduire le coût d'instrumentation et de maintenance. L'exploitation des capteurs logiciels pour la conduite des procédés industriels se trouve, dans ces conditions nécessaires.

Un capteur logiciel peut être décrit comme étant l'association d'un capteur physique à un algorithme (appelé observateur) permettant de délivrer, à partir des mesures fournies par le capteur physique et des entrées appli-

quées au système, des estimations en ligne des différentes variables d'état [2]. La synthèse de tels capteurs logiciels retient l'attention de nombreux chercheurs depuis plus de quatre décennies. Dans un premier temps la recherche s'est orientée de façon naturelle vers l'estimation de l'état des systèmes linéaires. La synthèse d'observateurs pour les systèmes linéaires est complètement caractérisée par des conditions nécessaires et suffisantes bien établies. En effet, les premiers travaux sur les observateurs, publiés vers les années soixante par Kalman [3] et Luenberger [4], s'intéressent aux systèmes linéaires invariants au cours de temps.

Cependant, la plupart des procédés industriels possèdent des comportements non linéaires ce qui a incité les chercheurs à développer des observateurs non linéaires.

L'extension directe de ces résultats au cas non linéaire est obtenue à l'aide d'une linéarisation locale à l'ordre un de la dynamique du système : c'est la philosophie du filtre de Kalman étendu [5]. L'inconvénient majeur de ce type d'observateurs est la difficulté de résoudre l'équation dynamique de Ricatti dont il fait appel ainsi que sa stabilité n'est pas prouvée ce qui rend cette méthode inexploitable.

Jusqu'à l'heure actuelle, il n'existe pas une méthode générale qui caractérise la synthèse des observateurs non linéaires, mais on parle des différents algorithmes présents dans la littérature.

Dans un premier temps, les chercheurs ont proposé la synthèse d'un observateur pour une classe des systèmes non linéaires dont le système d'erreur est linéarisable par injection de sortie ou à l'aide des transformations d'état qui rendent les non linéarités du système dépendantes uniquement des en-

trées et des sorties mesurables du système [6-8]. Le défaut majeur de cette approche réside dans le fait que ces transformations ne sont pas toujours réalisables et que structurellement la non-linéarité peut dépendre de l'état du système indépendamment de la base choisie. Leur application est donc réservée à une classe réduite de systèmes non linéaires.

Une autre approche est apparue, vers les années quatre-vingt-dix, qui consiste à bien exploiter les techniques des inégalités matricielles (LMI : Linear Matrix Inequalities) [9, 10]. Cette méthode consiste à synthétiser le gain de l'observateur en résolvant un système LMIs, c'est le cas par exemple de l'observateur de Luenberger généralisé. Mais, l'inconvénient majeur de cette méthode est la relative difficulté de trouver une solution pour le système LMIs considéré.

Les observateurs à grand gain sont des observateurs non linéaires qui prennent en compte la non stationnarité et la non linéarité des procédés industriels et qui assurent, en même temps, une bonne estimation de l'état réel avec un réglage aisé du vecteur gain. Ils ont été introduits, en premier lieu, par Doyle et Stein dans [11, 12]. La caractéristique principale de cet observateur réside dans la facilité de son implémentation et de son réglage facile assuré à l'aide d'un seul paramètre de synthèse. Les premiers travaux sur les observateurs à grand gain dans les systèmes non linéaires sont apparus à la fin des années 80 dans les travaux de Saberi [13, 14], Tornambe, et Khalil [15]. Deux articles clés, publiés en 1992, marquent le début de deux écoles de recherche sur les observateurs à grand gain. Les travaux de Gauthier, Hammouri et Othman [16] ont ouvert une ligne de travail qui est illustrée par [17-22]. Cette ligne de recherche couvrait une large classe

de systèmes non linéaires et obtenait des résultats globaux dans des conditions de croissance globale. D'autre part, les travaux d'Esfandiari et Khalil [23] ont attiré l'attention sur le phénomène de pic comme caractéristique importante des observateurs à grand gain. Bien que ce phénomène ait été observé auparavant dans la littérature [24, 25]. L'article [23] a montré que l'interaction du pic avec les non-linéarités pourrait induire un temps d'échappement fini (finite escape). En particulier, il a montré qu'en l'absence de conditions de croissance globale, les observateurs à grand gain pourraient déstabiliser le système en boucle fermée si le gain d'observateur est suffisamment élevé. Il proposait une solution apparemment simple au problème. Il a suggéré que le contrôle soit conçu comme une fonction globalement bornée des estimations d'états, de manière à saturer pendant la période de pic. Étant donné que l'observateur est beaucoup plus rapide que la dynamique en boucle fermée sous le retour d'état, la période de pic est très courte par rapport à l'échelle temporelle des variables de l'installation, qui restent très proches de leurs valeurs initiales. Teel et Praly [26, 27] s'appuient sur les idées d'Esfandiari et Khalil [23] et sur des travaux de Tornambe [28] pour prouver le premier principe de séparation non linéaire et développer un ensemble d'outils de stabilisation semi-globale des systèmes non linéaires. Leurs travaux ont attiré l'attention sur Esfandiari et Khalil [23], et peu après, de nombreux chercheurs en commande non linéaire ont commencé à utiliser des observateurs à grand gain [29-33]. Ces articles ont étudié une large classe de problèmes de commande non linéaires, notamment la stabilisation, la régulation, le suivi de trajectoire et la commande adaptative. Les travaux de Khalil et ses collègues [34-36] ont

démontré le principe de séparation qui ajoute une nouvelle dimension au résultat de Teel et Praly [26, 27]; notamment, la combinaison d'observateur rapide avec une saturation de commande permet au contrôleur de rétroaction de sortie de récupérer les trajectoires du contrôleur de rétroaction lorsque le gain de l'observateur est suffisamment élevé.

Les observateurs à mode glissants qui étaient largement étudiés et appliqués [37-39]. Leurs difficultés de mise en œuvre ont justifié d'une part l'apparition de différentes variantes concernant le choix de la fonction mathématique utilisée en d'autre part une extension aux ordres supérieurs.

Il existe, dans la littérature, d'autres approches qui n'appartiennent pas à aux travaux cités ci-dessus telles l'observateur par intervalle [40, 41], et l'approche qui utilise des outils de l'algèbre différentielle [42].

Contexte du travail

Au cours des dernières décennies, une grande partie des activités de recherche en automatique s'est focalisée sur le problème de l'observation de vitesse des systèmes mécaniques. Ceci est motivé par le fait que l'estimation de vitesse est une étape importante voir indispensable pour la synthèse de lois de commande stabilisante, pour le suivi de trajectoire ou le diagnostic et la supervision des systèmes (pour plus de détails voir les livres [43, 44]). Plusieurs méthodes ont été développées pour la synthèse des observateurs à partir des techniques de passivité [45], de grand gain [29, 36, 46], de mode glissant [37-39], et de symétrie [47]. La technique d'immersion et d'invariance (I&I) est une nouvelle technique rapportée pour la première fois en [48] et développé dans [43, 49, 50]. Dans l'approche (I&I), la conception de l'observateur consiste à modifier le

problème pour rendre attractive une variété invariante sélectionnée de manière appropriée, définie dans l'espace d'état étendu du système et de l'observateur. Dans [51], l'approche d'immersion et d'invariance a été combiné avec la technique de mise à l'échelle dynamique « dynamic scaling » [29, 32, 52-54] pour concevoir le premier observateur global à convergence exponentielle pour les systèmes mécaniques à n degré de liberté (sans contrainte).

Cet observateur a été plus tard généralisé à des systèmes mécaniques avec des contraintes non-holonomes dans [55]. Il présente une solution au problème de l'observation de vitesse sans supposition sur les bornes des états du système, en exigeant seulement que le système soit « forward complete » c.-à-d., les trajectoires existent pour toujours. Cet observateur a inspiré d'autre recherche a utilisé la même méthode [56-58]. Notant que malgré la bonne convergence de ces observateurs, ils souffrent de certaines limitations tels que la dimension très élevée [55], il nécessite une solution de certaines équations aux dérivées partielles (EDP)[55, 57], qui ne peuvent pas être dérivées explicitement a priori, les modèles ne tient pas compte les perturbations externes et les forces de frottement [55, 56], l'observateur est applicable sur une classe réduite de systèmes mécaniques [57]. C'est dans ce cadre se situe les travaux de cette thèse.

Objectifs du travail de thèse

Les principaux objectifs de cette thèse sont :

1. Développement d'une forme Hamiltonien à ports (pH) pour les systèmes mécaniques avec contrainte non holonome et en présence des perturbations et des forces de frottement.
2. Proposition d'un observateur pour les systèmes mécaniques généraux écrits sous la forme pH, en se basant sur la méthode d'immersion et d'invariance et en tenant compte des perturbations externes et des forces de frottement.
3. Le développement d'une méthode de conception constructive qui évite la résolution des équations aux dérivées partielles (EDP) difficile à résoudre et exprime l'observateur avec des expressions explicites.
4. L'application d'observateur conçu aux classes des systèmes mécaniques sous contrainte non holonome.

Structure du mémoire

Outre cette introduction qui fait office à la fois de motivation et de présentation générale du problème, le manuscrit se compose de quatre chapitres organisés comme suit :

Le **chapitre 1** présente un préliminaire mathématique indispensable à toute stratégie d'observation et qui nécessite la compréhension. L'étude de ces notions se limite aux définitions de stabilité (asymptotique, exponentielle ou au sens de Lyapunov) et d'observabilité. Nous présentons ensuite un état de l'art sur les différentes méthodes existantes concernant la conception d'observateurs pour les systèmes non linéaires. Effectivement, il n'existe pas de méthodologie unique pour la conception pour ces systèmes,

selon certaines propriétés, certaines approches conviennent mieux que d'autres.

Dans le **chapitre 2**, on s'intéresse à la modélisation des systèmes mécaniques. La première partie est consacrée à la présentation des systèmes Lagrangiens. On explique, le concept de sous actionnement, et les types de contraintes. La deuxième partie est consacrée à la présentation des systèmes Hamiltoniens. On présentera, ensuite en détail le formalisme Hamiltonien à ports. Les conditions nécessaires et suffisantes pour linéariser ce type de système par un changement de coordonnées partiel seront présentées. Une caractérisation et une classification complètes des systèmes mécaniques qui satisfont ces conditions seront exposées. Dans la dernière partie de ce chapitre, on s'intéresse à écrire les systèmes mécaniques sous contraintes de type non holonomes et en présence des perturbations externes et des forces de frottement sous le formalisme Hamiltonien à ports et ensuite prouver que ce système admet une représentation d'espace d'état simplifiée.

Dans la première partie du **chapitre 3** on présente en détail la méthode d'immersion et d'invariance (I&I) qui sera par la suite utilisé pour la conception d'observateur. Après une définition, nous montrons les différentes applications de cette méthode (stabilisation, commande adaptative, conception d'observateur). La deuxième partie est consacrée au développement d'un observateur global à convergence exponentielle. A la fin de cette partie nous présentons les différentes limitations et inconvénients de ces observateurs.

Un observateur de vitesse adaptatif est proposé dans le **chapitre 4**. Cet observateur donne des solutions aux limitations présentées dans la fin de chapitre 3, en construisant un observateur pour les systèmes mécaniques généraux (contient les systèmes à k contraintes non-holonomes) en présence de force de frottement et de perturbations inconnues. Nous démontrons par la méthode de Lyapunov la convergence exponentielle de l'observateur.

Dans la deuxième partie nous avons proposé une application de cet observateur pour l'estimation de la vitesse du système non holonome connu « Chaplygin Sleigh » en présence de forces de frottement inconnues et de différentes valeurs de perturbations.

Nous terminons évidemment le manuscrit par une conclusion générale et proposer quelques perspectives de recherches futures.

Chapitre 1

Observation des systèmes non linéaires : un état de l'art

Ce chapitre a essentiellement pour objectif de présenter quelques rappels mathématiques indispensables à toute stratégie d'observation et nécessaire à la compréhension de ce mémoire. L'étude de ces notions se limite aux définitions de stabilité (asymptotique, exponentielle ou au sens de Lyapunov) et d'observabilité. Nous présentons ensuite un état de l'art sur les différentes méthodes existantes concernant la conception d'observateurs pour les systèmes non linéaires.

1.1 Sur la stabilité des systèmes dynamiques

Dans cette partie, nous rappelons quelques concepts fondamentaux sur la stabilité des systèmes dynamiques continus. Par définition, l'analyse de la stabilité d'un système dynamique revient à étudier son comportement (sa trajectoire) lorsque son état initial est proche d'un point d'équilibre. Cette opération devient particulièrement délicate lorsque le modèle est non linéaire. De nombreux artifices sont donnés dans la littérature [59, 60]. Nous présentons ici les principales définitions de stabilité asymptotique, de stabilité exponentielle et de stabilité (exponentielle) au sens de Lyapunov.

Considérons la classe des systèmes non linéaires décrits par l'équation dynamique :

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= f(x(t), t) \\ x(t_0) &= x_0\end{aligned}\tag{1.1}$$

où $x(t) \in \mathbb{R}^n$ et $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^n$ continue. Nous désignons par x_e un point d'équilibre de (1.1) tel que $f(x_e, t) = 0, \forall t \geq t_0$, et par $x(t, t_0, x_0)$ la solution à l'instant $t \geq t_0$ du système (1.1) initialisée en x_0 à l'instant t_0 . Comme le contenu de ce mémoire ne concerne que la stabilité d'une erreur d'estimation, alors nous supposons que le système (1.1) possède un point d'équilibre unique $x_e = 0$. Ceci nous mène à présenter les définitions de la stabilité du système (1.1) autour de l'origine.

Définition 1.1 (Stabilité [1, 61, 62]) : On dit que l'origine est un point d'équilibre stable au sens de Lyapunov pour (1.1) si toute trajectoire initialisée dans un voisinage de $x_e = 0$ à t_0 en reste suffisamment proche pour tout $t > t_0$, autrement dit si, pour tout $\varepsilon > 0$ et $t_0 > 0$, il existe un scalaire positif $\delta(\varepsilon, t_0)$ tel que :

$$\|x_0\| < \delta(\varepsilon, t_0) \implies \|x(t, t_0, x_0)\| < \varepsilon \quad \forall t > t_0\tag{1.2}$$

On dit que l'origine est instable dans le cas contraire.

Définition 1.2 (Attractivité [1, 61, 62]): On dit que l'origine est un point d'équilibre attractif pour (1.1) s'il existe un scalaire strictement positif $\eta(t_0)$ tel que :

$$\|x_0\| < \eta(t_0) \implies \lim_{t \rightarrow \infty} x(t, t_0, x_0) = 0 \quad \forall t > t_0\tag{1.3}$$

Lorsque $\eta(t_0) = \infty$, on dit que l'origine est globalement attractive. Le concept d'attractivité signifie simplement que toute trajectoire du système convergera bien, après un certain temps et de possibles larges excursions, vers son état d'équilibre. On remarque qu'un système attractif n'est pas

nécessairement stable au sens de la définition 1.1. On introduit alors la notion de stabilité asymptotique qui garantit que l'état du système converge vers son état d'équilibre sans trop s'en éloigner.

Définition 1.3 (Stabilité asymptotique [1, 63]): On dit que l'origine est un point d'équilibre asymptotiquement (resp. globalement asymptotiquement) stable si elle est stable et attractive (resp. globalement attractive).

Dans les définitions précédentes, si les bornes δ et η ne dépendent pas de l'instant initial t_0 , on parlera de stabilité uniforme, d'attractivité uniforme et stabilité asymptotique (globale) uniforme. En remplaçant la convergence asymptotique dans (1.3) par une convergence exponentielle, on obtient une propriété plus forte que la stabilité asymptotique :

Définition 1.4 (Stabilité exponentielle [1, 63]): On dit que l'origine est un point d'équilibre localement exponentiellement stable pour (1.1) s'il existe des constantes α et β strictement positives telles que :

$$\|x(t, t_0, x_0)\| < \alpha \exp(-\beta(t - t_0)) \quad \forall t > t_0 \text{ et } \forall x_e \in \mathcal{B}_r \quad (1.4)$$

Lorsque $\mathcal{B}_r = \mathbb{R}^n$, on dit que l'origine est globalement exponentiellement stable.

L'utilisation des définitions précédentes, pour démontrer la stabilité du système (1.1) autour de l'un de ses points d'équilibre, requiert la résolution explicite de l'équation différentielle $\dot{x}(t) = f(x(t), t)$. Ce calcul est très difficile voire impossible dans la plupart des cas. La théorie de Lyapunov (méthode directe) sur la stabilité permet de s'affranchir de ce dernier calcul. Cette méthode consiste à définir une fonction particulière avec des propriétés appropriées dont l'existence garantit le type de stabilité désiré.

Définition 1.5 : Soit $V(x, t): \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ une fonction continue. V est dite propre définie positive si:

- i.* $\forall t \in \mathbb{R}^+, \forall x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0 \quad V(x, t) > 0.$
- ii.* $\forall t \in \mathbb{R}^+, \quad V(x, t) = 0 \implies x = 0.$
- iii.* $\forall t \in \mathbb{R}^+, \quad \lim_{\|x\| \rightarrow \infty} V = \infty.$

Définition 1.6 (Fonction de Lyapunov [1, 63]): Une fonction $V(x, t)$ de classe \mathcal{C}^1 est une fonction de Lyapunov locale (resp. globale) au sens large pour le système (1.1) si elle est propre définie positive et s'il existe un voisinage de l'origine \mathcal{V}_0 tel que $\forall x \in \mathcal{V}_0$ (resp. $x \in \mathbb{R}^n$):

$$\dot{V}(x, t) = \frac{\partial V(x, t)}{\partial t} + \left(\frac{\partial V(x, t)}{\partial x} \right)^T f(x, t) \leq 0$$

Si $\dot{V}(x, t) < 0$, alors V est appelée fonction de Lyapunov au sens strict pour (1.1).

Définition 1.7 (Méthode directe de Lyapunov [1, 63]): Si le système (1.1) admet une fonction de Lyapunov locale au sens large (resp. au sens strict) alors l'origine est un point d'équilibre localement stable (resp. asymptotiquement stable).

Ce résultat peut être validé globalement $\forall x \in \mathbb{R}^n$.

Définition 1.8 (Stabilité exponentielle [1, 63]): L'origine de (1.1) est localement exponentiellement stable s'il existe des constantes $\alpha, \beta, \gamma > 0, p \geq 0$ et une fonction $V(x, t): \mathcal{V}_0 \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ de classe \mathcal{C}^1 telles que, $\forall x \in \mathcal{V}_0$:

- i.* $\alpha \|x\|^p \leq V(x, t) \leq \beta \|x\|^p$
- ii.* $\dot{V}(x, t) \leq -\gamma V(x, t)$

Si $\mathcal{V}_0 = \mathbb{R}^n$, on dit que l'origine de (1.1) est globalement exponentiellement stable.

Définition 1.9 (Théorème inverse [1, 63]): Tout système de classe \mathcal{C}^1 localement (respectivement globalement) asymptotiquement stable admet une fonction de Lyapunov locale (respectivement globale) au sens strict.

1.2 Sur l'observabilité des systèmes dynamiques

Préalablement à toute stratégie d'observation d'un système dynamique, il est nécessaire de s'assurer que l'état de ce dernier est effectivement observable à partir des informations antérieures sur l'entrée et la sortie. L'étude de l'observabilité du système apporte une solution à ce problème. A la différence des systèmes linéaires, l'observabilité des systèmes non linéaire est intrinsèquement liée aux entrées et aux conditions initiales. Lorsqu'un système non linéaire est observable, il se peut qu'il possède des entrées qui le rendent inobservable (entrées singulières) et annihilent toute stratégie d'observation. Dans cette section, après un rappel de quelques concepts fondamentaux sur l'observabilité, nous introduirons les notions d'entrées universelles et de systèmes uniformément observables, qui permettent d'éviter les problèmes de singularité liés aux entrées.

Considérons le système non linéaire autonome :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, u) \\ y &= h(x) \end{aligned} \tag{1.5}$$

où $u \in \mathbb{R}^m, y \in \mathbb{R}^p$ et $x \in \mathbb{R}^n$. Pour toute entrée $u \in \mathbb{R}^m$ constante, $f_u(x) = f(x, u)$ constitue un champ de vecteur \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R}^n et les $h_i, i = 1, \dots, p$ composantes de h sont des fonctions \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R}^n .

Dénotons $x(t, t_0, x_0)$ la solution à l'instant t du système (1.5), soumis à la commande u et issue de la condition initiale x_0 à l'instant t_0 .

Dans le domaine non linéaire, il existe plusieurs façons de définir la notion d'observabilité.

Définition 1.11 (Indiscernabilité [62]): Deux états distincts $x_0, \bar{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ sont dits indistinguables si, pour tout $t \in]t_0, T[$, $T < \infty$ et pour toute entrée admissible $u : [t_0, t] \mapsto \mathbb{R}^m$, les trajectoires $h(x(t, t_0, x_0))$ et $h(x(t, t_0, \bar{x}_0))$, respectivement associées à x_0 et \bar{x}_0 , sont identiques sur leur domaine de définition commun. Dans le cas contraire, x_0 et \bar{x}_0 sont dits distinguables.

Définition 1.12 (Observabilité [62]): Le système dynamique (1.5) est dit observable en $x_0 \in \mathbb{R}^n$ si l'ensemble des états indistinguables de x_0 ne contient que x_0 . Si cette propriété est vraie pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, le système est dit observable.

Ce dernier concept constitue un concept global d'observabilité, pour lequel il est parfois nécessaire d'engendrer des trajectoires $h(x(t, t_0, x_0))$ et $h(x(t, t_0, \bar{x}_0))$ suffisamment éloignées de x_0 . En limitant les différentes trajectoires dans un voisinage de x_0 , nous définissons la notion d'observabilité locale.

Définition 1.13 (Observabilité locale [62]): Le système dynamique (1.5) est dit localement observable en un point $x_0 \in \mathbb{R}^n$ s'il existe un voisinage \mathcal{V}_{x_0} de x , tel que pour tout $\bar{x}_0 \in \mathcal{V}_{x_0}$, x_0 et \bar{x}_0 sont distinguables, les trajectoires $h(x(t, t_0, x_0))$ et $h(x(t, t_0, \bar{x}_0))$ restant dans \mathcal{V}_{x_0} .

Si cette propriété est vraie pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, le système est dit localement observable.

Les auteurs dans [62, 64] ont montré que, lorsqu'il s'agit de différencier un état initial de ses voisins, il est possible d'affaiblir la propriété d'observabilité locale.

Définition 1.14 (Observabilité locale faible [64]): Le système dynamique (1.5) est dit localement faiblement observable en un point $x_0 \in \mathbb{R}^n$ si, pour chaque voisinage \mathcal{V}_{x_0} de x_0 , il existe un voisinage $\tilde{\mathcal{V}}_{x_0}$ de x_0 contenu dans \mathcal{V}_{x_0} tel que l'ensemble des états dans $\tilde{\mathcal{V}}_{x_0}$ qui sont indistinguables de x_0 , pour toute trajectoire $h(x(t, t_0, \bar{x}_0)) \in \mathcal{V}_{x_0}$ avec $x_0 \in \mathcal{V}_{x_0}$, ne contient que x_0 .

Le système dynamique (1.5) est dit localement faiblement observable s'il est localement faiblement observable en x pour tout $x \in \mathbb{R}^n$.

L'observabilité locale faible signifie simplement que tous les états suffisamment proches de x_0 sont distinguables, les différentes trajectoires associées restant dans un voisinage de x_0 .

Vérifier l'observabilité de (1.5) par l'intermédiaire des définitions précédentes, demande la résolution explicite de l'équation différentielle $\dot{x} = f(x, u)$. On a noté que ce calcul est très difficile voire impossible. Il est possible d'éviter ce problème en introduisant une condition de rang similaire au cas LTI. Cette condition est évidemment de nature locale, et s'appuie sur le fait que le comportement de la fonction de sortie h , dans un proche voisinage d'un point normal (x_0, t_0) , est défini par la fonction elle-même et ses dérivées successives au point (x_0, t_0) (théorème de Taylor). Autrement dit, il suffit de tester l'injectivité d'une application particulière entre les conditions initiales et les dérivées successives de la sortie. On définit alors le concept d'espace d'observation.

Définition 1.15 (Espace d'observation [65]): L'espace d'observation $\mathcal{O}(h)$ du système non linéaire (1.5) est le plus petit sous-espace vectoriel contenant les observations h_i et fermé par différentiation de Lie le long de tous les éléments de $\mathcal{F} = \{f_u(\cdot), u \in \mathbb{R}^m\}$ c.-à-d. tous les champs de vecteurs correspondants à des entrées constantes :

$$\mathcal{O}(h)(x) = \text{span} \left\{ \mathcal{L}_{f_{u_k}} \mathcal{L}_{f_{u_{k-1}}} \dots \mathcal{L}_{f_{u_1}} h_i(t) \mid 1 \leq i \leq p, k \geq 1, u_1, \dots, u_k \in \mathbb{R}^m, x \in \mathbb{R}^n \right\} \quad (1.6)$$

où $\mathcal{L}_{f_{u_1}} h_j(t)$ est la dérivée de Lie de la fonction h_j le long du champ de vecteurs f_{u_1} .

Définition 1.16 (Observabilité au sens du rang [65]): Le système dynamique (1.5) est dit observable au sens du rang en $x_0 \in \mathbb{R}^n$ si :

$$\dim d\mathcal{O}(h)(x_0) = n \quad (1.7)$$

où $d\mathcal{O}(h)(x_0) = \{d\psi(x_0), \psi \in \mathcal{O}(h)\}$.

Le système (1.5) est observable au sens de rang s'il l'est pour tout $x \in \mathbb{R}^n$.

Si le système (1.5) est observable au sens du rang en x_0 , alors il est localement faiblement observable de x_0 [62].

Pour les systèmes LTI, l'observabilité ne dépend ni des entrées appliquées au systèmes, ni des conditions initiales : l'observabilité locale implique l'observabilité globale.

Dans la partie suivante, nous intéressons à l'étude de l'observabilité des systèmes linéaire temps variant (LTV) pour lesquels il est utile d'introduire le concept grammien d'observabilité.

Considérons le système :

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t)$$

$$y(t) = C(t)x(t) \quad (1.8)$$

Définition 1.17 (Observabilité complète [65]): Le système (1.8) est dit complètement observable s'il existe $T > 0$ et $t_0 > 0$ tels que pour tout $t \geq t_0$, le grammien d'observabilité :

$$\mathcal{W}^o(t, t+T) = \int_t^{t+T} \phi^T(\tau, t) C^T(\tau) C(\tau) \phi(\tau, t) d\tau \quad (1.9)$$

est défini positif. $\phi(\tau, t)$ représente la matrice de transition du système homogène associé à (1.8) :

$$\frac{d}{d\tau} \phi(\tau, t) = A(\tau) \phi(\tau, t) \quad (1.10)$$

$$\phi(t, t) = I_n \quad (1.11)$$

Physiquement, le grammien d'observabilité $\mathcal{W}^o(t, t+T)$ quantifie l'information fournie par la sortie sur l'intervalle de temps $[t, t+T]$. On remarque que la condition d'observabilité complète n'est pas suffisante pour estimer l'état de (1.8). En effet, $\mathcal{W}^o(t, t+T)$ peut être défini positif tout en s'approchant de zéro. Dans ce cas, l'information fournie par la sortie n'est plus suffisante pour reconstruire l'état du système. Nous sommes alors amenés à introduire la notion d'observabilité complète uniforme.

Définition 1.18 (Observabilité complète uniforme [66]) : Le système (1.8) est dit complètement uniformément observable s'il existe $T > 0, \eta > 0$ et $t_0 > 0$ tels que pour tout $t \geq t_0$:

$$\mathcal{W}^o(t, t+T) \geq \eta I_n > 0 \quad (1.12)$$

Entrées universelles et systèmes uniformément observables [65] :

L'étude de l'observabilité des systèmes non linéaires, comme nous l'avons présentée précédemment, ne fait pas apparaître le rôle des entrées. En effet, alors que l'observabilité des systèmes LTI et LTV ne dépend pas des en-

trées, ce n'est plus le cas pour les systèmes non linéaires. Il existe des entrées particulières rendant ces systèmes inobservables. L'exemple suivant illustre cette propriété :

Exemple 1.1 Considérons un système bilinéaire de la forme :

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= ux_2 & x \in \mathbb{R}^2, u \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R} \\ \dot{x}_2 &= 0 \\ y &= x_1\end{aligned}$$

Il est clair que ce système est observable pour toute entrée $u(t) = k, k \in \mathbb{Z} - \{0\}$. Cependant l'entrée $u(t) = 0$ ne pourra distinguer deux états distincts $x = (x_1, x_2)^T$ et $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2)^T$ tels que $x_1 \neq \bar{x}_1$ et $x_2 \neq \bar{x}_2$, les sorties $h(x(t, t_0, x_0))$ et $h(x(t, t_0, \bar{x}_0))$ étant identiques pour tout $t \geq 0$.

Il convient, dès lors, de réaliser une certaine « classification » des entrées. Pour cela, nous introduisons les notions d'entrées universelles et singulières.

Définition 1.19 (Entrée universelle [65]): Une entrée est dite universelle pour le système (1.5) sur un intervalle de temps $[t_0, T]$ si, pour tout couple d'états initiaux distincts x_0 et \bar{x}_0 , il existe $t \in [t_0, T]$ tel que $h(x(t, t_0, x_0)) \neq h(x(t, t_0, \bar{x}_0))$. Une entrée universelle distingue les états x_0 et \bar{x}_0 .

Tout entrée d'un système LTI est une entrée universelle.

Définition 1.20 (Entrée singulière [65]): Toute entrée non universelle est dite singulière.

L'étude de l'universalité des entrées permet d'établir une classe particulièrement intéressante de systèmes observables sur l'ensemble des entrées admissibles : les *systèmes uniformément observables*.

Définition 1.23 (Observabilité uniforme [65]): Un système est dit uniformément observable ou observable pour toute entrée si, pour tout $t \in [t_0, T]$, toute entrée admissible $u : [t_0, T] \rightarrow \mathbb{R}^m$, est une entrée universelle sur $[t_0, T]$.

Définition 1.24 (Observabilité uniforme locale [65]): Un système est dit localement uniformément observable si, pour tout $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$, il existe un voisinage \mathcal{V}_x de x tel que le système restreint à ce voisinage est uniformément observable.

1.3 Observateurs d'état des systèmes non linéaires

Cette section consiste en une introduction au problème d'observation d'état des systèmes non linéaires. Nous présentons le principe d'estimation d'état, quelques définitions sur la notion d'observabilité et un état de l'art sur les différentes techniques de conception d'observateurs pour les systèmes non linéaires.

1.3.1. Principe d'estimation d'état

Un observateur consiste en un système dynamique auxiliaire (\mathcal{O}) dont les entrées sont les entrées/sorties mesurées d'un système (\mathcal{S}), et les sorties sont supposées donner une estimation de son état, selon le schéma décrit sur la Figure 1.1., nous utilisons la notation unifiée suivante pour décrire un système dynamique (\mathcal{S}) :

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(x, u) \\ y &= h(x, u) \end{aligned} \tag{1.13}$$

Définition 1.3.1. Le système dynamique (\mathcal{O}) décrit par les équations :

$$\begin{aligned}\dot{z} &= \Phi(z, u, y) \\ \hat{x} &= \Psi(z, u, y)\end{aligned}\tag{1.14}$$

$z \in \mathbb{R}^s$, est un observateur asymptotique local pour le système (\mathcal{S}) si les deux conditions suivantes sont vérifiées :

1. $x(0) = \hat{x}(0) \implies x(t) = \hat{x}(t) \forall t \geq 0.$

2. Il existe un voisinage ouvert $\Omega \subseteq \mathfrak{R}^n$ de l'origine tel que :

$$x(0) - \hat{x}(0) \in \Omega \implies \|x(t) - \hat{x}(t)\| \longrightarrow 0 \text{ quand } t \rightarrow +\infty$$

Si $\|x(t) - \hat{x}(t)\|$ tend exponentiellement vers zéro, le système (\mathcal{O}) est dit observateur exponentiel de (\mathcal{S}) .

Lorsque $\Omega = \mathbb{R}^n$, le système (\mathcal{O}) est dit observateur global de (\mathcal{S}) .

La condition 2 signifie que l'erreur d'estimation doit être asymptotiquement stable. Un système pour lequel un observateur de la forme (1.12) existe et tel que la condition 2 soit satisfaite est dit détectable.

Quant à la condition 1, elle signifie que si l'observateur (\mathcal{O}) et le système (\mathcal{S}) possèdent tous les deux le même état initial, alors l'état estimé de (\mathcal{O}) devrait être égal à l'état réel du système (\mathcal{S}) à tout instant.

Si l'état estimé \hat{x} est égal à z , alors (1.14) peut être remplacée par :

$$\dot{\hat{x}} = \Phi(\hat{x}, u, y)\tag{1.15}$$

La condition 1 peut être exprimée par :

$$\hat{x} = x \implies \dot{\hat{x}} = \dot{x}$$

ce qui est équivalent à

$$\hat{x} = x \implies \Phi(\hat{x}, u, y) = f(\hat{x}, u)$$

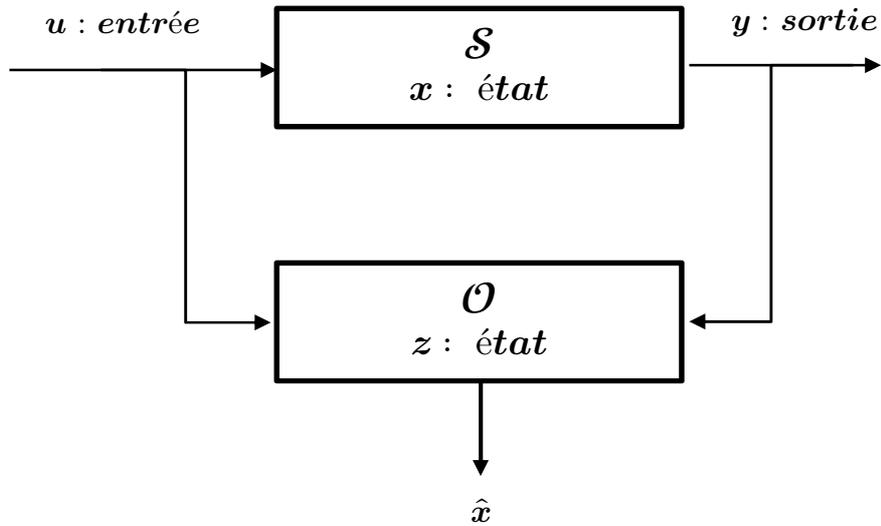


Figure 1. 1 Principe d'estimation d'état

Par conséquent, sans perte de généralité, (1.15) peut se réécrire comme suit :

$$\dot{\hat{x}} = f(\hat{x}, u) + \kappa(\hat{x}, u, y)$$

où

$$\hat{x} = x \implies \kappa(\hat{x}, u, y) = 0 \quad (1.16)$$

Une fonction κ qui contient le facteur $x - \hat{x}$ satisfait (1.16), mais puisque x n'est pas mesuré, ceci n'est pas possible. Cependant, $\hat{x} = x \implies h(\hat{x}, u) = h(x, u) = y$, donc nous pouvons prendre une fonction κ de la forme :

$$\kappa(\hat{x}, u, y) = K(\hat{x}, u, y)(y - \hat{y})$$

où $\hat{y} = h(\hat{x}, u)$.

L'observateur peut donc s'exprimer comme suit :

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}} &= f(\hat{x}, u) + K(\hat{x}, u, y)(y - \hat{y}) \\ \hat{y} &= h(\hat{x}, u) \end{aligned} \quad (1.17)$$

Observateur d'ordre réduit

Pour les systèmes sans couplage direct entre l'entrée et la sortie, i.e. : $y = h(x)$, il est possible de trouver une transformation d'état de façon à ce que les sorties forment une partie du nouveau vecteur d'état. En supposant que la jacobienne de l'application de sortie $\frac{\partial h(x)}{\partial x}$ soit de plein rang p , il est toujours possible de trouver une matrice constante T de dimension $(n - p) \times n$ telle que la transformation

$$\begin{bmatrix} \xi \\ y \end{bmatrix} = \Theta(x) = \begin{bmatrix} Tx \\ h(x) \end{bmatrix}$$

soit localement inversible (voir [67]). Le système transformé s'écrit :

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= \varphi(\xi, y, u) \\ \dot{y} &= \eta(\xi, y, u) \\ y &= C[\xi \ y]^T \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} \varphi(\xi, y, u) &= Tf(x, u)|_{x=\Theta^{-1}([\xi \ y]^T)} \\ \eta(\xi, y, u) &= \frac{\partial h(x, u)}{\partial x} f(x, u)|_{x=\Theta^{-1}([\xi \ y]^T)} \end{aligned}$$

et

$$C = \begin{bmatrix} 0_{p \times (n-p)} & I_p \end{bmatrix}$$

L'observateur d'ordre réduit joue un rôle important. En effet, puisque y est mesuré, il n'est pas besoin d'être estimé, ce qui réduit la dimension du vecteur d'état estimé de n à $n - p$.

1.3.2. Les différents types d'observateurs

Initialement les systèmes abordés ont été les systèmes linéaires, pour lesquels les observateurs de Kalman et Luenberger ont donné de bons résultats.

tats. Le filtre de Kalman est utilisé dans le cas des systèmes stochastiques en minimisant la matrice de covariance de l'erreur d'estimation, et l'observateur de Luenberger a été utilisé pour les systèmes linéaires déterministes. Dans le cas des systèmes non linéaires, l'observation d'état est un peu plus délicate et il n'existe pas, à l'heure actuelle, de méthode universelle pour la synthèse d'observateurs. Les approches envisageables sont soit une extension des algorithmes linéaires, soit des algorithmes non linéaires spécifiques. Dans le premier cas, l'extension est basée sur une linéarisation du modèle autour d'un point de fonctionnement. Pour le cas d'algorithmes non linéaires spécifiques, les nombreuses recherches menées sur ce sujet (voir [68, 69]) ont donné naissance à de nombreux algorithmes d'observation. Nous présenterons ces algorithmes dans la suite de ce chapitre.

1. Méthodes de transformations non linéaires : Cette technique fait appel à un changement de coordonnées afin de transformer un système non linéaire en un système linéaire. Une fois qu'une telle transformation est faite, l'utilisation d'un observateur de type Luenberger suffira pour estimer l'état du système transformé, et donc l'état du système original en utilisant le changement de coordonnées inverse.
2. *Observateurs étendus* : Dans ce cas, le calcul du gain de l'observateur se fait à partir du modèle linéarisé autour d'un point de fonctionnement. C'est par exemple le cas du filtre de Kalman étendu et l'observateur de Luenberger étendu.

3. *Observateurs à grand gain* : Ce type d'observateurs est utilisé en général pour les systèmes lipschitziens. Son nom est dû au fait que le gain de l'observateur choisi est suffisamment grand pour compenser la non-linéarité du système.

Ci-après, nous présentons un peu plus en détails ces méthodes.

1.3.2.1. Méthodes de transformations non linéaires

Cette technique consiste à transformer, à l'aide d'un changement de coordonnées, un système non linéaire en un système linéaire modulo une injection de sortie. Une fois qu'un tel changement de coordonnées est obtenu, l'utilisation d'un observateur de type Luenberger (corrigé par l'injection de sortie) suffira pour estimer l'état du système transformé, et donc l'état du système non linéaire original en utilisant le changement de coordonnées inverse. L'un des premiers travaux réalisés dans ce domaine est proposé dans [6], où le système autonome de la forme

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x) \\ y &= h(x)\end{aligned}\tag{1.18}$$

est transformé, par un changement de coordonnées non linéaire $z = \Phi(x)$, en un système linéaire sous la forme canonique observable suivante :

$$\dot{z} = A_c z + \lambda(y)\tag{1.19a}$$

$$y = C_c z\tag{1.19b}$$

où A_c et C_c sont sous la forme duale de Brunovsky, i.e. :

$$A_c = \begin{bmatrix} 0_{n-1} & I_{n-1} \\ 0 & 0_{n-1}^T \end{bmatrix}, \quad C_c = [1 \quad 0_{n-1}^T]$$

L'observateur de Luenberger correspondant à (1.19) est donné par :

$$\dot{\hat{z}} = A_c \hat{z} + \lambda(y) + K(y - C_c \hat{z}) \quad (1.20)$$

dont la dynamique de l'erreur $\varepsilon = z - \hat{z}$ est linéaire et s'écrit :

$$\dot{\varepsilon} = (A_c - KC_c)\varepsilon \quad (1.21)$$

Le calcul du gain K se fait par un placement de pôles.

Ce travail a été étendu dans [7] au cas des systèmes à sorties multiples et la transformation non linéaire a été généralisée comme suit :

$$z = \Phi(x) \quad (1.22)$$

$$v = \Psi(x) \quad (1.23)$$

où v est la transformation de la sortie y à l'aide du changement de coordonnées non linéaire $\Psi(\cdot)$. Les conditions sous lesquelles une telle transformation existe ont été établies. Cependant, trois problèmes sont liés à cette approche :

1. La classe des systèmes pour lesquels une telle transformation existe est très restreinte ;
2. La procédure d'obtention d'une telle transformation est très compliquée ;
3. Dans le cas des systèmes avec entrées (systèmes commandés), le système transformé contient toutes les dérivées des entrées.

Dans [70], le système :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, u) \\ y &= h(x, u) \end{aligned} \quad (1.24)$$

a été considéré. Dans ce cas, le système transformé sous forme canonique généralisée est défini par :

$$\dot{z} = A_c z + \lambda(y, u') \quad (1.25)$$

$$v = C_c z \quad (1.26)$$

Où $u' = [u \dot{u} \dots u^{(n)}]^T$. La transformation non linéaire utilisée est :

$$z = \Phi(x, u')$$

$$v = \Psi(x, u')$$

En supposant que les dérivées de l'entrée u sont disponibles, la structure de l'observateur suggéré est :

$$\dot{\hat{z}} = A_c \hat{z} + \lambda(y, u') + K(v - \hat{v}) \quad (1.27)$$

$$\hat{v} = C_c \hat{z} \quad (1.28)$$

La dynamique de l'erreur est donnée par (1.21).

D'autres généralisations aux systèmes à sorties multiples ont été proposées dans [8, 71, 72]. Un algorithme simplifié permettant de calculer la transformation convenable, pour le cas des systèmes autonomes, a été conçu dans [73]. Des conditions nécessaires et suffisantes d'existence de la transformation pour les systèmes mono-sortie ont été données dans [74]. Ces résultats ont été généralisés dans [75] aux systèmes à sorties multiples, et un algorithme de calcul du changement de variables a été donné. Une des raisons pour laquelle la classe des systèmes qui peuvent être transformés sous forme linéaire observable est restreinte est due au fait que la sortie doit être linéaire comme dans (1.19b) et (1.26b). Cette condition est relaxée dans [76] pour la classe des systèmes autonomes mono-sortie. L'idée est de transformer le système (1.18), en utilisant le changement de variables $z = \Phi(x)$, en :

$$\begin{aligned} \dot{z} &= Az + Ly \\ y &= \eta(z) \end{aligned} \quad (1.29)$$

où $\eta(z) = h(x)|_{x=\Theta^{-1}(z)}$. L'observateur s'écrit :

$$\dot{\hat{z}} = A\hat{z} + Ly \quad (1.30)$$

et la dynamique de l'erreur $\varepsilon = z - \hat{z}$ est

$$\dot{\varepsilon} = A\varepsilon \tag{1.31}$$

La transformation Φ est choisie de façon à obtenir une matrice A avec des propriétés souhaitables. Afin de surmonter la difficulté d'obtention de la transformation convenable, indépendamment des travaux précédents, une nouvelle approche a été présentée dans [77] pour la classe des systèmes non linéaires autonomes et mono-sortie. Une méthode constructive basée sur des techniques de synthèse linéaires a été proposée. Les conditions nécessaires et suffisantes d'existence de la forme canonique ont été énoncées dans [78]. Plusieurs extensions de cette approche au cas des systèmes non linéaires commandés et multi-sorties sont données dans [79, 80].

1.3.2.2. Observateurs étendus

Il est possible d'étendre quelques techniques linéaires à des systèmes non linéaires, ceci en calculant le gain de l'observateur à partir du modèle linéarisé autour d'un point de fonctionnement. C'est par exemple le cas du filtre de Kalman étendu et l'observateur de Luenberger étendu que nous citons un peu plus en détail dans la suite.

A) Filtre de Kalman Etendu (EKF)

Le filtre de Kalman étendu est l'une des techniques d'estimation les plus populaires et largement étudiées dans le domaine d'estimation d'état des systèmes dynamiques non linéaires. Ce filtre étendu consiste à utiliser les équations du filtre de Kalman standard au modèle non linéaire linéarisé par la formule de Taylor au premier ordre.

Ce filtre étendu a été appliqué avec succès sur différents types de procédés non linéaires. Malheureusement, les preuves de stabilité et de convergence établies dans le cas des systèmes linéaires, ne peuvent être étendues de manière générale au cas des systèmes non linéaires. Dans un environnement déterministe, une preuve de la convergence du filtre de Kalman étendu a été établie dans [81] pour la classe des systèmes non linéaires à temps discret. Cependant, cette convergence n'est que locale. L'analyse de la convergence de cet estimateur reste, à l'heure actuelle, un problème ouvert. Les nombreuses recherches qui ont été menées sur ce sujet ont donné naissance à de nombreuses publications et ouvrages [82, 83]. Avant d'introduire le fameux filtre de Kalman étendu, nous avons besoin de présenter l'estimateur de Kalman standard pour les systèmes linéaires à temps variant (LTV).

Cas des systèmes LTV à temps continu : Pour le système LTV de la forme

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A(t)x + B(t)u + v_1(t) \\ y &= C(t)x + v_2(t) \end{aligned} \quad (1.32)$$

L'estimateur de Kalman standard est donné par :

$$\dot{\hat{x}} = A(t)\hat{x} + B(t)u + PC^T(t)R^{-1}(y - C(t)\hat{x}) \quad (1.33)$$

où P est la solution symétrique et définie positive de l'équation de Riccati suivante :

$$\dot{P} = AP + PA^T + Q - PC^T R^{-1} CP \quad (1.34)$$

Le filtre de Kalman étendu [84] est une extension directe du filtre de Kalman standard en remplaçant les matrices d'état et de sortie, A, C du sys-

tème linéaire (1.32) par les jacobienes des non-linéarités du système en question.

Considérons le système non linéaire suivant :

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x, u) + v(t) \\ y &= h(x, u) + w(t)\end{aligned}\tag{1.35}$$

L'EKF s'exprime de la manière suivante :

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}} &= f(\hat{x}, u) + PH(\hat{x}, u)R^{-1}(y - h(\hat{x}, u)) \\ \dot{P} &= F(\hat{x}, u)P + PF(\hat{x}, u)^T + Q - PH(\hat{x}, u)^T R^{-1}H(\hat{x}, u)P\end{aligned}\tag{1.36}$$

où

$$F(\hat{x}, u) = \frac{\partial f}{\partial x}(\hat{x}, u)\tag{1.37}$$

$$H(\hat{x}, u) = \frac{\partial h}{\partial x}(\hat{x}, u)\tag{1.38}$$

B) Observateur de Luenberger étendu

L'observateur de Luenberger étendu intervient, soit au niveau du système original avec un gain constant, soit par le biais d'un changement de coordonnées avec un gain dépendant de l'état à estimer. Dans le premier cas, un modèle linéarisé est nécessaire, et le gain de l'observateur est calculé par placement de pôles. Ce type d'observateur ne peut être utilisé que lorsque l'on est sûr que l'état restera au voisinage de l'état d'équilibre. Pour cette raison, cette méthode n'est pas très utilisée, parce que son utilisation peut être compromise par les instabilités qui peuvent se révéler si l'on s'éloigne du point de fonctionnement. Dans le deuxième cas, comme nous l'avons mentionné précédemment, les méthodes de changement de coordonnées ne concernent qu'une classe restreinte de systèmes non li-

néaires. En effet, beaucoup d'approches utilisant les changements de coordonnées nécessitent l'intégration d'un ensemble d'équations aux dérivées partielles non linéaires, ce qui est souvent très délicat à réaliser. De ce fait, l'utilisation de solutions approchées est envisageable.

1.3.2.3. Observateurs basés sur les fonctions de Lyapunov : observateurs de Thau

Une méthode directe de conception d'observateur est d'utiliser un retour de sortie linéaire. Cette approche, introduite initialement dans [85], s'applique sur la classe des systèmes non linéaires s'écrivant sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + \phi(x, u) \\ y &= Cx \end{aligned} \tag{1.39}$$

où $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$ et $y \in \mathbb{R}^p$ représentent respectivement les vecteurs d'état, des entrées et des sorties du système. La paire (A, C) est détectable et la non-linéarité, ϕ satisfait la propriété de Lipschitz par rapport à x :

$$\|\phi(x, u) - \phi(\hat{x}, u)\| \leq \gamma_\phi \|x - \hat{x}\|, \quad \forall x, \hat{x} \in \mathbb{R}^n \text{ et } \forall u \in \mathbb{R}^m \tag{1.40}$$

où γ_ϕ est la constante de Lipschitz de la fonction ϕ .

Ce type d'observateurs est relativement classique en observation des systèmes non linéaires. Son nom est dû au fait que le gain de l'observateur choisi est suffisamment grand pour compenser la non linéarité du système.

L'observateur de type Luenberger correspondant à (1.39) est de la forme :

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + \phi(\hat{x}, u) + K(y - C\hat{x}) \tag{1.41}$$

La dynamique de l'erreur d'estimation $\tilde{x} = x - \hat{x}$ est donnée par l'équation :

$$\dot{\tilde{x}} = (A - KC)\tilde{x} + \phi(x, u) - \phi(\hat{x}, u) \quad (1.42)$$

L'objectif est de déterminer sous quelles conditions le gain K peut garantir la stabilité de l'erreur d'estimation ε en zéro.

La méthode de Thau [85] fournit une condition suffisante de stabilité asymptotique de l'erreur d'estimation (1.42). Le résultat de cette méthode est donné par le théorème suivant :

Théorème 1.1. ([9, 85]) Considérons le système (1.39) et l'observateur (1.41). Si le gain d'observation K est choisi tel que :

$$\gamma < \frac{\lambda_{\min}(Q)}{2\lambda_{\max}(P)} \quad (1.43)$$

où $\lambda_{\min}(S)$ et $\lambda_{\max}(S)$ désignent respectivement les valeurs propres minimale et maximale de la matrice carrée S ,

les matrices $P = P^T > 0$ et $Q = Q^T > 0$ désignent les solutions de l'équation de Lyapunov :

$$(A - KC)^T P + P(A - KC) + Q = 0 \quad (1.44)$$

alors l'erreur d'estimation (1.42) est exponentiellement stable.

La preuve de ce théorème est basée sur l'utilisation de la fonction de Lyapunov standard :

$$V = V(\tilde{x}) = \tilde{x}^T P \tilde{x} \quad (1.45)$$

Pour plus de détails sur la preuve du Théorème 1.1, nous invitons le lecteur à consulter [85].

Il a été démontré dans [86] que le rapport $\frac{\lambda_{\min}(Q)}{2\lambda_{\max}(P)}$ est maximal si $Q = I_n$.

Le problème est donc réduit à choisir un gain K qui satisfait

$$\gamma < \frac{1}{2\lambda_{\max}(P)} \quad (1.46)$$

où

$$(A - KC)^T P + P(A - KC) = -I_n \quad (1.47)$$

1.3.2.4. Observateurs à grand gain

L'approche de Thau n'est pas une méthode de synthèse systématique. Elle permet seulement de vérifier la convergence de l'observateur (1.41), a posteriori. En effet, le choix des matrices P , Q et K qui satisfont l'inégalité (1.43) n'est pas direct. Par exemple, le placement des valeurs propres de $(A - KC)$ dans le demi-plan gauche n'implique pas que la condition (1.43) est satisfaite. Il n'existe aucune relation spécifique entre les valeurs propres de $(A - KC)$ et λ_{max} , ceci a été prouvé dans [87] par un simple exemple numérique.

Ce type d'observateurs a été largement étudié dans la littérature par de nombreux chercheurs spécialistes dans le domaine de l'observation d'état. Une méthode constructive a été proposée par Raghavan dans [87], où une solution explicite et systématique du choix du gain de l'observateur est établie. Cette solution est illustrée dans le théorème suivant :

Théorème 1.2. ([87]) Considérons le système(1.39) et l'observateur(1.41).

S'il existe petit valeur $\epsilon > 0$ tel que l'équation de Riccati

$$AP + PA^T + P \left(\gamma^2 I_n - \frac{1}{\epsilon} C^T C \right) P + I_n + \epsilon I_n = 0 \quad (1.48)$$

admette une solution P symétrique définie positive, alors le gain

$$K = \frac{1}{2\epsilon} PC^T \quad (1.49)$$

stabilise asymptotiquement la dynamique de l'erreur d'estimation (1.42).

Cependant, cet algorithme n'est pas efficace pour toutes les paires (A, C) observables et malheureusement ne donne pas d'informations sur les conditions que doit vérifier la matrice $(A - KC)$ afin d'assurer la stabilité de l'erreur d'estimation. Nous avons vu que le placement des valeurs propres de $(A - KC)$ dans le demi-plan gauche est certainement insuffisant.

Dans [88], l'auteur a suggéré une procédure de conception liée directement à la matrice $(A - KC)$. Dans cette procédure, le choix du gain K tel que

$$\sigma_{min}(A - KC) > \gamma \quad (1.50)$$

assure l'inégalité (1.45). Les valeurs singulières de $(A - KC)$ jouent, en effet, un rôle sur la convergence de l'observateur. Malheureusement, ce résultat est en général incorrect. Ceci a été démontré par un contre-exemple dans [9].

L'inexactitude du résultat précédent est intuitivement compréhensible. En effet, les valeurs singulières d'une matrice déterminent si cette matrice est proche d'être singulière. Une matrice pourrait être proche d'être singulière, mais ses valeurs propres restent proches de l'axe imaginaire. Cette distinction a été clarifiée après la nouvelle méthode proposée dans [9]. En effet, dans [9], Rajamani a établi un nouveau résultat permettant de corriger le précédent. Ce résultat est résumé dans le théorème suivant qui fournit des conditions nécessaires et suffisantes que doit vérifier la matrice $(A - KC)$ afin de justifier la convergence de l'observateur.

Théorème 1.3.7. ([9]) Considérons le système (1.39) et l'observateur (1.41), avec (A, C) observable et φ satisfait (1.40). Alors, l'erreur d'estimation est asymptotiquement stable si le gain K peut être choisi tel que $(A - KC)$ soit stable et :

$$\min_{\omega \geq 0} (\sigma_{\min}(A - KC - j\omega I_n)) \geq \gamma \quad (1.51)$$

où j est tel que $j^2 = -1$.

La démonstration complète de ce théorème est donnée dans [9].

D'autres méthodes de synthèse d'observateurs ont été développées spécialement pour la classe des systèmes uniformément observables [16, 89]. Ces méthodes utilisent un changement de variables pour se ramener à un système de la forme (1.39). Une fois le système transformé, l'utilisation d'un observateur à grand gain est systématique. Ce type d'observateurs a été appliqué à une classe de systèmes biologiques et à des procédés biotechnologiques dans [89, 90].

1.3.2.5. Observateurs à mode glissant

Toutes les approches présentées jusqu'ici considèrent que le modèle dynamique du processus à surveiller est parfaitement connu. Une des classes les plus connues des observateurs robustes contre les incertitudes paramétriques et les erreurs de modélisation est celle des observateurs qui se basent sur la théorie des systèmes à structure variable ou sur la théorie des modes glissants [91-94].

Pour un système de la forme :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, u) \\ y &= h(x) \end{aligned} \quad (1.52)$$

où $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$ et $y \in \mathbb{R}^p$ représentent respectivement les vecteurs d'état, des entrées et des sorties du système. f et h sont des champs de vecteurs supposés suffisamment continûment dérivables sur. L'entrée u est localement bornée et mesurable.

Une structure d'observateur à mode glissant (figure 2.3) est décrite par :

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}} &= f(\hat{x}, u) - \Lambda \text{sign}(y - \hat{y}) \\ \hat{y} &= h(\hat{x})\end{aligned}\tag{1.53}$$

Dans ce cas, $S = e_y = y - \hat{y}$ est dite surface de glissement.

Λ est la matrice de gain de dimension $(n - p)$.

On remarque que l'observateur obtenu est une copie du modèle du système plus un terme de correction Λ proportionnel à la fonction sign appliquée à l'erreur de sortie qui établit la convergence de \hat{x} vers x .

La fonction $\text{sign}(x)$ est définie par :

$$\text{sign}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Le choix de ce type d'observateur s'explique par les bonnes propriétés qui peuvent être satisfaites et qui se manifestent par :

- La convergence en temps fini vers une surface de glissement S nulle et l'évolution de $y(t)$ selon une dynamique d'ordre $(n - p)$.

L'attractivité de cette surface est assurée par des conditions appelées conditions de glissement [92].

- La possibilité de la réduction de dimension du système d'observation à $(n - p)$.
- L'équivalence de la fonction sign à un grand gain au voisinage de l'origine assure une robustesse contre les erreurs de modèle et les perturbations externes.

Les dynamiques concernées pour les observateurs à mode glissant sont celles des erreurs d'observation $e_x = x - \hat{x}$. A partir de leurs valeurs

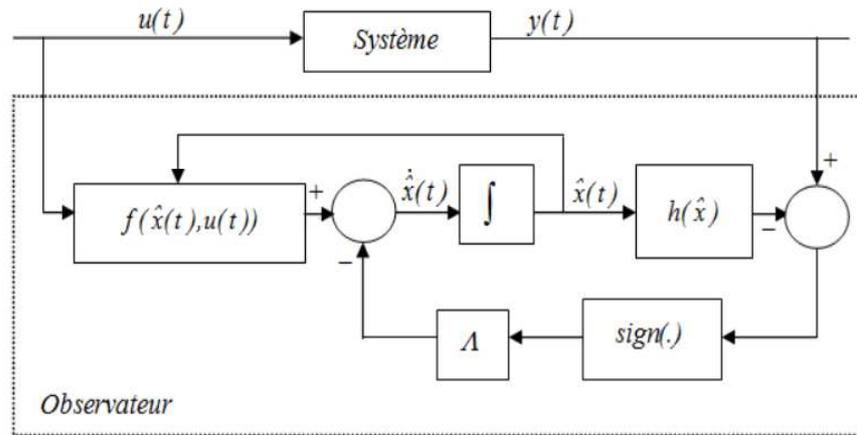


Figure 1. 2 Structure d'un observateur à mode glissant

Initiales $e(0)$, ces erreurs convergent vers les valeurs d'équilibre en deux étapes :

- Au début, la trajectoire des erreurs d'observation évolue vers la surface de glissement sur laquelle les erreurs de sortie $e_y = y - \hat{y}$ sont nulles. Cette étape est connue sous l'appellation de « mode d'atteinte ».
- Ensuite, la trajectoire des erreurs d'observation glisse sur la surface de glissement avec des dynamiques imposées de manière à annuler toutes les erreurs d'observation. Ce mode est appelé « mode de glissement ». Durant cette étape, le gain de correction agit de manière à satisfaire la condition d' invariance suivante $\dot{S} = 0$ et $S = 0$.

Plus de détails pour la synthèse d'un observateur à mode glissant sont clairement donnés dans [91].

1.3.2.6. Observateurs adaptatifs

Parfois les paramètres du système varient au cours du temps ou bien ils sont inconnus. Nous avons donc besoin d'estimer simultanément les para-

mètres inconnus et l'état. L'idée est de combiner la connaissance du système physique avec des données expérimentales mesurables [94], [95], [118] ce qui permet de concevoir des observateurs adaptatifs.

Les premières études sur ces observateurs adaptatifs sont développées pour les systèmes linéaires par Kreisselmeier [95], Luders et Narendra [96], depuis les années 70 où l'observateur proposé assimile l'erreur de sortie avec adaptation des paramètres.

Un travail élaboré par Bastin et Gevers [97] présente un observateur adaptatif non linéaire pour des systèmes mono-entrée/mono-sortie en utilisant les mêmes concepts développés par Luders et Narendra [96].

Nous considérons les systèmes non linéaires décrits par :

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x, u, \theta) \\ y &= h(x)\end{aligned}\tag{1.54}$$

où $x \in \mathbb{R}^n$ représente le vecteur d'état, $u \in \mathbb{R}^m$ est l'entrée mesurée, $y \in \mathbb{R}^p$ est la sortie mesurée et $\theta = [\theta_1, \dots, \theta_k]^T \in \mathbb{R}^k$ est le vecteur de paramètres inconnus.

Dans ce cas, l'observateur adaptatif qui estime simultanément l'état et les paramètres d'un système est de la forme :

$$\dot{\hat{x}} = \hat{f}(\hat{x}, u, \hat{\theta}, y, H)\tag{1.55}$$

$$\hat{y} = \hat{l}(\hat{x}, u, \hat{\theta}, y, P)\tag{1.56}$$

avec $\hat{\theta}$ est l'estimé de θ , \hat{f} et \hat{l} sont deux fonctions non linéaires et H et P représentent les matrices des gains d'ajustement.

1.4 Conclusion

Ce chapitre a été consacré d'une part à quelques rappels sur des concepts relatifs à la stabilité (stabilité au sens de Lyapunov) et à l'observabilité (rappels sur quelques définitions sur la notion d'observabilité et formulation du principe d'estimation d'état). D'autre part, nous avons présenté un état de l'art qui regroupe la plupart des techniques de conception d'observateurs pour les systèmes non linéaires à temps discret et à temps continu. Pour cette classe générale de systèmes, nous avons vu qu'il n'existe pas, à l'heure actuelle, de méthode universelle pour la synthèse d'observateurs. Les approches développées à ce jour sont soit une approximation des algorithmes linéaires (linéarisation autour d'un point de fonctionnement), soit des algorithmes non linéaires spécifiques pour certaines classes de systèmes.

Chapitre 2

Modélisation des systèmes mécaniques

Dans ce chapitre, on s'intéresse à la modélisation des systèmes mécaniques. La première partie est consacrée à la présentation des systèmes Lagrangiens. On explique, le concept de sous actionnement, et les types de contraintes. La deuxième partie est consacrée à la présentation des système Hamiltoniens. On parlera, ensuite en détail de formalisme Hamiltonien à ports. Les conditions nécessaires et suffisantes pour linéariser ce type de système par un changement de coordonnées partiel seront présentées. Une caractérisation et une classification complètes des systèmes mécaniques qui satisfont ces conditions seront exposées.

2.1 Systèmes Lagrangiens

La méthode Lagrangienne, issue du calcul variationnel, a comme idée principale la définition des fonctions d'énergie en termes de coordonnées et vitesses généralisées, ce qui mène à la définition d'une fonction appelée Lagrangienne. La dynamique d'un système mécanique Lagrangien est définie par l'ensemble d'équations différentielles appelé équation d'Euler-Lagrange :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}(q, \dot{q}) \right) - \frac{\partial L}{\partial q}(q, \dot{q}) = B(q)u \quad (2.1)$$

Où $q \in \mathbb{R}^n$ représente le vecteur des coordonnées généralisées pour un système avec n degré de liberté et \dot{q} le vecteur des vitesses généralisées correspondant. $u \in \mathbb{R}^m$ est le vecteur des forces externes et $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ est la matrice correspondante qui répartit les forces sur le système (elle lie les entrées externes aux coordonnées généralisées).

La fonction Lagrangienne $L(q, \dot{q})$ est définie, pour les systèmes mécaniques simples, comme étant la différence entre l'énergie cinétique $E_c(q, \dot{q})$ et l'énergie potentielle $V(q)$.

$$L(q, \dot{q}) = E_c(q, \dot{q}) - V(q) \quad (2.2)$$

Pour les systèmes mécaniques, l'énergie cinétique est donnée par

$$E_c(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} \dot{q}^T M(q) \dot{q} \quad (2.3)$$

avec $M(q) = M^T(q) > 0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ est la matrice d'inertie généralisée.

L'énergie potentielle est inférieurement bornée, c.à.d. il existe un $c \in \mathbb{R}$ tel que $V(q) > c$ pour tout $q \in \mathbb{R}^n$.

L'avantage de ce formalisme est que la forme des équations d'Euler-Lagrange est invariante, de plus, ce formalisme permet d'obtenir directement les équations d'évolution des systèmes mécaniques en fonction des forces appliquées.

Les équations du mouvement dérivent de l'équation (2.1) sont données par :

$$\sum_j (M_{kj}(q) \ddot{q}_j) + \sum_{i,j} (C_{ijk}(q) \dot{q}_i \dot{q}_j) + g_k(q) = e_k^T B(u), \quad k = 1, \dots, n \quad (2.4)$$

où e_k est la $k^{ième}$ base standard de \mathbb{R}^n , $g_k(q) = \nabla_{q_k} V(q)$, M_{kj} sont les éléments de la matrice d'inertie et C_{ijk} sont les symboles de Christoffel de première espèce définis par :

$$C_{ijk}(q) = \frac{1}{2} \left\{ \nabla_{q_j} M_{ik} + \nabla_{q_i} M_{jk} - \nabla_{q_k} M_{ij} \right\} \quad (2.5)$$

L'écriture de la formule 2.4 sous une forme vectorielle donne :

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + g(q) = B(q)u \quad (2.6)$$

où $M(q)$ est la matrice d'inertie et $C(q, \dot{q})$ est une matrice composée des éléments :

$$C_{ij}(q, \dot{q}) = \sum_{k=1}^n (C_{ijk}(q)\dot{q}_k) \quad (2.7)$$

$C(q, \dot{q})\dot{q}$ contient deux types d'éléments : ceux qui font intervenir les produits $\dot{q}_i\dot{q}_j$ pour $i = j$, ils sont appelés forces Centrifuges et ceux qui correspondent aux indices $i \neq j$, ils sont les forces de Coriolis. Le vecteur $g(q)$ représente les forces de gravité [98].

La relation entre la matrice d'inertie M et la matrice des forces de Coriolis et de Centrifuges C est donnée par les deux propriétés ci-dessous

$$\dot{M}(q) = C(q, \dot{q}) + C^T(q, \dot{q}) \quad (2.8)$$

$$\nabla_q = \left\{ \frac{1}{2} \dot{q}^T M(q) \dot{q} \right\} = (\dot{M} - C)\dot{q} \quad (2.9)$$

2.2 Systèmes mécaniques complètement actionnés

Considérons le système (2.6). Ce système mécanique est dit complètement actionné si le nombre des entrées de commande est égale au nombre de degrés de liberté ($\text{rang}(B) = n = m$) ou, autrement dit, $B(q)$ est une ma-

trice carrée inversible. Par conséquent, les systèmes mécaniques complètement actionnés sont linéarisable par retour d'état statique et n'admettent pas une dynamique des zéros [99]. Ceci peut être montré en appliquant la commande suivante :

$$u = B^{-1}(q)[M(q)v + C(q, \dot{q})\dot{q} + g(q)] \quad (2.10)$$

en redéfinissant les variables $x_1 = q, x_2 = \dot{q}$ on obtient :

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \dot{q} \\ \dot{x}_2 &= \ddot{q} \end{aligned}$$

qui représente clairement un système en (vecteur) double intégrateurs, c'est pourquoi la plupart des problèmes mécaniques complètement actionnés peuvent être réduit à des problèmes équivalents pour des systèmes linéaires où on peut appliquer les concepts de l'automatique linéaire classique, ce qui signifie que la commande des systèmes mécaniques complètement actionnés et sans perturbation ne pose pas des défis en termes de commande.

2.3 Systèmes mécaniques sous actionnés

Un système mécanique contrôlé associé au vecteur de configuration $q \in \mathbb{R}^n$ et au lagrangien $L(q, \dot{q})$ satisfaisant les équations d'Euler-Lagrange (2.1) est appelé un système mécanique sous actionnée si ($\text{rang}(B) = m < n$).

Un système mécanique est dit sous actionné s'il admet moins d'actionneurs que de degrés de liberté. En d'autres termes, les systèmes sous actionnés sont des systèmes mécaniques avec moins d'entrées de commande indépendantes que de degrés de liberté à contrôler de sorte que les entrées généra-

lisées ne peuvent pas commander les accélérations instantanées dans toutes les directions ([100],[101]).

Un système mécanique peut être sous actionné de plusieurs façons, la plus évidente est celle due à la dynamique du système associé par exemples : avions, hélicoptères, bateaux, sous-marins, systèmes de locomotion sans roues ; ou encore par conception dans le but de réduire le poids de certaines applications pratiques telles que les satellites et les robots à articulations flexibles. Le sous actionnement peut provenir aussi d'une panne d'actionneur en cours de fonctionnement ou encore imposé artificiellement pour générer des systèmes complexes pour un ordre pas très élevé, c'est le cas du pendule inversé.

Pour certains systèmes sous actionnés, le manque d'actionneurs est souvent interprété comme des contraintes sur l'accélération c'est à dire comme des contraintes non holonomes du second ordre.

2.4 Systèmes mécaniques avec contraintes cinématiques

Considérons un système mécanique avec n degrés de liberté, décrit localement par n configurations $q = (q_1, \dots, q_n)$ associé au Lagrangien $L(q, \dot{q})$ qui satisfait les équations d'Euler-Lagrange (2.1), avec l'énergie cinétique exprimé en (2.3). Supposons maintenant qu'il y a des contraintes sur les vitesses généralisées \dot{q} , décrit comme

$$A^T(q)\dot{q} = 0 \tag{2.11}$$

avec $A(q)$ une matrice $k \times n$ de rang k (il y a k *contraints cinématiques* indépendants). Classiquement, les constraints (2.11) sont appelés *holonome*

s'il est possible de trouver une nouvelle configuration des coordonnées $\bar{q} = (\bar{q}_1, \dots, \bar{q}_n)$ tels que les contraintes sont d'une manière équivalente exprimée en :

$$\dot{\bar{q}}_{n-k+1} = \dot{\bar{q}}_{n-k+2} = \dots = \dot{\bar{q}}_n = 0 \quad (2.12)$$

Dans ce cas, il est possible d'éliminer la configuration $\bar{q}_{n-k+1}, \dots, \bar{q}_n$, puisque les contraintes cinématiques (2.12) sont équivalents aux contraintes *géométriques*

$$\bar{q}_{n-k+1} = c_{n-k+1}, \dots, \bar{q}_n = c_n \quad (2.13)$$

Pour certaines contraintes c_{n-k+1}, \dots, c_n déterminée par des conditions initiales.

Ensuite le système réduit à un système *sans contraintes* (unconstrained) dans le reste de la configuration $(\bar{q}_1, \dots, \bar{q}_{n-k})$.

S'il n'est pas possible de trouver des coordonnées \bar{q} de telle sorte que (2.12) soit vérifié (c.-à-d., si nous ne sommes pas capables d'intégrer les contraintes cinématiques comme ci-dessus), alors, les contraintes sont appelés *non holonome*.

Les équations du mouvement pour le système mécanique avec Lagrangien $L(q, \dot{q})$ et contraintes (2.11) sont donnés par des équations Euler-Lagrange [102] :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q} = A(q)\lambda + B(q)u, \quad \lambda \in \mathbb{R}^k, u \in \mathbb{R}^m \quad (2.14)$$

$$A^T(q)\dot{q} = 0 \quad (2.15)$$

où $B(q)u$ sont les forces extérieures (commandes) appliqué au système, pour certaines matrice $B(q)$ de dimension $n \times m$. $A(q)\lambda$ sont les forces de constraint. Les multiplicateurs de Lagrange $\lambda(t)$ sont uniquement détermi-

nés par l'exigence que les contraintes $A^T(q)\dot{q} = 0$ doivent être satisfaits pour tous t .

2.5 Méthode Hamiltonienne

Dans la formalisation Hamiltonienne, les équations d'Euler-Lagrange sont écrites en fonction de la position et de la quantité de mouvement généralisée au lieu de la position et de la vitesse généralisée. Le vecteur des moments généralisés $p = (p_1, p_2, \dots, p_n)^T$ est défini pour tout Lagrangien L comme :

$$p = \frac{\partial L(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}} \quad (2.16)$$

où bien $p = M\dot{q}$

De plus, dans la méthode Hamiltonienne, on définit par transformation de Legendre de $L(q, \dot{q})$ une fonction d'énergie totale $H(q, p)$ qui, pour les systèmes mécaniques, est égale à la somme des énergies cinétique et potentielle du système :

$$H(q, p) = \frac{1}{2}p^T M^{-1}(q)p + V \quad (2.17)$$

Le vecteur d'état dans la formulation Hamiltonienne est :

$$(q_1, q_2, \dots, q_n, p_1, p_2, \dots, p_n)^T \quad (2.18)$$

Les n équations différentielles de second ordre (2.1) se transforment en $2n$ équations différentielles de premier ordre :

$$\begin{cases} \dot{q} = \frac{\partial H(q, p)}{\partial p} = M^{-1}p \\ \dot{p} = -\frac{\partial H(q, p)}{\partial q} + Bu \end{cases} \quad (2.19)$$

L'équation (2.19) peut s'écrire sous forme matricielle comme

$$\begin{pmatrix} \dot{q} \\ \dot{p} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0_n & I_n \\ -I_n & 0_n \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial q} \\ \frac{\partial H}{\partial p} \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 0_n \\ B \end{bmatrix} u \quad (2.20)$$

où on note I_n la matrice identité d'ordre n et 0_n la matrice nulle d'ordre n . Les systèmes dont la dynamique est écrite par l'équation (2.19) sont appelés systèmes *Hamiltoniens*. La fonction d'énergie totale $H(q, p)$ est appelée *fonction Hamiltonienne*.

Un avantage principal de (2.20) par rapport à (2.1) c'est que cette représentation constitue immédiatement un espace d'état standard, avec des variables d'état (q, p) (en physique généralement appelées variables de phase). De plus, ces variables sont des variables conjuguées et l'Hamiltonien H peut être directement lié à l'énergie du système.

2.6 Modèle Hamiltonien à ports

Historiquement, l'approche Hamiltonienne a ses racines dans la mécanique analytique et part du principe de moindre action, via les équations d'Euler-Lagrange et la Transformation de Legendre, vers les équations Hamiltoniennes du mouvement. D'un autre côté, l'approche réseau provient de l'ingénierie électrique et constitue la pierre angulaire de la théorie des systèmes. Alors qu'une grande partie de l'analyse des systèmes physiques a été effectuée dans le cadre Lagrangien et Hamiltonien, le point de vue de la modélisation de réseau prévaut dans la modélisation et la simulation de systèmes physiques (complexes). Le cadre des systèmes Hamiltoniens à ports combine les deux points de vue, en associant à la structure

d'interconnexion (structure de jonction généralisée en terminologie de bond graph) du modèle de réseau une structure géométrique donnée par une structure de Dirac. Ceci est en contraste avec les équations classiques du mouvement Hamiltonien où la structure géométrique est fondamentalement déterminée par la géométrie de l'espace de phase donné comme le cotangent de la configuration variété.

La dynamique Hamiltonienne est alors définie par rapport à cette structure de Dirac et l'Hamiltonien donné par l'énergie totale stockée. De plus, les systèmes Hamiltoniens à ports sont des systèmes dynamiques ouverts, qui interagissent avec leur environnement via les ports. Les effets résistifs sont inclus en terminant certains de ces ports sur des éléments dissipant d'énergie.

Les structures de Dirac englobent les structures géométriques classiquement utilisées dans la géométrisation de la mécanique (structures de Poisson et structures pré-symplectiques), et permettent de décrire la structure géométrique de systèmes dynamiques à contraintes algébriques. De plus, les structures de Dirac permettent d'étendre la description Hamiltonienne des systèmes à paramètres distribués pour inclure des conditions aux limites variables, conduisant à des systèmes Hamiltoniens à ports avec des paramètres distribués et des ports bornés.

2.6.1. Des les équations Hamiltoniennes classiques aux systèmes Hamiltoniens à ports

Considérons les équations Hamiltoniennes standard pour les systèmes mécanique données en (2.19). On dérive immédiatement le bilan énergétique suivant :

$$\frac{d}{dt}H(q, p) = \frac{\partial^T H(q, p)}{\partial q} \dot{q} + \frac{\partial^T H(q, p)}{\partial p} \dot{p} = \frac{\partial^T H(q, p)}{\partial p} u = \dot{q}^T u \quad (2.21)$$

exprimant que l'augmentation d'énergie du système est égale au travail fourni (conservation d'énergie). Cela motive à définir la sortie du système comme $y = \dot{q}$ (le vecteur des vitesses généralisées).

Le système (2.19) est un exemple de système Hamiltonien à entrée-sortie localisé qui plus généralement donné sous la forme suivante[103] :

$$\begin{aligned} \dot{q} &= \frac{\partial H}{\partial p}(q, p) & (q, p) &= (q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n) \\ \dot{p} &= -\frac{\partial H}{\partial q}(q, p) + B(q)u & u &\in \mathbb{R}^m \\ y &= B^T(q) \frac{\partial H}{\partial p}(q, p) = B^T(q)\dot{q} & y &\in \mathbb{R}^m \end{aligned} \quad (2.22)$$

avec $B(q)u$ désignant les forces généralisées résultant de l'entrée $u \in \mathbb{R}^m$.

L'espace d'état de (2.22) avec les coordonnées locales (q, p) est souvent appelé espace de phase. Si $m < n$ dans ce cas on parle d'un système sous-actionné, si $m = k$ et la matrice $B(q)$ est inversible partout (comme en (2.19)), alors le système Hamiltonien est appelé complètement actionné.

A cause de la forme des équations de sortie $y = B^T(q)\dot{q}$ nous obtenons encore le bilan énergétique (2.21) :

$$\frac{dH}{dt}(q(t), p(t)) = y^T(t)u(t) \quad (2.23)$$

Une généralisation consiste à considérer les systèmes décrits dans les coordonnées locales comme

$$\begin{aligned} \dot{x} &= J(x) \frac{\partial H}{\partial x}(x) + B(x)u & x \in \mathcal{X}, u \in \mathbb{R}^m \\ y &= g^T(x) \frac{\partial H}{\partial x}(x) & y \in \mathbb{R}^m \end{aligned} \quad (2.24)$$

Ici $J(x)$ est une matrice $n \times n$ avec des entrées dépendent de x , qui est supposé être antisymétrique, c'est-à-dire :

$$J(x) = -J^T(x) \quad (2.25)$$

et $x = (x_1, \dots, x_n)$ sont des coordonnées locales pour une variété \mathcal{X} de dimension n . en raison de (2.25) nous calculons :

$$H(x(t_1)) = H(x(t_0)) + \int_{t_0}^{t_1} u^T(t)y(t)dt \quad \forall t_0, t_1, \forall u(\cdot) \quad (2.26)$$

Qui montre que (2.24) est conservative si $H > 0$. Nous appelons (2.24) avec J satisfaisant (2.25) un système *Hamiltonien à ports (pH)* avec une matrice de structure $J(x)$ et un Hamiltonien H (voir [104],[105]). Notant que (2.22) est un cas particulier de (2.24) avec $x = (q, p)$, et $J(x)$ (étant donné par la matrice constante asymétrique) et $g(x)$ seront donnée par :

$$J = \begin{bmatrix} 0 & I_k \\ -I_k & 0 \end{bmatrix}, \quad g = \begin{bmatrix} 0 \\ B(q) \end{bmatrix} \quad (2.27)$$

Dans nombreux exemples la matrice de structure J satisfaire les conditions « d'intégrabilité »

$$\sum_{l=1}^n \left[J_{lj}(x) \frac{\partial J_{ik}}{\partial x_l}(x) + J_{li}(x) \frac{\partial J_{kj}}{\partial x_l}(x) + J_{lk}(x) \frac{\partial J_{ji}}{\partial x_l}(x) \right] = 0, \quad (2.28)$$

$i, j, k = 1, \dots, n$

Dans ce cas, nous pouvons trouver par la théorème de Darboux autour de n'importe quel point x_0 où le rang de la matrice $J(x)$ est constante, coordonnées locales suivants [106] :

$$\tilde{x} = (q, p, s) = (q_1, \dots, q_k, p_1, \dots, p_k, s_1, \dots, s_l) \quad (2.29)$$

avec le $\text{rang}(J) = 2k$ et $n = 2k + l$, J dans ces coordonnées prend la forme :

$$J = \begin{bmatrix} 0 & I_k & 0 \\ -I_k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.30)$$

Les coordonnées (q, p, s) sont appelés coordonnées *canoniques*, et J satisfaisant (2.25) et (2.28) est appelé *matrice de structure de Poisson*. Dans ce coordonnées canoniques, les équations (2.22) prennent la forme [103] :

$$\begin{aligned} \dot{q} &= \frac{\partial H}{\partial p}(q, p, s) + g_q(q, p, s)u \\ \dot{p} &= -\frac{\partial H}{\partial q}(q, p, s) + g_p(q, p, s)u \\ \dot{s} &= g_s(q, p, s)u \\ y &= g_q^T(q, p, s) \frac{\partial H}{\partial q}(q, p, s) + g_p^T(q, p, s) \frac{\partial H}{\partial p}(q, p, s) \\ &\quad + g_s^T(q, p, s) \frac{\partial H}{\partial s}(q, p, s) \end{aligned} \quad (2.31)$$

Qui est, à part l'apparition du variable s , très proche de la forme Hamiltonien standard (2.22). En particulier, si $g_s = 0$, alors, les variables s sont simplement un ensemble additionnel des paramètres constantes.

2.6.2. Des la modélisation de réseau basée sur les ports aux systèmes Hamiltoniens à ports

Dans cette sous-section, nous adoptons un point de vue différent en insistant sur la façon dont les systèmes Hamiltoniens à ports découlent directement des modèles de réseaux physiques basés sur les ports.

Dans les modèles de réseau de systèmes physiques complexes, le système global est considéré comme l'interconnexion d'éléments stockant l'énergie via des lois d'interconnexion de base (bilan) comme la troisième loi de Newton ou les lois de Kirchhoff, ainsi que des éléments conservateurs d'énergie comme les transformateurs, des paires cinématiques et des contraintes idéales, ensemble avec des éléments dissipateurs d'énergie ([107],[108]). Le point de départ de la théorie des systèmes Hamiltoniens à ports est de formaliser les lois d'interconnexion de base avec les éléments de conservation de l'énergie par une structure géométrique, et de définir l'Hamiltonien comme l'énergie totale stockée dans le système.

Exemple 2.1 (circuits LCTG). Considérons un circuit LC contrôlé (voir la figure 2.1) composé de deux inductances d'énergie magnétique $H_1(\varphi_1)$, $H_2(\varphi_2)$ (φ_1 et φ_2 étant les liaisons de flux magnétiques) et un condensateur d'énergie électrique $H_3(Q)$ (Q étant la charge). Si les éléments sont linéaires alors $H_1(\varphi_1) = \frac{1}{2L_1} \varphi_1^2$, $H_2(\varphi_2) = \frac{1}{2L_2} \varphi_2^2$ and $H_3(Q) = \frac{1}{2C} Q^2$. De plus, soit $V = u$ désigne une source de tension. En utilisant les lois de Kirchhoff, on obtient les équations dynamiques suivantes :

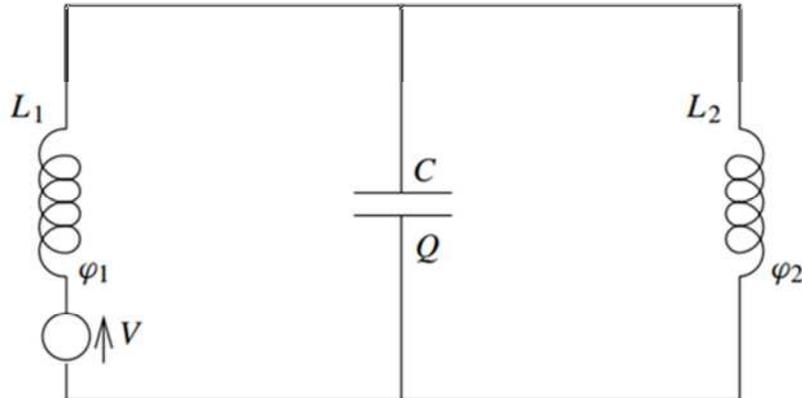


Figure 2. 1 Circuit LC

$$\begin{bmatrix} \dot{Q} \\ \dot{\varphi}_1 \\ \dot{\varphi}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial H}{\partial Q} \\ \frac{\partial H}{\partial \varphi_1} \\ \frac{\partial H}{\partial \varphi_2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \quad (2.32)$$

$$y = \frac{\partial H}{\partial \varphi_1} \quad (\text{courant à travers la source de tension}) \quad (2.33)$$

avec $H(Q, \varphi_1, \varphi_2) := H_1(\varphi_1) + H_2(\varphi_2) + H_3(Q)$ est l'énergie totale.

Clairement (par le théorème de Tellegen[109]) la matrice J est antisymétrique.

De cette manière, chaque circuit LC avec des éléments indépendants peut être modélisé comme un système Hamiltonien à ports. De même, tout circuit LCTG avec des éléments indépendants peut être modélisé comme un système Hamiltonien à ports, avec J maintenant déterminé par les lois de Kirchhoff et les relations constitutives des transformateurs T et des gyrateurs G .

2.6.3. Structures de Dirac et systèmes Hamiltoniens à ports implicites

D'un point de vue général de la modélisation, les systèmes physiques sont, au moins en première instance, souvent décrits comme un ensemble mixte d'équations différentielles et algébriques. Ceci provient du fait que dans la modélisation de réseau, le système concerné est considéré comme obtenu à partir de sous-systèmes plus simples d'interconnectés. Ces interconnexions donnent généralement lieu à des contraintes algébriques entre les variables d'espace d'état des sous-systèmes ; conduisant ainsi à des systèmes implicites. Par conséquent, il est important d'étendre le cadre des systèmes Hamiltoniens à ports au contexte des systèmes implicites ; c'est-à-dire, des systèmes avec des contraintes algébriques.

Structures de Dirac

Afin de donner la définition d'un système Hamiltonien à ports implicite, nous introduisons la notion de structure de Dirac, formalisant le concept d'une interconnexion de conservation de puissance, et généralisant la notion de matrice de structure $J(x)$ telle que rencontrée auparavant.

Soit \mathcal{F} un espace linéaire de dimension ℓ , et notons son dual (l'espace des fonctions linéaires sur \mathcal{F}) par \mathcal{F}^* . L'espace produit $\mathcal{F} \times \mathcal{F}^*$ est considéré comme l'espace des variables de puissance, avec une puissance définie par :

$$P = \langle f^* | f \rangle, \quad (f, f^*) \in \mathcal{F} \times \mathcal{F}^* \quad (2.34)$$

où $\langle f^* | f \rangle$ indique le produit de la dualité. Souvent, nous appelons \mathcal{F} l'espace des flux f , et \mathcal{F}^* l'espace des efforts e , avec la puissance d'un élément $(f, e) \in \mathcal{F} \times \mathcal{F}^*$ noté $\langle e | f \rangle$

Il existe sur $\mathcal{F} \times \mathcal{F}^*$ la forme bilinéaire symétrique canonique définie comme

$$\langle (f_1, e_1), (f_2, e_2) \rangle_{\mathcal{F} \times \mathcal{F}^*} := \langle e_1 | f_2 \rangle + \langle e_2 | f_1 \rangle \quad (2.35)$$

Pour $f_i \in \mathcal{F}, e_i \in \mathcal{F}^*, i = 1, 2$.

Définition 2.1 ([110, 111]). Une structure de Dirac constante sur \mathcal{F} est un sous-espace linéaire $\mathfrak{D} \subset \mathcal{F} \times \mathcal{F}^*$ tel que :

$$\mathfrak{D} = \mathfrak{D}^\perp \quad (2.36)$$

où \perp désigne le complément orthogonal par rapport à la forme bilinéaire $\langle \cdot \rangle_{\mathcal{F} \times \mathcal{F}^*}$

Il s'ensuit immédiatement que la dimension de toute structure de Dirac \mathfrak{D} sur un espace linéaire de dimension ℓ est égale à ℓ . De plus, soit $(f, e) \in \mathfrak{D} = \mathfrak{D}^\perp$. Puis par (2.35) :

$$0 = \langle (f, e), (f, e) \rangle_{\mathcal{F} \times \mathcal{F}^*} = 2\langle e | f \rangle \quad (2.37)$$

Pour tout $(f, e) \in \mathfrak{D}$ on obtient $\langle e | f \rangle = 0$. Ainsi, une structure de Dirac \mathfrak{D} sur \mathcal{F} définit une relation de conservation de puissance entre les variables de puissance $(f, e) \in \mathcal{F} \times \mathcal{F}^*$, qui de plus a une dimension maximale.

2.6.4. Définition géométrique d'un système Hamiltonien à ports

Pour la formulation port-hamiltonienne (voir aussi Golo et al. (2003)), les éléments stockant l'énergie seront regroupés dans un seul objet désigné par S ('stockage'), et de même les éléments dissipant l'énergie sont regroupés dans un seul objet noté R ('résistif'). Enfin, l'interconnexion de tous les éléments d'acheminement d'énergie peut être considérée comme une struc-

ture d'acheminement d'énergie unique 4 désignée par D (à formaliser par la notion géométrique de structure de Dirac).

En général, un système Hamiltonien à ports peut être représenté comme sur la figure 2.2. Premièrement, il y a deux ports internes. L'un, noté \mathcal{S} , correspond au stockage d'énergie et l'autre, noté \mathcal{R} , correspond à une dissipation d'énergie interne (éléments résistifs). Deuxièmement, deux ports externes sont distingués. Le port externe désigné par \mathcal{C} est le port accessible pour l'action du contrôleur. La présence de sources peut également être incluse dans ce port. Le port externe noté \mathcal{J} est le port d'interaction, définissant l'interaction du système avec (le reste de) son environnement. Enfin, l'interconnexion de tous les éléments d'acheminement d'énergie peut être considérée comme une structure d'acheminement d'énergie unique désignée par \mathfrak{D} qui est formalisé par la notion géométrique de structure de Dirac (on l'appelle la structure de jonction généralisée dans la terminologie des graphes de liaison« Bond Graph », (voir les références [112-114], pour plus de détails sur la relation entre la théorie des graphes des liaisons et la formulation pH).

a. Port de stockage d'énergie

Les variables de port associées au port de stockage interne seront désignées par (f_S, e_S) . Ils sont interconnectés au stockage d'énergie du système qui est défini par une variété d'espace d'état \mathcal{X} de dimension finie avec des coordonnées x , ainsi qu'une fonction Hamiltonienne $H: \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$ désignant l'énergie. Les variables d'écoulement du stockage d'énergie sont données par le taux \dot{x} des variables d'énergie x . De plus, les variables d'effort du stockage

d'énergie sont données par les variables de co-énergie $\frac{\partial H}{\partial x}(x)$, résultant en bilan d'énergie :

$$\frac{d}{dt}H = \left\langle \frac{\partial H}{\partial x}(x) \middle| \dot{x} \right\rangle = \frac{\partial^T H}{\partial x}(x) \dot{x} \quad (2.38)$$

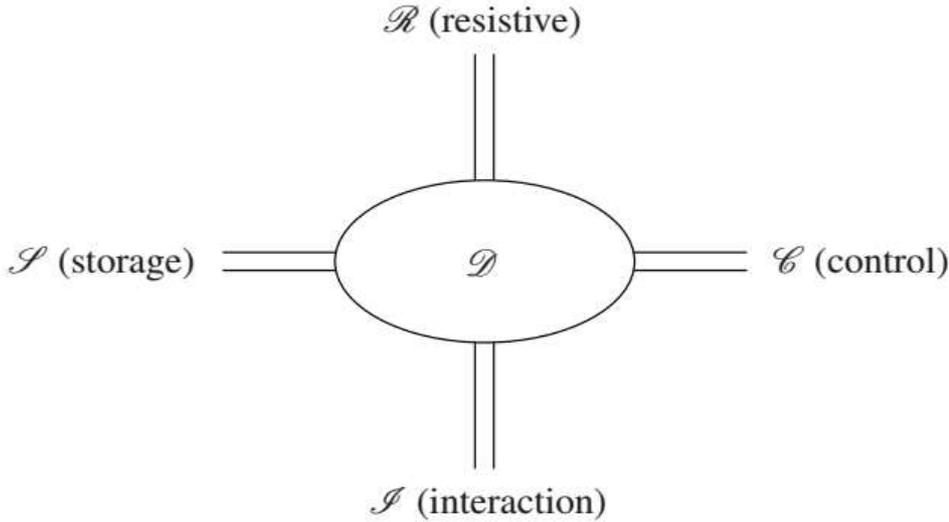


Figure 2.2 Système Hamiltonien à ports

(Nous adoptons ici la convention que $\frac{\partial H}{\partial x}(x)$ désigne le vecteur colonne des dérivées partielles de H .)

L'interconnexion des éléments de stockage d'énergie avec le port de stockage de la structure de Dirac est réalisée en réglant

$$f_S = -\dot{x} \quad (2.39)$$

$$e_S = \frac{\partial H}{\partial x}(x) \quad (2.40)$$

Par conséquent, le bilan énergétique (2.38) peut aussi être écrit comme :

$$\frac{d}{dt}H = \left\langle \frac{\partial H}{\partial x}(x) \middle| \dot{x} \right\rangle = \frac{\partial^T H}{\partial x}(x) \dot{x} = -e_s^T f_S \quad (2.41)$$

b. Port résistif

Le deuxième port interne correspond à la dissipation d'énergie interne (due au frottement, à la résistance, etc.), et ses variables de port sont notées (f_R, e_R) .

Ces variables de port sont terminées sur une relation statique résistive \mathcal{R} .

En général, une relation statique résistive sera de la forme :

$$R(f_R, e_R) = 0 \quad (2.42)$$

avec la propriété que pour tous (f_R, e_R) satisfaisant (2.42) :

$$\langle e_R | f_S \rangle \leq 0 \quad (2.43)$$

Dans de nombreux cas, nous pouvons nous limiter à des relations linéaires résistives. Cela signifie que les variables de port résistives (f_R, e_R) satisfont les relations linéaires de la forme :

$$R_f f_R + R_e e_R = 0 \quad (2.44)$$

L'inégalité (2.43) correspond aux matrices carrées R_f et R_e vérifiant les propriétés de symétrie et de définition semi-positive :

$$R_f R_e^T = R_e^T f_R \geq 0 \quad (2.45)$$

avec la condition de dimensionnalité $\text{rang}[R_f | R_e] = \dim f_R$.

Sans la présence de ports externes supplémentaires, la structure de Dirac du système Hamiltonien à ports vérifie le bilan de puissance $f_S e_S^T + e_R^T f_R = 0$ qui conduit à :

$$\frac{d}{dt} H = -f_S e_S^T = e_R^T f_R \leq 0 \quad (2.46)$$

Un cas particulier important de relations résistives entre f_R et e_R se produit lorsque les relations résistives peuvent être exprimées sous forme

d'application entrée-sortie $f_R = -F(e_R)$, où la caractéristique résistive $F : \mathbb{R}^{m_r} \rightarrow \mathbb{R}^{m_r}$ satisfait :

$$e_R^T F(e_R) \geq 0, \quad e_R \in \mathbb{R}^{m_r} \quad (2.47)$$

Pour les éléments résistifs linéaires, il s'agit de $f_R = -\tilde{R}e_R$, pour une matrice symétrique semi-définie positive $\tilde{R} = \tilde{R}^T \geq 0$.

c. Ports externes

Maintenant, considérons en détail les ports externes au système. Nous distinguons deux types de ports externes. L'un est le contrôle le port \mathcal{C} , avec des variables de port (f_C, e_C) , qui sont les variables de ports accessibles pour l'action du contrôleur. L'autre type de port externe est le port d'interaction \mathcal{J} , qui désigne l'interaction du système Hamiltonien à ports avec son environnement. Les variables de port correspondant au port d'interaction sont notées (f_I, e_I) . En tenant compte des deux ports externes, le bilan de puissance s'étend à :

$$f_S e_S^T + e_R^T f_R + f_C e_C^T + f_I e_I^T = 0 \quad (2.48)$$

où par (2.46) s'étend à :

$$\frac{d}{dt} H = e_R^T f_R + f_C e_C^T + f_I e_I^T \quad (2.49)$$

d. Dynamique Hamiltonienne à ports

Le système Hamiltonien à ports avec l'espace d'état \mathcal{X} , le Hamiltonien H correspondant au port de stockage d'énergie \mathcal{S} , le port résistif \mathcal{R} , le port de contrôle \mathcal{C} , le port d'interconnexion \mathcal{J} et la structure de Dirac \mathfrak{D} seront succinctement $\Sigma = (\mathcal{X}, H, \mathcal{R}, \mathcal{C}, \mathcal{J}, \mathfrak{D})$. La dynamique du système Hamiltonien à ports est spécifiée en considérant les contraintes sur les différentes variables de port imposées par la structure de Dirac, c'est-à-dire :

$$(f_S, e_S, f_R, e_R, f_C, e_C, f_I, e_I) \in \mathfrak{D} \quad (2.50)$$

et substituer dans ces relations les égalités $f_S = -\dot{x}$, $e_S = \frac{\partial H}{\partial x}(x)$. Cela conduit à la dynamique implicitement définie par :

$$\left(-\dot{x}(t), \frac{\partial H}{\partial x}(x(t)), f_R(t), e_R(t), f_C(t), e_C(t), f_I(t), e_I(t) \right) \in \mathfrak{D} \quad (2.51)$$

avec f_R, e_R satisfaisant pour tout t la relation résistive (2.42):

$$R(f_R, e_R) = 0 \quad (2.51)$$

Dans de nombreux cas, la dynamique (2.50) va contraindre les états x , en fonction des valeurs des variables de port externes (f_C, e_C) et (f_I, e_I) . Ainsi, dans une représentation équationnelle, les systèmes Hamiltoniens à ports consisteront généralement en un ensemble mixte d'équations différentielles et algébriques (EDA).

2.6.5. Propriétés des systèmes Hamiltonien à ports

- **Conservative :**

Les systèmes Hamiltoniens à ports (2.22) sont définis par la variété \mathcal{X} doté d'un triple (J, g, H) . La paire $(J(x), g(x))$, $x \in \mathcal{X}$ capte la *structure d'interconnexion* du système, avec $g(x)$ module en particulier les *ports* du système. En outre, $H: \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$ définit l'énergie stockée du système.

Comme nous l'avons vu précédemment, une propriété fondamentale des systèmes pH est la propriété de *bilan énergétique* (energy-balancing) :

$$\frac{dH}{dt}(x(t)) = u^T(t)y(t) \quad (2.52)$$

Physiquement, cet correspond au fait que la structure d'interconnexion *interne* est la conservation de puissance (en raison de l'antisymétrie de $J(x)$), tandis que u et y sont les variables de puissance de port définis par $g(x)$, et donc $u^T y$ est la puissance extérieure fournie.

Par conséquent, comme conclu avant, les systèmes pH (2.22) sont conservatives si le Hamiltonien H est non-négatif. Dans ce cas, ils partagent tous les propriétés des systèmes conservatives.

Inversement, on peut se demander quel propriété additionnelle les systèmes pH peut avoir (avec $H \geq 0$) comparant avec les systèmes conservatifs ?

Premièrement, on peut voir que les systèmes linéaires :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx \end{aligned} \tag{2.53}$$

qui sont conservatifs par rapport à une fonction de stockage quadratique $\frac{1}{2}x^T Qx$, avec $Q = Q^T > 0$. Ils sont des systèmes pH par rapport au Hamiltonien $\frac{1}{2}x^T Qx$ et la matrice de structure constante J (à déterminer par la suite). Le système (2.53) étant conservatif par rapport à la fonction de stockage $\frac{1}{2}x^T Qx$ revient aux égalités :

$$\begin{aligned} A^T Q + QA &= 0 \\ B^T Q &= C \end{aligned} \tag{2.54}$$

Déféminisant $J := AQ^{-1}$, il s'ensuit que J est antisymétrique, tandis que (2.53) peut être écrit comme un système pH :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= JQx + Bu \\ y &= B^T Qx \end{aligned} \tag{2.55}$$

Le même résultat peut être obtenir pour les systèmes linéaires conservatifs avec $Q \geq 0$ satisfaisant $\ker Q \subset \ker A$.

Pour les systèmes non linéaires :

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x) + g(x)u \\ y &= h(x)\end{aligned}\tag{2.56}$$

La situation est plus complexe. En fait, (2.55) est conservatif par rapport à la fonction de stockage H , si :

$$H_x(x)f(x) = 0\tag{2.57}$$

$$g^T(x)\frac{\partial H}{\partial x}(x) = h(x)\tag{2.58}$$

Néanmoins, l'équation (2.57) n'implique pas nécessairement qu'il existe une matrice antisymétrique $J(x)$ tel que $f(x) = J(x)\frac{\partial H}{\partial x}(x)$. Donc, pas tous les systèmes (2.56) peuvent être réécrite comme un système pH :

$$\begin{aligned}\dot{x} &= J(x)\frac{\partial H}{\partial x}(x) + g(x)u \\ y &= g^T(x)\frac{\partial H}{\partial x}(x)\end{aligned}\tag{2.59}$$

Donc certainement dans le cas non linéaire la notion des systèmes pH est plus fort qu'un simple système conservatif. En outre, à partir de la matrice de structure $J(x)$ d'un système pH on peut directement extrait des informations utiles sur les propriétés dynamiques de système. Puisque la matrice de structure est directement liée à la modélisation de système (capturer la structure d'interconnexion), cette information a généralement une interprétation physique directe.

- ***Préservation du volume :***

Une seconde propriété de la dynamique des systèmes pH est liée à la matrice de structure $J(x)$ et à ces conditions d'intégrabilité (2.28) est *la préservation de volume*. En effet, nous supposons tous d'abord que $\text{rang } J(x) = \dim(\mathcal{X})$, et que (2.28) est satisfait, ce qui implique l'existence des coordonnées locales (q, p) tel que :

$$J = \begin{bmatrix} 0 & I_k \\ -I_k & 0 \end{bmatrix} \quad (2.60)$$

Définir la divergence d'un ensemble des équations différentielles :

$$\dot{x}_i = X_i(x_1, \dots, x_n). \quad i = 1, \dots, n \quad (2.61)$$

en un ensemble des coordonnées locales x_1, \dots, x_n comme [115] :

$$\text{div}(X)(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial X_i}{\partial x_i}(x) \quad (2.62)$$

Notant les trajectoires solution de (2.61) à partir de $x(0) = x_0$ par $x(t, x_0) = X^t(x_0)$, $t \geq 0$. Il est évident que les applications $X^t: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ sont préservateurs de volume, qui est :

$$\det \left(\frac{\partial X^t}{\partial x}(x) \right) = 1 \quad \text{pour tous } x \in \mathbb{R}^n, t \geq 0 \quad (2.63)$$

Si et seulement si $\text{div}(X)(x) = 0$, pour tous $x \in \mathbb{R}^n$. Maintenant, revenant

au dynamique Hamiltonien autonome pour $u = 0$:

$$\dot{x} = J(x) \frac{\partial H}{\partial x}(x) \quad (2.64)$$

pour J donnée par (2.60), il résulte que la divergence de (2.62) sur les coordonnées- (q, p) est partout zéro, et donc, la solution de (2.64) préserve le volume standard dans l'espace- (q, p) (l'espace de phase).

Dans le cas où $\text{rang } J(x) = 2k < \dim \mathcal{X}$ et il existe des coordonnées locales (q, p, s) comme en (2.30), alors la dynamique Hamiltonien autonome (2.64) préserve le volume standard sur l'espace- (q, p, s) , avec une propriété additionnelle que sur n'importe quel niveau d'ensemble

$$s_1 = c_1, \dots, s_l = c_l \quad (2.65)$$

(qui est invariant) le volume en les coordonnées- (q, p) est préservé.

2.7 Forme Hamiltonienne à ports des systèmes mécaniques avec contraintes non holonome

Utilisant la définition de moment généralisé (2.16). Les équations d'Euler-Lagrange (2.14) et sous les contraintes (2.15) transforment en équations suivantes [103] :

$$\begin{aligned} \dot{q} &= \frac{\partial H}{\partial p}(q, p) \\ \dot{p} &= - \frac{\partial H}{\partial q}(q, p) + A(q)\lambda + B(q)u \\ y &= B^T(q) \frac{\partial H}{\partial p}(q, p) \\ 0 &= A^T(q) \frac{\partial H}{\partial p}(q, p) \end{aligned} \quad (2.66)$$

L'espace d'état sous contraint est donné comme un sous-ensemble de l'espace de phase :

$$\mathcal{X}_c := \left\{ (q, p) \mid A^T(q) \frac{\partial H}{\partial p}(q, p) = 0 \right\} \quad (2.67)$$

Nous éliminons les forces de contrainte $A(q)\lambda$ de la manière suivante. Puisque $\text{rang } A(q) = k$, il existe une matrice locale $S(q)$ de dimension $n \times (n - k)$ et de rang $n - k$ tel que [116] :

$$A^T(q)S(q) = 0 \quad (2.68)$$

Maintenant, définissant $\tilde{p} = (\tilde{p}^1, \tilde{p}^2) = (\tilde{p}_1, \dots, \tilde{p}_{n-k}, \tilde{p}_{n-k+1}, \dots, \tilde{p}_n)$ comme :

$$\tilde{p}^1 := S^T(q)p, \quad \tilde{p}^1 \in \mathbb{R}^{n-k} \quad (2.69)$$

$$\tilde{p}^2 := A^T(q)p, \quad \tilde{p}^2 \in \mathbb{R}^k \quad (2.70)$$

Il est facilement vérifié que $(p, q) \rightarrow (p, \tilde{p}^1, \tilde{p}^2)$ est un changement de coordonnées. En effet, par (2.68) les lignes de $S^T(q)$ sont orthogonales pour les lignes de $A^T(q)$. Dans les nouvelles coordonnées le système Hamiltonien sous contraintes (2.66) prend la forme [116] : (* désignant des éléments non spécifiés)

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{q} \\ \dot{\tilde{p}}^1 \\ \dot{\tilde{p}}^2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0_n & S(q) & * \\ -S^T(q) & (-p^T[S_i \cdot S_j](q))_{i,j} & * \\ * & * & * \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial \tilde{H}}{\partial q} \\ \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tilde{p}^1} \\ \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tilde{p}^2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ A^T(q)A(q) \end{bmatrix} \lambda \\ &+ \begin{bmatrix} 0 \\ B_c(q) \\ \bar{B}(q) \end{bmatrix} u \end{aligned} \quad (2.71)$$

$$A^T(q) \frac{\partial H}{\partial p} = A^T(q)A(q) \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tilde{p}^2} = 0 \quad (2.72)$$

avec $\tilde{H}(q, \tilde{p})$ est le Hamiltonien H exprimé dans les nouvelles coordonnées (q, \tilde{p}) . ici S_i représente le i -ème colonne de $S(q)$, $i = 1, \dots, n - k$, et

$[S_i, S_j]$ est le crochet de Lie de S_i et S_j dans les coordonnées locaux q donnés comme ([59],[103]) :

$$[S_i, S_j](q) = \frac{\partial S_j}{\partial q}(q)S_i - \frac{\partial S_i}{\partial q}(q)S_j \quad (2.73)$$

avec $\frac{\partial S_j}{\partial q}, \frac{\partial S_i}{\partial q}$ représentent les matrices Jacobien de dimension $n \times n$.

Comme λ simplement influe sur la dynamique- \tilde{p}^2 , et les contraintes $A^T(q) \frac{\partial H}{\partial p}(q, p) = 0$ sont de manière équivalente proposée par $\frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tilde{p}^2}(q, \tilde{p}) = 0$, la dynamique sous contraintes est déterminée par la dynamique de q et \tilde{p}^1 (qui servent comme des coordonnées pour l'espace d'état sous contraintes \mathcal{X}_c) :

$$\begin{bmatrix} \dot{q} \\ \dot{\tilde{p}}^1 \end{bmatrix} = J_c(q, \tilde{p}^1) \begin{bmatrix} \frac{\partial H_c}{\partial q}(q, \tilde{p}^1) \\ \frac{\partial H_c}{\partial \tilde{p}^1}(q, \tilde{p}^1) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ B_c(q) \end{bmatrix} u \quad (2.74)$$

où $H_c(q, \tilde{p}^1)$ est égal à $\tilde{H}(q, \tilde{p})$ avec \tilde{p}^2 satisfaisant $\frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tilde{p}^2} = 0$ et la matrice antisymétrique $J_c(q, \tilde{p}^1)$ est donnée comme la partie supérieur-gauche de la matrice de structure dans (2.71), comme suit :

$$J_c(q, \tilde{p}^1) = \begin{bmatrix} 0_n & \tilde{S}(q) \\ -\tilde{S}^T(q) & (-p^T[\tilde{S}_i, \tilde{S}_j](q))_{i,j} \end{bmatrix} \quad (2.75)$$

où p est exprimée en fonction de q, \tilde{p} , avec \tilde{p}^2 éliminé de $\frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tilde{p}^2} = 0$.

En outre, dans les coordonnées q, \tilde{p} la sortie est donnée sous la forme :

$$y = [B_c^T(q) \quad \bar{B}^T(q)] \begin{bmatrix} \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tilde{p}^1} \\ \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tilde{p}^2} \end{bmatrix} \quad (2.76)$$

qui réduit sur l'espace d'état sous contraint \mathcal{X}_c à :

$$y = B_c^T(q) \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tilde{p}^1}(q, \tilde{p}^1) \quad (2.77)$$

En résumant, (2.74) et (2.77) définissent un système Hamiltonien à ports sur \mathcal{X}_c , avec un Hamiltonien H_c donné par l'énergie totale sous contrainte, et avec la matrice de structure J_c donnée par (2.75).

La matrice J_c satisfait (2.28) si et seulement si les contraintes (2.15) sont holonomes (voir [116]). En effet, si les contraintes sont holonomes, alors les coordonnées s comme dans (2.29) peuvent être considérées comme égales aux fonctions de contrainte intégrées $\bar{q}_{n-k+1}, \dots, \bar{q}_n$ de (2.13), et la matrice g_s comme dans (2.31) est zéro.

2.8 Linéarisation partielle d'un système mécanique

Les systèmes de d'Euler-Lagrange ou les systèmes Hamiltoniens impliquant certains vecteurs de position et de vitesse généralisés, ont motivé beaucoup de travail au cours des dernières décennies soit pour la régulation, ou le suivi. Ces études ont abouti à diverses solutions locales et même globales pour des problèmes de contrôle, d'observation, ou de contrôle basé sur un observateur. Le point est que dans la pratique, l'utilisation de la mesure de la vitesse n'est généralement pas souhaitable. Ceci a motivé la recherche ultérieure pour des schémas de contrôle sans mesure de vitesse. On peut alors penser soit à rechercher directement un retour de sortie comme dans [117], soit à utiliser une estimation de la vitesse via un observateur [118], mais avec la difficulté que, en général, pour les systèmes non linéaires, des conceptions séparées d'observateurs stables et de contrôleurs

n'assurent pas la stabilité de leur combinaison (pas de principe de séparation).

Pour cela, il est vu nécessaire de trouver un changement de coordonné qui rend linéaire les états non mesurables. Ce qui a l'avantage d'amener le problème à un problème linéaire. En conséquence, les propriétés des systèmes linéaires telles que le contrôle global (exponentiel), l'estimation globale (exponentielle) et le principe de séparation bien connu peuvent être récupérées. Les premiers résultats dans ce contexte est donné en [119] pour un système mécanique avec un degré de liberté, puis, une étude détaillé de ce type des systèmes est donnée en [120]. Dans cette partie on fait un résumé de cette classe des systèmes qui sera par la suite utilisé dans la conception de notre observateur.

Un système mécanique simple à n degré de liberté est décrit par le modèle Hamiltonien suivant [120] :

$$\begin{pmatrix} \dot{q} \\ \dot{p} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0_n & I_n \\ -I_n & 0_n \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial q} \\ \frac{\partial H}{\partial p} \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 0_n \\ B(q) \end{bmatrix} u \quad (2.78)$$

où q et $p = M\dot{q}$ sont les positions et les quantités du mouvement généralisées, respectivement, $u \in \mathbb{R}^m$ est l'entrée et $B \in \mathbb{R}^m$ est la matrice d'entrée avec $\text{rang}(G) = m < n$.

L'énergie totale du système (2.78) en boucle ouverte est donnée par :

$$H(q, p) = \frac{1}{2} p^T M^{-1}(q) p + V(q) \quad (2.79)$$

A ce stade, le vecteur d'état, la matrice d'entrée, les matrices d'interconnexion et d'amortissement de l'équation (2.24), sont respectivement donnés comme suit :

$$x = \begin{bmatrix} q \\ p \end{bmatrix}; \quad J(x) = \begin{bmatrix} 0_n & I_n \\ -I_n & 0_n \end{bmatrix}; \quad R(x) = 0; \quad g(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ G(q) \end{bmatrix} \quad (2.80)$$

Les systèmes mécaniques modélisés par le formalisme pH (équation (2.20)) peuvent être linéarisés en état non mesurable via un changement de coordonnées de la forme :

$$(q, \mathbf{P}) = (q, \Psi^T(q)p) \quad (2.81)$$

avec $\Psi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ est une matrice de rang plein.

La classe des systèmes qui satisfont ce changement de coordonnée (entièrement déterminé par la matrice d'inertie M) est appelée « de l'anglais : Partially Linearizable via coordinate change) (PLvCC). Comme illustré dans ([121], [122], [119], [54] et [120]), la réalisation de la linéarité en \mathbf{P} simplifie le problème de conception de l'observateur ainsi que celui de la commande. Avant d'entrer dans les détails de la caractérisation des PLvCC, nous jugeons utile d'explicitier les notations qui seront utilisées ultérieurement. Pour toute matrice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$: $A_i \in \mathbb{R}^n$ est la $i^{\text{ième}}$ colonne, $A^i \in \mathbb{R}^n$ la $i^{\text{ième}}$ ligne, $A_{ij} \in \mathbb{R}$ est la $ij^{\text{ième}}$ élément. e_i , $i \in \bar{n}$, $\bar{n} = \{1, \dots, n\}$ sont les vecteurs de la base euclidienne, $A_i = Ae_i$, $A^i = e_i^T A$ et $A_{ij} = e_i^T Ae_j$.

2.8.1. Caractérisation des systèmes PLvCC

Dans cette section, on identifie la classe des systèmes mécaniques pour

laquelle un changement de coordonnées de la forme $(q, \mathbf{P}) = (q, \Psi^T(q)p)$ avec Ψ de rang plein, rend le système linéaire en \mathbf{P} . On utilisera pour ce faire la proposition 2.2.

Proposition 2.2 [120] :

Soit Ψ une matrice de rang plein, d'ordre n . La dynamique de (2.78) exprimée dans les coordonnées (q, \mathbf{P}) où $\mathbf{P} = \Psi^T(q)p$ est linéaire en \mathbf{P} si et seulement si pour tous $i \in \bar{n}, \bar{n} = \{1, \dots, n\}$, on a :

$$B_{(i)}(q) + B_{(i)}^T(q) = 0 \quad (2.82)$$

où les matrices $B_{(i)}$ sont définies comme suit :

$$B_{(i)}(q) = \sum_{j=1}^n \left\{ [\Psi_i, \Psi_j] \Psi_j^T (M \Psi \Psi^T)^{-1} + \frac{1}{2} \Psi_{ij} \Psi \nabla_{q_j} (\Psi^T M \Psi)^{-1} \Psi^T \right\} \quad (2.83)$$

où $[\Psi_i, \Psi_j]$ est le crochet de lie. Sous la condition (2.82) ; le système (2.78) devient :

$$\dot{\mathbf{P}} = -\Psi^T (\nabla_q V - Gu), \quad \dot{q} = (\Psi^T M)^{-1} \mathbf{P} \quad (2.84)$$

Comme on le constate, l'équation pour \dot{q} de (2.84) découle de la définition de \mathbf{P} . Pour ce qui est de $\dot{\mathbf{P}}$, il peut être exprimé comme suit :

$$\dot{\mathbf{P}} = \dot{\Psi}^T p + \Psi^T \dot{p} = -D_{\Psi(q,p)} - \Psi^T (\nabla_q V(q) - G(q)u) \quad (2.85)$$

où $D_{\Psi(q,p)}$ est défini par :

$$D_{\Psi(q,p)} = \Psi^T \nabla_q \left\{ \frac{1}{2} p^T M^{-1}(q)p \right\} - \dot{\Psi}^T p \quad (2.86)$$

On montrera que chaque élément de vecteur $D_{\Psi(q,p)}$ est une forme quadratique en p , c'est-à-dire :

$$D_{\Psi(q,p)} = \sum_{i=1}^n e_i p^T B_i p \quad (2.87)$$

qui sera nul pour tous les p si et seulement si la condition (2.82) est satisfaite.

Pour montrer cela, on calcule d'abord :

$$\begin{aligned} \nabla_q \left\{ \frac{1}{2} p^T M^{-1}(q) p \right\} &= \nabla_q \left\{ \frac{1}{2} p^T \Psi (\Psi M \Psi^T)^{-1} \Psi^T p \right\} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n e_i \left\{ 2 p^T (\nabla_{q_i} \Psi) (\Psi M \Psi^T)^{-1} \Psi^T p \right. \\ &\quad \left. + p^T \Psi \nabla_{q_i} ((\Psi M \Psi^T)^{-1}) \Psi^T p \right\} \\ &= \sum_{i=1}^n e_i \left\{ p^T (\nabla_{q_i} \Psi) \Psi^{-1} M^{-1} p \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} p^T \Psi \nabla_{q_i} ((\Psi M \Psi^T)^{-1}) \Psi^T p \right\} \end{aligned}$$

En remplaçant (2.88) dans (2.86), on obtient :

$$\begin{aligned} D_{\Psi(q,p)} &= -\dot{\Psi}^T p + \sum_{i=1}^n e_i \left\{ (\Psi^T e_i) (p^T \nabla_{q_i} \Psi) \Psi^{-1} M^{-1} p \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} (\Psi^T e_i) p^T \Psi \nabla_{q_i} ((\Psi M \Psi^T)^{-1}) \Psi^T p \right\} \quad (2.89) \end{aligned}$$

Pour continuer les calculs, on utilisera les deux lemmes suivants :

Lemme 2.1 [120] : Soit $\Psi(q)$ une matrice de rang plein, d'ordre n . La matrice J d'ordre n est définie comme suit :

$$J = \sum_{j=1}^n \left\{ (p^T \nabla_{q_j} \Psi)^T (\Psi e_j^T) - (\Psi^T e_j) (p^T \nabla_{q_j} \Psi) \right\} \quad (2.90)$$

Le $jk^{\text{ième}}$ élément de la matrice J est donné par :

$$J_{jk} = -p^T [\Psi_j, \Psi_k] \quad (2.91)$$

où $[\Psi_j, \Psi_k]$ est le crochet de Lie des vecteurs colonnes.

Lemme 2.2 [120] : Soit les matrices \bar{J}_i d'ordre n définies comme suit :

$$\bar{J}_i = \sum_{j=1}^n [\Psi_j, \Psi_k] \Psi_j^T (\Psi \Psi^T)^{-1} M^{-1}, \quad i \in \bar{n} \quad (2.92)$$

Alors :

$$\sum_{i=1}^n (\Psi^T e_i) (p^T \nabla_{q_i} \Psi) \Psi^{-1} M^{-1} p - \dot{\Psi}^T p = \sum_{i=1}^n e_i (p^T \bar{J}_i p) \quad (2.93)$$

L'équation (2.89) devient :

$$D_{\Psi} = \sum_{i=1}^n \left\{ e_i (p^T \bar{J}_i p) + \frac{1}{2} (\Psi^T e_i) [p^T \nabla_{q_i} \Psi ((\Psi^T M \Psi)^{-1}) \Psi^T p] \right\} \quad (2.94)$$

En utilisant la définition de $B_{(i)}$ donnée par (2.83) on obtient :

$$D_{\Psi} = \sum_{i=1}^n e_i p^T B_{(i)} p \quad (2.95)$$

Si la matrice d'inertie M satisfait la condition (2.82) pour une matrice Ψ de rang plein, alors le système mécanique (2.78) devient linéaire en P et il est dit PLvCC. La classe de M pour laquelle il existe une telle matrice Ψ est notée par S_{PLvCC} . Donc $M \in S_{plvcc}$ si et seulement si il existe Ψ tel que la condition (2.82) est satisfaite.

Pour une matrice Ψ générale, de rang plein, qui ne satisfait pas la condition (2.82), on pourra utiliser le lemme 2.3 ci-dessous. Ce lemme peut aussi être utilisé pour une matrice qui satisfait la condition (2.82).

Lemme 2.3 [120] : Pour une matrice générale Ψ de rang plein, la dynamique transformée dans les coordonnées (q, \mathbf{P}) est donnée par :

$$\begin{pmatrix} \dot{q} \\ \dot{\mathbf{P}} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \Psi \\ -\Psi^T & J \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \nabla_q \bar{H} \\ \nabla_{\mathbf{P}} \bar{H} \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \Psi^T B \end{bmatrix} u \quad (2.96)$$

avec la nouvelle fonction d'énergie étant :

$$\bar{H}(q, \mathbf{P}) = \frac{1}{2} \mathbf{P}^T (\Psi^T M \Psi)^{-1}(q) \mathbf{P} + V(q) \quad (2.97)$$

Et le $jk^{\text{ième}}$ élément de la matrice antisymétrique J est donné par :

$$J_{jk}(q, p) = -p^T [\Psi_j, \Psi_k] \quad (2.98)$$

En résumé, la classe des systèmes mécaniques qui peuvent être rendu partiellement linéaire via un changement de coordonnées est l'ensemble des systèmes mécaniques qui appartiennent à S_{PLvCC} . Dans la prochaine section, on donne l'interprétation physique de l'ensemble S_{PLvCC} .

2.8.2. Etude de l'ensemble S_{PLvCC}

Une question naturelle qui se pose à ce stade est la suivante : pour quel type de matrices d'inertie M la condition (2.82) est satisfaite ? Fournir une réponse complète correspond à la détermination de toutes les solutions des EDPs (2.82), (2.83) dont l'inconnue est la fonction Ψ . Cette tâche semble difficile. Cependant, il s'avère que cet ensemble contient des sous-ensembles intéressants qui ont une interprétation physique claire. Certains de ces sous-ensembles ont été étudiés dans la littérature, qu'on va maintenant passer brièvement en revue dans cette section

2.8.2.1. Définitions des sous-ensembles de l'ensemble

S_{PLvCC}

Pour obtenir une meilleure compréhension de la condition (2.82), on présentera quatre ensembles (voir la figure 2.3) qui sont en réalité des sous-ensembles de S_{PLvCC}

Avant de présenter ces ensembles, il nous semble important d'introduire la définition 2.3, qui est largement utilisée par la suite.

Définition 2.3 [120] : La matrice T de rang plein est une factorisation de M^{-1} si :

$$M^{-1}(q) = T(q)T^T(q) \quad (2.99)$$

La définition 2.4 ci-dessous présente les quatre ensembles de S_{PLvCC}

Définition 2.4 [120] : Les ensembles S_{CI} , S_{ZCS} , S_{ZRS} et S_T sont définis comme suit :

(i) *Inertie constante*

$$S_{CI} := \{M \in \mathbb{R}_P^{n \times n} \mid M_{ij} = \text{constante}, i, j \in \bar{n}\} \quad (2.100)$$

(ii) *Symboles de Christoffel nuls*

$$S_{ZCS} := \{M \in \mathbb{R}_P^{n \times n} \mid C_{ij} = \text{constante}, i, j \in \bar{n}\} \quad (2.101)$$

avec C_{ijk} sont les symboles de Christoffel de première espace définis dans

(2.5) pour une matrice d'inertie donnée :

$$C_{ijk}(q) = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial M_{ik}}{\partial q_j} + \frac{\partial M_{jk}}{\partial q_i} - \frac{\partial M_{ij}}{\partial q_k} \right\} \quad (2.102)$$

(iii) *Symboles de Riemann nuls*

$$S_{ZRS} = \{M \in \mathbb{R}_P^{n \times n} \mid R_{ijkl} = \text{constante}, i, j, l, k \in \bar{n}\} \quad (1.103)$$

avec R_{ijkl} sont les symboles de Riemann définis comme suite

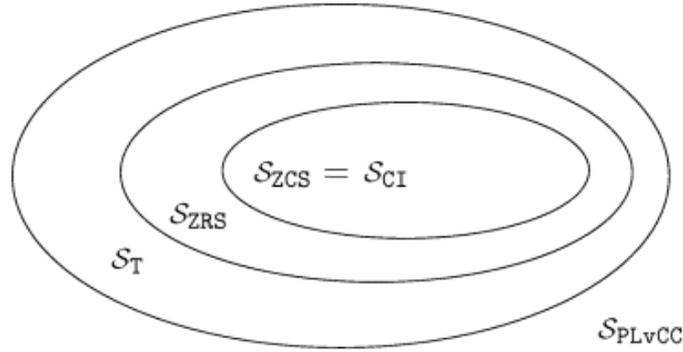


Figure 2.3 Les ensembles des matrices d'inertie

$$R_{ijkl} = \frac{1}{2} \left[\nabla_{q_j q_l}^2 M_{ik} + \nabla_{q_i q_k}^2 M_{jl} - \nabla_{q_j q_k}^2 M_{il} - \nabla_{q_i q_l}^2 M_{jk} \right] + \sum_{a,b=1}^n (M^{-1})_{ab} [C_{jla} C_{ikb} - C_{ila} C_{jkb}] \quad (2.104)$$

avec $(M^{-1})_{ab}$ est l'élément ab ième de la matrice d'inertie inverse M^{-1} .

(iv) *Condition d'antisymétrie*

$S_T := \{M \in \mathbb{R}_P^{n \times n} \mid M^{-1} \text{ admet une factorisation } T \text{ tel que}$

$$\left. \sum_{j=1}^n (M^{-1})_{ab} [T_i, T_j] T_j^T = - \left[\sum_{j=1}^n (M^{-1})_{ab} [T_i, T_j] T_j^T \right]^T, i \in \bar{n} \right\} \quad (2.105)$$

La proposition 2.3 ci-dessous explicite les différents liens entre les quatre sous-ensembles de l'ensemble S_{PLvCC} comme le montre la figure 2.3

Proposition 2.3 [120] : Les ensembles des matrices d'inertie dans la définition 2.4 satisfont :

$$S_{CI} = S_{ZCS} \subset S_{ZRS} \subset S_T \subseteq S_{PLvCC} \quad (2.106)$$

Où l'inclusion $S_{ZCS} \subset S_{ZRS}$ est stricte pour tout $n > 1$, et l'inclusion $S_{ZRS} \subset S_T$ est stricte pour tout $n > 2$.

Une propriété importante de l'ensemble S_{ZRS} , est que les symboles de Riemann donnés par (2.104), pour une matrice d'inertie M sont nuls si et seulement si la matrice M admet une factorisation $M^{-1} = TT^T$ de telle sorte que les crochets de lie des colonnes de la matrice T sont égale à zéro ([123],[122]). Donc :

$R_{ijkl} = 0. \quad i, j, l, k \in \bar{n} \iff M^{-1}$ admet une factorisation T tel que :

$$[T_i \cdot T_j] = 0. \quad i, j \in \bar{n} \quad (2.107)$$

Exemple 2.2 Pendule inversé [120] :

Soit le système pendule inversé qui a été introduit précédemment. On montre que sa matrice d'inertie appartient à l'ensemble S_{ZRS} mais ses symboles de Christoffel ne sont pas nuls. En effet, considérons la matrice d'inertie donnée par (2.22) :

$$M_a = [1 \ b \cos(q_1), b \cos(q_1) \ m_3]^T \quad (2.108)$$

Pour toute matrice donnée M positive définie, il est toujours possible de trouver une factorisation triangulaire inférieure de Cholesky, unique, T de M^{-1} satisfait (2.80) et de telle sorte que ses éléments diagonaux sont positifs [124]

Pour la matrice d'inertie (2.22), on a :

$$T = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{m_3}}{\sqrt{m_3 - b^2 \cos^2 q_1}} & 0 \\ -b \cos q_1 & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{m_3} \sqrt{m_3 - b^2 \cos^2 q_1}} & \frac{1}{\sqrt{m_3}} \end{bmatrix} \quad (2.109)$$

Il est facile de vérifier que $[T_1, T_2] = 0$. Ainsi, à partir de (2.87), la matrice d'inertie (2.22) a des symboles de Riemann nuls, donc $M \in S_{ZRS}$. Ensuite, en calculant les symboles de Christoffel pour M_a on obtient $C_{112} = -b \sin(q_1)$, tandis que le reste des symboles sont tous nuls, donc $M_a \notin S_{ZCS}$. Ainsi, l'inclusion $S_{ZCS} \subset S_{ZRS}$ est stricte.

2.8.2.2. Interprétation physique des ensembles

S_{ZCS}, S_{ZRS}, S_T

Dans cette section, on détermine les classes des systèmes physiques, pour lesquelles la matrice d'inertie appartient aux ensembles de la proposition 2.3

La condition (2.82) est satisfaite si et seulement si D_Ψ défini dans (2.85), est nul.

Soit \tilde{D}_Ψ une fonction vectorielle définie comme suit :

$$\tilde{D}_\Psi(q, p) = D_\Psi(q, M(q)\dot{q}) \quad (2.110)$$

La relation entre D_Ψ , défini en (2.85), avec les matrices M et C dans le modèle d'Euler Lagrange (2.6), en utilisant (2.86) est donnée comme suit :

$$\tilde{D}_\Psi(q, p) = \Psi^T \nabla_q \left\{ \frac{1}{2} \dot{q}^T M \dot{q} \right\} - \dot{\Psi}^T M \dot{q} = \left[\Psi^T C - \frac{d}{dt} (\Psi^T M) \right] \dot{q} \quad (2.111)$$

Où, pour obtenir la deuxième identité, on utilise l'équation (2.9).

- **L'ensemble S_{ZCS}**

L'ensemble S_{ZCS} est interpréter dans la proposition 2.4 ci-dessous

Proposition 2.4 [120] :

Les énoncés suivants sont équivalents

- (i) $M \in S_{ZCS}$
- (ii) La condition (2.63) est vérifiée pour toute matrice Ψ constante
- (iii) Les forces de Coriolis et de centrifuge $C(q, \dot{q})\dot{q}$ sont nulles. De plus, si $M \in S_{ZCS}$ et en prenant $\Psi = M^{-1}$; le système (2.84) devient :

$$\dot{q} = P, \quad \dot{P} = -M^{-1} \left(\frac{\partial Q}{\partial q} V - Gu \right) \quad (2.112)$$

▪ **L'ensemble S_{ZRS}**

L'ensemble S_{ZRS} est interpréter dans la proposition 2.5 suivante :

Proposition 2.5 [120] : Les énoncés suivants sont équivalents

- (i) $M \in S_{ZRS}$
- (ii) Il existe une matrice T qui est une factorisation de M^{-1} , tel que, $M^{-1} = TT^T$ et une fonction $Q: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ tel que :

$$\frac{\partial Q}{\partial q}(q) = T^{-1}(q) \quad (2.113)$$

▪ **L'ensemble S_T**

L'ensemble S_T est interpréter dans la proposition 2.6 ci-dessous

Proposition 2.6 [120] :

Pour toute matrice T , qui est une factorisation de M^{-1} , les énoncés suivants sont équivalents :

- (i) $M \in S_T$
- (ii) La condition (2.63) est vérifiée avec $\Psi = T$, donc $D_T = 0$.

De plus, si $M \in S_T$, le système (2.84) prend la forme suivante :

$$\dot{q} = TP, \quad \dot{P} = -T^{-1} \left(\frac{\partial Q}{\partial q} V - Gu \right) \quad (2.114)$$

▪ **Ensemble S_{PLvCC}**

Dans cette section, on présentera l'exemple du système de « jambe robotique ». Ce système appartient à S_{PLvCC} . On présentera aussi le système « bille sur rail » et on montre qu'il n'appartient pas à S_{PLvCC} .

Exemple 2.3 système pied robotique (robotic leg) [120] :

Soit le système « pied robotique » de la figure 2.4. Ce système est constitué d'un corps rigide qui est fixé à un point sur le sol en son centre de masse. Le corps peut tourner autour de ce point fixe et a un moment d'inertie I autour de l'axe de rotation. Le corps possède un pied extensible sans masse, qui est fixé au point fixe du sol. Le pied est lié à une masse m en son

extrémité. La coordonnée ψ représente l'angle du corps, θ représente l'angle formé par le pied extensible avec l'axe horizontale fixe et r désigne l'extension de pied qui est supposée être strictement positif (voir figure 2.4). η^1 représente le couple agissant sur le point de rotation qui commande l'angle entre le corps et le pied et η^2 représente la force qui commande l'extension de pied

Ce système possède trois degrés de liberté $q = (r, \theta, \psi)$. Sa matrice d'inertie est

$$M = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & mq_1^2 & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} \quad (2.115)$$

où $q_1 > \varepsilon > 0$.

Tout d'abord, les seuls symboles de Christoffel non nuls pour M sont $C_{122} = -C_{221} = mq_1$ ce qui implique que $M \notin S_{ZCS}$. En outre, le système de Riemann $R_{1212} = m \neq 0$ implique que $M \notin S_{ZRS}$.

Après calcul, on a :

$$\Psi(q_1, q_2) = \begin{bmatrix} \sin(q_2) & \sin(q_2) & 0 \\ \frac{1}{q_1} \cos(q_2) + k & \frac{1}{q_1} \cos(q_2) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad k \neq 0 \quad (2.116)$$

La matrice $\Psi(q_1, q_2)$ est définie. De rang plein pour tout $q \in \{q_1 > \varepsilon > 0, q_2 \neq i\pi\}$, et assure que $D_\Psi = 0$ pour l'inertie la matrice (2.115).

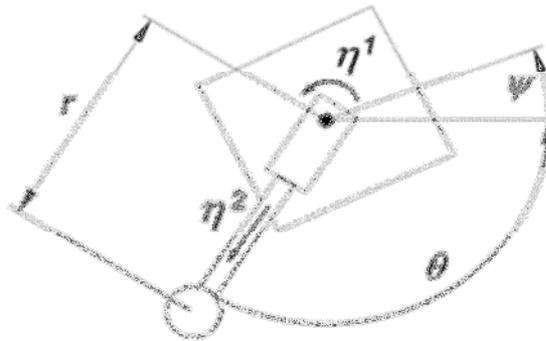


Figure 2.4 pied robotique

Il convient de souligner que (2.116) a été obtenue en résolvant les EDPs (2.82) et (2.83) pour la matrice d'inertie (2.105). Dans ce cas on a $M \in S_{PLvCC}$

Exemple 2.4 Bille sur rail [120] :

Soit le système bille sur rail. Ce système est constitué d'une bille dont la position le long de la barre est décrite par la coordonnée q_1 , l'angle formé par la barre avec l'axe horizontal est représenté par q_2 , u est le couple qui agit sur la barre et contrôle sa position angulaire. La matrice d'inertie de système est $M = \text{diag}\{1, L^2 + q_1^2\}$, où $L > 0$ est la longueur de la barre, et

$q \in \{|q_1| \leq L\}$. Les EDPs (2.63) et (2.64) pour le système bille sur rail sont :

$$\nabla_{q_1} \Psi_{11} = 0; \nabla_{q_2} \Psi_{11} + (L^2 + q_1^2) \nabla_{q_1} \Psi_{21}; \nabla_{q_2} \Psi_{21} = \frac{-q_1}{L^2 + q_1^2} \Psi_{11} \quad (2.117)$$

La première et la troisième EDP de (2.96) implique :

$$\Psi_{21}(q_1, q_2) = \frac{q_1}{L^2 + q_1^2} \tilde{\Psi}_{21}(q_2) + k \quad (2.118)$$

Où $\Psi_{11}(q_2) = -\nabla_{q_2} \tilde{\Psi}_{21}(q_2)$. Ensuite, en utilisant (2.118) avec la deuxième EDP de (2.117) on a l'équation différentielle ordinaire (EDO) :

$$\nabla^2 \tilde{\Psi}_{21}(q_2) = \frac{L^2 - q_1^2}{L^2 + q_1^2} \tilde{\Psi}_{21}(q_2) \quad (2.119)$$

qui n'admette pas de solution. Par conséquent $M \notin S_{PLvCC}$.

2.9 Forme pH des systèmes non holonome en présence des perturbations et frottements

Dans cette section nous allons développer une représentation d'état pour un système mécanique non holonome en présence des frottements internes \mathfrak{R} et des perturbations externes d . Alors, le système (2.66) écrit sous l'espace d'état (2.67) devient :

$$\begin{aligned} \dot{q} &= \frac{\partial H}{\partial p}(q, p) \\ \dot{p} &= -\frac{\partial H}{\partial q}(q, p) - \frac{\partial H}{\partial p}(q, p) \mathfrak{R} + A(q) \lambda + B(q) u + d \\ y &= B^T(q) \frac{\partial H}{\partial p}(q, p) \end{aligned}$$

$$0 = A^T(q) \frac{\partial H}{\partial p}(q, p) \quad (2.120)$$

Le système est soumis à deux perturbations différentes :

- Perturbations constantes inconnues $d = \text{col}(d_i) \in \mathbb{R}^n$
- Frottement de Coulomb capturé par :

$$\mathfrak{R} = \text{diag}\{r_1, r_2, \dots, r_n\} \in \mathbb{R}^{n \times n} \quad (2.121)$$

avec $r_i \geq 0, i \in \bar{n}$ est inconnu.

Suivant la même procédure dans la section 2.7, La forme port-hamiltonienne du système (2.120) restreinte à l'espace contraint (2.67) prend la forme [103]:

$$\begin{bmatrix} \dot{q} \\ \dot{\tilde{p}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \tilde{S}(q) \\ -\tilde{S}^T(q) & J(q, \tilde{p}) - \mathfrak{R} \end{bmatrix} \nabla H_c(q, \tilde{p}) + \begin{bmatrix} 0 \\ B_c(q) \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 0 \\ d \end{bmatrix} \quad (2.122)$$

avec

$$H_c(q, \tilde{p}) = \frac{1}{2} \tilde{p}^T \tilde{M}^{-1}(q) \tilde{p} + U(q) \quad (2.123)$$

où $\tilde{p} = \tilde{S}^T(q)p$.

Lemme 2.4. La matrice d'inertie \tilde{M} est semi-définie positive, s'écrit [55] :

$$\tilde{M}(q) = \{m_{11}(q) - m_{12}(q)m_{22}(q)^{-1}m_{12}^T(q)\}^{-1} \quad (2.124)$$

La preuve de la Lemme 2.4 est détaillée dans l'annexe B.1.

avec $\tilde{S}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n \times (n-k)}$ étant l'annihilateur à droite de A^T , $B_c: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{(n-k) \times m}$ est la matrice d'entrée contrainte de B . Le (ij) ème élément de $J: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n-k} \rightarrow \mathbb{R}^{(n-k) \times (n-k)}$ est donné par $J_{ij}(p, \tilde{p}) = -p^T [\tilde{S}_i, \tilde{S}_j]$, avec \tilde{S}_i étant la i ème colonne de \tilde{S} , et $[\tilde{S}_i, \tilde{S}_j]$ est le crochet de Lie standard (voir équation (2.73)).

Rappelant que $[\tilde{S}_i, \tilde{S}_j] = -[\tilde{S}_j, \tilde{S}_i]$ nous concluons que J est asymétrique.

Suivant les résultats de la section 2.8, Le système écrit sous la forme pH (2.122) peut être linéarisé en états non mesurable via un changement de coordonnées (2.81) de la forme suivante [120] :

$$(y, x) = (q, T(q)\tilde{p}) \quad (2.124)$$

avec $T(q): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ est une matrice définie positive, le racine carrée de la matrice d'inertie inverse [55, 120] :

$$\tilde{M}^{-1}(q) = T^T(q)T(q) \quad (2.125)$$

Le système (2.122) s'écrit comme :

$$\begin{bmatrix} \dot{y} \\ \dot{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \tilde{S}T^T(y) \\ -T(y)\tilde{S}^T & \mathbf{S} - \mathbf{R} \end{bmatrix} \nabla W(y, x) + \begin{bmatrix} 0 \\ T^T(y)B_c \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 0 \\ T^T(y)d \end{bmatrix} \quad (2.126)$$

avec la nouvelle fonction Hamiltonienne $W: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est :

$$W(y, x) = \frac{1}{2}|x|^2 + U(y) \quad (2.127)$$

Nous définissons les applications $L: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n \times (n-k)}$ et $F: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$ comme suit :

$$L = \tilde{S}(y)T^T(y) \quad (2.128)$$

$$F = T(y)[B_c(y)u - \tilde{S}^T(y)\nabla U] \quad (2.129)$$

Notant que, puisque q et u sont mesurables, ces applications sont connues.

Lemme 2.5. Le système (2.126) admet une représentation d'espace d'état de la forme :

$$\dot{y} = L(y)x \quad (2.130)$$

$$\dot{x} = \mathbf{S}(y, x)x + F(y, x, u) - \mathbf{R}(y)x + T(y)d \quad (2.131)$$

La matrice de forces gyroscopiques \mathbf{S} est :

$$\mathbf{S} = TJT^T + \sum_{i=1}^n \left[\left((\nabla_{y_i} T) T^{-1} x \right) (L^T e_i)^T - (L^T e_i) \left((\nabla_{y_i} T) T^{-1} x \right)^T \right] \quad (2.132)$$

et la matrice de frottement est :

$$\mathbf{R} = T^T(y)\mathfrak{R}T(y) \quad (2.133)$$

avec e_i le i ème vecteur de base de \mathbb{R}^{n-k} . De plus, \mathbf{S} vérifie les propriétés suivantes

- (i) \mathbf{S} est asymétrique, c'est-à-dire, $\mathbf{S} + \mathbf{S}^T = 0$.
- (ii) \mathbf{S} est linéaire dans le second argument, c'est-à-dire,

$$\mathbf{S}(y, a_1 x, a_2 \bar{x}) = a_1 x \mathbf{S}(y, x) + a_2 \bar{x} \mathbf{S}(y, \bar{x}), \text{ pour tous } y \in \mathbb{R}^n, x \in \mathbb{R}^{n-k}, \bar{x} \in \mathbb{R}^{n-k}, a_1 \in \mathbb{R} \text{ et } a_2 \in \mathbb{R}.$$
- (iii) Il existe une application $\bar{\mathbf{S}}: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n-k} \rightarrow \mathbb{R}^{(n-k) \times (n-k)}$. tel que

$$\mathbf{S}(y, x) \bar{x} = \bar{\mathbf{S}}(y, \bar{x}) x, \text{ pour tous } y \in \mathbb{R}^n, x \in \mathbb{R}^{n-k} \text{ et } \bar{x} \in \mathbb{R}^{n-k}.$$

La preuve de la Lemme 2.5 est détaillée dans l'annexe B.2

2.10 conclusion

Dans ce chapitre, la modélisation des systèmes mécaniques par les approches énergétiques a été abordé, le modèle Hamiltonien à ports (pH) a été développé. L'avantage d'utiliser ce modèle réside dans le fait que cette structure fournit des renseignements énergétiques essentiels à la synthèse

du système bouclé. Ainsi, tandis que la propriété positive semi définie de la matrice d'amortissement indique que les termes appartenant à cette matrice sont des termes associés à la dissipation.

On a aussi présenté les simplifications des modèles d'Euler-Lagrange et pH, qui facilitent le calcul de la commande et la conception d'observateur.

Chapitre 3

La méthode I&I : observation stabilisation et commande

Dans ce chapitre, Nous présentons une méthodologie pour concevoir les commandes adaptatives pour les systèmes non linéaires (incertains), appelés Immersion et l'invariance (I&I) ([48],[43],[49],[125]). Elles s'appuient sur les notions d'immersion des systèmes et des variétés invariantes, qui sont des outils classiques de la théorie non linéaire et de la commande non linéaire, mais exploités dans une nouvelle perspective. L'idée de base consiste à immerger la dynamique d'un système dans un autre système cible (éventuellement d'ordre inférieur) et qui reflète le comportement désiré.

Les principales caractéristiques de I&I sont comme suit.

- Il réduit le problème de conception du contrôleur à d'autres sous-problèmes qui, dans certains cas, pourraient être plus faciles à résoudre.
- Il diffère de la plupart des méthodologies de conception de contrôleur existantes parce qu'il ne nécessite pas, en principe, la connaissance d'une fonction de Lyapunov (contrôle).
- Il est bien adapté aux situations où un contrôleur de stabilisation pour un modèle nominal réduit et connu, et nous voudrions le robustifier par rapport à la dynamique d'ordre supérieur. Ceci est réa-

lisé en concevant une loi de contrôle qui immerge asymptotiquement la dynamique complète du système dans les modèles à ordre réduit.

- Dans les problèmes de contrôle adaptatif, la méthode rapporte des schémas stabilisateurs qui neutralisent l'effet des paramètres incertains en adoptant une perspective de robustesse. C'est contrairement à certaines des modèles adaptatifs existants qui (s'appuyant sur certaines conditions d'appariement « matching conditions ») traitent ces termes comme des perturbations à rejeter. La méthode I&I n'invoque pas l'équivalence de certitude, ni exige une paramétrisation linéaire. En outre, il fournit une procédure pour ajouter des termes croisés entre les estimations des paramètres et les états de système dans la fonction de Lyapunov.
- Il fournit un cadre naturel pour la formulation et la solution de la conception des observateurs et des problèmes de stabilisation robustes du retour de sortie avec l'observation de l'état et l'estimation des paramètres traités dans un réglage unifié.
- Il permet de formuler et de résoudre le problème de la conception de contrôleurs non-linéaires (proportionnel-intégrale) pour une classe de systèmes encombrement définis, d'ordre réduit

3.1 Bref état de l'art de la méthode I&I

Le concept d'invariance a été largement utilisé dans la théorie du contrôle. Le développement de la théorie du contrôle géométrique linéaire et non linéaire (voir [59],[60] pour une introduction complète) a montré que les

sous-espaces invariants, et leurs contreparties non linéaires, invariantes, jouent un rôle fondamental dans la résolution de nombreux problèmes de conception. Des variétés invariantes lentes et rapides, qui apparaissent naturellement dans des systèmes singulièrement perturbés, ont été utilisées pour la stabilisation [126] et l'analyse de systèmes d'adaptation lents [127]. La notion de variétés invariantes est également cruciale dans la conception des lois de contrôle de stabilisation pour les classes de systèmes non linéaires. Plus précisément, la théorie de la variété centrale [128] a joué un rôle dans la conception de lois de contrôle de stabilisation pour des systèmes avec approximation linéaire non contrôlable (voir, par exemple [129]), alors que le concept de la dynamique nulle (zero dynamics) et la notion fortement liée l'annulation du variété ont été exploitées dans plusieurs méthodes de stabilisation locales et globales, y compris le contrôle basé sur la passivité [130], le backstepping [131] et le "forwarding" [132].

La notion d'immersion a aussi une longue tradition dans la théorie du contrôle. Son idée de base est de "transformer" le système considéré en un système avec des propriétés prédéfinies. Par exemple, le problème classique de l'immersion d'un système non linéaire générique dans un système linéaire et contrôlable au moyen d'un retour d'état statique ou dynamique a été étudié de manière approfondie, voir [59, 60] pour plus de détails. L'observation d'état est traditionnellement formulée en termes d'immersion système [76]. Plus récemment, l'immersion a été utilisée dans la théorie des régulateurs non linéaires pour dériver des conditions nécessaires et suffisantes pour une régulation robuste.

En particulier, dans [133, 134], il est montré qu'une régulation robuste est réalisable à condition que l'exo-système puisse être immergé dans un système linéaire et observable. Enfin, dans [135], il est montré qu'un système dynamique (éventuellement de dimension infinie) a un équilibre stable s'il peut être immergé dans un autre système dynamique avec un équilibre stable au moyen d'une application de préservation de la stabilité.

Les méthodes de conception basées sur Lyapunov sont en quelque sorte duels à l'approche d'immersion et d'Invariance. En fait, dans la conception de Lyapunov on cherche une fonction $V(x)$, qui est définie positive (et propre, si la stabilité globale est recherchée) et telle que le système $\dot{V} = \alpha(V)$, pour une fonction $\alpha(\cdot)$, a un équilibre (globalement) asymptotiquement stable à zéro. Notons que la fonction $V: x \rightarrow I$, où I est un intervalle de l'axe réel, est une submersion et que la "dynamique de la cible", à savoir la dynamique de la fonction de Lyapunov, est unidimensionnel, voir la figure 3.1.

La reformulation I&I du problème de stabilisation est implicite dans le contrôle du mode glissant, où la dynamique cible est la dynamique du système sur la variété glissante, rendue attractive par une loi de contrôle discontinue, alors que $v(x)$ est l'équivalent dit contrôle [136].

La stabilisation par I&I est également liée aux méthodes de stabilisation par passivité, (voir [130, 137] et l'article récapitulative [138]). Dans le contrôle basé sur la passivité, la stabilisation est obtenue en trouvant une

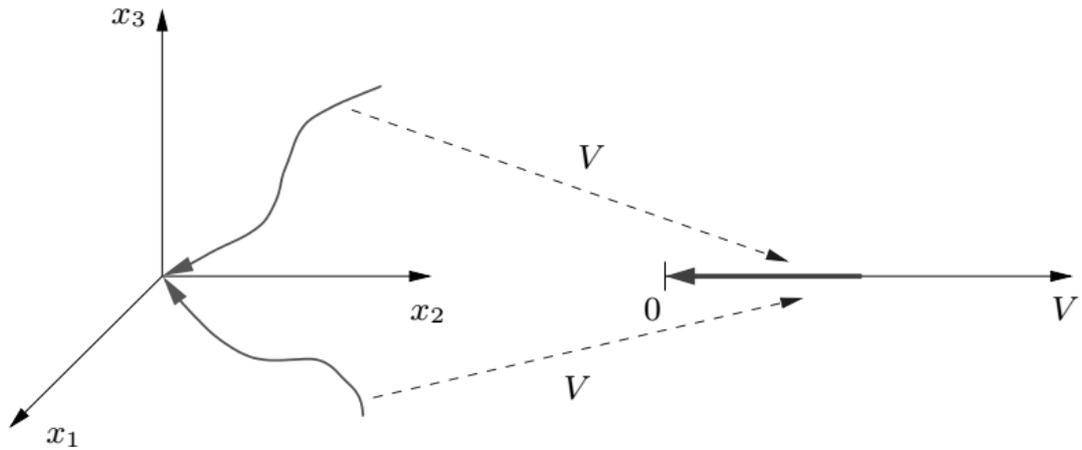


Figure 3. 1 Submersion des méthodes basées sur Lyapunov

sortie telle que le système est passif (avec une fonction de stockage appropriée, par exemple, avec un minimum à l'équilibre à stabiliser).

Si le système n'est pas passif en boucle ouverte, il est nécessaire de trouver un signal de sortie dont le degré relatif est égal à un et dont les dynamiques des zéros associée sont (faiblement) en phase minimale. Comme montré dans [139], sous des hypothèses appropriées, il y a des conditions nécessaires et suffisantes pour que le système soit équivalent à un système passif.

3.2 Notion d'immersion et invariance

Dans cette section, nous donnons la définition de la variété invariante [140] et de l'immersion du système [141].

Soit un système autonome :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) \\ y &= h(x) \end{aligned} \tag{3.1}$$

où $x \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur d'état et $y \in \mathbb{R}^m$ est le vecteur de sortie.

Définition 3.1 [43] La variété $\mathcal{M} = \{x \in \mathbb{R}^n / s(x) = 0\}$, où $s(x)$ est lisse, est dite (positivement) invariante pour le système $\dot{x} = f(x)$ si :

$$s(x(0)) = 0 \implies s(x(t)) = 0, \quad \forall t \geq 0 \quad (3.2)$$

Soit le système cible (auxiliaire) :

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= \alpha(\xi) \\ \zeta &= \beta(\xi) \end{aligned} \quad (3.3)$$

où $\xi \in \mathbb{R}^p$ est le vecteur d'état ($p < n$) et $\zeta \in \mathbb{R}^m$ est le vecteur de sortie.

Définition 3.2 [43] Le système (3.3) est dit immergé dans le système (3.1) s'il existe une application lisse $\pi: \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^n$ qui satisfait :

$$x(0) = \pi(\xi(0)) \quad (3.4)$$

et

$$\beta(\xi_1) \neq \beta(\xi_2) \implies h(\pi(\xi_1)) \neq h(\pi(\xi_2)) \quad (3.5)$$

tel que

$$f(\pi(\xi)) = \frac{\partial \pi(\xi)}{\partial \xi} \alpha(\xi) \quad (3.6)$$

et

$$h(\pi(\xi)) = \beta(\xi) \quad (3.7)$$

pour tous $\xi \in \mathbb{R}^p$

en d'autres termes, un système Σ_2 est dite immergé dans un système Σ_1 si l'application entrée-sortie de Σ_1 est une restriction de l'application entrée-sortie de Σ_2 , c.-à-d. toute réponse de sortie générée par Σ_1 est aussi une réponse de sortie Σ_2 pour un ensemble de conditions initiales données [142, 143].

Dans les sections suivantes, on va montrer comment ces deux notions ont été combinées dans la méthodologie d'immersion et d'invariance (I&I) qui est utilisée pour la conception de la commande et de l'observateur.

Dans ce qui suit, on illustre l'approche I&I avec le problème fondamental de la stabilisation par retour d'état d'un point d'équilibre d'un système non linéaire.

3.3 Principe de stabilisation par I&I

Nous illustrons l'approche I&I avec le problème fondamental de la stabilisation, par rétroaction d'état, d'un point d'équilibre d'un système non linéaire. Le problème de stabilisation par rétroaction d'état est choisi pour faciliter la présentation mais, comme cela apparaîtra clairement, l'approche est applicable à une large classe de problèmes de contrôle, notamment le suivi, l'estimation des paramètres et des états et la stabilisation par retour de sortie.

Considérons le système :

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u \quad (3.8)$$

avec $x \in \mathbb{R}^n$ et $u \in \mathbb{R}^m$, et le problème de trouver, si possible, une loi de contrôle de retour d'état $u = v(x)$ telle que le système en boucle fermée ait un équilibre (globalement) asymptotiquement stable à la origine. Ce problème peut être résolu en considérant le problème de la recherche d'un système dynamique cible :

$$\dot{\xi} = \alpha(\xi) \quad (3.9)$$

avec $\xi \in \mathbb{R}^p$. et $p < n$, qui a un équilibre (globalement) asymptotiquement stable à l'origine, un application lisse $x = \pi(\xi)$, et une loi de contrôle $v(x)$ telle que :

$$\pi(\xi(0)) = x(0) \quad (3.10)$$

$$\pi(0) = 0 \quad (3.11)$$

et

$$f(\pi(\xi)) + g(\pi(\xi))v(\pi(\xi)) = \frac{\partial \pi}{\partial \xi} \alpha(\xi) \quad (3.12)$$

Si les conditions ci-dessus sont vérifiées, alors toute trajectoire $x(t)$ du système en boucle fermée :

$$\dot{x} = f(x) + g(x)v(x) \quad (3.13)$$

est l'image à travers l'application $\pi(\cdot)$ d'une trajectoire $\xi(t)$ du système cible (3.9), comme illustré à la figure 3.2. Des (3.11) et le fait que l'équilibre à zéro du système cible est asymptotiquement stable, cela implique que $x(t)$ converge vers l'origine. Ainsi, le problème de stabilisation de l'équilibre à zéro du système (3.8) peut être refondu en tant que problème de résolution de l'équation aux dérivées partielles (3.12) avec les conditions aux limites (3.10) et (3.11).

Une interprétation géométrique de (3.10) - (3.12) est la suivante : Considérons le système en boucle fermée (3.13) et une variété dans l'espace d'états à n-dimensions, défini par :

$$\mathcal{M} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x = \pi(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}^p\} \quad (3.14)$$

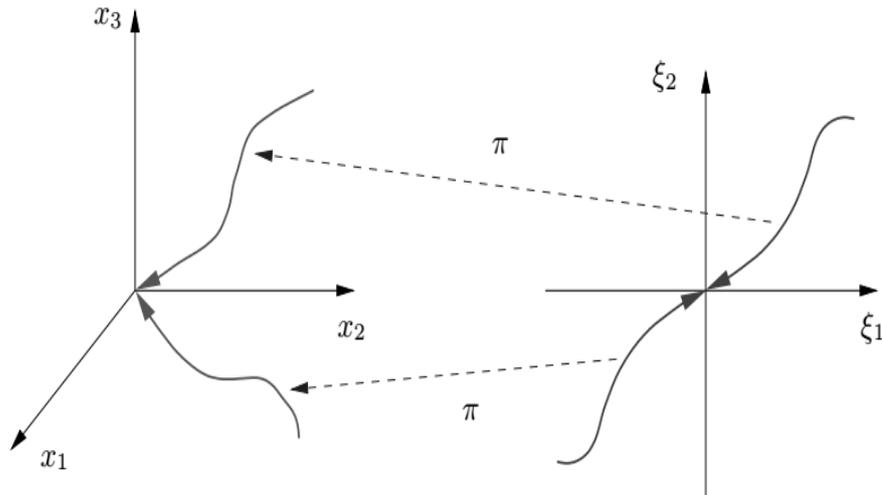


Figure 3.2 Illustration graphique de la correspondance entre les trajectoires du système à contrôler et le système cible pour $p = 2$ et $n = 3$.

et tels que (3.10) et (3.11) vérifiée. De (3.12), la variété \mathcal{M} est invariante avec la dynamique interne (3.9), donc toutes les trajectoires $x(t)$ qui commencent sur la variété restent là et convergent asymptotiquement vers le point $\pi(0)$, qui est l'origine par (3.11). De plus, la condition (3.10) garantit que l'état initial de (3.13) repose sur \mathcal{M} .

La formulation ci-dessus est impraticable pour deux raisons. Tout d'abord, à partir de (3.10) et (3.12), l'application $\pi(\cdot)$ et le contrôle $v(\cdot)$ dépendent, en général, des conditions initiales. Deuxièmement, il peut être impossible de trouver, pour tout $x(0) \in \mathbb{R}^n$, une application $\pi(\xi)$ telle que (3.10), (3.11) et (3.12) soient vérifiées.

Ces obstacles peuvent être éliminés en déterminant une solution de (3.11) et (3.12) seulement et en modifiant la loi de contrôle $u = v(x)$ de sorte que, pour toutes les conditions initiales, les trajectoires du système (3.13) restent bornées et asymptotiquement converger vers la variété $x = \pi(\xi)$,

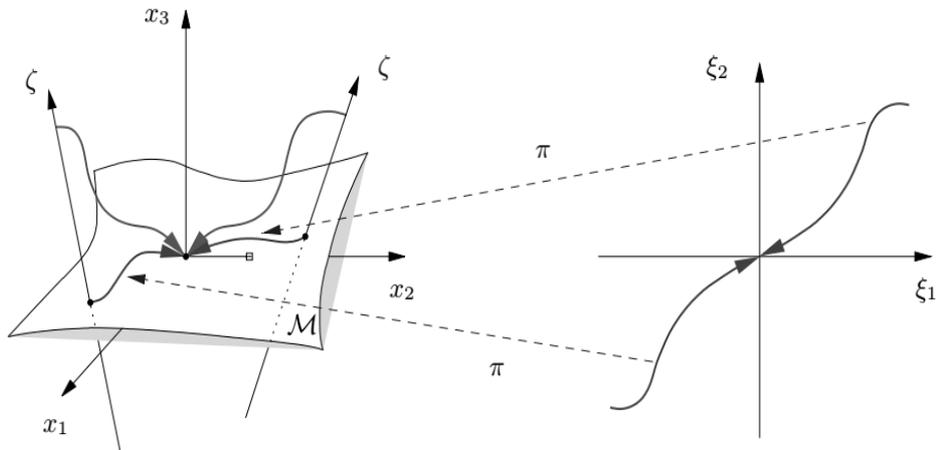


Figure 3.3 Illustration graphique de l'approche I&I.

c'est-à-dire que \mathcal{M} devient attractive. L'attractivité de la variété \mathcal{M} peut être exprimée en termes de distance :

$$|\xi| = \text{dist}(x, \mathcal{M}) \quad (3.15)$$

qui devrait être conduit à zéro. Notez que la distance $|\xi|$ n'est pas défini de façon unique. Ceci fournit un degré de liberté supplémentaire dans la conception du contrôle.

Une illustration graphique de l'approche I&I pour $p = 2$ et $n = 3$ est donnée à la figure 3.3. Observez que l'application $\pi(\cdot)$ trace une trajectoire sur l'espace ξ vers une trajectoire sur l'espace x , qui est limitée à la variété \mathcal{M} contenant l'origine.

De plus, toutes les trajectoires commençant en dehors de \mathcal{M} (c'est-à-dire avec $|\xi| \neq 0$) convergent vers l'origine.

Le problème consiste donc à trouver une variété rendue invariante et attractive, avec la dynamique interne comme une copie de la dynamique en boucle fermée désirée et à concevoir une loi de commande qui oriente l'état du système suffisamment proche de cette variété.

Les conditions suffisantes pour la construction de la loi de commande par retour d'état globalement asymptotiquement stabilisante pour les systèmes non linéaires sont résumées dans le théorème suivant :

Théorème 3.1 [43] Soit le système $\dot{x} = f(x) + g(x)u$, avec l'état $x \in \mathbb{R}^n$, l'entrée $u \in \mathbb{R}^m$ et $x^* \in \mathbb{R}^n$ un point d'équilibre à être stabiliser. Supposons qu'il existe des applications dérivables $\alpha: \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^p$; $\pi: \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^n$; $\phi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n-p}$; $c: \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^m$ et $v: \mathbb{R}^{n \times (n-p)} \rightarrow \mathbb{R}^m$ avec $p < n$, telles que les hypothèses suivantes soient vérifiées :

H.1) le système cible

$$\dot{\xi} = \alpha(\xi) \quad (3.16)$$

avec l'état $\xi \in \mathbb{R}^p$, a un équilibre globalement asymptotiquement stable à $\xi^* \in \mathbb{R}^p$ et :

$$x^* = \pi(\xi^*) \quad (3.17)$$

H.2) (Conditions d'immersion).

Pour tous $\xi \in \mathbb{R}^p$

$$f(\pi(\xi)) + g(\pi(\xi))c(\pi(\xi)) = \frac{\partial \pi(\xi)}{\partial \xi} \alpha(\xi) \quad (3.18)$$

H.3) (Variété implicite).

L'égalité suivante est satisfaite :

$$\mathcal{M} = \{x \in \mathbb{R}^n / \phi(x) = 0\} = \{x \in \mathbb{R}^n / x = \pi(\xi), \xi \in \mathbb{R}^p\}$$

H.4) (Attractivité de la variété et trajectoire bornées).

Toutes les trajectoires du système :

$$\dot{z} = \frac{\partial \phi}{\partial x} [f(x) + g(x)v(x, z)] \quad (3.19)$$

$$\dot{x} = f(x) + g(x)v(x, z) \quad (3.20)$$

sont bornées et satisfont :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} z(t) = 0 \quad (3.21)$$

alors x^* est un point d'équilibre globalement asymptotiquement stable du système en boucle fermée :

$$\dot{x} = f(x) + g(x)\psi(x, \phi(x))$$

Les observations suivantes concernant les hypothèses :

1. Dans les applications du théorème 3.1, le système cible est défini a priori. Par conséquent, la condition H.1 est automatiquement satisfaite. (Voir la Remarque 4 dans [48]).
2. Étant donné le système cible (3.18) de la condition H.2 définit une équation différentielle partielle dans l'application inconnu π , où c est un paramètre libre. Notez que, si la linéarisation de (3.8) (où $x = x^*$) est contrôlable (et que toutes les fonctions sont localement analytiques), il a été montré dans [144], en utilisant le théorème de Lyapunov auxiliaire et dans certaines conditions de non-résonance, que nous pouvons toujours trouver tel que la solution existe localement. Néanmoins, trouver la solution à cette équation est en général une tâche difficile. Malgré ce fait, nous allons montrés dans la section suivante, qu'une sélection appropriée de la dynamique de la cible, c'est-à-dire suivant les considérations physiques et théoriques du système, simplifie ce problème. Dans [48], ils ont prouvé que,

dans le contexte du contrôle adaptatif, le choix du candidat potentiel en dynamique de cible naturelle permet d'éviter cette tâche.

3. Une remarque importante est que, les «fonctions de base» $\phi(x)$ sont pas définies de manière unique, leur choix offre un degré de liberté alternatif pour la vérification de H.4, ce qui devient ainsi un problème de stabilisation non standard. Cette idée centrale est largement utilisée dans le contrôle adaptatif.
4. La condition de convergence (3.21) peut être détendue, c'est-à-dire qu'il suffit de prouver la convergence asymptotique de[48] :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} g(x)(\psi(x, z) - \psi(x, 0)) = 0$$

3.4 Les applications de la méthode I&I

A partir de la discussion dans la section précédente il est évident que la méthode I&I nécessite la sélection d'un *système dynamique cible*. Pour les systèmes non linéaires générale la dynamique cible classique est linéaire. Pour les systèmes physique le choix de la dynamique cible linéaire n'est pas nécessairement le plus approprié, parce que, d'une part, une conception applicable doivent respecter les contraintes imposées par la structure physique et, d'autre part, il est bien connu que la plupart des systèmes physiques sont pas linéarisable par feedback.

Dans la partie suivante nous présentons une série des problèmes de contrôle pour lesquels il est possible de définir certains dynamiques cible naturel et par conséquent, exploiter la formulation de I&I. les problèmes sont identifiés à travers des exemples représentatifs.

3.4.1. Robustification des lois de commande

Dans de nombreux cas d'intérêt pratique, il est possible de concevoir une loi de commande pour une version d'ordre réduit d'un modèle donné. Par exemple, pour les systèmes admettant lente/rapide décomposition qui apparaît généralement dans des applications où la dynamique des actionneurs où la haute fréquence modes doivent prendre en considération. Il est parfois possible de résoudre le problème de contrôle de sous-système lente. Une sélection physiquement raisonnable de la dynamique cible est le dernier sous-système mis en boucle fermé avec un contrôleur stabilisateur. Dans ce cas, l'application de la méthode I&I peut être interpréter comme une procédure de robustification, contre les dynamiques d'ordre supérieure, un contrôleur dérivé d'un modèle d'ordre inférieur. Finalement, il est clair que la définition d'un système cible, qui n'est pas unique, permet de capturer aussi les objectifs de performance. Nous illustrons maintenant cette application de I&I avec un exemple physique.

Exemple 3.1 (Système de lévitation magnétique) [43].

Considérons un système de lévitation magnétique se compose d'une bille à fer dans un champ magnétique verticale créée par un seul électroaimant (voir Figure). Adoptant les hypothèses de modélisation standard pour le couplage électromagnétique on obtient le modelé (avec le domaine de validité $-\infty < \xi_1 < 1$) :

$$\begin{aligned}\dot{\xi}_1 &= \frac{1}{m} \xi_2 \\ \dot{\xi}_2 &= \frac{1}{2k} \xi_3^2 - mg \\ \dot{\xi}_3 &= -\frac{1}{k} R_2 (1 - \xi_1) \xi_3 + w\end{aligned}\tag{3.9}$$

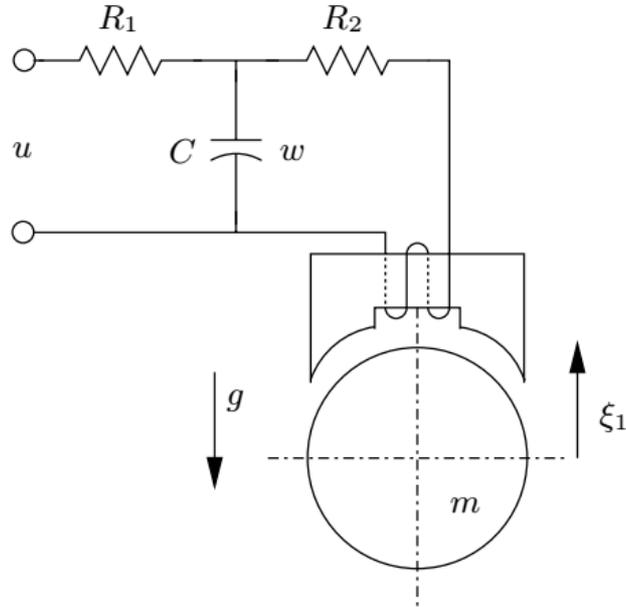


Figure 3.4 Schéma de système de lévitation magnétique

Où le vecteur d'état ξ se compose de la position de la bille et sa vitesse et le flux dans l'inductance, w est le voltage appliqué à l'électroaimant, m est la masse de la bille, g est :

l'accélération gravitationnelle, R_2 est la résistance de la bobine, et k est constante positif qui dépend au nombre de tours de la bobine.

Dans les applications à faible puissance il est typique à négliger la dynamique de l'actionneur, par conséquent, on suppose que w est une variable manipulée. En les applications de moyenne a haute puissance, le voltage w est générée en utilisant un redresseur qui comprend une capacité. La dynamique de cet actionneur peut être décrit par le circuit RC représenté dans la Figure 3.4, où le voltage de contrôle actuel est u , tandis que R_1 et C modèle the parasite résistance et capacité, respectivement. Le modèle du système de lévitation de bille, y compris la dynamique d'actionneur est donné par les équations :

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1 &= \frac{1}{m}x_2 \\
 \dot{x}_2 &= \frac{1}{2k}x_3^2 - mg \\
 \dot{x}_3 &= -\frac{1}{k}R_2(1-x_1)x_3 + x_4 \\
 \dot{x}_4 &= -\frac{1}{Ck}(1-x_1)x_3 - \frac{1}{R_1C}x_4 + \frac{1}{R_1C}u \quad (3.10)
 \end{aligned}$$

où $x_1 = \xi_1, x_2 = \xi_2, x_3 = \xi_3$ et, on a ajouté le coordonné $x_4 = w$, qui représente la tension à travers la capacité. Notant que, (3.9) est le modèle lent de (3.10), en prenant le constant de temps R_1C comme le petit paramètre.

3.4.2. Systèmes mécaniques sous actionnés

Pour les systèmes mécaniques sous actionnés un sensible système cible est la partie sous actionnée du mécanisme, éventuellement avec une loi de commande par retour d'état. Dans cette situation la définition du système cible, qui n'est pas unique et donne un degré de liberté pour la conception.

Exemple 3.2 (Le système chariot et pendule inversé) [43].

Considérons le système chariot et pendule inversé, représenté sur la Figure, et supposons qu'une étape de linéarisation partielle par feedback a été appliquée. Après la normalisation sa donne le modèle :

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1 &= x_2 \\
 \dot{x}_2 &= \sin(x_1) - u \cos(x_1) \\
 \dot{x}_3 &= u \quad (3.11)
 \end{aligned}$$

Où $(x_1, x_2) \in \mathcal{S}^1 \times \mathbb{R}$ sont les angles de pendule (par rapport à la position verticale) et sa vitesse, $x_3 \in \mathbb{R}$ est la vitesse du chariot, et $u \in \mathbb{R}$ est l'entrée.

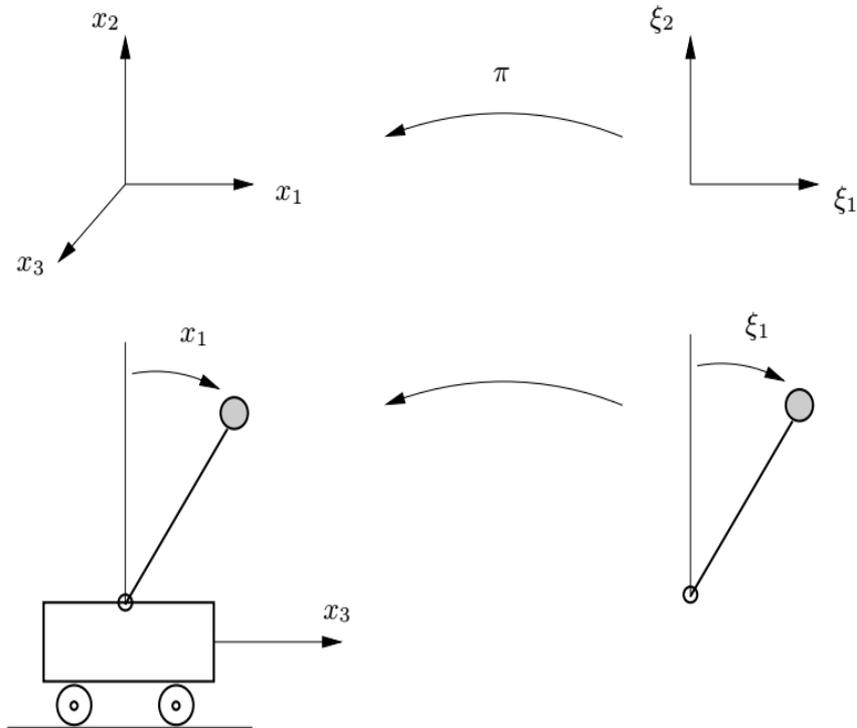


Figure 3.5 Le système chariot et pendule inversé et la dynamique cible.

L'équilibre à être stabilisé est la position verticale vers le haut du pendule avec le chariot arrêté, qui correspond à $x^* = 0$.

L'idée clé est d'immerger le système de troisième ordre dans un système simple de deuxième ordre, dont l'énergie potentielle et les fonctions d'amortissements sont laissés à être conçus (voir Figure 3.5). En conséquence, nous définissons les dynamiques cible comme :

$$\begin{aligned}\dot{\xi}_1 &= \xi_2 \\ \dot{\xi}_2 &= V'(\xi_1) - R(\xi_1, \xi_2)\xi_2\end{aligned}\quad (3.12)$$

qui sont les équations d'un pendule (complètement actionné) avec une fonction d'énergie $H(\xi_1, \xi_2) = \frac{1}{2}\xi_2^2 + V(\xi_1)$ et, une fonction d'amortissement $R(\cdot)$, éventuellement non linéaire. Pour généralité nous

avons définis comme une fonction de ξ_1 et ξ_2 . Pour s'assurer que le système cible a un équilibre localement asymptotiquement stable à l'origine, nous précisons que la fonction d'énergie potentiel $V(\xi_1)$ satisfait $V'(0) = 0$ et $V''(0) > 0$, et la fonction d'amortissement est tel que $R(0, 0) > 0$.

3.4.3. Systèmes en une structure spéciale

I&I est également applicable aux deux classes de systèmes ayant une structure spéciale qui ont attiré une grande attention dans les recherches : systèmes sous forme feedback et feedforward.

Example 3.3 (Système en forme feedback) [43].

Considérons la classe de systèmes en feedback forme décrit par l'équations :

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= f(x_1, x_2) \\ \dot{x}_2 &= u\end{aligned}\tag{3.13}$$

avec $x = \text{col}(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}$ et $f(0, 0) = 0$, où le système $\dot{x}_1 = f(x_1, 0)$ ayant un équilibre globalement asymptotiquement stable à l'origine. Un choix sensible pour la dynamique cible est donc donné par :

$$\dot{\xi} = f(\xi, 0)\tag{3.14}$$

et ce implique que l'application $\pi(\cdot) = \text{col}(\pi_1(\cdot), \pi_2(\cdot))$ est telle que $x_1 = x_1(\xi) = \pi_1(\xi) = \xi$.

3.4.4. Commande adaptative

En commande adaptative un candidat naturel pour le dynamique cible est placé dans la boucle fermée avec un contrôleur à paramètres connus stabi-

lisé. Il est important de noter que, même que les dynamiques cible ne sont pas connus (car ils dépendent de paramètres inconnus), l'approche I&I est encore applicable

Example 3.4 (Conception d'un contrôleur adaptatif) [43].

Considérons le système non linéaire à premier ordre :

$$\dot{x}_1 = \theta x^2 + u \quad (3.15)$$

où $\theta \in \mathbb{R}$ est un paramètre constant inconnu. Noter que si θ est connu, le zéro équilibre de système (3.15) serait globalement asymptotiquement stabilisé par un loi de control :

$$u = -kx - \theta x^2 \quad (3.16)$$

avec $k > 0$. Le correspondent contrôleur à equivalent certain est donnée par :

$$u = -kx - \hat{\theta}x^2 \quad (3.17)$$

$$\dot{\hat{\theta}} = w \quad (3.18)$$

où w est une loi d'adaptation, qui est généralement choisi pour annuler tous les termes à paramètre dépendants du dérivé temporelle de la fonction de Lyapunov :

$$V(x, \hat{\theta}) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2\gamma}(\hat{\theta} - \theta)^2 \quad (3.19)$$

avec $\gamma > 0$, qui est donnée par :

$$\dot{V}(x, \hat{\theta}) = -kx^2 - (\hat{\theta} - \theta)x^3 + \frac{1}{\gamma}(\hat{\theta} - \theta)w \quad (3.20)$$

Choisissant $w = \gamma x^3$ rendre $\dot{V}(x, \hat{\theta}) = -kx^2$. Ce établit les limites de x et $\hat{\theta}$, et la convergence de x à zéro (voir Théorème A.2 dans [43]). Toutefois,

pas de conclusion sur le comportement de l'erreur d'estimation $(\hat{\theta} - \theta)$, sauf qu'il converge vers une valeur constante.

Le problème de la commande adaptative peut être placé dans le cadre de I&I en considérant le système augmenté :

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \theta x^2 + u \\ \dot{\hat{\theta}} &= w\end{aligned}\tag{3.21}$$

avec les entrées de commande u et w , et le système cible :

$$\dot{\xi} = -k\xi\tag{3.22}$$

Qui est obtenue en appliquant le contrôleur à paramètre connu (3.16) au système (3.15). Notant que la sélection de la dynamique cible impose que l'application $\pi(\cdot) = \text{col}(\pi_1(\cdot), \pi_2(\cdot))$ devrait être telle sorte que $\pi_1(\xi) = \xi$.

3.4.5. Contrôleur PI non linéaire

L'approche I&I permet à construire un contrôleur non linéaire PI avec gains qui sont des fonctions non linéaires des signaux mesurables, ainsi que, éviter l'étape de re-réglage qui est nécessaire dans le contrôle PI classique. Nous présentons d'idée basique avec un exemple simple.

Exemple 3.6 (Systèmes avec incertitude assortie) [43].

Considérons un système scalaire simple :

$$\dot{y} = \varphi(y) + u\tag{3.23}$$

où $\varphi(y)$ est une fonction continue inconnue qui varie dans l'intervalle $\varphi_m < \varphi(y) < \varphi_M$. L'objectif de la commande est de conduire l'état de sys-

tème à zéro. Pour cela, nous choisissons une structure de commande non linéaire PI de la forme :

$$\begin{aligned}\dot{\beta}_I &= w_I(y) \\ u &= v(\beta_P(y) + \beta_I, y)\end{aligned}\quad (3.24)$$

où les fonctions $\beta_P(\cdot)$, $w_I(\cdot)$ et $v(\cdot)$ sont à définir. Notant que PI linéaire Classique correspond à la sélection :

$$\begin{aligned}\beta_P(y) &= k_P y \\ w_I(y) &= k_I y \\ u &= -\beta_P(y) - \beta_I\end{aligned}\quad (3.25)$$

Où les constante positifs k_P et k_I sont les gains de réglage proportionnel et intégral

On choisit la dynamique cible d'être $\dot{\xi} = -\lambda\xi$, avec $\lambda > 0$. Définir le signal :

$$z = \beta_P(y) + \beta_I \quad (3.26)$$

et fermant la boucle avec un contrôleur non linéaire PI (3.24), nous pouvons écrire le système dynamique en forme perturbé comme :

$$\dot{y} = -\lambda y + [\varphi(y) + v(z, y) + \lambda y] \quad (3.27)$$

L'objectif de la commande est donc de garder toutes les trajectoires bornées et rendre les termes entre parenthèse asymptotiquement à zéro, qui est dans le langage de I&I équivaut à faire une variété :

$$\mathcal{M} = \{(y, z) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : \varphi(y) + v(z, y) + \lambda y = 0\} \quad (3.28)$$

Attractive et invariante. Le problème est donc de trouver les fonctions $\beta_P(\cdot)$, $w_I(\cdot)$ et $v(\cdot)$ tel que, pour chaque y , il existe (au moins un) \bar{z}_y tel

que $(0, \bar{z}_y) \in \mathcal{M}$ et z converge asymptotiquement vers \bar{z}_y . Notant que dans la variété \mathcal{M} la dynamique de système coïncide avec la dynamique cible.

Considérons maintenant la dynamique de z , qui est décrit par l'équation :

$$\dot{z} = w_I(y) + \frac{\partial \beta_P}{\partial y} [\varphi(y) + v(z, y)] \quad (3.29)$$

et suppose que \mathcal{M} est non vide. Pour assurer que \bar{z}_y est un équilibre de la dynamique de z , il est suffisant de choisir le paramètre intégral du contrôleur non linéaire PI comme :

$$w_I(y) = \frac{\partial \beta_P}{\partial y} \lambda y \quad (3.30)$$

qui rend :

$$\dot{z} = \frac{\partial \beta_P}{\partial y} [\varphi(y) + v(z, y) + \lambda y] \quad (3.31)$$

pour compléter la description du contrôleur non linéaire PI, les fonctions $\beta_P(y)$ et $v(z, y)$ doivent être d'une sorte que toutes les trajectoires de la boucle fermé du système (3.27), (3.31) converge à un équilibre $(y, z) = (0, \bar{z}_y)$.

3.5 Principe d'observation en utilisant I&I

L'observateur est conçu d'après le concept général d'I&I, mais avec une vision différente du système cible et de la variété invariante[43, 49].

Considérons le système dynamique non linéaire variant dans le temps, décrits par des équations de la forme :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f_1(x, y, t) \\ \dot{y} &= f_2(x, y, t) \end{aligned} \quad (3.32)$$

Où $x \in \mathbb{R}^n$ est la partie non mesurée de l'état (à estimer) et $y \in \mathbb{R}^p$ est la partie mesurée de l'état. Les vecteurs f_1 et f_2 sont supposé (forward complete) c.-à-d. les trajectoires commençant à l'instant t_0 sont définis pour tous $t \geq t_0$.

Avant de définir l'observateur pour le système (3.32), on introduit la définition d'une application inversible à gauche.

Définition 3.3 [43, 49] : Une application $\varphi(x, y): \mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^p$ est inversible à gauche (par rapport à x) s'il existe une application $\varphi^L: \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^l$ de telle sorte que, $\varphi^L(\varphi(x, y)) = x$ pour tous les $x \in \mathbb{R}^l$ et $y \in \mathbb{R}^m$

L'observateur pour le système (3.32) est défini comme suit

Définition 3.4 [43, 49] Le système dynamique :

$$\dot{\xi} = \alpha(\xi, y, t) \quad (3.33)$$

avec $\xi \in \mathbb{R}^p$. $p \geq n$ est un observateur pour le système (3.32), s'il existe des applications $\beta: \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^p$ et $\phi: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^p$ qui sont inversibles par rapport à leur premier argument et telle que la variété :

$$\mathcal{M} = \{(x, y, \xi, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^p \times \mathbb{R} / \beta(\xi, y, t) = \phi(x, y, t)\} \quad (3.34)$$

Ait les propriétés suivantes :

- (i) toutes les trajectoires du système étendu (3.32)-(3.33) initialisées sur la variété \mathcal{M} restent sur celle-ci pour tout temps futur, c'est-à-dire \mathcal{M} est positive invariante.
- (ii) Toutes les trajectoires du système étendu (3.32)-(3.33) initialisées dans un voisinage de \mathcal{M} convergent asymptotiquement vers \mathcal{M} , c'est-à-dire, \mathcal{M} est attractive

La définition ci-dessus implique qu'un estimé asymptotique de l'état x est donné par :

$$\hat{x} = \phi^L(\beta(\xi, y, t), y, t)$$

où ϕ^L est l'inverse à gauche de ϕ (c-à-d par rapport au premier argument). Ainsi l'erreur de l'estimation $\hat{x} - x$ est nulle sur la variété \mathcal{M} . En outre, si la propriété (ii) est vérifiée pour tout $(x(t_0), y(t_0), \xi(t_0))$ alors (3.33) est un observateur global pour le système (3.32). Il est à noter que, l'ordre de la dynamique de l'observateur est réduit par rapport à celui de système, ce qui simplifie sa conception.

Le théorème suivant décrit la construction de l'observateur d'ordre réduit.

Théorème 3.2 [43, 49] : Soit le système (3.32) et (3.33) et supposons qu'il existe des applications $C^1, \beta(\xi, y, t) : \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^p$ et $\phi(x, y, t) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^p$ avec l'inverse par rapport au premier argument $\phi^L : \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ tel que les hypothèses suivantes soient vérifiées :

- A. Quels que soient y, ξ et t on a $\beta(\xi, y, t)$ est inversible par rapport au premier argument ξ et le déterminant :

$$\det \left(\frac{\partial \beta}{\partial \xi} \right) \neq 0 \quad (3.35)$$

- B. Le système :

$$\begin{aligned} \dot{z} = & \frac{\partial \beta}{\partial y} \{f_2(\hat{x}, y, t) - f_2(x, y, t)\} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \Big|_{x=\hat{x}} f_2(\hat{x}, y, t) - \frac{\partial \phi}{\partial y} f_2(x, y, t) \\ & + \frac{\partial \phi}{\partial x} \Big|_{x=\hat{x}} f_1(\hat{x}, y, t) - \frac{\partial \phi}{\partial x} f_1(x, y, t) + \frac{\partial \phi}{\partial t} \Big|_{x=\hat{x}} - \frac{\partial \phi}{\partial t} \end{aligned} \quad (3.36)$$

avec $\hat{x} = \phi^L(\phi(x, y, t) + z)$, présente un équilibre (globalement) asymptotiquement stable à $z = 0$, uniformément dans x, y , et t

Alors le système (3.33) avec :

$$\alpha(\xi, y, t) = - \left(\frac{\partial \beta}{\partial \xi} \right)^{-1} \left(\frac{\partial \beta}{\partial y} f_2(\hat{x}, y, t) + \frac{\partial \beta}{\partial t} - \frac{\partial \phi}{\partial y} \Big|_{x=\hat{x}} f_2(\hat{x}, y, t) - \frac{\partial \phi}{\partial x} \Big|_{x=\hat{x}} f_1(\hat{x}, y, t) + \frac{\partial \phi}{\partial t} \Big|_{x=\hat{x}} \right) \quad (3.37)$$

Où $\hat{x} = \phi^L(\beta(\xi, y), y, t)$ est un observateur (global) pour le système (3.32).

En pratique, $z = \beta - \phi$ traduit la dynamique d'éloignement de la variété. La synthèse de l'observateur revient donc à la recherche de fonctions β, ϕ et ϕ^L qui satisfont le théorème 3.2. Ces fonctions associées à celles de $f_1(x, y, t)$ et $f_2(x, y, t)$ décrivent le modèle du procédé permettent de définir le modèle dynamique de l'observateur donnée par les relations (3.33) et (3.37). Le choix des fonctions β et ϕ n'est pas unique, des formes particulières peuvent être utilisées.

3.6 Conception d'observateur globale par I&I pour la classe des systèmes mécanique sous contraintes non holonomes

Dans cette section, on va présenter l'observateur global à convergence exponentielle pour les systèmes mécaniques sous contrainte de type non holonome développé par Astolfi et al. dans [55] , en utilisant la méthode I&I introduite dans la section précédente, en procédant de la même manière, on définit un observateur pour les systèmes mécaniques à n degrés

de liberté avec des contraintes non-holonomes décrites sous forme Lagrangienne par [59, 145] :

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + \nabla U(q) = G(q)u + Z(q)\lambda \quad (3.38)$$

$$Z^T(q)\dot{q} = 0 \quad (3.39)$$

où $q(t) \in \mathbb{R}^n$ et $\dot{q}(t) \in \mathbb{R}^n$ sont des positions et des vitesses généralisées, respectivement, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ est l'entrée de commande, $Z(q)\lambda$ sont les forces de contrainte avec $Z: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n \times k}$, $\text{rank}(Z) = k$, et $\lambda(t) \in \mathbb{R}^k$, $G: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n \times m}$ est la matrice d'entrée, $M: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$, $M = M^T > 0$ est la matrice de masse, et $M: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est la fonction d'énergie potentielle $C(q, \dot{q})\dot{q}$ est le vecteur de Coriolis et des forces centrifuges avec l'élément (ik) de la matrice $C: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ défini par $C_{ik}(q, \dot{q}) = C_{ijk}(q)\dot{q}_j$ où les $C_{ijk}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ sont les symboles Christoffel du premier type définis comme :

$$C_{ijk}(q) = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial M_{ik}}{\partial q_j} + \frac{\partial M_{jk}}{\partial q_i} - \frac{\partial M_{ij}}{\partial q_k} \right\} \quad (3.40)$$

le système (3.38), (3.39) peut être écrit sous forme Hamiltonien à ports avec les moments généralisés $p = M(q)\dot{q}$ [59] :

$$\begin{bmatrix} \dot{q} \\ \dot{p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nabla_q H(q, p) \\ \nabla_p H(q, p) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ G(q) \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 0 \\ Z(q) \end{bmatrix} \lambda \quad (3.41)$$

$$Z^T(q)\nabla_p H(q, p) = 0 \quad (3.42)$$

avec le Hamiltonien est :

$$H(q, p) = \frac{1}{2} p^T M^{-1}(q)p + U(q) \quad (3.43)$$

Le système (3), (4), restreint à l'espace contraint, peut être représenté sous la forme :

$$\begin{bmatrix} \dot{q} \\ \dot{\tilde{p}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \tilde{S}(q) \\ -\tilde{S}^T(q) & J(q, \tilde{p}) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \nabla_q H_c(q, \tilde{p}) \\ \nabla_P H_c(q, \tilde{p}) \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ G_c \end{bmatrix} u \quad (3.44)$$

avec

$$\tilde{p} = \tilde{S}^T(q)p \quad (3.45)$$

et

$$H_c(q, \tilde{p}) = \frac{1}{2} \tilde{p}^T \tilde{M}^{-1}(q) \tilde{p} + U(q) \quad (3.46)$$

avec $\tilde{S}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n \times (n-k)}$ étant l'annihilateur à droite de Z^T $G_c: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{(n-k) \times m}$. Le (ij) ième élément de $J: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n-k} \rightarrow \mathbb{R}^{(n-k) \times (n-k)}$ donné par $J_{ij}(p, \tilde{p}) = -p^T [\tilde{S}_i, \tilde{S}_j]$, avec \tilde{S}_i étant la i ème colonne de \tilde{S} , et $[\tilde{S}_i, \tilde{S}_j]$ nous concluons que J est asymétrique.

La matrice d'inertie \tilde{M} positive semi définie et écrite comme [55] :

$$\tilde{M}(q) = \{m_{11}(q) - m_{12}(q)m_{22}(q)^{-1}m_{12}^T(q)\}^{-1} \quad (3.47)$$

3.6.1. Représentation Hamiltonien à ports appropriée

Afin de trouver une représentation pH appropriée, nous utilisons le changement de coordonnées suivant [120] :

$$(y, x) \rightarrow (q, T(q)\tilde{p}) \quad (3.48)$$

avec $T(q): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ est une matrice définie positive, complètement définie, racine carrée de la matrice d'inertie inverse [146] :

$$\tilde{M}^{-1}(q) = T^T(q)T(q) \quad (3.49)$$

On définit les applications $L: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n \times (n-k)}$. et $F: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$ comme suit :

$$L(q) = \tilde{S}(q)T^T(q) \quad (3.50)$$

$$F(q, u) = T(q) [G_c(q)u - \tilde{S}^T \nabla U(q)] \quad (3.51)$$

Le système (3.44), (3.46) admet une représentation d'espace d'état de la forme :

$$\dot{y} = L(y)x \quad (3.52)$$

$$\dot{x} = S(x, y)x + F(y, u) \quad (3.53)$$

avec

$$S = TJT + \sum_{i=1}^n [((\nabla_{q_i} T)T^{-1}P)(T(q)\tilde{S}^T e_i)^T - (T(q)\tilde{S}^T e_i)((\nabla_{q_i} T)T^{-1}P)^T] \quad (3.54)$$

avec e_i le (i) -ème vecteur de base de \mathbb{R}^{n-k} . De plus, S vérifie les mêmes propriétés dans la Lemme 2.1.

3.6.2. Conception de l'observateur

L'observateur est construit en quatre étapes [43] :

1. Suivant la procédure de I&I [125], il ont définis la variété (dans l'espace d'état étendu du système et l'observateur) qui devrait être rendu attractive et invariante d'une façon que la partie non mesurable d'état peut être reconstruit à partir de la fonction qui définit la variété. Comme c'est bien connu, pour atteindre cet objectif une équation différentielle partielle (EDP) devrait, en principe, être résolu.
2. Pour éviter la nécessité de résoudre la EDP une technique d'approximation proposé dans [54] est adopté. L'utilisation de cette

technique ajoute des erreurs dans la dynamique d'erreur d'observateur.

3. Ils ont introduit comme dans [54] une dynamique d'échelle (dynamic scaling) qui domine – dans la fonction de Lyapunov- l'effet des termes de perturbations, prouvant que l'erreur d'observateur converge vers zéro.
4. Pour prouver que le facteur de la dynamique d'échelle est borné et, par conséquent, l'erreur d'observateur actuelle est convergée exponentiellement à zéro, des termes grand-gain sont introduit dans la dynamique d'observateur à nouveau pour dominer les termes des signes indéfinis dans l'analyse de la fonction de Lyapunov.

Etape 1. (Définition de la variété)

Pour le système (3.52), (3.53) la variété la variété suivante est proposée :

$$\mathcal{M} := \{(y, x, \xi, \hat{y}, \hat{x}) / \xi - x + \beta(y, \hat{y}, \hat{x}) = 0\} \subset \mathbb{R}^{5n-3k} \quad (3.55)$$

où $\xi \in \mathbb{R}^{n-k}$, $\hat{y} \in \mathbb{R}^{n-k}$, $x \in \mathbb{R}^n$ sont une partie de l'état d'observateur, la dynamique qui sera définit, et l'application $\beta: \mathbb{R}^{3n-2k} \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$ est à définir.

Pour prouver que la variété \mathcal{M} est attractive et invariante il est montré que le coordonnée d'éloignement de la variété :

$$z = \xi - x + \beta(y, \hat{y}, \hat{x}) \quad (3.56)$$

Le norme qui détermine la distance de l'état à la variété \mathcal{M} telle que :

(C1) $z(0) = 0 \Rightarrow z(t) = 0$, pour tous $t \geq 0$ (invariance);

(C2) $z(t)$ asymptotiquement (exponentiellement) converge à zéro (attractivité).

Notant que, si $z(t) \rightarrow 0$, une estimation asymptotique de x est donnée par $\xi + \beta$.

Pour obtenir la dynamique de z dériver (3.56), donne :

$$\dot{z} = \dot{\xi} - S(y, x)x - F + \nabla_y \beta \dot{y} + \nabla_{\hat{y}} \beta \dot{\hat{y}} + \nabla_{\hat{x}} \beta \dot{\hat{x}} \quad (3.57)$$

Soit :

$$\dot{\xi} = F - \nabla_{\hat{y}} \beta \dot{\hat{y}} - \nabla_{\hat{x}} \beta \dot{\hat{x}} + S(y, \xi + \beta)(\xi + \beta) - \nabla_y \beta L(y)(\xi + \beta) \quad (3.58)$$

où \hat{y} et \hat{x} sont à définir. Remplaçant (3.58) dans l'équation de \dot{z} , et invoquant les propriétés (ii) et (iii) de Lemme 3.1, donne :

$$\dot{z} = S(y, x)z + \bar{S}(y, \xi + \beta)z - \nabla_y \beta L(y)z \quad (3.59)$$

À partir de (3.59), il est clair que la condition (C1) ci-dessus est satisfait. D'autre part, la condition (C2) serait satisfaite si nous pouvons trouver une fonction β résolvant la EDP suivante :

$$\nabla_y \beta = [k_1 I + \bar{S}(y, \xi + \beta)] L^I(y) \quad (3.60)$$

avec $k_1 > 0$, où $L^I: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{(n-k) \times n}$ est l'inversion à gauche à rang plein de la matrice L . En effet, dans ce cas, la dynamique- z réduit à $\dot{z} = (S - k_1)z$, qui, invoquant l'antisymétrie de S , assurant la propriété de convergence exponentielle désiré. Malheureusement, la solution de EDP (3.60) est une tâche délicate, il n'est pas connu si une solution existe.

Par conséquent, dans l'étape suivante on cherche “ approximation de son solution”.

Etape 2. (“ Solution approximative” de la EDP)

Définissons la “ $\nabla_y \beta$ ” comme :

$$H(y, \xi + \beta) := [k_1 I + \bar{S}(y, \xi + \beta)] L^I(y) \quad (3.61)$$

Et notant les $(n - k) \times n$ colonnes de la matrice par $H_i: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n-k} \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$ pour $i = 1 \dots n$, alors :

$$H(y, \xi + \beta) = [H_1(y, \xi + \beta) \mid \dots \mid H_n(y, \xi + \beta)] \quad (3.62)$$

Maintenant, suivant la même procédure que [50], définissons :

$$\beta(y, \hat{y}, \hat{x}) := \int_0^{y_1} H_1([s, y_1, \dots, y_n], \hat{x}) ds + \dots + \int_0^{y_n} H_n([y_1, \dots, y_n, s], \hat{x}) ds \quad (3.63)$$

À partir de la définition de l'application β , et ajoutant et soustrayant $H(y, \xi + \beta)$, nous avons que $\nabla_y \beta$ peut s'écrire comme :

$$\begin{aligned} \nabla_y \beta(y, \hat{y}, \hat{x}) &= H(y, \xi + \beta) - \{H(y, \xi + \beta) \\ &\quad - [H_1([s, y_1, \dots, y_n], \hat{x}) \dots H_n([y_1, \dots, y_n, s], \hat{x})]\} \end{aligned} \quad (3.64)$$

Notant que toutes les fonctions sont lisses, et le terme entre parenthèses égale à zéro si $\hat{y} = y$ et $\hat{x} = \xi + \beta$. Par conséquent, il existe des applications

$$\Delta_y: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n-k} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{(n-k) \times n} \quad \text{et} \quad \Delta_x: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n-k} \times \mathbb{R}^{n-k} \rightarrow \mathbb{R}^{(n-k) \times n}$$

tel que :

$$\nabla_y \beta(y, \hat{y}, \hat{x}) = H(y, \xi + \beta) - \Delta_y(y, \hat{x}, e_y) - \Delta_x(y, \hat{x}, e_x) \quad (3.65)$$

avec

$$e_y = \hat{y} - y, \quad e_x = \hat{x} - (\xi + \beta) \quad (3.66)$$

et

$$\Delta_y(y, \hat{x}, 0) = 0, \quad \Delta_x(y, \hat{x}, 0) = 0 \quad (3.67)$$

pour tous $y \in \mathbb{R}^n, \hat{y} \in \mathbb{R}^n, \hat{x} \in \mathbb{R}^{n-k}$. Remplaçant (3.62) et (3.65) dans (3.59) donne :

$$\dot{z} = (S - k_1)z + (\Delta_y + \Delta_x)L(y)z \quad (3.68)$$

Rappelant que S est antisymétrique et $k_1 > 0$, il est clair que les applications Δ_y et Δ_x jouent le rôle des perturbations que nous allons essayer de dominer avec la dynamique d'échelle dans la prochaine étape de conception.

Etape 3 (Dynamique d'échelle)

Définissons la coordonnée d'éloignement de la variété

$$\eta = \frac{1}{r}z \quad (3.69)$$

avec r est le facteur de dynamique d'échelle à définir. Dérivant (3.69), et utilisant (3.68), donne :

$$\dot{\eta} = \frac{1}{r}\dot{z} - \frac{\dot{r}}{r}\eta = (S - k_1)\eta + (\Delta_y + \Delta_x)L(y)\eta - \frac{\dot{r}}{r}\eta \quad (3.70)$$

Considérons la fonction :

$$V_1(\eta) = \frac{1}{2}|\eta|^2 \quad (3.71)$$

Et notant que son dérivé par rapport au temps est :

$$\dot{V}_1(\eta) \leq - \left(\frac{k_1}{2} + \frac{\dot{r}}{r} - \frac{1}{k_1} (\|\Delta_y L\|^2 + \|\Delta_x L\|^2) \right) |\eta|^2 \quad (3.72)$$

où $\|\cdot\|$ est la norme euclidienne, nous avons appliqué l'inégalité de Young (avec le facteur k_1) pour avoir la deuxième borne. Soit :

$$\dot{r} = -\frac{k_1}{4}(r-1) + \frac{r}{k_1}(\|\Delta_y L\|^2 + \|\Delta_x L\|^2), \quad r(0) \geq 1 \quad (3.73)$$

Notant que l'ensemble $\{r \in \mathbb{R} \mid r \geq 1\}$ est invariant pour la dynamique (3.73). Remplaçant (3.73) dans (3.72) donne :

$$\dot{V}_1(\eta) \leq -\left(\frac{k_1}{2} - \frac{k_1}{4} \frac{r-1}{r}\right) |\eta|^2 \leq \dot{V}_1(\eta) \leq -\frac{k_1}{4} |\eta|^2 \quad (3.74)$$

Où la propriété $\frac{r-1}{r} \leq 1$ a été utilisée pour obtenir la deuxième borne. De (3.74) nous concluons que $\eta(t)$ converge vers zéro exponentiellement.

Etape 4 (Injection de grand gain)

D'après (3.69) et l'analyse précédente, il est clair que $z(t) \rightarrow 0$ si nous pouvons prouver que $r \in \mathcal{L}_\infty$ qui est la propriété établie dans cette étape. La procédure est divisée en deux parties.

Premièrement, nous supposons la fonction :

$$V_2(\eta, e_y, e_x) = V_1(\eta) + \frac{1}{2}(|e_y|^2 + |e_x|^2) \quad (3.75)$$

Une fonction de Lyapunov stricte. Puis, le dérivé de la fonction :

$$V_3(\eta, e_y, e_x, r) = V_2(\eta, e_y, e_x) + \frac{1}{2}r^2 \quad (3.76)$$

Doit être non positive assurer que le facteur r est borné. Dans les deux étapes les objectifs sont atteints en ajoutant via une sélection convenable de la dynamique d'observateur, des termes quadratiques négatifs en $\eta \cdot e_y \cdot e_x$ dans le dérivé de la fonction de Lyapunov.

Nous rappelons que e_y et e_x sont des quantités mesurables, défini dans (3.66). Soit :

$$\dot{\hat{y}} = L(y)(\xi + \beta) - \psi_1(y, r)e_y \quad (3.77)$$

avec $\psi_1: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ est une fonction gain à définir. Les dynamiques d'erreur obtenu en combinant (3.52) est (3.77), sont :

$$\dot{e}_y = Lz - \psi_1 e_y \quad (3.78)$$

Maintenant, on choisit :

$$\dot{\hat{x}} = F + S(y, \xi + \beta)(\xi + \beta) - \psi_2(y, r)e_x \quad (3.79)$$

avec $\psi_2: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ est une fonction gain à définir. D'après (3.58) Les dynamiques d'erreur pour e_x devient :

$$\dot{e}_x = \nabla_y \beta Lz - \psi_2 e_x \quad (3.80)$$

En utilisant (3.74), (3.78) et (3.80), rend :

$$\dot{V}_2 \leq - \left(\frac{k_1}{4} - 1 \right) |\eta|^2 - \left(\psi_1 - \frac{r^2}{2} \|L\|^2 \right) |e_y|^2 - \left(\psi_2 - \frac{r^2}{2} \|\nabla_y \beta\|^2 \|L\|^2 \right) |e_x|^2 \quad (3.81)$$

Choisissant :

$$\psi_1 = k_2 + \psi_3 + \frac{r^2}{2} \|L\|^2 \quad (3.82)$$

$$\psi_2 = k_3 + \psi_4 + \frac{r^2}{2} \|\nabla_y \beta\|^2 \|L\|^2 \quad (3.83)$$

avec $k_2 > 0, k_3 > 0$ et $\psi_3, \psi_4: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ à définir.

Nous concluons que :

$$\dot{V}_2 \leq - \left(\frac{k_1}{4} - 2 \right) |\eta|^2 - k_2 |e_y|^2 - k_3 |e_x|^2 \quad (3.84)$$

choisissant $k_1 > 2$, établit que $\eta, e_y, e_x \in \mathcal{L}_2 \cap \mathcal{L}_\infty$ et l'origine de le sous-système (non autonome) d'état η, e_y, e_x est globalement uniformément exponentiellement stable.

la sélection de ψ_3 et ψ_4 est fait pour garantir que $r \in \mathcal{L}_\infty$. L'équation (3.67) assure l'existence des applications $\overline{\Delta}_y: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n-k} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{(n-k) \times n}$ et $\overline{\Delta}_x: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n-k} \times \mathbb{R}^{n-k} \rightarrow \mathbb{R}^{(n-k) \times n}$ tel que :

$$\|\Delta_y(y, \hat{x}, e_y)\| \leq \|\overline{\Delta}_y(y, \hat{x}, e_y)\| |e_y| \quad (3.85)$$

$$\|\Delta_x(y, \hat{x}, e_x)\| \leq \|\overline{\Delta}_x(y, \hat{x}, e_x)\| |e_x| \quad (3.86)$$

Calculant le dérive de V_3 , remplaçant (3.82) et (3.83) dans (3.81), et utilisant les bornes (3.85) et (3.86) pour avoir :

$$\begin{aligned} \dot{V}_3 \leq & - \left(\frac{k_1}{4} - 1 \right) |\eta|^2 - \left(\psi_3 - \frac{r^2}{k_1} \|\overline{\Delta}_y\|^2 \|L\|^2 \right) |e_y|^2 \\ & - \left(\psi_4 - \frac{r^2}{k_1} \|\overline{\Delta}_x\|^2 \|L\|^2 \right) |e_x|^2 \end{aligned} \quad (3.87)$$

Posant $k_1 > 4$, $\psi_3 = \frac{r^2}{k_1} \|\overline{\Delta}_y\|^2 \|L\|^2$, $\psi_4 = \frac{r^2}{k_1} \|\overline{\Delta}_x\|^2 \|L\|^2$ assure que $\dot{V}_3 \leq 0$, qui garantit que $r \in \mathcal{L}_\infty$.

Notant que (3.71) et (3.74) implique :

$$|\eta(t)| \leq |\eta(0)| e^{-\frac{k_1}{8}t} \quad (3.88)$$

donc

$$|z(t)| \leq \frac{r(t)}{r(0)} |z(0)| e^{-\frac{k_1}{8}t} \leq \sup_{t \geq 0} \{r(t)\} |z(0)| e^{-\frac{k_1}{8}t} \quad (3.89)$$

Alors, les équations (3.79), (3.77), (3.73) et (3.58) forment un observateur de vitesse globalement exponentiellement convergent pour le système mécanique (3.38), (3.39), avec l'estimation asymptotique de \dot{q} est :

$$\dot{\hat{q}} = \begin{bmatrix} \mathcal{N}(q) \\ Z^T(q) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \eta \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.90)$$

et

$$\mathcal{N}(y) := \tilde{S}^T(y)M^{-1}(y) \quad (3.91)$$

Cet observateur présente une solution au problème de l'observation de vitesse sans suppositions sur les bornes des états du système, en exigeant seulement que le système soit « forward complete » c.-à-d., les trajectoires existent pour toujours. Malgré ces propriétés de convergence il a trois inconvénients majeurs à la conception. Tout d'abord, l'observateur résultant a une dimension assez élevée, $3n - 2k + 1$. Deuxièmement, il nécessite la solution de certaines intégrales (3.60), qui ne peuvent pas être dérivées explicitement a priori, et peuvent même être calculées numériquement (la solution approximative dans l'étape 2). Troisièmement, toutes les dérivées partielles de ces intégrales sont requises dans l'implantation, ce qui ajoute à la complexité déjà élevée de l'observateur. Alors que les solutions à ces intégrales et les dérivées partielles peuvent être calculées numériquement en temps réel, cela augmente considérablement la charge de calcul de l'observateur.

3.7 Conclusion

La première partie de chapitre a été consacrée à présenter en détail la méthode d'immersion et d'invariance (I&I) qui sera par la suite utilisé pour la

conception d'observateur à convergence exponentielle. Après une définition, nous avons montrés les différentes applications de cette méthode (stabilisation, commande adaptative, conception d'observateur). La deuxième partie a été dédiée au développement d'un observateur global à convergence exponentielle existe déjà sur la littérature. Dans la fin de cette partie nous avons présenté les différentes limitations et inconvénients de ces observateurs.

Dans le chapitre suivant, nous allons développer un observateur global à convergence exponentielle qui donne une solution aux ces limitations de l'observateur Astolfi et al. Dans [43].

Chapitre 4

Observateur de vitesse adaptatif de type I&I pour les systèmes mécaniques non holonome

4.1 Introduction

Le problème d'observation de vitesse pour les systèmes mécaniques avec seulement les mesures de position a attiré une attention particulière de plusieurs chercheurs tout au long des dernières années (voir [43, 44]). Plusieurs méthodes ont été développées pour la synthèse des observateurs à partir des techniques de passivité, de grand gain, de mode glissant, et de symétrie [37, 45-47]. L'approche d'immersion et d'invariance [43, 48] a été combiné avec la technique de mise à l'échelle dynamique « dynamic scaling » dans [51] pour concevoir le premier observateur global à convergence exponentielle pour les systèmes mécaniques à n degré de liberté (sans contrainte). Cet observateur a été plus tard généralisé à des systèmes mécaniques avec des contraintes non-holonomes dans [55]. Il présente une solution au problème de l'observation de vitesse sans suppositions sur les bornes des états du système, en exigeant seulement que le système soit « forward complete » c.-à-d., les trajectoires existent pour toujours. Il y a trois inconvénients majeurs à la conception de [55]. Tout d'abord,

l'observateur résultant a une dimension assez élevée, $3n - 2k + 1$; où n est la dimension de la vitesse non mesurée, et k est le nombre de contraintes. Deuxièmement, il nécessite la solution de certaines intégrales qui ne peuvent pas être dérivées explicitement a priori, et peuvent même être calculées numériquement. Troisièmement, toutes les dérivées partielles de ces intégrales sont requises dans l'implantation, ce qui ajoute à la complexité déjà élevée de l'observateur. Alors que les solutions à ces intégrales et les dérivées partielles peuvent être calculées numériquement en temps réel, cela augmente considérablement la charge de calcul de l'observateur.

Le premier inconvénient a été résolu dans [56]. l'observateur est d'ordre $2n - k + 2$, un tiers des états d'observateur utilisés dans [55] a été éliminés. Ces deux observateurs s'appuient sur les hypothèses d'absence de frottement et des perturbations. L'observateur dans [55] a été modifié pour tenir compte de la présence de frottements de Coulomb connus dans [147], et il a été utilisé pour concevoir un contrôleur de poursuite uniformément exponentiellement global utilisant uniquement le retour de position pour les systèmes mécaniques (sans contraintes non holonomes).

Récemment, un observateur adaptatif assurant une convergence globale en présence de perturbations et de coefficients de frottements inconnus a été présenté dans [57]. Cet observateur présente deux inconvénients, il est limité à des systèmes mécaniques sans contraintes avec des symboles de Riemann (ZRS) [59, 120, 123] (voir la section 3.5) et il nécessite aussi la solution explicite de certaines équations aux dérivées partielles (EDP) qui ne peuvent pas être dérivées a priori et peuvent même être impossibles à résoudre. Cette exigence restreint l'applicabilité pratique de cet observateur.

Un observateur de vitesse adaptatif est proposé dans ce chapitre. Premièrement, il surmonte la limitation des observateurs [55, 56] en construisant un observateur pour les systèmes mécaniques en présence de force de frottement et de perturbations inconnues. Deuxièmement, comparant à [57], le modèle mécanique considéré dans l'observateur proposé est plus général qui contient les systèmes à k contraintes non-holonomes et non restreint aux systèmes avec des symboles de Riemann (ZRS). En outre, la conception remède le deuxième inconvénient et évite la résolution des EDP. L'observateur est totalement constructif et donné par des expressions explicites. Au meilleur de nos connaissances, le résultat présenté ici est le premier observateur adaptatif constructif qui rejette les perturbations et estime certains coefficients de frottement inconnus dans des systèmes mécaniques non holonomes et garantit une convergence globale.

4.2 Formulation dynamique du système

Nous considérons les systèmes qui peuvent être transformés sous la forme :

$$\dot{y} = L(y)x \quad (4.1)$$

$$\dot{x} = \mathbf{S}(y, x)x + F(y, x, u) - \mathbf{R}(y)x + T(y)d \quad (4.2)$$

où $y \in \mathbb{R}^n$ est mesuré, $x \in \mathbb{R}^{n-k}$ est non mesuré. Avec $n > k$, et $u \in \mathbb{R}^m$ est tel que y, x existe pour tous les temps (le système est «forward complete»). Nous exigeons les éléments de $\mathbf{S}(y, x) \in \mathbb{R}^{(n-k) \times (n-k)}$ et $L(y) \in \mathbb{R}^{n \times (n-k)}$ soient continuellement différentiable et L est inversible à gauche. \mathbf{R} est la matrice de frottement comme dans (2.133). De plus, Les applications $\mathbf{S}(y, x)$ et $F(y, x, u)$ doivent satisfaire les propriétés suivantes :

(P1). $\mathbf{S}(y, x)$ est asymétrique c'est-à-dire $\mathbf{S}(y, x) = -\mathbf{S}^T(y, x)$

(P2). $\mathbf{S}(\mathbf{y}, \mathbf{x})$ est linéaire dans le second argument, c'est-à-dire

$$\mathbf{S}(y, \alpha_1 x + \alpha_2 \bar{x}) = \alpha_1 \mathbf{S}(y, x) + \alpha_2 \mathbf{S}(y, \bar{x})$$

pour tout $y, x, \bar{x} \in \mathbb{R}^n$, et $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$.

(P3). Il existe $c_F < \infty$ pour que :

$$[F(y, x, u) - F(y, \bar{x}, u)](x - \bar{x}) \leq c_F \|x - \bar{x}\|^2$$

pour tout $y \in \mathbb{R}^n$, $x, \bar{x} \in \mathbb{R}^{n-k}$ et $u \in \mathbb{R}^m$.

Nous avons prouvés dans le chapitre 2 que les systèmes mécaniques avec k contraintes non holonomes écrient sous une représentation Hamiltonienne à ports (pH) peuvent transformer sous la forme (4.1),(4.2). Pour plus de détails voir section 2.8 et Lemme 2.1.

Remarque 1 :

Le modèle considéré dans ce travail présente une formulation générale du système mécanique sous contraints. La dérivation d'observateur pour le cas des systèmes sans contraints de [57] est obtenue comme un cas particulier en prenant $k = 0$.

Remarque 2 :

Comme on le verra dans la construction de l'observateur ci-dessous, la factorisation de Cholesky de la matrice d'inertie M peut être un choix approprié. Cette propriété donne plus de simplicité dans la conception de l'observateur et évite la recherche d'autre factorisation comme dans [57].

4.3 Conception d'observateur adaptatif

Dans cette section, nous concevons un observateur de vitesse adaptatif constructif à la classe de systèmes mécaniques avec k contraintes non holonomes.

Hypothèse sur le frottement :

Nous considérons la même décomposition des coefficients de frottement imposés dans [57], les coefficients de frottement sont regroupés dans un vecteur $r = \text{col}(r_i) \in \mathbb{R}^n$ avec les vecteurs de coefficients inconnus et connus dans $r_u \in \mathbb{R}^s$ et $r_k \in \mathbb{R}^{n-s}$ respectivement, avec $s < n$ est le nombre de coefficients inconnus. Nous définissons également un ensemble d'entiers $\kappa \subset \bar{n}$ contenant les indices des coefficients inconnus de vecteur de frottement r .

Nous définissons également une matrice $C \in \mathbb{R}^n$ telle que :

$$C^T r = r_u \quad (4.3)$$

La matrice C vérifie que $\text{rang}\{C\} = s$ et pour $j \in \kappa$ $(C)_j = e_{kj}$.

Hypothèse 4.1 [57]:

La i -ième ligne du facteur $T(q)$ est indépendante de q pour $i \in \kappa$.

Lemme 4.1 : Comme conséquence de l'hypothèse 1, il existe des matrices constantes $Y_j \in \mathbb{R}^{n \times s}$, $j \in \bar{n}$ telles que, pour tous les vecteurs $z = \text{col}(z_i) \in \mathbb{R}^n$ nous avons :

$$R_u(y)z = \sum_{j=1}^n (Y_j z_j) r_u \quad (4.4)$$

$$Y_j = \sum_{i=1}^n L_i e_j e_i^T C, \quad j \in \bar{n} \quad (4.5)$$

avec des matrices constantes $L_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$ définies comme suit :

$$L_i := T^T(y) e_i e_i^T T(y), \quad i \in \bar{n} \quad (4.6)$$

La preuve de la Lemme 4.1 est détaillée dans l'annexe B.3.

Nous définissons les estimations de y, x, d et r_u comme $\hat{y} \in \mathbb{R}^n, \hat{x} \in \mathbb{R}^{n-k}, \hat{d} \in \mathbb{R}^{n-k}$ et $\hat{r}_u \in \mathbb{R}^s$ respectivement, et leurs erreurs d'estimation correspondantes comme $\tilde{y} = y - \hat{y}, \tilde{x} = x - \hat{x}, \tilde{d} = d - \hat{d}$ et $\tilde{r}_u = r_u - \hat{r}_u$.

on définit aussi $\sigma = \|\hat{x}\|^2, \delta = \|\hat{d}\|^2$ et $\chi = \|\hat{r}_u\|^2$ et soit $\hat{\sigma}, \hat{\delta}$ et $\hat{\chi}$ leurs estimations, avec $\tilde{\sigma} = \sigma - \hat{\sigma}, \tilde{\delta} = \delta - \hat{\delta}$ et $\tilde{\chi} = \chi - \hat{\chi}$ leurs erreurs d'estimation correspondantes respectivement.

Proposition 1

Considérons le système (4.1), (4.2) où la matrice de frottement \mathbf{R} vérifie l'hypothèse 1 et suppose que u est complet en avant « forward complete ». Il existe des applications lisses $A: \mathbb{R}^{2n-k+4} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^{2n-k+4}, B: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{(n-k) \times (2n-k+4)}$ et une matrice complète $N: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{(n-k) \times n}$ telle que l'interconnexion de (4.1), (4.2) avec :

$$\dot{\chi} = A(\hat{x}, \hat{y}, \hat{\sigma}, \hat{\delta}, \hat{\chi}, r, u) \tag{4.7}$$

$$\eta = B(y)\chi \tag{4.8}$$

s'assure que :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{\alpha t} [N(q)\dot{q}(t) - \eta(t)] = 0 \tag{4.9}$$

Pour certains $\alpha > 0$ et pour toutes les conditions initiales $(q(0), \dot{q}(0), \chi(0)) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{2n-k+4}$.

Ceci implique que l'observateur (4.7)-(4.8) est un observateur globalement exponentiellement convergent pour le système mécanique (4.1),(4.2) en présence des perturbations d'entrée et des forces de frottement inconnues.

Preuve :

Pour concevoir l'observateur, considérons d'abord les estimations comme suit :

$$\hat{x} = \xi + K_x(\hat{\sigma}, \hat{y})y \quad (4.10)$$

$$\dot{\hat{y}} = L(y)\hat{x} + K_y(y, \hat{y}, \hat{\sigma}, r)\tilde{y} \quad (4.11)$$

$$\hat{d} = \theta + K_d(\hat{\delta}, \hat{y})y \quad (4.12)$$

$$\hat{r}_u = \varphi + K_{r_u}(\hat{\chi}, \hat{y})y \quad (4.13)$$

Soit $c_S(y): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^+$ une fonction continuellement différentiable satisfaisant :

$$c_S(y) \geq \sup_{\|x\|=1} \|\mathbf{S}(y, x)\| \quad (4.14)$$

a. La dynamique de \tilde{x} :

Nous étudions d'abord le comportement dynamique de x . De (4.10) et (4.1) on obtient :

$$\dot{\hat{x}} = \dot{\xi} + \frac{\partial K_x}{\partial \hat{y}} \dot{\hat{y}}y + \frac{\partial K_x}{\partial \hat{\sigma}} \dot{\hat{\sigma}}y + K_x L(y)x \quad (4.15)$$

si nous choisissons $\dot{\xi}$ comme :

$$\begin{aligned} \dot{\xi} = & \mathbf{S}(y, \hat{x})\hat{x} + F(y, \hat{x}, u) - K_x L(y)\hat{x} - \frac{\partial K_x}{\partial \hat{y}} \dot{\hat{y}}y - \frac{\partial K_x}{\partial \hat{\sigma}} \dot{\hat{\sigma}}y \\ & - \sum_{i=1}^n (Y_i \tilde{x}_i) \tilde{r}_u - R(y)\hat{x} + T(q)\tilde{d} \end{aligned} \quad (4.16)$$

L'équation (4.15) devient :

$$\dot{\hat{x}} = \mathbf{S}(y, \hat{x})\hat{x} + F(y, \hat{x}, u) + K_x L(y)\tilde{x} - \sum_{i=1}^n (Y_i \tilde{x}_i) \tilde{r}_u - R(y)\hat{x} + T(q)\tilde{d} \quad (4.17)$$

En utilisant la définition de σ et (4.17), la dérivée temporelle σ est écrit comme suite :

$$\dot{\sigma} = 2\hat{x}^T \left[F(y, \hat{x}, u) + K_x L(y)\tilde{x} - \sum_{i=1}^n (Y_i \tilde{x}_i)\tilde{r}_u - R(y)\hat{x} + T(q)\tilde{d} \right] \quad (4.18)$$

La dynamique de l'estimation d'erreur $\tilde{\sigma}$ est :

$$\dot{\tilde{\sigma}} = 2[\hat{x}^T K_x L(y)\tilde{x} - k_\sigma \tilde{\sigma}] + 2\Delta_1 \quad (4.19)$$

où nous choisissons $\hat{\sigma}$ comme :

$$\dot{\hat{\sigma}} = Proj_{\hat{\sigma}} \left(2 \left[\hat{x}^T F - \sum_{i=1}^n (Y_i \tilde{x}_i)\tilde{r}_u - R\hat{x} + \hat{x}^T T\tilde{d} + k_\sigma \tilde{\sigma} \right] \right), \hat{\sigma}(t_0) \geq 0 \quad (4.20)$$

et

$$\begin{aligned} \Delta_1 = & \left(\hat{x}^T F(y, \hat{x}, u) - \hat{x}^T \sum_{i=1}^n (Y_i \tilde{x}_i)\tilde{r}_u - \hat{x}^T R(y)\hat{x} + \hat{x}^T T(q)\tilde{d} + k_\sigma \tilde{\sigma} \right) \\ & - Proj_{\hat{\sigma}} \left(\left[\hat{x}^T F(y, \hat{x}, u) - \hat{x}^T \sum_{i=1}^n (Y_i \tilde{x}_i)\tilde{r}_u - \hat{x}^T R(y)\hat{x} + \hat{x}^T T(q)\tilde{d} \right. \right. \\ & \left. \left. + k_\sigma \tilde{\sigma} \right] \right) \end{aligned} \quad (4.21)$$

où l'opérateur de projection est défini comme dans [131] (voir Appendix A).

Soit $V_\sigma(\tilde{\sigma}) = \frac{1}{4}\|\tilde{\sigma}\|^2$, puis :

$$\dot{V}_\sigma(\tilde{\sigma}) = \tilde{\sigma}[\hat{x}^T K_x L(y)\tilde{x} - k_\sigma \tilde{\sigma}] + \Delta_1 \tilde{\sigma} \quad (4.22)$$

L'opérateur de projection ayant la propriété suivante (voir Appendix A) :

$$[\tau - Proj_{\hat{\sigma}}(\tau)]\tilde{\sigma} \leq 0, \quad \forall \sigma \geq 0, \hat{\sigma} \geq -\varepsilon. \quad (4.23)$$

en utilisant la propriété de projection ci-dessus, nous pouvons conclure que $\Delta_1 \tilde{\sigma} \leq 0$, alors :

$$\dot{V}_\sigma(\tilde{\sigma}) \leq \hat{x}^T K_x L(y) \tilde{x} \tilde{\sigma} - k_\sigma \tilde{\sigma}^2 \quad (4.24)$$

avec k_σ est une fonction positive.

Maintenant, par (4.2) et (4.17), la dérivée temporelle de \tilde{x} est donnée comme :

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}} = & \mathbf{S}(y, x)x - \mathbf{S}(y, \hat{x})\hat{x} + F(y, x, u) - F(y, \hat{x}, u) - K_x L(y)\tilde{x} - R_u(y)\tilde{x} \\ & + \sum_{i=1}^n (Y_i \tilde{x}_i) \tilde{r}_u + T(q)\hat{d} \end{aligned}$$

La soustraction des deux premiers termes peut s'écrire comme :

$$\mathbf{S}(y, x)x - \mathbf{S}(y, \hat{x})\hat{x} = \mathbf{S}(y, x)\tilde{x} + \mathbf{S}(y, \tilde{x})\hat{x} \quad (4.25)$$

nous avons de (4.19) que $R_u(y)\tilde{x} = \sum_{i=1}^n (Y_i \tilde{x}_i) r_u$.

Enfin, la dynamique de \tilde{x} est :

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}} = & \mathbf{S}(y, x)\tilde{x} + \mathbf{S}(y, \tilde{x})\hat{x} + F(y, x, u) - F(y, \hat{x}, u) - K_x L(y)\tilde{x} \\ & - \sum_{i=1}^n (Y_i \tilde{x}_i) \hat{r}_u - R_k(y)\tilde{x} + T(q)\hat{d} \end{aligned} \quad (4.26)$$

Le premier terme disparaîtra en raison de l'asymétrie de $\mathbf{S}(y, x)$, tandis que $F(y, x, u) - F(y, \hat{x}, u)$ est un terme borné utilisant la condition de secteur (P3). Les termes de la force de frottement et les perturbations seront éliminés à la fonction de Lyapunov. $\mathbf{S}(y, \tilde{x})\hat{x}$ est le terme qui devrait être borné.

En utilisant la définition de σ et (4.14), nous obtenons :

$$\|\mathbf{S}(y, \tilde{x})\hat{x}\| \leq c_S(y)\|\tilde{x}\|\|\hat{x}\| \leq c_S(y)\|\tilde{x}\|\sqrt{1+\sigma} \quad (4.27)$$

Bien que :

$$c_S(y) - c_S(\hat{y}) \leq \|c_S(y) - c_S(\hat{y})\| \text{ et } \sqrt{1+\sigma} - \sqrt{1+\hat{\sigma}} \leq \|\sqrt{1+\sigma} - \sqrt{1+\hat{\sigma}}\|$$

Alors

$$\begin{aligned} \|\mathbf{S}(y, \tilde{x})\hat{x}\| &\leq c_S(\hat{y})\|\tilde{x}\|\sqrt{1+\hat{\sigma}} + \|c_S(y) - c_S(\hat{y})\|\|\tilde{x}\|\sqrt{1+\hat{\sigma}} \\ &\quad + \Delta_\sigma(y, \sigma, \hat{\sigma})\|\tilde{x}\| \end{aligned} \quad (4.28)$$

Avec

$$\Delta_\sigma(y, \sigma, \hat{\sigma}) = c_S(y)\|\sqrt{\sigma+1} - \sqrt{1+\hat{\sigma}}\| \quad (4.29)$$

On note que $\sigma + 1 > 0$ et $\hat{\sigma} + 1 > 0$ en raison de l'opérateur de projection. Le premier terme de (4.26) peut être dominé par K_x , mais les deux derniers termes à besoin de l'utilisation de la technique de mise à l'échelle dynamique.

Considérons la variable d'erreur mise à l'échelle :

$$\eta = \frac{1}{\tau} \tilde{x} \quad (4.30)$$

où $\mathbf{r}(t) \geq c_r$ est un facteur d'échelle à définir. Le comportement dynamique de η est donné par :

$$\begin{aligned} \dot{\eta} &= \mathbf{S}(y, x)\eta + \mathbf{S}(y, \eta)\hat{x} + \frac{1}{\tau} [F(y, x, u) - F(y, \hat{x}, u)] - K_x L(y)\eta \\ &\quad - \frac{\dot{\tau}}{\tau} \eta + \frac{1}{\tau} T(q)\hat{d} - \frac{1}{\tau} \sum_{i=1}^n (Y_i \tilde{x}_i) \hat{r}_u - R_k(y)\eta \end{aligned} \quad (4.31)$$

Soit $V_\eta(\eta) = \frac{1}{2} \|\eta\|^2$, en utilisant (4.31), on obtient :

$$\begin{aligned}
 \dot{V}_\eta(\eta) = & \eta^T \left(\mathbf{S}(y, x)\eta - R_k(y)\eta + \mathbf{S}(y, \eta)\hat{x} \right. \\
 & + \frac{1}{\tau} [F(y, x, u) - F(y, \hat{x}, u)] - K_x L(y)\eta - \frac{\dot{\tau}}{\tau}\eta + \frac{1}{\tau} T(q)\hat{d} \\
 & \left. - \frac{1}{\tau} \sum_{i=1}^n (Y_i \tilde{x}_i) \hat{r}_u \right) \quad (4.32)
 \end{aligned}$$

Basé sur (P2) et (P3) et en utilisant quelques limites de base, \dot{V}_η devient :

$$\begin{aligned}
 \dot{V}_\eta(\eta) \leq & \|S(y, \eta)\hat{x}\|\|\eta\| - \|R_k(y)\|\|\eta\|^2 + c_F\|\eta\|^2 - K_x L(\hat{y})\eta^T \eta \\
 & - \frac{\dot{\tau}}{\tau}\|\eta\|^2 - \|K_x(L(y) - L(\hat{y}))\|\|\eta\|^2 + \frac{1}{\tau} T(q)\hat{d}\eta \\
 & - \frac{1}{\tau} \sum_{i=1}^n (Y_i \tilde{x}_i) \hat{r}_u \eta \quad (4.33)
 \end{aligned}$$

Nous pouvons écrire :

$$\eta^T R_k(y)\eta \leq \|R_k(y)\|\|\eta\|^2 \leq c_{r_k} \|T(y)\|^2 \|\eta\|^2 \quad (4.34)$$

avec $c_{r_k} = \max(r_k)$.

En utilisant (4.28) nous avons :

$$\begin{aligned}
 \dot{V}_\eta \leq & c_S(\hat{y})\sqrt{1 + \hat{\sigma}}\|\eta\|^2 + c_F\|\eta\|^2 - K_x L(\hat{y})\eta^T \eta + (\Delta_y + \Delta_\sigma - \frac{\dot{\tau}}{\tau})\|\eta\|^2 \\
 & + \frac{1}{\tau} T(q)\hat{d}\eta - \frac{1}{\tau} \sum_{i=1}^n (Y_i \tilde{x}_i) \hat{r}_u \eta
 \end{aligned}$$

où on choisit Δ_y comme:

$$\Delta_y(y, \sigma, \hat{\sigma}) = \|c_S(y) - c_S(\hat{y})\|\sqrt{1 + \hat{\sigma}} + \|K_x(L(y) - L(\hat{y}))\| + c_{r_k} \|T(y)\|^2 \quad (4.35)$$

Maintenant, en utilisant les faits que $\Delta_y \leq \varepsilon_y + \overline{\Delta}_y \|\tilde{y}\|$ et $\Delta_\sigma \leq \varepsilon_\sigma + \overline{\Delta}_\sigma \|\tilde{\sigma}\|$, \dot{V}_η devient :

$$\begin{aligned} \dot{V}_\eta &\leq (c_S(\hat{y})\sqrt{1+\hat{\sigma}} + \varepsilon_y + \varepsilon_\sigma + c_F)\|\eta\|^2 - K_x L(\hat{y})\eta^T \eta + \frac{1}{\tau} T(q)\hat{d}\eta \\ &\quad - \frac{1}{\tau} \sum_{i=1}^n (Y_i \tilde{x}_i) \hat{r}_u \eta \end{aligned}$$

Où nous choisissons,

$$\dot{\tau} = -\frac{\bar{k}_x}{2}(\tau - c_\tau) + r(\bar{\Delta}_y \|\tilde{y}\| + \bar{\Delta}_\sigma \|\tilde{\sigma}\|) \quad (4.36)$$

avec $\frac{\tau - c_\tau}{\tau} \leq 1$, et K_x comme :

$$K_x(\hat{\sigma}, \hat{y}) = [\bar{k}_x + c_S(\hat{y})\sqrt{1+\hat{\sigma}} + \varepsilon_y + \varepsilon_\sigma + c_F] L^+(\hat{y}) \quad (4.37)$$

Finalement, nous obtenons :

$$\dot{V}_\eta \leq -\frac{\bar{k}_x}{2}\|\eta\|^2 + \frac{1}{\tau} T(q)\hat{d}\eta - \frac{1}{\tau} \sum_{i=1}^n (Y_i \tilde{x}_i) \hat{r}_u \eta \quad (4.38)$$

b. La dynamique de \tilde{y} :

Comme deuxième étape, nous calculons la dynamique de \tilde{y} qui s'écrit de (4.1) et (4.11) comme suit :

$$\dot{\tilde{y}} = L(y)\tilde{x} - K_y(y, \hat{y}, \hat{\sigma}, \mathbf{r})\tilde{y} \quad (4.39)$$

Soit $V_y(\tilde{y}) = \frac{1}{2}\|\tilde{y}\|^2$, par la définition de \tilde{y} et en utilisant (4.39) la dérivée temporelle de V_y est :

$$\dot{V}_y(\tilde{y}) = \tilde{y}^T K_y(y, \hat{y}, \hat{\sigma}, \mathbf{r})\tilde{y} + \tilde{y}^T L(y)\tilde{x} \quad (4.40)$$

c. La dynamique de $\tilde{\delta}$:

Maintenant, en utilisant (4.12) la dérivée temporelle de \hat{d} est donnée comme suit :

$$\dot{\hat{d}} = \dot{\theta} + \frac{\partial K_d}{\partial \hat{y}} \dot{\hat{y}} y + \frac{\partial K_d}{\partial \hat{\delta}} \dot{\hat{\delta}} y + K_d(\hat{\delta}, \hat{y}) L(y) x \quad (4.41)$$

en choisissant $\dot{\theta}$ par :

$$\dot{\theta} = -\frac{\partial K_d}{\partial \hat{y}} \dot{\hat{y}} y - \frac{\partial K_d}{\partial \hat{\delta}} \dot{\hat{\delta}} y - K_d(\hat{\delta}, \hat{y}) L(y) \hat{x} \quad (4.42)$$

\hat{d} devient :

$$\dot{\hat{d}} = K_d(\hat{\delta}, \hat{y}) L(y) \tilde{x} \quad (4.43)$$

En utilisant la définition de δ et (4.43), la dérivée temporelle de δ est :

$$\dot{\delta} = 2\hat{d}^T [K_d(\hat{\delta}, \hat{y}) L(y) \tilde{x}] \quad (4.44)$$

La dynamique de l'estimation d'erreur $\tilde{\delta}$ est :

$$\dot{\tilde{\delta}} = 2\hat{d}^T K_d(\hat{\delta}, \hat{y}) L(y) \tilde{x} - \dot{\hat{\delta}} \quad (4.45)$$

Par conséquent, nous choisissons $\dot{\hat{\delta}}$ comme :

$$\dot{\hat{\delta}} = Proj_{\hat{\delta}}([2\hat{d}^T K_d(\hat{\delta}, \hat{y}) L(y) \tilde{x} + 2k_\delta \tilde{\delta}]), \quad \hat{\delta}(t_0) \geq 0 \quad (4.46)$$

Rendre $\dot{\tilde{\delta}}$:

$$\dot{\tilde{\delta}} = 2[(\hat{d}^T K_d(\hat{\delta}, \hat{y}) L(y) \tilde{x} + k_\delta \tilde{\delta}) - Proj_{\hat{\delta}}(\hat{d}^T K_d(\hat{\delta}, \hat{y}) L(y) \tilde{x} + k_\delta \tilde{\delta})] - 2k_\delta \tilde{\delta} \quad (4.47)$$

Soit $V_\delta(\tilde{\delta}) = \frac{1}{4} \|\tilde{\delta}\|^2$, et notant que $\Delta_\delta \tilde{\delta} \leq 0$, nous obtenons :

$$\dot{V}_\delta(\tilde{\delta}) \leq \hat{d}^T K_d(\hat{\delta}, \hat{y}) L(y) \tilde{x} - k_\delta \tilde{\delta}^2 \quad (4.48)$$

avec $k_\delta > 0$.

d. La dynamique de $\tilde{\chi}$:

Finalement, nous calculons la dérivée temporelle de r_u en utilisant (4.13)

et (4.1) :

$$\dot{\hat{r}}_u = \dot{\varphi} + \frac{\partial K_{r_u}}{\partial \hat{y}} \dot{\hat{y}}y + \frac{\partial K_{r_u}}{\partial \hat{\chi}} \dot{\hat{\chi}}y + K_{r_u}(\hat{\chi}, \hat{y})L(y)x \quad (4.49)$$

on choisit $\dot{\varphi}$ comme:

$$\dot{\varphi} = -\frac{\partial K_{r_u}}{\partial \hat{y}} \dot{\hat{y}}y - \frac{\partial K_{r_u}}{\partial \hat{\chi}} \dot{\hat{\chi}}y - K_{r_u}(\hat{\chi}, \hat{y})L(y)\hat{x} \quad (4.50)$$

Alors :

$$\dot{\hat{r}}_u = K_{r_u}(\hat{\chi}, \hat{y})L(y)\tilde{x} \quad (4.51)$$

En utilisant la définition de χ et (4.51), la dérivée temporelle $\dot{\chi}$ est :

$$\dot{\hat{\chi}} = 2\hat{r}_u^T [K_{r_u}(\hat{\chi}, \hat{y})L(y)\tilde{x}] \quad (4.52)$$

On a :

$$\dot{\tilde{\chi}} = 2\hat{r}_u^T K_{r_u}(\hat{\chi}, \hat{y})L(y)\tilde{x} - \dot{\hat{\chi}} \quad (4.53)$$

En choisissant $\dot{\tilde{\chi}}$ comme :

$$\dot{\tilde{\chi}} = Proj_{\hat{\chi}}([2\hat{r}_u^T K_{r_u}(\hat{\chi}, \hat{y})L(y)\tilde{x} + 2k_\chi \tilde{\chi}], \hat{\delta}(t_0) \geq 0) \quad (4.54)$$

On obtient :

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{\chi}} &= 2[(\hat{r}_u^T K_{r_u}(\hat{\chi}, \hat{y})L(y)\tilde{x} + k_\chi \tilde{\chi}) - Proj_{\hat{\delta}}(\hat{r}_u^T K_{r_u}(\hat{\chi}, \hat{y})L(y)\tilde{x} + k_\chi \tilde{\chi})] \\ &\quad - 2k_\chi \tilde{\chi} \end{aligned} \quad (4.55)$$

Définir $V_\chi(\tilde{\chi}) = \frac{1}{4}\|\tilde{\chi}\|^2$, en utilisant la propriété de projection (4.23), \dot{V}_χ

peut s'écrire comme :

$$\dot{V}_\chi(\tilde{\chi}) \leq \hat{r}_u^T K_{r_u}(\hat{\chi}, \hat{y}) L(y) \tilde{x} - k_\chi \tilde{\chi}^2 \quad (4.56)$$

avec $k_\chi > 0$.

e. Fonction de Lyapunov

Dans cette partie, nous présentons une fonction de Lyapunov pour $\eta, \tilde{\sigma}, \tilde{y}, \tilde{\delta}, \tilde{\chi}$ et $(\tau - c_\tau)$. La fonction de Lyapunov est :

$$V(\eta, \tilde{\sigma}, \tilde{y}, \tilde{\delta}, \tilde{\chi}, (\tau - c_\tau)) = \frac{1}{2} \left(|\eta|^2 + |\tilde{\sigma}|^2 + |\tilde{y}|^2 + |\tilde{\delta}|^2 + |\tilde{\chi}|^2 + (\tau - c_\tau)^2 \right) \quad (4.57)$$

En utilisant (4.24), (4.38), (4.42), (4.48) et (4.56), \dot{V} s'écrit :

$$\begin{aligned} \dot{V} \leq & -\frac{\bar{k}_x}{2} \|\eta\|^2 - \tilde{y}^T K_y(y, \hat{y}, \hat{\sigma}, r) \tilde{y} + \tilde{y}^T L(y) \tau \eta + \hat{x}^T K_x L(y) \tau \eta \tilde{\sigma} - k_\sigma \tilde{\sigma}^2 \\ & - k_\delta \tilde{\delta}^2 - k_\chi \tilde{\chi}^2 + \dot{\tau}(\tau - c_\tau) + \hat{d}^T \left(\frac{1}{\tau} T(q) + K_d(\hat{\delta}, \hat{y}) L(y) \tau \right) \eta \\ & + \hat{r}_u^T \left(K_{r_u}(\hat{\chi}, \hat{y}) L(y) \tau - \frac{1}{\tau} \sum_{i=1}^n (Y_i \tilde{x}_i) \right) \eta \end{aligned} \quad (4.58)$$

Les fonctions $K_{r_u}(\hat{\chi}, \hat{y})$ et $K_d(\hat{\delta}, \hat{y})$ sont choisies pour éliminer les termes croisés apparaissant dans les deux derniers termes de \dot{V} :

$$K_{r_u}(\hat{\chi}, \hat{y}) = \left(\frac{1}{\tau^2} \sum_{i=1}^n (Y_i \tilde{x}_i) \right) L^+(\hat{y}) \quad (4.59)$$

$$K_d(\hat{\delta}, \hat{y}) = - \left(\frac{1}{\tau^2} T(y) \right) L^+(\hat{y}) \quad (4.60)$$

où L^+ désigne l'inverse gauche de L , et défini comme $L^+ = (L^T L)^{-1} L^T$.

En utilisant l'inégalité de Young, \dot{V} s'écrit :

$$\begin{aligned} \dot{V} \leq & -\frac{\bar{k}_x}{2} \|\eta\|^2 - K_y \|\tilde{y}\|^2 + \frac{2}{\bar{k}_x} \tau^2 \|\tilde{y}\|^2 \|L(y)\|^2 + \frac{2}{\bar{k}_x} \tilde{\sigma}^2 \tau^2 \|\hat{x}^T K_x L(y)\|^2 \\ & - k_\sigma \|\tilde{\sigma}\|^2 - k_\delta \tilde{\delta}^2 - k_\chi \tilde{\chi}^2 + \dot{\tau}(\tau - c_\tau) \end{aligned} \quad (4.61)$$

Ensuite, nous définissons K_y et K_σ comme :

$$K_y = \left[\bar{k}_y + \frac{2}{\bar{k}_x} \tau^2 (\|L(y)\|^2 + \bar{\Delta}_y^2) \right] I_{n \times n} \quad (4.62)$$

$$K_\sigma = \left[\bar{k}_\sigma + \frac{2}{\bar{k}_x} \tau^2 (\|\hat{x}^T K_x L(y)\|^2 + \bar{\Delta}_\sigma^2) \right] \quad (4.63)$$

Nous devrions assurer que Δ_y et Δ_σ existe. Pour cela, nous définissons $\bar{\Delta}_y$ et $\bar{\Delta}_\sigma$ comme :

$$\bar{\Delta}_y = \begin{cases} \frac{\Delta_y}{\|\tilde{y}\|} & \Delta_y > \varepsilon_y \\ \frac{\Delta_y}{\|\Delta_y - \varepsilon_y\| + \|\tilde{y}\|} & \text{else} \end{cases} \quad (4.64)$$

$$\bar{\Delta}_\sigma = \begin{cases} \frac{\Delta_\sigma}{\|\tilde{\sigma}\|} & \Delta_\sigma > \varepsilon_\sigma \\ \frac{\Delta_\sigma}{\|\Delta_\sigma - \varepsilon_\sigma\| + \|\tilde{\sigma}\|} & \text{else} \end{cases} \quad (4.65)$$

Nous pouvons maintenant écrire \dot{V} comme :

$$\dot{V} \leq -\frac{\bar{k}_x}{4} \|\eta\|^2 - \bar{k}_y \|\tilde{y}\|^2 - \frac{2}{\bar{k}_x} \tau^2 \bar{\Delta}_y^2 \|\tilde{y}\|^2 - \bar{k}_\sigma \tilde{\sigma}^2 - \frac{2}{\bar{k}_x} \tilde{\sigma}^2 \tau^2 \bar{\Delta}_\sigma^2 - \bar{k}_\delta \tilde{\delta}^2 - \bar{k}_\chi \tilde{\chi}^2$$

En posant :

$$\lambda = \min \left(\frac{\bar{k}_x}{4}, \bar{k}_y, \bar{k}_\sigma, \bar{k}_\delta, \bar{k}_\chi \right) \quad (4.66)$$

Nous obtenons :

$$\dot{V} \leq -\lambda V \quad (4.67)$$

pour une constante positive λ , qui assure que tous les signaux sont bornés et (4.9) vérifiée. Alors l'observateur est globalement asymptotiquement convergent.

La preuve de la proposition 1 est complétée en sélectionnant l'état d'observateur comme $\dot{\chi} = A(\hat{x}, \hat{y}, \hat{\sigma}, \hat{\delta}, \hat{\chi}, \tau, u)$ et en définissant $A(\hat{x}, \hat{y}, \hat{\sigma}, \hat{\delta}, \hat{\chi}, \tau, u)$ à partir de (4.17), (4.11), (4.20), (4.46), (4.54), (4.36) et $B(y)$ via (4.10)-(4.13).

4.4 Exemple de simulation

Nous considérons dans cette section le système non holonome bien connu le traîneau de Chaplygin « Chaplygin Sleigh » (voir la figure 4.1). Il consiste en un corps rigide qui se déplace dans un plan et est soutenu en trois points. L'un d'eux est un couteau et ne peut pas glisser latéralement, une contrainte qui ne permet aucun mouvement perpendiculaire à son bord, et les deux autres peuvent glisser librement. Supposons que le traîneau soit symétrique, ce qui signifie que le centre de gravité est situé sur la ligne déterminée par la lame de couteau, à une distance a du point de tact (x, y) .

Pour analyser le système, utilisez un système de coordonnées Oxy fixé dans le plan et un système de coordonnées $A\xi\eta$ fixé dans le corps, son origine étant située au point d'appui du tranchant de la lame et l'axe $A\xi$ passant par le centre de la masse C du corps rigide.

Le mouvement est décrit par les coordonnées de position $q = [x, y, \theta]$; où x et y désignent les coordonnées cartésiennes du point de contact du tranchant avec le sol et θ indique est l'angle entre les ensembles d'axes fixes et

mobiles (l'orientation). La masse m et le moment d'inertie autour du centre de masse est I_0 . (x_C, y_C) désigne la position du centre de masse.

La contrainte du tranchant est :

$$\dot{y}\cos\theta - \dot{x}\sin\theta = 0$$

Le Lagrangien est donné par :

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2}m(\dot{x}_C^2 + \dot{y}_C^2) + \frac{1}{2}I_0\dot{\theta}^2 \\ &= \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 - 2a\dot{\theta}\dot{x}\sin\theta + \dot{y}^2 + 2a\dot{\theta}\dot{y}\cos\theta + a^2\dot{\theta}^2) + \frac{1}{2}I_0\dot{\theta}^2 \end{aligned}$$

La dynamique du système est régie par (4.1), (4.2), où la matrice d'inertie M et la matrice de contraintes A sont données par [145, 148] :

$$M(q) = \begin{bmatrix} m & 0 & -masin\theta \\ 0 & m & macos\theta \\ -masin\theta & macos\theta & I_0 + ma^2 \end{bmatrix}, \quad A(q) = \begin{bmatrix} -sin\theta \\ cos\theta \\ 0 \end{bmatrix}$$

$U(q) = 0$ en supposant que le corps se déplace sur un plan horizontal, c'est-à-dire que $u = 0$, d'où $F = 0$.

En suivant la procédure de [55], on peut écrire la matrice \tilde{M} et sa factorisation de Cholesky comme suit :

$$\tilde{M} = \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & I_0 + ma^2 \end{bmatrix}, \quad T = \begin{bmatrix} \sqrt{m} & 0 \\ 0 & \sqrt{I_0 + ma^2} \end{bmatrix}$$

En utilisant le changement de coordonnées sur l'espace contraint donne :

$$y = [q_1, q_2, q_3], \quad x = \left[\frac{\tilde{p}_1}{\sqrt{m}}, \frac{\tilde{p}_2}{\sqrt{I_0 + ma^2}} \right]$$

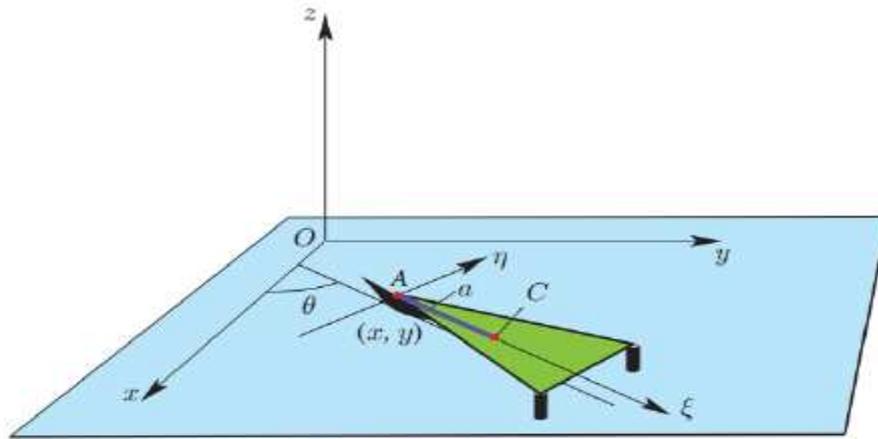


Figure 4.1 Le système traîneau de Chaplygin « Chaplygin Sleigh »

La matrice L et la matrice asymétrique S sont écrit par :

$$L(q) = \begin{bmatrix} \frac{\cos(y_3)}{\sqrt{m}} & 0 \\ \frac{\sin(y_3)}{\sqrt{m}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{I_0 + ma^2}} \end{bmatrix}$$

$$S(y, x) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{a\sqrt{m}}{I_0 + ma^2} x_2 \\ -\frac{a\sqrt{m}}{I_0 + ma^2} x_2 & 0 \end{bmatrix}$$

En suivant les étapes de la section précédente, nous trouvons d'abord c_s qui vérifie (4.13) donc $c_s \geq \left| \frac{a\sqrt{m}}{I_0 + ma^2} \right|$.

Maintenant, pour implanter (4.15) nous devrions calculer K_x , $\frac{\partial K_x}{\partial \hat{y}}$, $\frac{\partial K_x}{\partial \hat{\sigma}}$.

De (4.37) nous avons :

$$K_x = \left[\bar{k}_x + c_S \sqrt{1 + \hat{\sigma}} + \varepsilon_y + \varepsilon_\sigma \right. \\ \left. + c_F \right] \begin{bmatrix} \cos(y_3) \sqrt{m} & \sin(y_3) \sqrt{m} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{I_0 + ma^2} \end{bmatrix}$$

Nous pouvons voir que $\frac{\partial K_x}{\partial \hat{y}_1} = \frac{\partial K_x}{\partial \hat{y}_2} = 0$ et $\frac{\partial K_x}{\partial \hat{\sigma}} = 0$, alors :

$$\frac{\partial K_x}{\partial \hat{y}_3} = \left[\bar{k}_x + c_S \sqrt{1 + \hat{\sigma}} + \varepsilon_y + \varepsilon_\sigma + c_F \right] \begin{bmatrix} -\sin(y_3) \sqrt{m} & \cos(y_3) \sqrt{m} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Nous considérons les coefficients de frottement comme $r = \text{col}(r_1, r_2)$ et le paramètre de frottement r_1 comme inconnu, de (4.19) il est clair que :

$$C = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ensuite, de (4.4) et (4.5) nous obtenons :

$$Y_1 = \begin{bmatrix} m \\ 0 \end{bmatrix}, L_1 = \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Des simulations ont été effectuées pour démontrer les propriétés de l'observateur. La comparaison avec l'observateur présenté dans [2] est également effectuée, le raisonnement derrière cette comparaison est que les deux observateurs reconstituent le signal de vitesse en utilisant les mesures de position pour la même classe de systèmes (systèmes mécaniques sous contraintes non-holonomes) et utilisent la même méthode I&I. La différence est que l'observateur dans [2] ne considère pas les forces de frottement et les perturbations externes. Toutes les conditions initiales, les forces de frottement et les valeurs de perturbations sont données dans le tableau 1 (nous considérons les mêmes conditions initiales des états que dans [2]).

$y(0) = (1.3.1.5)$	$\tau(0) = 3, \hat{\sigma} = \ \hat{x}(0)\ ^2$
$x(0) = (5.10)$	$\bar{k}_x = 2, \bar{k}_y = 1, \bar{k}_\sigma = 1$
$\hat{y}(0) = (2.5.5)$	$k_\delta = 0.5, k_\chi = 2.5$
$\hat{x}(0) = (1.2)$	$\varepsilon_\sigma = \varepsilon_y = 0.01$
$r_2 = 0.2$	$d_1 = 1, d_2 = 0.5$

Tableau 1. Conditions initiales, gains et paramètres de réglage.

La figure 4.2 montre le comportement transitoire des vitesses \dot{q} du système perturbé et leurs estimations \hat{q} . La figure 4.3 montre l'erreur d'estimation de l'observateur proposé, on peut voir que les estimations convergentes vers les valeurs attendues comme prédit par la théorie. L'estimation de la vitesse de l'observateur proposée dans [2] et ses erreurs d'estimation sont présentées aux figures 4.4-5. En comparant avec les figures 4.2-3, nous pouvons voir que la performance transitoire de l'observateur proposé est presque identique à celle de l'observateur dans [2], ce qui confirme que l'observateur proposé peut présenter une bonne performance transitoire malgré la présence des perturbations et des forces de frottement. La figure 6 montre l'erreur d'estimation des perturbations \tilde{d}_i et la force de frottement \tilde{r}_1 , on observe que les paramètres estimés convergent vers leur vraie valeur. Le comportement transitoire de σ et son estimation $\hat{\sigma}$ ainsi que le facteur d'échelle dynamique τ sont donnés dans la figure 7. Comme prévu en théorie, l'estimation $\hat{\sigma}$ converge rapidement vers les valeurs réelles σ aussi, le facteur d'échelle dynamique reste borné. Pour illustrer les performances de l'observateur en présence de bruit de mesure, un bruit blanc d'amplitude 0,01 rad est ajouté au signal de position. La figure 8 montre que l'estimation n'est pas affectée par la présence de bruit aléatoire dans la mesure de sortie. Afin d'illustrer la robustesse de l'observateur adaptatif,

nous modifions les valeurs de perturbations (avec $d_1 = d_2$). Nous pouvons voir sur la figure 9 que l'observateur peut accommoder aux différentes valeurs de perturbations et converger vers les valeurs attendues avec une bonne performance transitoire.

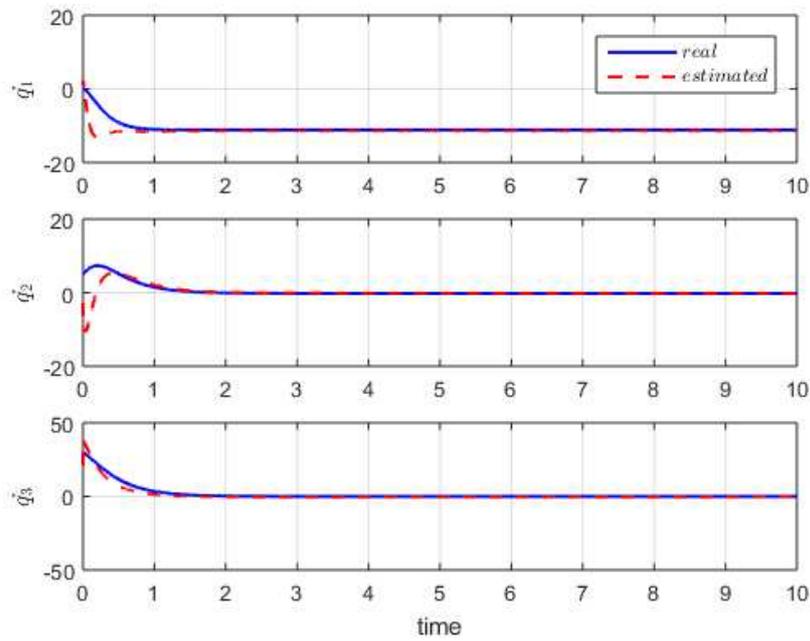


Figure 4.2 Comportement transitoire de la vitesse \dot{q} et son estimation $\hat{\dot{q}}$

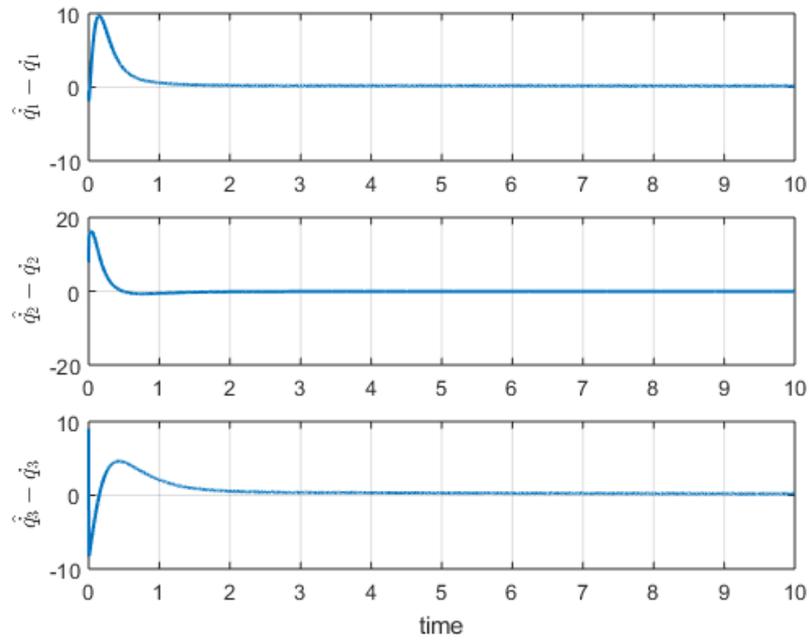


Figure 4.3 Erreur d'estimation de vitesse

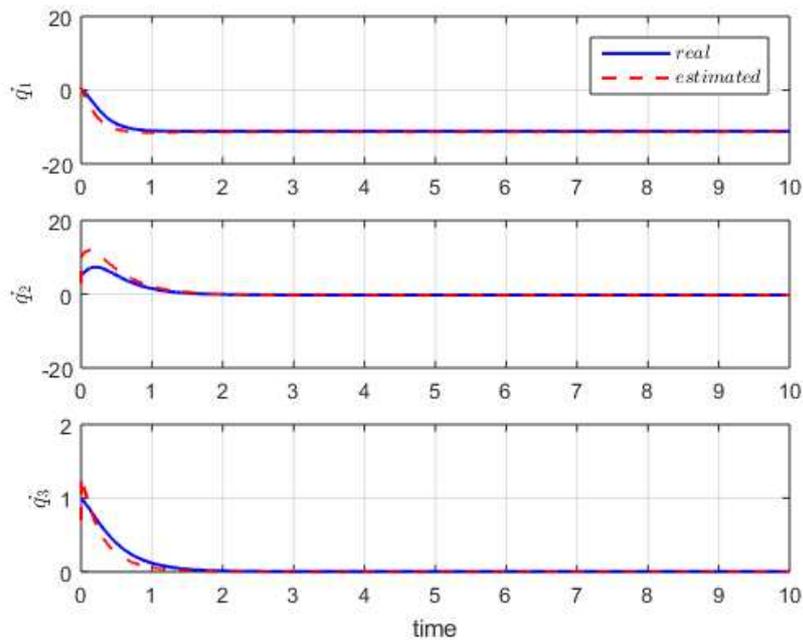


Figure 4.4 Comportement transitoire de la vitesse \dot{q} et son estimation \hat{q} de l'observateur en [55]

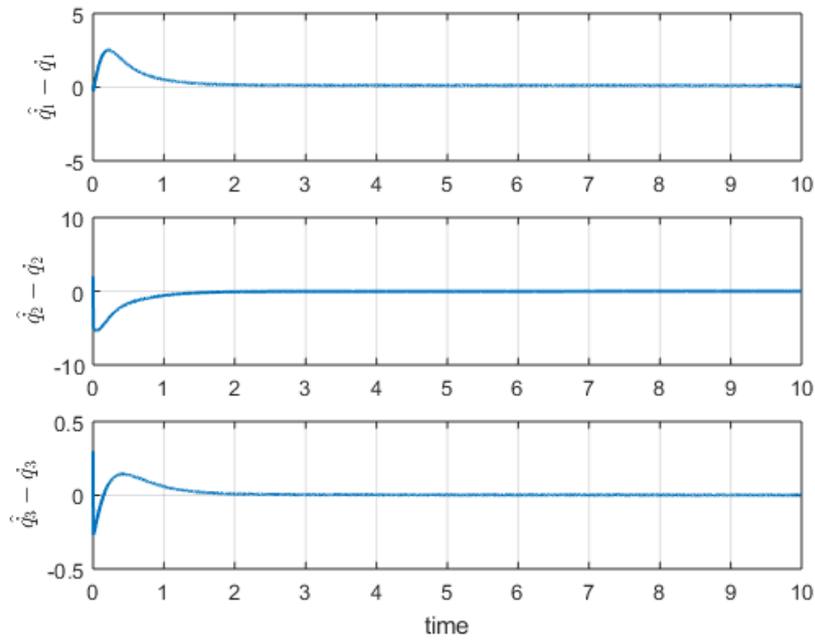


Figure 4.5 Erreur d'estimation de vitesse de l'observateur en [55]

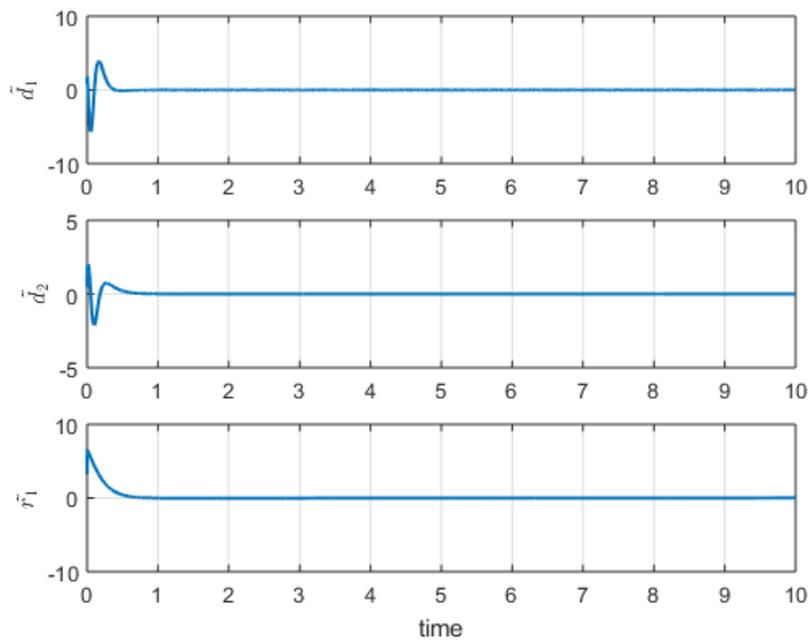


Figure 4.6 Comportement transitoire des perturbations \tilde{d} et de frottement

\tilde{r}_1

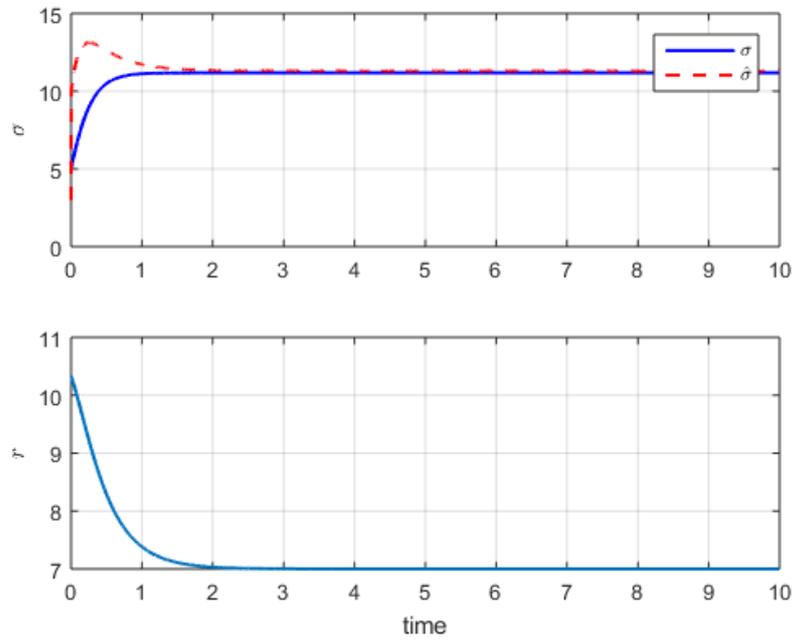


Figure 4.7 Comportement transitoire de σ et son estimation $\hat{\sigma}$ avec le facteur d'échelle dynamique τ

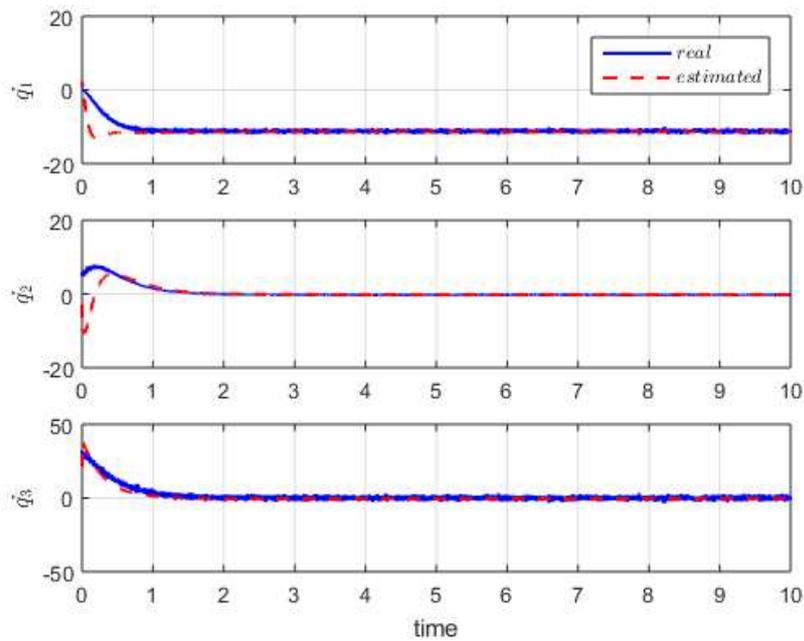


Figure 4.8 Comportement transitoire de la vitesse \dot{q} et son estimation $\hat{\dot{q}}$ avec bruit

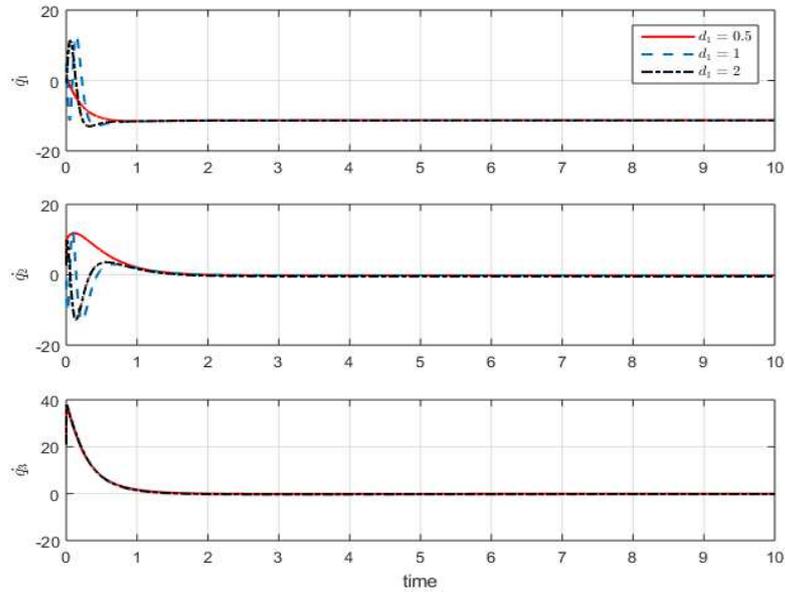


Figure 4.9 Comportement transitoire de la vitesse \dot{q} et son estimation $\hat{\dot{q}}$ avec différentes valeurs de perturbations d_1 .

4.5 Conclusion

Un observateur de vitesse adaptatif pour les systèmes mécaniques perturbés avec des contraintes non holonomes a été présenté. L'observateur proposé présente plusieurs avantages, notamment la présence de perturbations constantes et de forces de friction dans le modèle. Une autre caractéristique intéressante est qu'elle ne nécessite aucune solution de l'EDP qui limite l'applicabilité pratique de certains observateurs. L'observateur est totalement constructif et donné par des expressions explicites. La méthode de Lyapunov a été utilisée pour prouver la convergence globale de l'observateur proposé. La robustesse de l'observateur a été démontrée par l'estimation de la vitesse du système « Chaplygin Sleigh » en présence de forces de frottement inconnues et de différentes valeurs de perturbations.

Conclusion générale et perspectives

Ce mémoire est le résultat d'un travail de recherche dédié à la synthèse d'estimateurs de l'état des systèmes mécaniques sous contraintes. Afin de situer au mieux notre apport par rapport aux travaux existants, un état de l'art sur la théorie d'observation non linéaire a tout d'abord été proposé. Les contributions personnelles présentées par la suite abordent le problème de la synthèse et de l'analyse de la convergence d'observateur de type immersion et invariance (I&I) pour les systèmes mécaniques sous contraintes. L'analyse des systèmes non linéaires tant au niveau de la commande que de l'observation posent de nombreux problèmes qui n'apparaissent pas dans le cas linéaire, nous avons été amenés, dans un premier chapitre, à présenter quelques rappels sur les principales définitions se rapportant à la stabilité et à l'observabilité des systèmes non linéaires, en insistant sur la notion d'observabilité qui, contrairement aux systèmes linéaires, dépend intrinsèquement des entrées du système. Les concepts d'entrées universelles et de systèmes uniformément observables ont été introduits. Une deuxième partie de ce chapitre a été consacrée à une revue bibliographique sur les différentes approches existantes pour la synthèse d'observateurs des systèmes non linéaires, une classification des différentes méthodes a été réalisée.

L'une des contributions de notre travail de recherche, a été présentée dans le chapitre 3, qui réside dans l'utilisation du formalisme Hamiltonien à

ports pour les systèmes mécaniques sous contraintes de type non holonomes et en présence des perturbations externes et des forces de frottement.

Un observateur de vitesse adaptatif a été proposé dans le chapitre 4. Dans un premier temps, nous avons proposé une représentation port-Hamiltonienne appropriée pour cette classe des systèmes via un changement de coordonnée, nous avons aussi prouvé que ce système admet une certaine représentation d'espace d'état. Ensuite, nous avons proposé une conception qui évite la solution des équations aux dérivées partielles et assure la convergence globale pour les systèmes mécaniques avec k -contraintes non holonomes. L'observateur est totalement constructif et donné par des expressions explicites. Nous avons démontré la convergence exponentielle de l'observateur par la méthode de Lyapunov.

Nous avons appliqué cet observateur pour l'estimation de la vitesse du système non holonome connu « Chaplygin Sleigh » en présence de forces de frottement inconnues et de différentes valeurs de perturbations.

Les résultats développés dans cette thèse ouvrent le chemin vers de futurs travaux. Ainsi nous pouvons envisager, par rapport aux résultats obtenus dans ce travail, plusieurs perspectives. Tout d'abord, il s'agit d'utiliser cet observateur pour développer une loi de commande et de suivi de trajectoire adaptative pour cette classe des systèmes mécaniques. On travaille actuellement à développer une loi de commande adaptative avec retour de sortie, il apparait que cet observateur peut être utilisé avec des lois de commande classiques simples telles que PD+ proposé dans [149] et Slotine and Li proposé dans [150]. Une autre perspective immédiate de notre travail est

d'étendre cette méthode de conception à une autre grande classe de contraintes, qui sont affines dans les vitesses, appelées contraintes non holonomes affines où $A^T(q)\dot{q} = Z(q)$, tel qu'un bateau sur une rivière courante avec le courant variable, une boule sur une table tournante avec une vitesse angulaire invariable, un bras mécanique sous-actionné ...etc. Les travaux de Kai dans [151-154] donnent une bonne définition des contraintes affines avec une explication par une méthode de représentation géométrique et déduit aussi une condition nécessaire et suffisante pour une non holonomie complète des contraintes affines, ainsi qu'un point très important qui est une représentation Hamiltonienne de ce type des contraintes qui sera à notre avis un point de départ pour la conception des observateurs et des lois de commandes. Quelques lois de commandes sont déjà présentées [155, 156].

Une autre perspective aussi importante est, l'étude de la possibilité de concevoir un observateur adaptatif pour une classe des systèmes mécaniques avec des incertitudes dans la matrice de masse. Il apparait possible que l'opérateur de projection utilisé ici peut être utilisé pour assurer la positivité de la matrice de masse estimée. La technique d'observateur retardé utilisé dans [157] devrait être possible de garantir la robustesse et le taux de convergence minimal réglable pour les erreurs d'état et d'estimation.

Annexes

Annexe A

Quelques rappels mathématiques

A.1 Théorie des matrices

Définition A.1.1 (Matrice symétrique) Une matrice A est symétrique si

$$A = A^T \quad (A.1)$$

Définition A.1.2 Une matrice symétrique $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ est dite :

1. Définie positive $A > 0$ ssi $x^T Ax > 0$ pour tous $x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0$.
2. Semi-définie positive $A \geq 0$ ssi $x^T Ax \geq 0$ pour tous $x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0$.
3. Définie négative $A < 0$ ssi $x^T Ax < 0$ pour tous $x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0$.
4. Semi-définie négative $A \leq 0$ ssi $x^T Ax \leq 0$ pour tous $x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0$.

A.2 Forward-Completeness

Definition A.2 (Forward-completeness) un système :

$$\dot{x} = f(x, u) \quad (A.2)$$

avec un champ vectoriel localement Lipschitz $f: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$, est dit être complet vers l'avant si, pour chaque condition initiale $x(0) = \varepsilon$ et chaque entrée mesurable localement essentiellement bornée, la solution correspon-

dante est définie pour tout $t \geq 0$. c'est-à-dire que l'intervalle maximal d'existence des solutions est $T_{max} = +\infty$.

Théorème A.2. [158] : Le système (A.2) est complet vers l'avant si et seulement s'il existe une fonction lisse non radiée, valablement non bornée $V: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^+$ et une fonction σ de classe \mathcal{K}_∞ telle que :

$$\frac{\partial V(x)}{\partial x} f(x, u) \leq V(x) + \sigma(|u|) \quad (\text{A. 3})$$

A.3 Inégalité de Young

Pour chaque vecteur $x, y \in \mathbb{R}^n$ p et un scalaire $o \in \mathbb{R}^+$:

$$x^T y \leq \frac{o^p}{p} |x|^p + \frac{1}{qo^q} |y|^q, \quad q = \frac{p}{p-1} \quad (\text{A. 4})$$

A.4 Operateur de projection

Considérons l'ensemble convexe suivant :

$$\Pi = \{\hat{\theta} \in \mathbb{R}^p \mid \mathcal{P}(\hat{\theta}) \leq \varepsilon\} \quad (\text{A. 5})$$

où la fonction convexe $\mathcal{P}: \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ est lisse.

L'opérateur de projection est défini par :

$$Proj\{\tau\} = \begin{cases} \tau, & \nabla_{\hat{\theta}} \mathcal{P}^T \tau \leq 0 \\ \left(I - c(\hat{\theta}) \Gamma \frac{\nabla_{\hat{\theta}} \mathcal{P} \nabla_{\hat{\theta}} \mathcal{P}^T}{\nabla_{\hat{\theta}} \mathcal{P}^T \Gamma \nabla_{\hat{\theta}} \mathcal{P}} \right) \tau, & \nabla_{\hat{\theta}} \mathcal{P}^T \tau > 0 \end{cases} \quad (\text{A. 6})$$

avec :

$$c(\hat{\theta}) = \min \left\{ 1, \frac{\mathcal{P}(\hat{\theta})}{\varepsilon} \right\}. \quad (\text{A. 7})$$

Lemme A.4.1 Les propriétés de l'opérateur de projection (A.6) sont :

- (i) L'application $Proj$ est localement Lipschitz dans ses arguments $\tau, \hat{\theta}, \Gamma$.
- (ii) $Proj\{\tau\}^T \Gamma^{-1} Proj\{\tau\} \leq \tau^T \Gamma^{-1} \tau \quad \forall \hat{\theta} \in \Pi$.
- (iii) Soit $\Gamma(t), \tau(t)$ continuellement différentiable et

$$\dot{\hat{\theta}} = Proj\{\tau\}, \quad \forall \hat{\theta} \in \Pi$$

Alors, dans son domaine de définition, la solution $\hat{\theta}(t)$ reste en Π

- (iv) $-\tilde{\theta}^T \Gamma^{-1} Proj\{\tau\} \leq \tilde{\theta}^T \Gamma^{-1} \tau \quad \forall \hat{\theta}, \theta \in \Pi$.

Preuve :

Pour la première propriété (i), la preuve est long mais simple (voir [159] pour plus de détails).

Pour la propriété (ii), nous avons de (A.1) que $Proj\{\tau\} = \tau$ pour $\nabla_{\hat{\theta}} \mathcal{P}^T \tau \leq 0$ et (ii) tient trivialement avec l'égalité. Sinon, un calcul direct donne :

$$\begin{aligned} & Proj\{\tau\}^T \Gamma^{-1} Proj\{\tau\} \\ &= \tau^T \Gamma^{-1} \tau - 2c(\hat{\theta}) \frac{(\nabla_{\hat{\theta}} \mathcal{P}^T \tau)^2}{\nabla_{\hat{\theta}} \mathcal{P}^T \Gamma \nabla_{\hat{\theta}} \mathcal{P}} + c(\hat{\theta})^2 \frac{|\nabla_{\hat{\theta}} \mathcal{P} \nabla_{\hat{\theta}} \mathcal{P}^T|_{\Gamma}^2}{(\nabla_{\hat{\theta}} \mathcal{P}^T \Gamma \nabla_{\hat{\theta}} \mathcal{P})^2} \\ &= \tau^T \Gamma^{-1} \tau - c(\hat{\theta}) (2 - c(\hat{\theta})) \frac{(\nabla_{\hat{\theta}} \mathcal{P}^T \tau)^2}{\nabla_{\hat{\theta}} \mathcal{P}^T \Gamma \nabla_{\hat{\theta}} \mathcal{P}} \\ &\leq \tau^T \Gamma^{-1} \tau \end{aligned} \tag{A.8}$$

où la dernière inégalité suit en notant que $c(\hat{\theta}) \in [0,1]$.

Pour la propriété (iii), En utilisant la définition de l'opérateur de projection (A.6), nous obtenons :

$$\nabla_{\hat{\theta}} \mathcal{P}^T Proj\{\tau\} = \begin{cases} \nabla_{\hat{\theta}} \mathcal{P}^T \tau, & \nabla_{\hat{\theta}} \mathcal{P}^T \tau \leq 0 \\ (1 - c(\hat{\theta})) \nabla_{\hat{\theta}} \mathcal{P}^T \tau, & \nabla_{\hat{\theta}} \mathcal{P}^T \tau > 0 \end{cases} \quad (\text{A.9})$$

qui, vu le fait que $c(\hat{\theta}) \in [0,1]$ implique que :

$$\nabla_{\hat{\theta}} \mathcal{P}^T Proj\{\tau\} \leq 0 \quad (\text{A.10})$$

C'est-à-dire que le vecteur $Proj\{\tau\}$ pointe soit à l'intérieur de Π_ε , ou est tangent à l'hyperplan de $\partial\Pi_\varepsilon$ à $\hat{\theta}$. Comme $\hat{\theta}(0) \in \Pi_\varepsilon$, il s'ensuit que $\hat{\theta}(t) \in \Pi_\varepsilon$ tant que la solution existe.

La propriété (iv) détient trivialement avec l'égalité. Pour $\hat{\theta} \in \Pi_\varepsilon$, depuis $\theta \in \Pi$ et \mathcal{P} est une fonction convexe, nous avons :

$$(\theta - \hat{\theta})^T \nabla_{\hat{\theta}} \mathcal{P} \leq 0, \quad \hat{\theta} \in \Pi_\varepsilon \quad (\text{A.11})$$

Avec (A.11), nous calculons maintenant :

$$\begin{aligned} \tilde{\theta} \Gamma^{-1} Proj\{\tau\} &= \tau^T \Gamma^{-1} \tau + \begin{cases} 0 & \nabla_{\hat{\theta}} \mathcal{P}^T \tau \leq 0 \\ c(\hat{\theta}) \frac{(\tilde{\theta}^T \nabla_{\hat{\theta}} \mathcal{P})(\nabla_{\hat{\theta}} \mathcal{P}^T \tau)}{\nabla_{\hat{\theta}} \mathcal{P}^T \Gamma \nabla_{\hat{\theta}} \mathcal{P}}, & \nabla_{\hat{\theta}} \mathcal{P}^T \tau > 0 \end{cases} \\ &= \tilde{\theta} \Gamma^{-1} \tau \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

Ce qui termine la preuve du lemme.

A.5 Algèbre de Lie

On appelle *dérivée de Lie* de la fonction h le long du champ de vecteur f la fonction :

$$\mathcal{L}_f h(x) = \langle dh, f \rangle = \sum_{i=1}^n \frac{\partial h}{\partial x_i} f_i(x)$$

La k-ième itération de cette dérivée de Lie le long du même champ de vecteur s'écrit :

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_f^k h &= \mathcal{L}_f^{k-1} h \mathcal{L}_f h & (A.14) \\ \mathcal{L}_f^1 h &= \mathcal{L}_f h \\ \mathcal{L}_f^0 h &= h\end{aligned}$$

On définit le crochet de Lie de deux champs de vecteurs f et g par :

$$[f, g]_{(x)} = \text{ad}_{fg} = \frac{\partial f}{\partial x} g - \frac{\partial g}{\partial x} f \quad (A.15)$$

La k-ième itération de ce crochet s'écrit :

$$\begin{aligned}\text{ad}_f^k g &= [f, \text{ad}_f^{k-1} g] & (A.16) \\ \text{ad}_f^1 g &= \text{ad}_f g \\ \text{ad}_f^0 g &= g\end{aligned}$$

La relation suivante, appelée formule de Leibniz, est vérifiée :

$$\mathcal{L}_{[f,g]} h = \langle dh, [f, g] \rangle = \mathcal{L}_f \mathcal{L}_g h - \mathcal{L}_g \mathcal{L}_f h \quad (A.17)$$

On démontre également que :

$$d\mathcal{L}_f h(x) = \mathcal{L}_f dh(x) \quad (A.18)$$

Annexe B

Preuves des Lemmes

B.1 Preuve du Lemme 2.4

Preuve : Puisque la matrice \tilde{S} est un annihilateur a rang complet de A^T , la matrice $[\tilde{S}(q) A(q)]$ de dimension $n \times n$ est de rang plein, donc elle est inversible. Considérez les coordonnées :

$$\begin{bmatrix} \tilde{p} \\ \tilde{p}^c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{S}^T(q) \\ A^T(q) \end{bmatrix} p \quad (B.1)$$

où $\tilde{p} \in \mathbb{R}^{n-k}, \tilde{p}^c \in \mathbb{R}^k$. La fonction Hamiltonienne

La fonction Hamiltonienne, lorsqu'elle est exprimée dans les nouvelles coordonnées $(q, \tilde{p}, \tilde{p}^c)$ prend la forme [59] :

$$H_c(q, \tilde{p}, \tilde{p}^c) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \tilde{p} \\ \tilde{p}^c \end{bmatrix}^T \tilde{M}^{-1} \begin{bmatrix} \tilde{p} \\ \tilde{p}^c \end{bmatrix} + U(q) \quad (B.2)$$

Où la matrice \tilde{M}^{-1} est donnée comme :

$$\begin{bmatrix} \tilde{S}^T(q) \\ A^T(q) \end{bmatrix}^{-T} \tilde{M}^{-1}(q) \begin{bmatrix} \tilde{S}^T(q) \\ A^T(q) \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} m_{11}(q) & m_{12}(q) \\ m_{12}^T(q) & m_{22}(q) \end{bmatrix} \quad (B.3)$$

Avec $m_{11} \in \mathbb{R}^{(n-k) \times (n-k)}$, $m_{12} \in \mathbb{R}^{(n-k) \times k}$ et $m_{22} \in \mathbb{R}^{k \times k}$ est symétrique et défini positive. De plus, sur l'espace de contrainte \mathcal{X}_c (2.67), le Hamiltonien satisfait la condition suivante :

$$\nabla_{\tilde{p}^c} H_c = 0 \quad (B.4)$$

Les équations (B.2)-(B-4) donnent :

$$\tilde{p}^c = m_{22}(q) m_{12}^{-1}(q) \tilde{p} \quad (B.5)$$

En substituant (B.5) dans (B.2) on obtient (2.123) où :

$$\tilde{M}^{-1}(q) = m_{11}(q) - m_{12}(q)m_{22}(q)^{-1}m_{12}^T(q) \quad (B.6)$$

La matrice de (B.6) est le complément de Schur [160] de la matrice définie positive dans (B.3) et est donc également défini positif. Ce qui termine la preuve du lemme.

B.2 Preuve du Lemme 2.5

Preuve : Nous obtenons (2.130) en différenciant par le temps y dans (2.124) et en utilisant (2.126).

L'équation (2.131) est écrite comme suite :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \dot{T}\tilde{p} - T\tilde{S}^T\nabla_q\left(\frac{1}{2}\tilde{p}^T\tilde{M}^{-1}\tilde{p}\right) - T\tilde{S}^T\nabla U + TJT^T x + TB_c u \\ &= \dot{T}\tilde{p} - L^T\nabla_q\left(\frac{1}{2}\tilde{p}^T\tilde{M}^{-1}\tilde{p}\right) + F + TJT^T x \end{aligned} \quad (B.7)$$

Notant que :

$$\begin{aligned} \dot{T}\tilde{p} &= \sum_{i=1}^n (\nabla_{q_i} T)(e_i^T \dot{q})\tilde{p} = \sum_{i=1}^n (\nabla_{q_i} T)\tilde{p}(e_i^T \tilde{S}\tilde{M}^{-1}\tilde{p}) \\ &= \sum_{i=1}^n (\nabla_{q_i} T)T^{-1}x(e_i^T Lx) \end{aligned} \quad (B.8)$$

$$\begin{aligned} \nabla_q \left\{ \frac{1}{2}\tilde{p}^T\tilde{M}^{-1}\tilde{p} \right\} &= \nabla_q \left\{ \frac{1}{2}\tilde{p}^T T^T T \tilde{p} \right\} = \sum_{i=1}^n e_i \{ (\nabla_{q_i} T)\tilde{p} \}^T x \\ &= \sum_{i=1}^n e_i \{ (\nabla_{q_i} T)T^{-1}x \}^T x \end{aligned} \quad (B.9)$$

En remplaçant (A.4) et (A.5) dans (A.3) et en utilisant (2.132), on obtient (2.131).

Les propriétés (ii) et (iii) de \mathbf{S} vient directement de sa définition (2.132) et la propriété bien connue de la linéarité en \dot{q} de J [161]. La propriété (i) est prouvée comme suite :

$$\begin{aligned}
\mathbf{S} + \mathbf{S}^T &= TJT^T \\
&+ \sum_{i=1}^n \left[\left((\nabla_{y_i} T) T^{-1} x \right) (L^T e_i)^T - (L^T e_i) \left((\nabla_{y_i} T) T^{-1} x \right)^T \right] \\
&+ T^T J^T T \\
&+ \sum_{i=1}^n \left[(L^T e_i) \left((\nabla_{y_i} T) T^{-1} x \right)^T - \left((\nabla_{y_i} T) T^{-1} x \right) (L^T e_i)^T \right] \\
&= T(J + J^T)T^T \\
&+ \sum_{i=1}^n \left[\left((\nabla_{y_i} T) T^{-1} x \right) (L^T e_i)^T - (L^T e_i) \left((\nabla_{y_i} T) T^{-1} x \right)^T \right] \\
&+ \sum_{i=1}^n \left[(L^T e_i) \left((\nabla_{y_i} T) T^{-1} x \right)^T - \left((\nabla_{y_i} T) T^{-1} x \right) (L^T e_i)^T \right] \\
&= T(J + J^T)T^T \\
&+ \sum_{i=1}^n \left[\left((\nabla_{y_i} T) T^{-1} x \right) (L^T e_i)^T - (L^T e_i) \left((\nabla_{y_i} T) T^{-1} x \right)^T \right] \\
&- \sum_{i=1}^n \left[\left((\nabla_{y_i} T) T^{-1} x \right) (L^T e_i)^T - (L^T e_i) \left((\nabla_{y_i} T) T^{-1} x \right)^T \right] \\
&= 0
\end{aligned}$$

La première partie s'annule due à la propriété asymétrique de J . Ce qui termine la preuve de la lemme.

B.3 Preuve du Lemme 4.1

Preuve : D'après (4.3), on peut écrit :

$$\mathfrak{R}_u = \sum_{i=1}^n e_i e_i^T (e_i^T C r_u) \tag{B.10}$$

En utilisant la définition de $R_u(y)$, nous obtenons :

$$\begin{aligned}
R_u(y)z &= T^T(y) \left[\sum_{i=1}^n e_i e_i^T (e_i^T C r_u) \right] T(y)z \\
&= \sum_{i=1}^n T^T(y) e_i e_i^T T(y) z e_i^T C r_u \\
&= \sum_{i=1}^n \left[\sum_{j=1}^n T^T(y) e_i e_i^T T(y) \right] e_j z_j e_i^T C r_u \tag{B.11}
\end{aligned}$$

Par conséquent, on obtient (4.4) par échange des sommes et la définition :

$$\begin{aligned}
Y_j &:= \sum_{i=1}^n T^T(y) e_i e_i^T T(y) e_j e_i^T C \\
&= \sum_{i=1}^n L_i e_j e_i^T C, \quad j \in \bar{n} \tag{B.12}
\end{aligned}$$

avec des matrices constantes $L_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$ définies comme suit :

$$L_i := T^T(y) e_i e_i^T T(y), \quad i \in \bar{n} \tag{B.13}$$

Il ne reste plus qu'à prouver que les matrices Y_j et L_i sont constant. À cette fin, nous nous référons à (4.5) et notons que, au vu de l'hypothèse 4.1, le terme $e_i^T T(y)$ est constant pour $i \in \kappa$ alors que le terme $e_i^T C$ est un vecteur $1 \times s$ zéro pour $i \notin \kappa$. Ce qui termine la preuve du lemme.

Bibliographie

- [1] A. Zemouche, "Sur l'observation de l'état des systèmes dynamiques non linéaires," Thèse de Doctorat, Université Louis Pasteur-Strasbourg I, 2007.
- [2] M. Oueder, "Synthesis of observers for nonlinear systems," Thèse de Doctorat, Université de Caen, 2012.
- [3] R. E. Kalman, "A new approach to linear filtering and prediction problems," *Journal of basic Engineering*, vol. 82, pp. 35-45, 1960.
- [4] D. Luenberger, "An introduction to observers," *IEEE Transactions on automatic control*, vol. 16, pp. 596-602, 1971.
- [5] R. E. Kalman and R. S. Bucy, "New results in linear filtering and prediction theory," *Journal of basic engineering*, vol. 83, pp. 95-108, 1961.
- [6] A. J. Krener and A. Isidori, "Linearization by output injection and nonlinear observers," *Systems & Control Letters*, vol. 3, pp. 47-52, 1983.
- [7] A. J. Krener and W. Respondek, "Nonlinear observers with linearizable error dynamics," *SIAM Journal on Control and Optimization*, vol. 23, pp. 197-216, 1985.
- [8] X.-H. Xia and W.-B. Gao, "Nonlinear observer design by observer error linearization," *SIAM Journal on Control and Optimization*, vol. 27, pp. 199-216, 1989.
- [9] R. Rajamani, "Observers for Lipschitz nonlinear systems," *IEEE transactions on Automatic Control*, vol. 43, pp. 397-401, 1998.
- [10] M. Arcak and P. Kokotović, "Nonlinear observers: a circle criterion design and robustness analysis," *Automatica*, vol. 37, pp. 1923-1930, 2001.

- [11] J. Doyle and G. Stein, "Robustness with observers.," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 24, pp. 607–611, 1979.
- [12] A. Tornambè, "Use of asymptotic observers having-high-gains in the state and parameter estimation," in *Decision and Control, 1989., Proceedings of the 28th IEEE Conference on*, 1989, pp. 1791-1794.
- [13] H. Khalil and A. Saberi, "Adaptive stabilization of a class of nonlinear systems using high-gain feedback," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 32, pp. 1031-1035, 1987.
- [14] A. Saberi and P. Sannuti, "Observer design for loop transfer recovery and for uncertain dynamical systems," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 35, pp. 878-897, 1990.
- [15] F. Esfandiari and H. K. Khalil, "Observer-based Control of Uncertain Linear Systems: Recovering State Feedback Robustness Under Matching Condition," in *1989 American Control Conference*, 1989, pp. 931-936.
- [16] J. P. Gauthier, H. Hammouri, and S. Othman, "A simple observer for nonlinear systems applications to bioreactors," *IEEE Transactions on automatic control*, vol. 37, pp. 875-880, 1992.
- [17] G. Besançon, "High-gain observation with disturbance attenuation and application to robust fault detection," *Automatica*, vol. 39, pp. 1095-1102, 2003.
- [18] K. Busawon, M. Farza, and H. Hammouri, "Observer design for a special class of nonlinear systems," *International Journal of Control*, vol. 71, pp. 405-418, 1998.
- [19] F. Deza, E. Busvelle, J. Gauthier, and D. Rakotopara, "High gain estimation for nonlinear systems," *Systems & control letters*, vol. 18, pp. 295-299, 1992.
- [20] J.-P. Gauthier and I. A. Kupka, "Observability and observers for nonlinear systems," *SIAM journal on control and optimization*, vol. 32, pp. 975-994, 1994.

- [21] H. Hammouri, B. Targui, and F. Armanet, "High gain observer based on a triangular structure," *International Journal of Robust and Nonlinear Control: IFAC-Affiliated Journal*, vol. 12, pp. 497-518, 2002.
- [22] F. Viel, E. Busvelle, and J.-P. Gauthier, "Stability of polymerization reactors using I/O linearization and a high-gain observer," *Automatica*, vol. 31, pp. 971-984, 1995.
- [23] F. Esfandiari and H. K. Khalil, "Output feedback stabilization of fully linearizable systems," *International Journal of control*, vol. 56, pp. 1007-1037, 1992.
- [24] T. Mita, "On zeros and responses of linear regulators and linear observers," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 22, pp. 423-428, 1977.
- [25] V. Polotskiy, "On maximal errors of an asymptotic state identifier," *Avtomatika i Telemekhanika*, pp. 26-32, 1978.
- [26] A. Teel and L. Praly, "Global stabilizability and observability imply semi-global stabilizability by output feedback," *Systems & Control Letters*, vol. 22, pp. 313-325, 1994.
- [27] A. Teel and L. Praly, "Tools for semiglobal stabilization by partial state and output feedback," *SIAM Journal on Control and Optimization*, vol. 33, pp. 1443-1488, 1995.
- [28] A. Tornambè, "Output feedback stabilization of a class of non-minimum phase nonlinear systems," *Systems & Control Letters*, vol. 19, pp. 193-204, 1992.
- [29] V. Andrieu, L. Praly, and A. Astolfi, "High gain observers with updated gain and homogeneous correction terms," *Automatica*, vol. 45, pp. 422-428, 2009.
- [30] X. Ye, "Semiglobal output feedback control of uncertain nonlinear systems with unknown high frequency gain sign," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 45, pp. 2402-2405, 2000.

- [31] A. Serrani, A. Isidori, and L. Marconi, "Semi-global nonlinear output regulation with adaptive internal model," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 46, pp. 1178-1194, 2001.
- [32] P. Krishnamurthy and F. Khorrami, "Dynamic high-gain scaling: state and output feedback with application to systems with ISS appended dynamics driven by all states," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 49, pp. 2219-2239, 2004.
- [33] A. Isidori, "A tool for semi-global stabilization of uncertain non-minimum-phase nonlinear systems via output feedback," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 45, pp. 1817-1827, 2000.
- [34] H. K. Khalil, "High-gain observers in nonlinear feedback control," in *International Conference on Control, Automation and Systems*, 2008.
- [35] A. N. Atassi and H. K. Khalil, "A separation principle for the stabilization of a class of nonlinear systems," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 44, pp. 1672-1687, 1999.
- [36] H. K. Khalil and L. Praly, "High-gain observers in nonlinear feedback control," *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, vol. 24, pp. 993-1015, 2014.
- [37] S. K. Spurgeon, "Sliding mode observers: a survey," *International Journal of Systems Science*, vol. 39, pp. 751-764, 2008.
- [38] C. C. De Wit and J.-J. Slotine, "Sliding observers for robot manipulators," *Automatica*, vol. 27, pp. 859-864, 1991.
- [39] J. Choi, E. A. Misawa, and G. E. Young, "A study on sliding mode state estimation," in *American Control Conference*, pp. 2572-2576, 1993.
- [40] D. Efimov and T. Raïssi, "Design of interval observers for uncertain dynamical systems," *Automation and Remote Control*, vol. 77, pp. 191-225, 2016.

- [41] T. Raïssi, D. Efimov, and A. Zolghadri, "Interval state estimation for a class of nonlinear systems," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 57, pp. 260-265, 2012.
- [42] M. Fliess, C. Join, and H. Sira-Ramirez, "Non-linear estimation is easy," *arXiv preprint arXiv:0710.4486*, 2007.
- [43] A. Astolfi, D. Karagiannis, and R. Ortega, *Nonlinear and adaptive control with applications*. Springer Science & Business Media, 2007.
- [44] G. Besançon, *Nonlinear observers and applications* vol. 363: Springer, 2007.
- [45] H. Berghuis and H. Nijmeijer, "A passivity approach to controller-observer design for robots," *IEEE Transactions on robotics and automation*, vol. 9, pp. 740-754, 1993.
- [46] G. Besancon, "Further results on high gain observers for nonlinear systems," in *Decision and Control, 1999. Proceedings of the 38th IEEE Conference on*, 1999, pp. 2904-2909.
- [47] S. Bonnabel, P. Martin, and P. Rouchon, "Symmetry-preserving observers," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 53, pp. 2514-2526, 2008.
- [48] A. Astolfi and R. Ortega, "Immersion and invariance: A new tool for stabilization and adaptive control of nonlinear systems," *IEEE Transactions on Automatic control*, vol. 48, pp. 590-606, 2003.
- [49] D. Karagiannis, D. Carnevale, and A. Astolfi, "Invariant manifold based reduced-order observer design for nonlinear systems," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 53, pp. 2602-2614, 2008.
- [50] D. Karagiannis and A. Astolfi, "Observer design for a class of nonlinear systems using dynamic scaling with application to adaptive control," in *47th IEEE Conference on Decision and Control*, pp. 2314-2319, 2008.
- [51] A. Astolfi, R. Ortega, and A. Venkatraman, "A globally exponentially convergent immersion and invariance speed observer

for n degrees of freedom mechanical systems," In 48th IEEE conference on decision and control, Shanghai, China, 2009.

- [52] L. Praly, "Asymptotic stabilization via output feedback for lower triangular systems with output dependent incremental rate," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 48, pp. 1103-1108, 2003.
- [53] H. Lei, J. Wei, and W. Lin, "A global observer for autonomous systems with bounded trajectories," *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, vol. 17, pp. 1088-1105, 2007.
- [54] D. Karagiannis, M. Sassano, and A. Astolfi, "Dynamic scaling and observer design with application to adaptive control," *Automatica*, vol. 45, pp. 2883-2889, 2009.
- [55] A. Astolfi, R. Ortega, and A. Venkatraman, "A globally exponentially convergent immersion and invariance speed observer for mechanical systems with non-holonomic constraints," *Automatica*, vol. 46, pp. 182-189, 2010.
- [56] Ø. N. Starnes, O. M. Aamo, and G.-O. Kaasa, "A constructive speed observer design for general Euler–Lagrange systems," *Automatica*, vol. 47, pp. 2233-2238, 2011.
- [57] J. G. Romero and R. Ortega, "Two globally convergent adaptive speed observers for mechanical systems," *Automatica*, vol. 60, pp. 7-11, 2015.
- [58] J. G. Romero, R. Ortega, and I. Sarras, "A globally exponentially stable tracking controller for mechanical systems using position feedback," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 60, pp. 818-823, 2015.
- [59] H. Nijmeijer and A. Van der Schaft, *Nonlinear dynamical control systems* vol. 175: Springer, 1990.
- [60] A. Isidori, "Nonlinear control systems," 3rd ed. ed. New York :: Springer Verlag, 1995.

- [61] F. Liu, "Synthèse d'observateurs à entrées inconnues pour les systèmes non linéaires," Thèse de doctorat, Université de Caen Basse-Normandie-France, 2007.
- [62] R. Hermann and A. Krener, "Nonlinear controllability and observability," *IEEE Transactions on automatic control*, vol. 22, pp. 728-740, 1977.
- [63] H. K. Khalil, *Nonlinear systems*: Prentice-Hall, New Jersey, 1996.
- [64] E. D. Sontag, "A concept of local observability," *Systems & Control Letters*, vol. 5, pp. 41-47, 1984.
- [65] D. Aubry, "Contribution à la synthèse d'observateurs pour les systèmes non linéaires," Thèse de doctorat Université Henri Poincaré Nancy 1, 1999.
- [66] G. Bornard, N. Couenne, and F. Celle, "Regularly persistent observers for bilinear systems," in *New trends in nonlinear control theory*, ed: Springer, 1989, pp. 130-140.
- [67] M. Soroush, "Nonlinear state-observer design with application to reactors," *Chemical Engineering Science*, vol. 52, pp. 387-404, 1997.
- [68] B. Walcott, M. Corless, and S. Žak, "Comparative study of nonlinear state-observation techniques," *International Journal of Control*, vol. 45, pp. 2109-2132, 1987.
- [69] E. Misawa and J. Hedrick, "Nonlinear observers—a state-of-the-art survey," *Journal of dynamic systems, measurement, and control*, vol. 111, pp. 344-352, 1989.
- [70] H. Keller, "Non-linear observer design by transformation into a generalized observer canonical form," *International Journal of Control*, vol. 46, pp. 1915-1930, 1987.
- [71] J. Rudolph and M. Zeitz, "A block triangular nonlinear observer normal form," *Systems & Control Letters*, vol. 23, pp. 1-8, 1994.

- [72] M. Hou and A. Pugh, "Observer with linear error dynamics for nonlinear multi-output systems," *Systems & Control Letters*, vol. 37, pp. 1-9, 1999.
- [73] A. R. Phelps, "On constructing nonlinear observers," *SIAM Journal on Control and Optimization*, vol. 29, pp. 516-534, 1991.
- [74] A. Glumineau, C. Moog, and F. Plestan, "New algebraic-geometric conditions for the linearization by input-output injection," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 41, pp. 598-603, 1996.
- [75] F. Plestan and A. Glumineau, "Linearization by generalized input-output injection," *Systems & Control Letters*, vol. 31, pp. 115-128, 1997.
- [76] N. Kazantzis and C. Kravaris, "Nonlinear observer design using Lyapunov's auxiliary theorem," *Systems & Control Letters*, vol. 34, pp. 241-247, 1998.
- [77] D. Bestle and M. Zeitz, "Canonical form observer design for nonlinear time-variable systems," *International Journal of control*, vol. 38, pp. 419-431, 1983.
- [78] C. W. Li and L. W. Tao, *Observing non-linear time-variable systems through a canonical form observer* vol. 44, 1986.
- [79] M. Zeitz, "Comments on 'Comparative study of non-linear state-observation techniques'," *International Journal of Control*, vol. 46, pp. 1861-1863, 1987.
- [80] M. Zeitz, "The extended Luenberger observer for nonlinear systems," *Systems & Control Letters*, vol. 9, pp. 149-156, 1987.
- [81] M. Boutayeb and D. Aubry, "A strong tracking extended Kalman observer for nonlinear discrete-time systems," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 44, pp. 1550-1556, 1999.
- [82] M. S. Grewal and A. P. Andrews, *Kalman filtering: theory and practice*: Prentice-Hall, Inc., 1993.

- [83] G. Chen, *Approximate kalman filtering* vol. 2: World scientific, 1993.
- [84] A. H. Jazwinski, *Stochastic processes and filtering theory*. New York Academic, 1970.
- [85] F. Thau, "Observing the state of non-linear dynamic systems," *International journal of control*, vol. 17, pp. 471-479, 1973.
- [86] R. Patel and M. Toda, "Quantitative measures of robustness for multivariable systems," in *Joint Automatic Control Conference*, 1980
- [87] S. Raghavan and J. K. Hedrick, "Observer design for a class of nonlinear systems," *International Journal of Control*, vol. 59, pp. 515-528, 1994.
- [88] S. H. Zak, "On the stabilization and observation of nonlinear/uncertain dynamic systems," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 35, pp. 604-607, 1990.
- [89] G. Bornard and H. Hammouri, "A high gain observer for a class of uniformly observable systems," in *Decision and Control, 1991., Proceedings of the 30th IEEE Conference on*, 1991, pp. 1494-1496.
- [90] M. Farza, K. Busawon, and H. Hammouri, "Simple nonlinear observers for on-line estimation of kinetic rates in bioreactors," *Automatica*, vol. 34, pp. 301-318, 1998.
- [91] J. J. Slotine, Hedrick, J. K. and Misawa, E. A., "On sliding observers for nonlinear systems," presented at the American Control Conference, 1987.
- [92] J.-J. Slotine and S. S. Sastry, "Tracking control of non-linear systems using sliding surfaces, with application to robot manipulators," *International journal of control*, vol. 38, pp. 465-492, 1983.
- [93] H. Sira-Ramirez, "On the sliding mode control of nonlinear systems," *Systems & Control Letters*, vol. 19, pp. 303-312, 1992.

- [94] H. Sira-Ramirez, S.K. Spurgeon, "On the robust design of sliding observers for linear systems," *Systems & Control Letters*, vol. 23, pp. 9-14, 1994.
- [95] G. Kreisselmeier, "Adaptive observers with exponential rate of convergence," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 22, pp. 2-8, 1977.
- [96] G. Luders, K. Narendra, "A new canonical form for an adaptive observer.," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 19, pp. 117-119, 1974.
- [97] G. Bastin, M. R., "Stable adaptive observers for nonlinear time-varying systems.," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 33, pp. 650-658, 1988.
- [98] M. Spong and M. Vidyasagar, "Robot Dynamics and Control," 1989.
- [99] A. Isidori, *Nonlinear Control Systems*, (3rd edn) ed. New York: Springer, 1995.
- [100] H. Goldstein, *Classical mechanics*, (2nd Edition), Addison-Wesley, 1980.
- [101] J. T. Wen, "Control of nonholonomic systems," *The Control Handbook*, pp. 1359-1368, 1996.
- [102] J. I. Neĭmark, "Dynamics of nonholonomic systems," vol. Translations of Mathematical Monographs, N. A. Fufaev, Ed., ed. Providence, R.I.: American Mathematical Society, 1972.
- [103] A. J. Van der Schaft, *L2-gain and passivity techniques in nonlinear control* vol. 2: Springer, 2000.
- [104] B. Maschke and A. Van Der Schaft, "Port-controlled Hamiltonian systems: modelling origins and system-theoretic properties," in *Nonlinear Control Systems Design 1992*, ed: Elsevier, , pp. 359-365, 1993.

- [105] B. Maschke and A. Van Der Schaft, "System-theoretic properties of port-controlled Hamiltonian systems," *Mathematical Research*, vol. 79, pp. 349-349, 1994.
- [106] A. Weinstein, "The local structure of Poisson manifolds," *J. Differential Geom.*, vol. 18, pp. 523-557, 1983.
- [107] N. Hogan, "Impedance control: An approach to manipulation: Part II—Implementation," *Journal of dynamic systems, measurement, and control*, vol. 107, pp. 8-16, 1985.
- [108] B. Maschke, A. J. Van Der Schaft, and P. C. Breedveld, "An intrinsic Hamiltonian formulation of network dynamics: Non-standard Poisson structures and gyrators," *Journal of the Franklin institute*, vol. 329, pp. 923-966, 1992.
- [109] P. Penfield, R. Spence, and S. Duinker, "A generalized form of Tellegen's theorem," *IEEE Transactions on Circuit Theory*, vol. 17, pp. 302-305, 1970.
- [110] M. Dalsmo and A. Van Der Schaft, "On representations and integrability of mathematical structures in energy-conserving physical systems," *SIAM Journal on Control and Optimization*, vol. 37, pp. 54-91, 1998.
- [111] T. J. Courant, "Dirac manifolds," *Transactions of the American Mathematical Society*, vol. 319, pp. 631-661, 1990.
- [112] G. Golo, A. van der Schaft, P. C. Breedveld, and B. M. Maschke, "Hamiltonian formulation of bond graphs."
- [113] A. J. van der Schaft, "The Hamiltonian formulation of energy conserving physical systems with external ports," *Archiv fur Elektronik und Ubertragungstechnik*, vol. 49, pp. 362-371, 1995.
- [114] A. J. van der Schaft, D. Jeltsema, and N. Publishers, *Port-Hamiltonian Systems Theory: An Introductory Overview*. Now Publishers, 2014.

- [115] R. Abraham, J. E. Marsden, and J. E. Marsden, *Foundations of mechanics* vol. 36: Benjamin/Cummings Publishing Company Reading, Massachusetts, 1978.
- [116] A. Van der Schaft and B. Maschke, "On the Hamiltonian formulation of nonholonomic mechanical systems," *Reports on mathematical physics*, vol. 34, pp. 225-233, 1994.
- [117] S. Battilotti and L. Lanari, "Global set point control via link position measurement for flexible joint robots," *Systems & Control Letters*, vol. 25, pp. 21-29, 1995.
- [118] A. Ailon and R. Ortega, "An observer-based set-point controller for robot manipulators with flexible joints," *Systems & Control Letters*, vol. 21, pp. 329-335, 1993.
- [119] G. Besançon, "Global output feedback tracking control for a class of Lagrangian systems," *Automatica*, vol. 36, pp. 1915-1921, 2000.
- [120] A. Venkatraman, R. Ortega, I. Sarras, and A. van der Schaft, "Speed observation and position feedback stabilization of partially linearizable mechanical systems," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 55, pp. 1059-1074, 2010.
- [121] M. W. Spong, "Remarks on robot dynamics: canonical transformations and Riemannian geometry," in *Proceedings 1992 IEEE International Conference on Robotics and Automation*, pp. 554-559, 1992.
- [122] N. S. Bedrossian and M. W. Spong, "Feedback linearization of robot manipulators and Riemannian curvature," *Journal of Field Robotics*, vol. 12, pp. 541-552, 1995.
- [123] M. Spivak, *A comprehensive introduction to differential geometry*, 3 ed ed.: Publish or Perish, inc., 1999.
- [124] R. A. Horn and C. R. Johnson, *Matrix analysis*: Cambridge university press, 1990.

- [125] D. Karagiannis, & Astolfi, A., "Observer design for a class of nonlinear systems using dynamic scaling with application to adaptive control," presented at the In 47th IEEE conference on decision and control, ,Cancun, Mexico., 2008.
- [126] P. V. Kokotovic., "Recent trends in feedback design: an overview," *Automatica*, vol. 21, pp. 225–236, 1985.
- [127] B. Riedle and P. Kokotovic, "Integral manifolds of slow adaptation," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 31, pp. 316-324, 1986.
- [128] J. Carr, *Applications of Centre Manifold Theory*. Springer-Verlag, 1981.
- [129] D. Aeyels, "Stabilization of a class of nonlinear systems by a smooth feedback," *Systems & Control Letters*, vol. 5, pp. 289–294, 1985.
- [130] R. Ortega, J. A. L. Perez, P. J. Nicklasson, and H. Sira-Ramirez, *Passivity-based Control of Euler-Lagrange Systems: Mechanical, Electrical and Electromechanical Applications*. Springer Science & Business Media, 1998.
- [131] M. Krstić, I. Kanellakopoulos, and P. V. Kokotović, *Nonlinear and adaptive control design*. Wiley, 1995.
- [132] M. J. R. Sepulchre, and P. Kokotovic, *Constructive Nonlinear Control*. Springer-Verlag, Berlin, 1996.
- [133] C. I. Byrnes, F. D. Priscoli, and A. Isidori, *Output regulation of uncertain nonlinear systems*. Springer Science & Business Media, 2012.
- [134] A. Isidori, "A remark on the problem of semiglobal nonlinear output regulation," *IEEE transactions on Automatic Control*, vol. 42, pp. 1734-1738, 1997.
- [135] N. Michel, and B. Hu, *Qualitative Theory of Dynamical Systems: The Role of Stability Preserving Mappings*, , 2nd edition ed.: Marcel Dekker, New York, 2001.

- [136] V. I. Utkin, *Sliding Modes in Control and Optimization*. Berlin,: Springer-Verlag, 1992.
- [137] C.I. Byrnes, and J.C. Willems, "Passivity, feedback equivalence, and the global stabilization of minimum phase nonlinear systems," *IEEE Trans. Automatic Control*, vol. 36, pp. 1228-1240, 1991.
- [138] A. Astolfi, and R. Sepulchre, "Stabilization and disturbance attenuation of nonlinear systems using dissipativity theory," *European Journal of Control*, vol. 8, pp. 408-431, 2002.
- [139] C. I. Byrnes, A. Isidori, and J. C. Willems, "Passivity, feedback equivalence, and the global stabilization of minimum phase nonlinear systems," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 36, pp. 1228-1240, 1991.
- [140] S. Wiggins, *Introduction to applied nonlinear dynamical systems and chaos*. New York: Springer-Verlag, 1990.
- [141] C. I. Byrnes and A. Isidori, "New results and examples in nonlinear feedback stabilization," *Systems & Control Letters*, vol. 12, pp. 437-442, 1989.
- [142] C. I. Byrnes, F. D. Priscoli, and A. Isidori, *Output Regulation of Uncertain Nonlinear Systems*: Birkhauser, Boston, 1997.
- [143] P. Jouan, "Immersion of nonlinear systems into linear systems modulo output injection," *SIAM J. Control and Optimization*, vol. 41, pp. 1756-1778, 2003.
- [144] N. Kazantzis and C. Kravaris, "Singular PDEs and the single-step formulation of feedback linearization with pole placement," *Systems & Control Letters*, vol. 39, pp. 115-122, 2000.
- [145] A. Bloch, J. Baillieul, P. Crouch, J. E. Marsden, D. Zenkov, P. S. Krishnaprasad, *et al.*, *Nonholonomic mechanics and control* vol. 24: Springer, 2003.

- [146] A. Jain and G. Rodriguez, "Diagonalized Lagrangian robot dynamics," *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, vol. 11, pp. 571-584, 1995.
- [147] J. G. Romero and R. Ortega, "A Globally exponentially stable tracking controller for mechanical systems with friction using position feedback," *IFAC Proceedings Volumes*, vol. 46, pp. 371-376, 2013.
- [148] S. Ferraro, D. Iglesias, and D. M. de Diego, "Momentum and energy preserving integrators for nonholonomic dynamics," *Nonlinearity*, vol. 21, p. 1911, 2008.
- [149] B. Paden and R. Panja, "Globally asymptotically stable 'PD+' controller for robot manipulators," *International Journal of Control*, vol. 47, pp. 1697-1712, 1988.
- [150] J.-J. E. Slotine and W. Li, "On the adaptive control of robot manipulators," *The international journal of robotics research*, vol. 6, pp. 49-59, 1987.
- [151] T. Kai, H. Kimura, and S. Hara, "Nonlinear control analysis on nonholonomic dynamic systems with affine constraints," in: *Proceedings of 44th IEEE Conference on Decision and Control and European Control Conference 2005*, Seville, Spain, pp. 1459–1464, 2005.
- [152] T. Kai, "Generalized canonical transformations and passivity-based control for nonholonomic Hamiltonian systems with affine constraints: control of a coin on a rotating table," in: *Proceedings of 46th IEEE Conference on Decision and Control*, New Orleans, USA, pp. 3369–3374, 2007.
- [153] T. Kai, "Mathematical modelling and theoretical analysis of nonholonomic kinematic systems with a class of rheonomous affine constraints," *Applied Mathematical Modelling*, vol. 36, pp. 3189-3200, 2012.
- [154] T. Kai, "Modeling and passivity analysis of nonholonomic Hamiltonian systems with rheonomous affine constraints,"

Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation,
vol. 17, pp. 3446-3460, 2012.

- [155] W. Sun, Y.-Q. Wu, and Z.-Y. Sun, "Tracking control design for nonholonomic mechanical systems with affine constraints," *International Journal of Automation and Computing*, vol. 11, pp. 328-333, 2014.
- [156] W. Sun and Y. Wu, "Adaptive motion/force control of nonholonomic mechanical systems with affine constraints," *Nonlinear Analysis: Modelling and Control*, vol. 19, pp. 646-659, 2014.
- [157] Ø. N. Starnes, O. M. Aamo, and G.-O. Kaasa, "Redesign of adaptive observers for improved parameter identification in nonlinear systems," *Automatica*, vol. 47, pp. 403-410, 2011.
- [158] D. Angeli and E. D. Sontag, "Forward completeness, unboundedness observability, and their Lyapunov characterizations," *Systems & Control Letters*, vol. 38, pp. 209-217, 1999.
- [159] L. Praly, G. Bastin, J.-B. Pomet, and Z. Jiang, "Adaptive stabilization of nonlinear systems," in *Foundations of adaptive control*, ed: Springer, pp. 347-433, 1991.
- [160] L. E. G. S. Boyd, E. Feron, and V. Balakrishnan., *Linear matrix inequalities in system and control theory*. Philadelphia, USA: In SIAM Studies in Applied Mathematics, 1994.
- [161] R. Kelly, V. S. Davila, and J. A. L. Perez, *Control of robot manipulators in joint space*: Springer Science & Business Media, 2006.