

**REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE**  
**MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE**  
**SCIENTIFIQUE**  
**UNIVERSITE M'HAMED BOUGARA-BOUMERDES**



**Faculté des Sciences de l'Ingénieur**

**Thèse de Doctorat**

Présentée par :

**Moussa ALLOUCHE**

En vue de l'obtention du diplôme de **DOCTORAT** en :

**Filière : Génie Mécanique**

**Option : Modélisation et Simulation en Mécanique**

**Modélisation et simulation numérique d'un film  
lacrymal (larmes) en écoulement autour de la cornée**

**Devant le jury composé de :**

Mr Belaidi	Idir	Prof	Univ. de Boumerdes	Président
Mr Mansouri	Kacem	Prof	Univ. de Boumerdes	Rapporteur
Mr Hachemi	Madjid	M.C.A	Univ. de Boumerdes	Examineur
Mr Sadaoui	Djamel	Prof	Univ. de Béjaia	Examineur
Mr Nebbali	Rezki	M.C.A	Univ. de Tizi Ouzou	Examineur
Mr Nait Bouda	Faïçal	M.C.A	Univ. de Béjaia	Examineur
Mr Ait Abderrahmane	Hamid	A.Prof	Khalifa Univ. U.A.E.	Invité

## Résumé

Cette étude généralise le modèle d'Aydemir et al. (2010) estimant la surface de la cornée sphérique plutôt que plate. Le modèle, qui consiste en une paire d'équations différentielles partielles non linéaires couplées pour l'épaisseur de la couche aqueuse et la concentration en lipides, est résolu dans le domaine évolutif compris entre une paupière supérieure mobile et une paupière inférieure fixe. En dehors de la paupière supérieure, la courbure a une petite influence sur l'épaisseur du film; ceci confirme la conclusion de Braun et al. (2012). Cependant, la courbure influence la vitesse d'amincissement du film lacrymal près de la paupière supérieure.

**Mots clés :** Ecoulement de film lacrymal, théorie de lubrification, Lipides polaires, substrat courbe.

## Abstract

This study generalizes the model of Aydemir et al. (2010) by approximating the cornea surface as spherical rather than flat. The model, which consists of a pair of coupled nonlinear partial differential equations for the thickness of the aqueous layer and the concentration of the lipid, is solved in the evolutionary domain squeezed between a moving upper lid and fixed lower lid. Away the upper lid the curvature has a weak influence on the film thickness; this confirms the conclusion of Braun et al. (2012). However, the curvature influences the thinning rate of the tear film near the upper eyelid.

**Keywords :** Tear film flow, Curved substrate, Lubrication theory, Polar lipid.

## ملخص

هذه الدراسة تعميم نموذج Aydemir وآخرون (2010) عن طريق تقريب سطح القرنية على شكل كروي بدلا من مسطح. يتم حل النموذج ، الذي يتكون من زوج من المعادلات التفاضلية الجزئية غير الخطية و المترابطة الخاصة بسمك السائل الدمعي وتركيز الدهن ، في المجال التطوري المحصور بين جفن علوي متحرك وجفن سفلي ثابت. بعيداً عن الجفن العلوي ، يكون للانحناء تأثير ضعيف على سماكة السائل الدمعي ؛ هذا يؤكد استنتاج Braun وآخرون(2012). ومع ذلك ، فإن الانحناء يؤثر على سرعة رقة السائل الدمعي بالقرب من الجفن العلوي.

**كلمات البحث :** سيلان السائل الدمعي ، الركيزة المنحنية ، نظرية تزييت ، الدهون القطبية.

# Dédicaces

À

Mes parents, ma femme, mes enfants,

et tous ceux qui me sont chers.

# Remerciements

Je tiens à remercier Dieu pour la volonté et le courage qu'il m'a donné pour l'achèvement de ce travail. Malgré la traversée de périodes difficiles, après avoir été contraint d'abandonner ma première thèse de doctorat, en phase d'achèvement, et la confirmation du diagnostic d'autisme pour mon fils Adel, une heureuse issue, enfin, voit le jour "Dieu Merci".

J'exprime ma profonde gratitude et ma reconnaissance envers mon directeur de thèse, Monsieur Kacem Mansouri, Professeur à l'Université de Boumerdès, pour m'avoir donné cette chance de me réinscrire, une nouvelle fois en Doctorat sous sa direction, et d'avoir accepté le thème proposé. Je le remercie pour tout l'intérêt qu'il a accordé à cette étude, pour ses conseils, son savoir et ses encouragements qu'il m'a transmis tout au long de ce travail. Je tiens à témoigner de sa patience et de sa gratitude pour m'avoir, souvent, épargné des déplacements de Bejaia à Boumerdès pour régler des problèmes administratifs, y compris ceux concernant mes réinscriptions annuelles.

De la même façon, je tiens aussi à exprimer ma profonde gratitude et ma reconnaissance envers Mr Hamid AIT ABDERRAHMANE, Assistant Professor à l'Université Khalifa Abu-Dhabi U.E.A, pour m'avoir proposé un sujet d'actualité dans un domaine qui me tenait à cœur, celui de la biomécanique d'une manière générale et du syndrome de la sécheresse oculaire en particulier, tout l'intérêt qu'il a accordé à mon travail, pour ses conseils, et ses encouragements qu'il m'a transmis tout au long de cette étude.

Je remercie vivement Faïçal Nait Bouda, M.C.A à l'Université A.MIRA de Bejaia, ami et collègue de longues dates, pour m'avoir aidé et soutenu tout au long de cette étude.

Mes remerciements vont également aux membres du jury, que sont le Professeur Idir BELAIDI et Madjid Hachemi M.C.A à l'Université de Boumerdes, le Professeur Djamel SADAoui et Faïçal Nait Bouda M.C.A à l'Université A.MIRA de Bejaia, et enfin Rezki NEBBALI M.C.A à l'Université Mouloud MAMMERRI de Tizi-Ouzou, pour m'avoir fait l'honneur d'examiner ce modeste travail et les assure de ma profonde gratitude.

Enfin, j'exprime ma reconnaissance et ma sympathie à l'équipe "Dynamique des fluides" du laboratoire Physique théorique..

# Table des matières

<b>Table des matières</b>	<b>1</b>
<b>Liste de tableaux</b>	<b>4</b>
<b>Liste de figures</b>	<b>4</b>
<b>Nomenclature</b>	<b>7</b>
<b>Introduction générale</b>	<b>10</b>
<b>1 Quelques résultats expérimentaux et revue bibliographique</b>	<b>12</b>
1.1 Quelques résultats expérimentaux et propriétés physiques du film lacrymal . . . .	12
1.1.1 Structure du film lacrymal . . . . .	13
1.1.2 Propriétés du liquide lacrymal . . . . .	17
1.1.3 Géométrie du film lacrymal . . . . .	21
1.1.4 Le cycle de clignement et la dynamique des larmes . . . . .	22
1.2 Revue bibliographique sur les modèles d'écoulement du film lacrymal . . . . .	23
<b>2 Modèle mathématique</b>	<b>26</b>
2.1 Modèles d'équations de mouvement des paupières . . . . .	27
2.1.1 Modèle de mouvement de paupière supérieure d'Aydemir . . . . .	27
2.1.2 Modèle de mouvement de paupière supérieure de Bruna . . . . .	29
2.2 Équations régissant la dynamique du film lacrymal en coordonnées sphériques . .	29
2.2.1 Équations de mouvement du fluide en coordonnées sphériques . . . . .	31
2.2.2 Équations de transport du surfactant (lipides polaires) en coordonnées sphé- riques . . . . .	33
2.2.3 Conditions aux limites en coordonnées sphériques . . . . .	35
2.2.4 Conditions initiales en coordonnées sphériques . . . . .	38

2.3	Equations régissant la dynamique du film lacrymal en coordonnées curvilignes . . .	38
2.3.1	Relations de passage des coordonnées sphériques vers les coordonnées curvilignes . . . . .	38
2.3.2	Equations de mouvement du fluide en coordonnées curvilignes . . . . .	40
2.3.3	Equations de transport du surfactant (lipides polaires) en coordonnées curvilignes . . . . .	40
2.3.4	Conditions aux limites en coordonnées curvilignes . . . . .	41
2.3.5	Conditions initiales en coordonnées curvilignes . . . . .	42
2.4	Équations adimensionnelles régissant la dynamique du film lacrymal en coordonnées curvilignes . . . . .	43
2.4.1	Conditions aux limites et initiales adimensionnelles . . . . .	44
2.4.2	Valeurs des paramètres . . . . .	46
2.4.3	Réduction des équations à la limite du film mince (étude phénoménologique)	49
2.4.4	Équation d'évolution du film lacrymal en absence de lipides . . . . .	51
2.5	Conclusion . . . . .	51
<b>3</b>	<b>Procédure numérique</b>	<b>52</b>
3.1	Méthode des différences finies . . . . .	53
3.1.1	Discrétisation du domaine ou Maillage . . . . .	53
3.1.2	Discrétisation spatiales des équations . . . . .	55
3.1.3	Discrétisation temporelle des équations résultantes . . . . .	61
3.1.4	Schéma d'Euler . . . . .	62
3.2	Conclusion . . . . .	63
<b>4</b>	<b>Résultats et discussions</b>	<b>65</b>
4.1	Grand volume de larmes comparaison au cas d'Aydemir . . . . .	66
4.1.1	Hauteur du film et concentration de lipides . . . . .	66
4.1.2	Hauteur minimale du film . . . . .	70
4.1.3	Vitesses moyenne et superficielle du film lacrymal . . . . .	70
4.1.4	Effet du nombre de Marongoni sur la dynamique de l'écoulement . . . . .	78
4.1.5	Effet du nombre Capillaire sur la dynamique de l'écoulement . . . . .	83
4.2	Volume de larmes réduit . . . . .	87

<b>Conclusion générale</b>	<b>93</b>
<b>Annexe 1 : Conservation du volume</b>	<b>95</b>
<b>Annexe 2 : Article</b>	<b>97</b>
<b>Bibliographie</b>	<b>109</b>

# Liste de tableaux

Table 2.1 : Valeurs des paramètres selon (Aydemir <i>et al.</i> [1]) . . . . .	47
Table 2.2 : Valeurs des groupements adimensionnels selon (Aydemir <i>et al.</i> [1]) . . . . .	47
Table 2.3 : Valeurs des paramètres selon (Bruna <i>et al.</i> [10]) . . . . .	47
Table 2.4 : Valeurs des groupements adimensionnels selon (Bruna <i>et al.</i> [10]) . . . . .	48

# Liste de figures

FIGURE 1.1: Structure du film lacrymal . . . . .	14
FIGURE 1.2: a : Orifices des glandes de Meibomius (cercles noirs). b : Vue transconjonctivale de l'alignement intratarsal des glandes de Meibomius. . . . .	15
FIGURE 1.3: Glande lacrymale . . . . .	16
FIGURE 2.1: (a) Vitesse de la paupière supérieure pendant la phase d'ouverture d'un clignement $U(t)$ , (...) points de données extraites de Wong <i>et al.</i> [60] et (—) courbe tracée avec les paramètres donnés par : (2.1, 2.2). (b) Longueur de déplacement correspondante $L(t)$ donnée par(2.3) . . . . .	28
FIGURE 2.2: (a) La position de la paupière supérieure $L(t)$ donnée par (2.4) et (b) la vitesse correspondante $\dot{L}(t)$ pendant la course ascendante du clignement. Les valeurs des paramètres sont $\Delta t_u = 0.1758s$ , $\Delta t_i = 5s$ , $L_{op} = 0.01m$ , $\lambda = 0.1$ . . . . .	30
FIGURE 2.3: Schématisation du film lacrymal dans le plan $(r, \theta)$ . . . . .	32
FIGURE 2.4: Passage des coordonnées cartésiennes aux coordonnées sphériques . . . . .	33
FIGURE 2.5: Schématisation du film lacrymal dans le plan curviligne $(x, y)$ . . . . .	39

FIGURE 3.1: Maillage fixe et mobile . . . . .	54
FIGURE 3.2: Discrétisation spatio-temporelle de $H(\eta, t)$ . . . . .	56
FIGURE 3.3: Discrétisation spatio-temporelle de $\Gamma(\eta, t)$ . . . . .	57
FIGURE 4.1: Épaisseur du film, $h$ , aux stades précoces d'ouverture des paupières. . . . .	67
FIGURE 4.2: Épaisseur du film, $h$ , aux stades intermédiaires d'ouverture des paupières. . . . .	67
FIGURE 4.3: Épaisseur du film, $h$ , aux stades tardifs d'ouverture des paupières. . . . .	68
FIGURE 4.4: Concentration lipidique, $\Gamma$ , aux stades précoces d'ouverture des paupières. . . . .	68
FIGURE 4.5: Concentration lipidique, $\Gamma$ , aux stades intermédiaires d'ouverture des paupières. . . . .	69
FIGURE 4.6: Concentration lipidique, $\Gamma$ , aux stades tardifs d'ouverture des paupières. . . . .	69
FIGURE 4.7: Comparaison de l'épaisseur du film lacrymal, $h$ , et de la concentration lipidique, $\Gamma$ , pour les surfaces de cornée plate et sphérique. La cornée est en position verticale. . . . .	71
FIGURE 4.8: Comparaison de l'épaisseur du film lacrymal, $h$ , et de la concentration lipidique, $\Gamma$ , pour les surfaces de cornée plate et sphérique. La cornée est en position horizontale. . . . .	72
FIGURE 4.9: Comparaison de l'épaisseur du film, $h_{\min}$ , pour les surfaces de cornée plate et sphérique. a) La cornée est en position verticale. b) La cornée est en position horizontale. . . . .	73
FIGURE 4.10: Comparaison entre les vitesses superficielles dans le cas de surface de cornée plate et sphérique dans une position verticale. a) $t = 1$ et b) $t = 2$ . . . . .	74
FIGURE 4.11: Comparaison entre les vitesses moyennes dans le cas de surface de cornée plate et sphérique dans une position verticale. a) $t = 1$ et b) $t = 2$ . . . . .	75
FIGURE 4.12: Comparaison entre les vitesses superficielles dans le cas de surface de cornée plate et sphérique dans une position horizontale. a) $t = 1$ et b) $t = 2$ . . . . .	76
FIGURE 4.13: Comparaison entre les vitesses moyennes dans le cas de surface de cornée plate et sphérique dans une position horizontale. a) $t = 1$ et b) $t = 2$ . . . . .	77
FIGURE 4.14: Épaisseur du film, $h$ , pour différents nombres de Marangoni. . . . .	79
FIGURE 4.15: Hauteur du film au centre de la cornée, $h_{\text{mid}}$ , pour différents nombres de Marangoni. . . . .	80
FIGURE 4.16: Hauteur minimale du film, $h_{\min}$ , pour différents nombres de Marangoni. . . . .	81

FIGURE 4.17: Concentrations des lipides, $\Gamma$ , pour différents nombres de Marongoni. . . . .	82
FIGURE 4.18: Vitesse de surface, $u_s$ , pour différents nombres de Marongoni. . . . .	82
FIGURE 4.19: Vitesse moyenne, $u_m$ , pour différents nombres de Marongoni. . . . .	83
FIGURE 4.20: Épaisseur du film, $h$ , pour différents nombres Capillaires. . . . .	84
FIGURE 4.21: Hauteur du film au centre de la cornée, $h_{mid}$ , pour différents nombres Capillaires. . . . .	85
FIGURE 4.22: Hauteur minimale du film, $h_{min}$ , pour différents nombres Capillaires. . . . .	86
FIGURE 4.23: Concentrations des lipides, $\Gamma$ , pour différents nombres Capillaires. . . . .	86
FIGURE 4.24: Vitesse de surface, $u_s$ , pour différents nombres Capillaires. . . . .	87
FIGURE 4.25: Vitesse moyenne, $u_m$ , pour différents nombres Capillaires. . . . .	88
FIGURE 4.26: Évolutions de l'épaisseur du film lacrymal, $h$ , pendant la phase de clignement	89
FIGURE 4.27: Évolutions de la concentration lipidique, $\Gamma$ , pendant la phase de clignement	89
FIGURE 4.28: Comparaison de l'épaisseur du film lacrymal, $h$ , entre les surfaces de cornée plate et sphérique à $t=2$ . . . . .	90
FIGURE 4.29: Comparaison du profil de concentration lipidique, $\Gamma$ , entre les surfaces de cornée plate et sphérique à $t=2$ . . . . .	90
FIGURE 4.30: Comparaison de l'évolution de l'épaisseur minimale du film, $h_{min}$ , entre les surfaces de cornée plate et sphérique à $t=2$ . . . . .	91
FIGURE 4.31: Comparaison de l'évolution de l'épaisseur du film au milieu de la surface de la cornée, $h_{mid}$ , entre les surfaces de cornée plate et sphérique à $t=2$ . . . . .	91

# Nomenclature

## Lettres Latines

$\mathcal{D}$	Coefficient de diffusion surfacique des lipides	$[m^2 s^{-1}]$
$(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3), (\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_\phi)$	Bases cartésienne et sphérique	
$\mathbf{g}$	Champ gravitationnel	$[ms^{-2}]$
$h, H$	Hauteurs dimensionnelle et adimensionnelle du film	$[m]$
$h_l$	Jeu paupière supérieure cornée	$[m]$
$L$	Longueur de l'arc entre les deux paupières	$[m]$
$L_{op}$	Distance d'ouverture complète des paupières	$[m]$
$\mathbf{n}$	Vecteur normal à la surface libre	
$p$	Pression	$[pa]$
$p_0$	Pression atmosphérique	$[pa]$
$r, R_C$	Coordonnée radiale et rayon de la cornée	$[m]$
$s$	Abscisse curviligne	$[m]$
$t$	Le temps	$[s]$
$U, U_0, \dot{L}$	Vitesses de la paupière supérieure	$[ms^{-1}]$
$\mathbf{u}$	Champ de vitesse	$[ms^{-1}]$
$u, v$	Composantes du vecteur vitesse dans la base curviligne	$[ms^{-1}]$
$v_r, v_\theta$	Composantes du vecteur vitesse dans la base sphérique	$[ms^{-1}]$
$x_1, x_2, x_3$	Coordonnées de la base cartésienne	$[m]$

## Lettres Grecques

$\Gamma, \Gamma^*$	Concentrations des lipides polaire	$[mol m^{-2}]$
$\gamma, \gamma_0$	Tensions superficielles air-larmes	$[Nm^{-1}]$
$\eta$	Coordonnée curviligne normalisée	

$\theta$	Angle polaire	[rad]
$\theta_0$	Angle polaire de la paupière inférieure	[rad]
$\kappa$	Courbure de la cornée	[m <sup>-1</sup> ]
$\tilde{\kappa}$	Courbure du film	[m <sup>-1</sup> ]
$\mu$	Viscosité dynamique	[Nsm <sup>-2</sup> ]
$\rho$	Masse volumique de la couche aqueuse	[kgm <sup>-3</sup> ]
$\phi$	Angle azimutal	[rad]
$\nabla$	Opérateur gradient ou divergence	[m <sup>-1</sup> ]

### Nombres adimensionnels

$\mathcal{B}$	Nombre de Bond modifié
Ca	Nombre Capillaire
$\mathcal{C}$	Nombre Capillaire modifié
$\delta$	Rapport $L_{cl}/L_{op}$
$\epsilon$	Rapport de forme
$\mathcal{H}$	Hauteur adimensionnelle des ménisques
$\mathcal{H}_1$	Jeu adimensionnel paupière supérieure cornée
$\kappa$	Courbure adimensionnelle
Ma	Nombre de Marongoni
$\mathcal{M}$	Nombre de Marongoni modifié
Pe	Nombre de Peclet
Re	Nombre de Reynolds
St	Nombre de Stockes

### Indices et exposants

av	Moyen.
cl	Fermé.
$i, j$	Discrétisation en temps et en espace respectivement
min	Minimal.
n	Normal.
op	Ouvert.
s	Dérivée surfacique.

---

t	Tangentiel ou dérivée temporelle.
*	Au niveau du ménisque.
'	Grandeur adimensionnelle.

# Introduction générale

Le cadre général du travail présenté dans cette thèse est celui de la biomécanique. Il consiste à appliquer les principes physiques de la mécanique des fluides pour modéliser puis simuler numériquement la dynamique du liquide physiologique qui se trouve sur la cornée de nos yeux, et qu'on appelle liquide lacrymal (ou larmes). Vu que l'épaisseur du liquide lacrymal  $h$  est faible devant la longueur caractéristique de l'écoulement, celui-ci est considéré comme un film mince. Le film lacrymal couvrant la surface de la cornée et les ménisques des paupières est un exemple de la gamme variée de films minces macroscopiques de fluide que l'on trouve à la fois dans la nature, en biologie et dans l'ingénierie. En effet, ils sont rencontrés dans la nature, tels que les coulées de lave, de boue, d'avalanches ou encore les ruptures de barrages. En biologie, ils apparaissent dans les mucus qui revêtent les poumons ou à la surface des yeux comme les larmes. Ils sont aussi fréquemment présents dans de nombreux procédés industriels et technologiques, incluant les systèmes de refroidissements et les procédés de revêtement par les peintures et les adhésifs. Dans l'agriculture, on peut les rencontrer dans l'irrigation des plantes ou dans le traitement de ces plantes par des pesticides.

La modélisation de la dynamique du film lacrymal est réalisée à l'aide d'un modèle mathématique généré à partir des principes physiques de base de la dynamique des films minces, lequel modèle intègre l'interaction du liquide avec une couche de surfactant lipidique qui se trouve sur la surface libre du film lacrymal. L'étude phénoménologique menée durant cette modélisation nous a permis de simplifier les équations complexes de départ tout en respectant les hypothèses retenues et les valeurs des paramètres.

Dans cette étude on a généralisé le modèle d'Aydemir *et al.* [1] en approximant la surface de

la cornée comme sphérique plutôt que plate. La courbure de la cornée est introduite dans le modèle, qui consiste en une paire d'équations aux dérivées partielles non linéaires de l'épaisseur de la couche aqueuse couplée à la concentration des lipides en surface, associées à des conditions initiales et aux limites. Ce modèle est résolu dans un domaine, évolutif dans le temps, compris entre la paupière supérieure mobile et la paupière inférieure fixe. Durant l'élaboration du modèle mathématique de nouveaux développements sont effectués, en introduisant les coordonnées curvilignes.

En raison de la complexité des équations obtenues, elles ne peuvent être résolues qu'à l'aide de techniques numériques. Une partie de cette thèse est consacrée à la méthode des différences finies utilisée, dans cette étude, pour trouver des solutions approchées du modèle.

Cette étude est comparable au travail d'Aydemir *et al.* [1] dans une certaine mesure. Elle comporte quatre chapitres, organisés comme suit :

Le premier chapitre est réparti en deux parties. Dans la première, quelques résultats expérimentaux sur la structure, certaines propriétés physiques, et certains aspects géométriques du film lacrymal humain sont abordés. Ces résultats et propriétés sont pertinents pour la modélisation ultérieure de la mécanique des fluides du film lacrymal. La deuxième partie comprend une revue bibliographique, publiée, sur la modélisation mathématique de la dynamique du film lacrymal. La configuration étudiée ainsi que le modèle mathématique adopté de même que les conditions aux limites et initiales associées constituent le contenu du deuxième chapitre. Le troisième chapitre est consacré à la description de la méthode des différences finies, ainsi que les différents schémas qu'on peut rencontrer, et sa mise en œuvre pour la discrétisation des équations résultantes. Le quatrième et dernier chapitre, est dédié à la validation du modèle adopté et à la discussion des différents résultats obtenus. On termine par une conclusion générale résumant les principaux résultats durant cette étude et quelques perspectives pour des travaux futurs à entreprendre.

# Quelques résultats expérimentaux et revue bibliographique

Ce présent chapitre comporte deux parties. La première partie est consacrée à présenter quelques résultats expérimentaux portant sur la structure, certaines propriétés physiques, et certains aspects géométriques du film lacrymal humain. Ces résultats et propriétés sont pertinents pour la modélisation ultérieure de la mécanique des fluides du film lacrymal. La deuxième partie comprend une revue bibliographique résumant les principaux travaux, de modélisation mathématique de la dynamique du film lacrymal, existants dans la littérature.

## 1.1 Quelques résultats expérimentaux et propriétés physiques du film lacrymal

Le film lacrymal préoculaire (FLPO), sécrété par les glandes lacrymales, joue un rôle vital et essentiel dans la santé du système oculaire en assurant des fonctions nutritives pour les cellules les plus éloignées de l'œil, en protégeant la surface de la cornée et la conjonctive contre les contaminations et les infections bactériennes, en gardant l'œil humide, en nettoyant l'œil des corps étrangers, des débris et des métabolites indésirables, et en lubrifiant le mouvement des paupières sur la cornée [27, 41]. En plus de ces fonctions, le film lacrymal doit assurer une surface optique lisse de haute qualité, ce film est la première et principale interface de réfraction de l'œil et doit donc rester aussi uniforme que possible sur la région centrale de la cornée afin que sa forme ne diffuse pas incorrectement la lumière incidente, affectant ainsi l'acuité visuelle de l'œil. Toutes ces

fonctions sont simultanément réalisées en environ 5 à 10 secondes, une période pendant laquelle l'œil reste ouvert. Dans un œil sain normal, le film lacrymal reste stable pendant cette période inter clignement avec peu ou pas de rupture du film avant que le clignement des yeux ne le restaure. Si le film lacrymal déposé sur la surface de la cornée est instable ou fin, finit par se rompre ou s'évaporer avant que le clignement des yeux suivant ne puisse le rétablir. Ce qui se produit généralement dans le cas d'un œil affecté. Cette rupture rend la surface de la cornée vulnérable aux zones sèches provoquant ainsi une vision floue et des sensations brûlantes (ce sont des symptômes d'une maladie à grande diffusion, connu sous le nom de syndrome des yeux secs [35]). La maladie des yeux secs est un trouble des larmes et de la surface oculaire qui est associé à des dommages potentiels à la surface oculaire. La sécheresse oculaire entraîne une augmentation de l'osmolarité du film lacrymal qui provoque une inflammation de la surface oculaire [35]. Dans les cas graves, le film lacrymal se rompt. Il existe deux principaux types de sécheresse oculaire [35] : l'œil sec aqueux déficient (initié, par exemple, par un manque de production de liquide par les glandes lacrymales), et l'œil sec évaporatif (causé par un clignement non standard ou par une augmentation de la vitesse d'évaporation du film lacrymal). Les traitements pour la sécheresse oculaire comprennent le remplacement du liquide lacrymal par des larmes artificielles, le port de lunettes pour réduire l'évaporation et la stimulation de la production des larmes.

Dans les sections suivantes, on se réfère à la région palpébrale de l'œil. Ce terme se réfère aux zones contenant les paupières et leurs structures associées, dont les structures sont l'emplacement des systèmes de sécrétion et de drainage pour le film lacrymal. L'ouverture elliptique entre les paupières supérieure et inférieure est connue anatomiquement comme la fissure (ou la fonte) palpébrale.

### 1.1.1 Structure du film lacrymal

Le film lacrymal est un film liquide à trois couches formé par des couches muqueuse, aqueuse et lipidique [8, 10, 1, 36]. Son épaisseur est estimé entre 3 et 10  $\mu m$  [33]. Le mucus est très mince et possède des propriétés hydrophiles; Il recouvre la surface oculaire et ses ménisques, qui se forment lorsque le fluide recouvre les marges des paupières. Au-dessus de la couche de mucus, la couche aqueuse, qui forme la majeure partie du volume des larmes. Les lipides, constitués de composants polaires et non polaires, forment la couche la plus extérieure. Les lipides polaires sont répartis sur l'interface entre la couche aqueuse et la couche de lipides non polaires. Les lipides

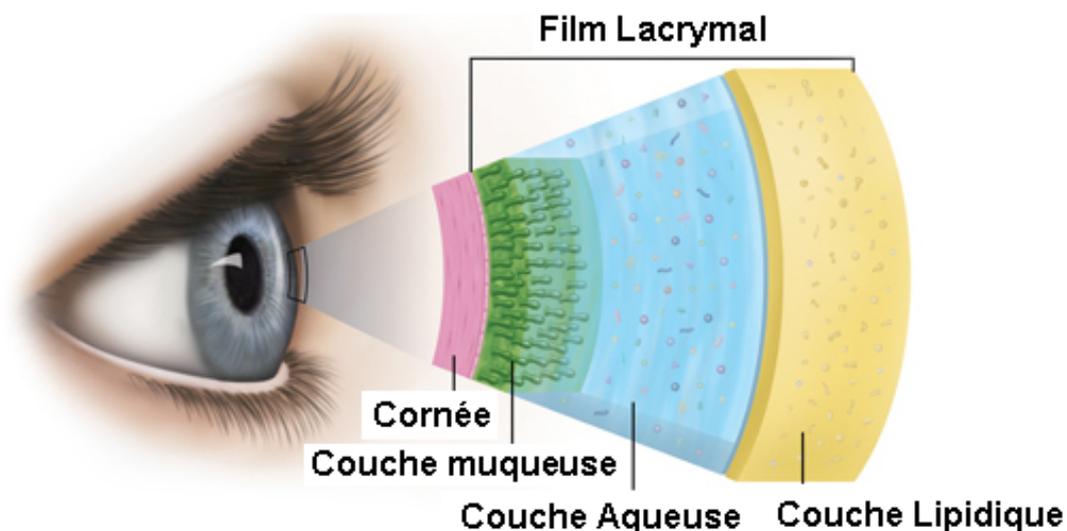


FIGURE 1.1 – Structure du film lacrymal

polaires agissent comme tensioactifs ; Ils diminuent la tension superficielle et réduisent l'évaporation de la couche aqueuse [37]. Dieckow & Argüeso [16], ont décrit un modèle à deux couches pour lequel les couches muqueuses et aqueuses comprennent une seule phase, en plus du modèle traditionnel à trois couches. Le film lacrymal se répartit principalement par le réflexe de clignement des yeux. Une schématisation de la structure à trois couches du film lacrymal est illustré sur la figure 1.1.

#### 1.1.1.1 Couche muqueuse

Une partie du mucus est sécrétée à partir des cellules épithéliales, une autre partie par les cellules à mucus conjonctivales (voir figure 1.2) ; On pense que le mucus à l'épithélium est constitué de mucines formant un gel (glycocalyx épithélial) qui se retrouvent parmi les bosses de doigts, ou la microplacae [21, 8], servant à maintenir le film lacrymal à l'œil et rendre l'épithélium hydrophile. La couche de mucus présente un gradient décroissant de concentration en mucines depuis la surface oculaire. Il existe ainsi une transition progressive entre une zone profonde à caractère véritablement muqueux et géliforme (d'environ  $0.05\mu m$  d'épaisseur) et une zone superficielle plus hydratée à caractère aqueux (d'environ  $10\mu m$  d'épaisseur). De ce fait, l'interface entre la couche muqueuse et la couche aqueuse, s'il existe une interface pointue, est difficile à observer expérimentalement comme l'a expliqué King-Smith *et al.* [33]. On doit plutôt parler de composantes aqueuse et mucinique organisées au sein d'une même phase mucino-aqueuse. Cette dernière



FIGURE 1.2 – a : Orifices des glandes de Meibomius (cercles noirs). b : Vue transconjonctivale de l'alignement intratarsal des glandes de Meibomius.

fournit ainsi un plan de clivage pour les mouvements palpébraux et évite la transmission de forces de cisaillement à l'épithélium sous-jacent. De plus, en recouvrant la surface oculaire hydrophobe et grâce à leurs propriétés hydrophiles, les mucines permettent l'existence et la bonne tenue d'une phase liquidienne mucinoaqueuse d'environ  $10 \mu m$ .

La question de savoir si les mucines forment une couche contiguë ou sont réparties dans toute la couche aqueuse reste un sujet de débat parmi les ophtalmologistes. Dans notre étude, nous les considérons, qu'elles forment une partie de la couche aqueuse.

### 1.1.1.2 Couche aqueuse

La couche aqueuse a une épaisseur comprise entre 3 et  $10 \mu m$  [27, 33], est produite par les glandes lacrymales (voir la figure 1.3) constituée principalement d'eau (environ 98%), avec une variété de composants formant l'équilibre (des électrolytes, des protéines et des enzymes antibactériens, etc..) et se trouve au-dessus de la cornée et de toute couche de mucus possible [41, 19]. Il existe aussi des mucines solubles dans la couche aqueuse [21]. La couche aqueuse est, essentiellement, ce qu'on croit généralement comme des larmes elle fournit l'oxygène et les nutriments à l'œil, retire les débris et les métabolites et préserve l'équilibre osmotique.

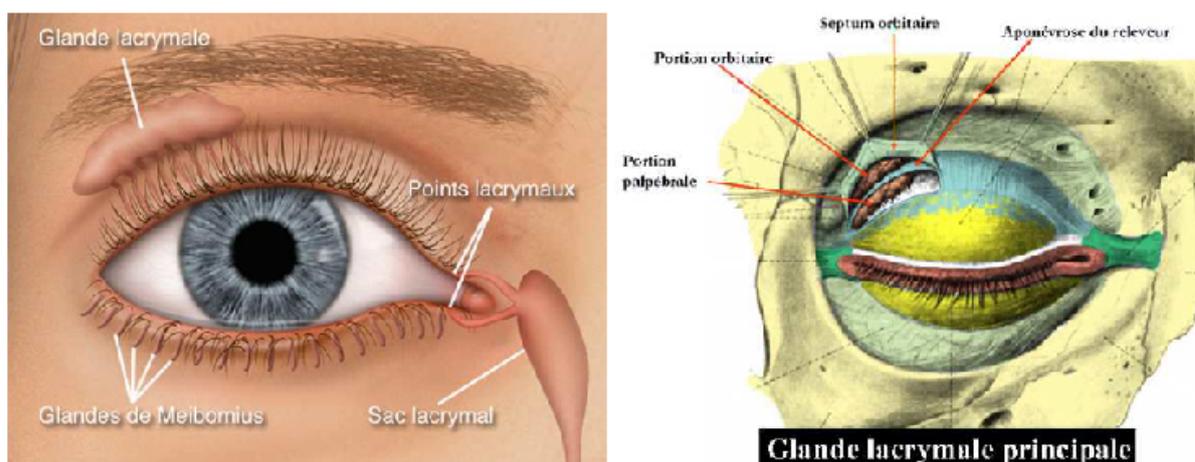


FIGURE 1.3 – Glande lacrymale

### 1.1.1.3 Couche lipidique

La couche lipidique externe, fine, d'une épaisseur inférieure à 100 nanomètres (nm), est composée d'une couche superficielle non polaire avec des tensioactifs polaires à l'interface aqueuse / lipidique [11]. Sécrétée essentiellement par les glandes de Meibomius, joue un rôle capital pour stabiliser le film lacrymal. Le film lipidique assure de nombreux rôles [37] : -le FL a un rôle anti-évaporatif. Il réduit d'un facteur 10 à 20 la perte aqueuse. On se rappellera que l'élimination du FLPO se fait pour 75 % par voie évaporative et pour 25 par la voie lacrymonasale. En cas de trouble évaporatif, cette tendance se trouve encore plus accentuée;

-le FL réduit la tension de surface du FLPO d'environ 25 %. Cela permet un meilleur drainage sous-jacent d'eau et participe au maintien de la phase mucinoaqueuse. C'est l'effet Marangoni. La tension de surface détermine le pouvoir mouillant des larmes sur la cornée. Plus elle est élevée, c'est à dire plus l'énergie libre du système est importante, plus le FLPO est instable et a une durée de vie courte. La tension de surface contrôle ainsi le niveau d'équilibre entre le film précornéen et les ménisques lacrymaux. Ces derniers risquent d'être majorés aux dépens du FLPO en cas d'augmentation de l'énergie libre de surface. La bonne capacité d'étalement des sécrétions meibomiennes permet donc d'abaisser la tension de surface. Ce sont les phospholipides du FL qui y contribuent de manière déterminante;

-le FL permet aussi la collection et l'élimination rapide des poussières de petit calibre qui viennent s'y déposer;

- le FL lisse le FLPO lui-même et améliore ses qualités optiques;
- le FL a de plus un rôle antimicrobien. Il fournit des acides gras qui forment des complexes bactéricides en association avec des mucines.

Rappelons qu'en s'étalant sur la marge palpébrale, les sécrétions meibomiennes forment une barrière mécanique qui s'oppose au passage oculaire des lipides cutanés d'origine sébacée. Le meibum est en effet plus visqueux que le sebum.

Au total, la stabilité et le caractère fonctionnel du FLPO dépendent de nombreux facteurs. Une qualité, une quantité et une distribution adéquates en lipides, eau et mucines sont nécessaires. Une surface oculaire de bonne qualité fournit un bon ancrage épithélial aux mucines lacrymales. Enfin un clignement régulier et complet, avec contact entre les deux paupières, prévient l'apparition de spots secs qui résulteraient d'un défaut d'étalement et de couverture lacrymale.

## 1.1.2 Propriétés du liquide lacrymal

### 1.1.2.1 Lubrification et viscosité

La lubrification consiste à créer une couche de faible viscosité entre deux surfaces afin de faciliter leur glissement l'une par rapport à l'autre. l'effet lubrifiant des larmes consiste à diminuer le frottement due aux frictions des paupières sur le globe oculaire lors du clignement palpébral. On considère que ce frottement est la cause des symptômes dans le syndrome de la sécheresse oculaire et ses sources ont été étudiées par Pult [46]

Quand les surfaces sont séparées par une couche liquidienne, la lubrification est appelée hydrodynamique, alors que quand elles sont en contact direct, le terme utilisé est lubrification limite [47, 26, 18]. Un état intermédiaire, mixte existe également [30]. Une lubrification appropriée peut diminuer le degré de lésions ou d'abrasion engendrée par les forces de frottement. Pour plus de détails on peut se référer au Rapport Physiopathologie du DEWS II de la TFOS [9].

La viscosité d'une solution est due aux forces de frictions internes entre les particules d'un fluide. Dans le cas du liquide lacrymal elle permet de stabiliser le film sur la surface oculaire et de diminuer l'effet de drainage. On la mesure en centipoise (cP).

La mesure de la viscosité du meibum humain (excrété par les glandes de Meibomius à l'intérieur des paupières), en utilisant un tube capillaire, effectuée par Tiffany et al [55], donne des valeurs de 9,7 à 19,5 Pa.s à 308K.

Le clignement implique des taux de cisaillement élevés dans le film lacrymal, nécessitant

une faible viscosité des larmes pour éviter d'endommager les surfaces épithéliales. Inversement, dans l'œil ouvert, une viscosité plus élevée est souhaitable pour résister au drainage et à la rupture du film..

### 1.1.2.2 Comportement rhéologique des larmes

Pour un fluide newtonien dont la viscosité est indépendante de la vitesse de cisaillement, le frottement hydrodynamique augmente avec un taux de cisaillement croissant; Mais les larmes normales se comportent comme un fluide non-newtonien [54, 45] dont la viscosité diminue avec l'augmentation de la vitesse de cisaillement (c.-à-d.un comportement rhéofluidifiant). Un modèle croisé à quatre paramètres (Modèle de Cross) est utilisé pour l'ajustement de la loi de puissance sur de plus petites gammes de taux de cisaillement dans des modèles théoriques plus récents. Tiffany *et al.* [53] ont également montré que la présence de grandes molécules de protéines et de mucines dans le film lacrymal confèrent à celui-ci des propriétés élastiques. Tiffany et Nagyova [54] ont découvert que l'élimination de tous les lipides des larmes provoquait la formation d'un fluide lacrymal Newtonien.

### 1.1.2.3 Tension superficielle du film lacrymal et effet Marangoni

En mécanique des fluides, on désigne par effet Marangoni (du nom du physicien italien Carlo Marangoni) les phénomènes de transport de matière le long d'une interface sous l'effet d'un gradient de tension superficielle. Comme un liquide avec une tension de surface élevée tire plus fortement le liquide qui l'entoure qu'un liquide de faible tension, la présence d'un gradient de tension de surface force naturellement le liquide à couler des régions de basses tension vers les régions de hautes tension de surface. Ce gradient peut être provoqué par un gradient de concentration ou par un gradient de température (la tension de surface dépendant de la température). La présence de la couche lipidique superficielle et son effet sur la tension de surface des larmes illustre certains défis de la recherche sur les films lacrymaux.

la tension superficielle d'une interface air-eau pure est de  $7.3 \times 10^{-2} Nm^{-1}$ . Les mesures de la tension superficielle des larmes, conduites par Miller [40], à l'aide d'une lentille de contact spéciale et d'une bague de fil, ont abouti à une valeur de  $4.6 \times 10^{-2} Nm^{-1}$ . La couche lipidique réduit considérablement l'énergie libre de surface du film lacrymal. Tiffany *et al.* [56] mènent à leur tour des investigations pour la mesure de la tension superficielle des larmes et donnent la valeur de

$4.36 \times 10^{-2} Nm^{-1}$ .

Pandit *et al.*[45] ont mesuré la tension superficielle des larmes entières avec un tube capillaire et ont obtenu  $4.3 \times 10^{-2} Nm^{-1}$  pour les larmes non stimulées et  $4.6 \times 10^{-2} Nm^{-1}$  pour les larmes stimulées. La valeur de  $4.5 \times 10^{-2} Nm^{-1}$  est généralement acceptée pour la tension superficielle des larmes et est souvent utilisé dans les études théoriques.

### **Propagation de la couche lipidique selon (Rapport Physiopathologie du DEWS II de la TFOS [9])**

La couche lipidique du film lacrymal est formée au moment de la remontée des paupières lors de chaque clignement, lorsque le lipide issu du réservoir meibomien inférieur se propage vers le haut au-dessus de la sous-phase aqueuse du film lacrymal pré-oculaire. Il a été suggéré que l'amincissement de la couche lipidique génère une augmentation locale de la tension superficielle, qui est la force motrice pour la propagation. Il a été proposé que la propagation implique initialement une interaction entre les lipides meibomiens polaires et la phase aqueuse du film lacrymal et que la couche lipidique polaire agisse ensuite comme un transporteur pour la fraction lipidique apolaire. Dans l'œil normal, la propagation de la couche lipidique du film lacrymal peut être observée cliniquement par vidéo microscopie d'interférence, quand elle apparaît sous forme d'un front de franges colorées, disposées horizontalement, se propageant vers le haut. Le film lipidique se propage rapidement au début (environ 10 mm/s), accumulant un retard important derrière la paupière supérieure, dont l'excursion est terminée en quelques centaines de millisecondes. La propagation se ralentit et se stabilise après 1 s ou plus, avec un schéma d'interférences montrant une stabilité remarquable pendant le reste de l'intervalle de clignement des paupières.

#### **1.1.2.4 Osmolarité**

L'osmolarité lacrymale est définie comme étant la concentration en agents osmotiques dans le fluide lacrymal, mesurée en mOsm/l. Elle joue un rôle essentiel dans la pathologie des yeux secs. Les mesures d'osmolarité prises sur les personnes atteintes du syndrome de la sécheresse oculaire montrent des valeurs supérieures à 312 mOsm/l.

L'hyperosmolarité des larmes est une conséquence d'une diminution du flux lacrymal ou d'une rupture du film lacrymal contribuant aux lésions de la surface oculaire, se manifestant par un ensemble d'événements inflammatoires.

Au contact d'un milieu hyperosmolaire, les cellules épithéliales équilibrent le gradient d'osmo-

larité en expulsant de l'eau vers le milieu extérieur, et donc en se déshydratant : la dessiccation est la première conséquence biologique de l'hyperosmolarité.

Cet environnement hyperosmolaire inflammatoire favorise l'apoptose des cellules épithéliales de la cornée et de la conjonctive et des cellules caliciformes qui contribue ultérieurement à l'instabilité du film lacrymal. L'inflammation induite par l'instabilité du film lacrymal et l'hyperosmolarité contribuent également à l'inflammation neurogène chronique et à l'augmentation de la gravité de la maladie.

#### 1.1.2.5 Évaporation du film lacrymal

Une fonction importante de la couche lipidique est d'entraver l'évaporation de l'eau de la couche aqueuse [14] et cela a fait l'objet de nombreuses études. Mishima et Maurice [42] ont déduit le taux d'évaporation des observations de la cornée chez les lapins. Ils ont trouvé une évaporation accrue si la couche lipidique a été enlevée. Des lunettes spéciales ont été développées pour être utilisés chez l'homme (pour les études récentes, (voir Mathers [39], Tomlinson *et al.*, [58]). Les taux d'évaporation mesurés à partir de l'utilisation d'approches basées sur des lunettes de protection vont d'environ  $2$  à  $60 \times 10^{-6} \text{kgm}^{-2}\text{s}^{-1}$  pour les yeux secs. Dans Craig & Tomlinson [14] les taux d'évaporation ont été liés à la structure de la couche lipidique évaluée à partir de l'apparence visuelle avec des modèles d'interférence. Les couches lipidiques de qualité inférieure avec une grande variation d'épaisseur ou des lacunes apparentes ont eu des taux d'évaporation plus importants.

Récemment, des mesures du taux d'amincissement du film lacrymal ont été utilisées pour estimer le taux d'évaporation de l'eau provenant du film lacrymal [43, 34]. Cette méthode évite de contraindre le flux d'air autour de l'œil, mais ne mesure pas directement la masse d'eau qui laisse le film lacrymal. Dans Nichols *et al.*[43], une distribution bimodale des taux d'éclaircie a été trouvée dans les secondes suivant un clignotement, le mode inférieur a atteint un pic à environ  $2,5 \mu\text{m} / \text{min}$  et le mode supérieur a culminé à environ  $10 \mu\text{m} / \text{min}$ . King-Smith *et al.* [34] épaisseur de couche lipidique quantitatif et taux d'évaporation ; Ils ont trouvé une corrélation modeste entre les deux indiquant que l'épaisseur de la couche lipidique et sa composition sont importantes pour limiter l'évaporation.

### 1.1.3 Géométrie du film lacrymal

Le film lacrymal est une couche très mince répartie sur la surface oculaire. Il couvre à la fois la cornée et une partie des paupières supérieure et inférieure appelée ménisques.

#### 1.1.3.1 Géométrie de la cornée

La cornée est une surface asphérique : sa courbure varie en chaque point d'un méridien considéré. Parmi les modèles mathématiques proposés pour fournir une description proche de la réalité asphérique de la cornée, les sections coniques sont les plus utilisées et fournissent une approximation permettant d'appréhender la forme du profil cornéen au moyen de deux variables : le rayon de courbure apical du méridien considéré, et un paramètre permettant d'en quantifier l'asphéricité [15]. Il existe cependant une grande variabilité interindividuelle et environ 20 % des sujets normaux présentent une cornée dite oblate, voire paraboloidale ou hyperboloidale. L'asphéricité cornéenne évolue avec l'âge, devenant plus sphérique (pour une cornée initialement prolatae)[15].

En effet la cornée est étroitement approchée par un sphéroïde de type prolatae (Read et al [48]). En principe, cette forme de surface cornéenne pourrait générer des gradients de pression et un débit d'entraînement, mais cet effet est négligeable (Berger & Corrsin; Braun *et al.*[2, 7]). Le reste du globe, ou globe oculaire, est étroitement approché par une sphère de rayon  $10^{-2}m$  (par exemple, Fatt & Weissman [19]).

#### 1.1.3.2 Hauteur des ménisques

Le ménisque du film lacrymal est une région d'épaisseur accrue à la marge de la paupière. Le film lacrymal mouille la marge de paupière vers la jonction mucocutanée, qui est la limite qui sépare la surface conjonctivale mouillable de la surface de la peau moins humide; Il sépare les parties antérieure et postérieure de la paupière. La jonction mucocutanée est juste postérieure dans les orifices méibomiens où les lipides sont excrétés à partir des glandes meibomiennes situées à l'intérieur des paupières. La hauteur du ménisque de la larme est la distance parcourue le long du bord de la paupière normalement (antérieurement) sur la surface oculaire. Les valeurs moyennes rapportés sont de  $6 \times 10^{-5}m$  (Mainstone *et al.*; Golding *et al.*[38, 22])

### 1.1.4 Le cycle de clignement et la dynamique des larmes

Le film lacrymal est régulièrement renouvelé par des clignements spontanés [12, 13] dont la fréquence est adaptée aux conditions environnementales et varie en fonction du comportement individuel. Les clignements jouent un rôle majeur dans la dynamique des larmes grâce à la diffusion, le mélange et la distribution des larmes, et à l'élimination des débris cellulaires et autres débris. Le cycle de clignement comprend le clignement lui-même (environ 200 à 300 ms) et l'intervalle entre les clignements, au cours duquel survient une perte d'eau par évaporation [59]. La fréquence des clignements s'exprime en clignements par minute [9].

#### **La fréquence des clignements.**

Des variations importantes de la fréquence des clignements ont été rapportées chez les adultes normaux, reflétant probablement la disparité entre les individus et l'influence des conditions environnementales et expérimentales. Elle est fortement influencée par l'état mental, l'activité physique, l'exposition des yeux, et l'environnement. Les facteurs environnementaux qui sont importants sont l'humidité relative, la température et la ventilation au-dessus des yeux. La fréquence des clignements est augmentée par une faible humidité, le froid et la vitesse du vent [9].

Dans des conditions ambiantes normales (par exemple 22 °C avec une humidité de 40,0 %), la fréquence des clignements chez les adultes normaux est comprise entre 15 et 20 clignements par minute [59].

#### **Mouvement des paupières**

Le mouvement des paupières pendant les clignements "non forcés" ou spontanés a été filmé à l'aide de photographies à haute vitesse par Doane [17]. L'analyse image par image a indiqué qu'un clin d'œil normal non contraint dure nominalelement 0.258s, la descente de la paupière supérieure ayant une durée de 0.082s et une remontée de 0.176s. Les vitesses maximales de la paupière variaient de 10 à 30 cm/s pendant la descente; les vitesses de la remontée valent environ la moitié de celle de la descente. Il a également constaté que de nombreux clignotements étaient incomplets, et quelques sujets n'émettaient jamais de clignements complets pendant la période de film des années 45.

## 1.2 Revue bibliographique sur les modèles d'écoulement du film lacrymal

Une pléthore de littérature a été publiée contenant des modèles mathématiques pour les flux de films minces. La quête de comprendre le syndrome de l'œil sec à partir d'une perspective de dynamique des fluides a suscité un intérêt croissant pour le problème de la dynamique du film lacrymal. De nombreux articles ont été publiés au cours des quinze dernières années. Une variété d'études portant sur l'évaporation, la gravité, la viscosité et les effets de tension superficielle sont menées [10, 1, 5, 29, 25]. Pour plus de détails, nous renvoyons le lecteur à l'examen de Braun [4] (Braun's review).

Plusieurs modèles mathématiques pour la dynamique du film lacrymal ont été proposés; Ils dérivent de la théorie de lubrification. Bien que les films lacrymaux présentent des propriétés d'amincissement et d'élasticité par cisaillement [53], la plupart des modèles considèrent la couche aqueuse comme un fluide newtonien. Les premiers modèles sont, généralement, caractérisés par une équation aux dérivées partielles non linéaire unidimensionnelle pour l'épaisseur de la couche aqueuse. Ils sont résolus dans un domaine piégé entre deux paupières stationnaires [60, 50, 51]. Les effets gravitatifs et évaporatifs sont ajoutés au modèle mono-couche de la dynamique du film lacrymal [5]. Certaines études relativement récentes ont résolu les modèles unidimensionnels dans les domaines dépendants du temps, où la paupière inférieure est supposée stationnaire tandis que la paupière supérieure se déplace. Par exemple, Jones *et al.* [29] ont étudié la stabilité du flux de film lacrymal tel qu'il avait été déposé par le mouvement de la paupière supérieure entre les clignements. Leur modèle de lubrification comprend les effets de la tension superficielle, de la viscosité, de la gravité et de l'évaporation. Ils ont souligné l'influence de la vitesse de la paupière et de la concentration de la couche lipidique sur la stabilité du film lacrymal. Ce résultat a été confirmé par Jones *et al.* [31], qui ont étudié à la fois l'évolution de l'épaisseur du film lacrymal et l'étalement des lipides sur la surface du film lacrymal. Ces auteurs ont montré le rôle du flux de Marangoni, dû à la distribution non uniforme des lipides, dans le tirage du film lacrymal vers le haut le long de la cornée lors de la phase d'ouverture.

D'autres modèles mathématiques (récents) ont également considéré le clignement des yeux. Par exemple, Braun *et al.* [6] ont résolu une seule équation aux dérivées partielles non linéaire pour l'épaisseur du film lacrymal en utilisant un mouvement sinusoïdal de la paupière supérieure. Ce modèle a été affiné par Heryudono *et al.* [25] et résolu avec un mouvement de paupière réaliste.

Aydemir *et al.* [1] ont résolu leur modèle, qui consiste en un système de deux équations différentielles aux dérivées partielles non linéaires couplées pour l'épaisseur du film et la concentration en lipides, dans un domaine en mouvement. Le mouvement de la paupière supérieure a été déduit des mesures de sa vitesse pendant la phase d'ouverture [60]. Plus récemment, Bruna et Beward [10] ont étendu le modèle mono-couche d'Aydemir *et al.* [1] en incluant une couche lipidique non polaire. La couche lipidique non polaire a été placée au-dessus de la couche aqueuse tandis que le lipide polaire est étalé sur l'interface entre les deux couches. Il existe également certains modèles qui considèrent que le mucus et les couches aqueuses sont séparées, avec une propagation des lipides à la surface de la couche aqueuse [61, 63, 51].

Presque tous les modèles de films lacrymaux supposent que le substrat (la cornée ou les lentilles de contact) sous le film lacrymal soit plat. Cette approximation est basée sur le fait que l'épaisseur du film lacrymal, qui est de l'ordre de quelques microns, est très faible par rapport au rayon moyen de courbure de la surface de la cornée, qui est de l'ordre d'un centimètre [2]. Gorla et Gorla [23, 24] ont pris une forme cylindrique pour la cornée et ont étudié la rupture du film lacrymal couvrant la cornée. Braun *et al.* [7] ont reconsidéré l'approximation de la cornée plane en supposant une forme cornéenne sphéroïdale (ellipsoïdale) allongée (prolate). Ils ont considéré le flux d'un mince film fluide sur la cornée entraîné uniquement par le gradient de pression en raison des variations de la courbure. Ils ont conclu, en fonction du taux d'amincissement au centre de la cornée, que les courbures n'ont pas un fort effet sur la dynamique du film lacrymal. Le rayon de courbure de la cornée est du même ordre que la distance entre les paupières lorsque l'œil est complètement ouvert. Par conséquent, il est intéressant d'envisager son interaction avec le mouvement de la paupière supérieure et d'autres flux entraînés par Marangoni, la capillarité et la gravité.

Dans cette étude, nous étendons l'étude d'Aydemir *et al.* [1] en considérant la surface de la cornée comme sphérique plutôt que plate. Nous aurions pu considérer une surface de cornée sphéroïdale allongée (prolate), qui est considérée comme la meilleure approximation pour la surface de la cornée. La courbure d'un sphéroïde allongé varie le long de la surface de la cornée [7]. Cependant, afin de se concentrer sur l'interaction de la courbure avec les effets de Marangoni, de capillarité et de gravité, nous avons supposé que la surface de la cornée était sphérique, avec une courbure constante. L'approximation sphérique, de la forme de la cornée, peut être considérée comme raisonnable. En effet, le gradient de pression dans le film lacrymal dû à la variation de la

courbure dans le cas du substrat sphéroïdal allongé (prolate), n'a pas été suffisamment influant pour avoir un effet significatif sur le taux d'éclaircie, observé dans des conditions typiques [7]. Les courbures d'une forme sphéroïdale allongée varient légèrement sur le domaine des yeux. En outre, l'approximation sphérique est intéressante si l'on considère que, avec le vieillissement, la surface de la cornée devient plus sphérique [15] et le temps de rupture du film lacrymal diminue significativement [44].

## Modèle mathématique

Ce chapitre contient la présentation d'un modèle mathématique pour décrire l'effet de la courbure du substrat, constitué par la forme considérée sphérique de la cornée, et l'effet des lipides polaires, excrétés par les glandes dans la paupière et présents sur la surface du film lacrymal, sur la dynamique du liquide lacrymal pré-cornéen, supposé visqueux, incompressible et bidimensionnel, pendant le processus de clignement. Les équations décrivant l'évolution de l'épaisseur du film lacrymal, revêtant un substrat courbe (sphérique) entouré de la paupière inférieure fixe et supérieur mobile, et la concentration des lipides polaires sont déduites. La schématisation du problème est donnée dans la section 2.2.2 (voir figure 2.3).

Le lipide polaire est une espèce de surface insoluble qui modifie localement la tension de surface du film lacrymal. Sous l'hypothèse de lubrification supposant que la profondeur caractéristique du film est petite par rapport à la longueur d'arc le long du substrat, une paire d'équations d'évolution spatio-temporelles différentielles et couplées, pour l'épaisseur du film et la concentration de lipides, est obtenue. Les effets concurrents de la gravité et de la capillarité sont inclus dans la modélisation. Pour observer l'effet de la courbure du substrat sur le comportement du système, les équations sont déduites, d'abord, en coordonnées sphériques, avec un changement de système de coordonnées aux coordonnées dites "*curvilignes*" (voir la section 2.3.1 pour les détails) qui sont introduites admettent une transition simple vers un système de coordonnées cartésiennes dans le fluide lorsque le rayon de courbure du substrat est augmenté à l'infini. À l'exception de Braun *et al* [7] qui considère la cornée comme un sphéroïde prolaté et Gareth Alan Douglas Hurst [20], la littérature dans ce domaine se concentre principalement sur des modèles cartésiens ou plans, ce développement fournit donc une nouvelle quantification des effets de la courbure

comparé au modèle cartésien développé par Aydemir *et al.* [1].

## 2.1 Modèles d'équations de mouvement des paupières

Dans cette étude, nous présenterons deux modèles d'équations pour le mouvement de la paupière supérieure. Ces modèles sont utilisés dans deux situations différentes :

- **Modèle d'Aydemir *et al.* [1]** : Le volume initial de larmes pris dans ce modèle est important, sur-estimé, et donc non réaliste. Pour comparer les résultats de notre modèle (cornée sphérique) avec celui d'Aydemir (cornée plane), nous nous sommes mis dans les mêmes conditions d'écoulement et par conséquent, nous avons pris les mêmes équations décrivant le mouvement de la paupière supérieure.

- **Modèle de Bruna *et al.* [10]** : Considère un volume de larmes initial plus réaliste. Nous avons consacré une petite partie de l'étude, en considérant les conditions d'écoulement du modèle de Bruna *et al.*, pour confirmer l'effet de la courbure sur l'écoulement indépendamment de la taille du volume initial des larmes.

### 2.1.1 Modèle de mouvement de paupière supérieure d'Aydemir

Pour déterminer la position et la vitesse typiques de la paupière supérieure à un moment donné, Aydemir *et al.* [1] utilisent les mesures présentées par Wong *et al.* [60]. Cependant, ils utilisent une forme fonctionnelle différente de celle employée par Jones *et al.* [29], parce que leur modèle de vitesse dicte qu'il faut un temps infini pour que la paupière s'immobilise. Dans leur étude, Aydemir *et al.* [1] étudient le mouvement du fluide lorsque la paupière s'ouvre et après qu'elle devient stationnaire pour une situation où l'œil est maintenu ouvert pendant une période de temps prolongée.

La forte accélération initiale les motive à utiliser la formule

$$U(t) = \begin{cases} U_0 (\lambda \sqrt{t/\tau} e^{-t/\tau} - t/\tau), & 0 \leq t \leq t^* \\ 0, & t > t^* \end{cases} \quad (2.1)$$

où  $U_0$ ,  $\lambda$  et  $\tau$  sont des constantes trouvées en ajustant l'équation 2.1 aux données de Wong *et al.* [60]. Celles-ci sont trouvées pour les valeurs approximatives

$$U_0 = 0.0163 \text{ m/s}, \quad \lambda = 11.6, \quad \tau = 0.0865 \text{ s} \quad (2.2)$$

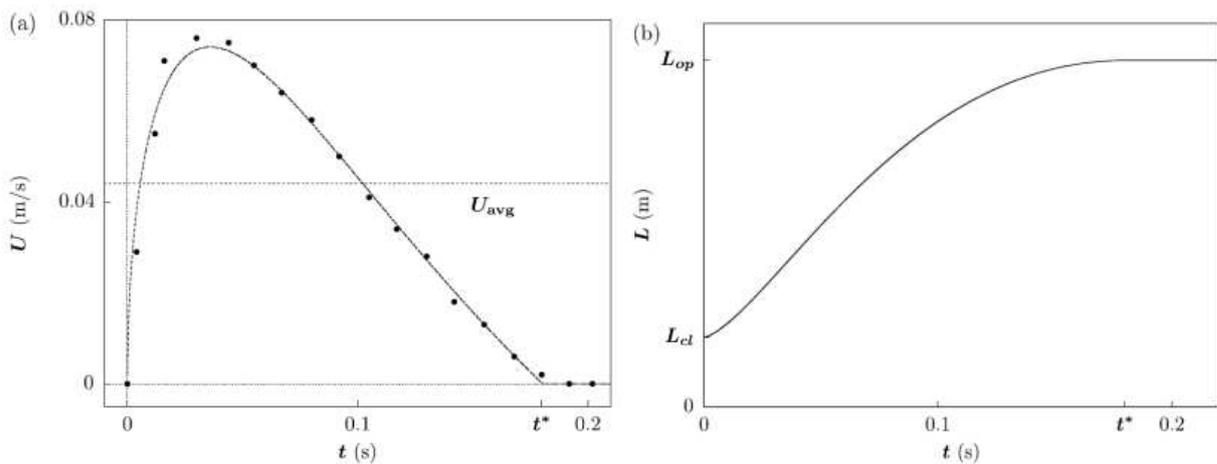


FIGURE 2.1 – (a) Vitesse de la paupière supérieure pendant la phase d'ouverture d'un clignement  $U(t)$ , (...) points de données extraites de Wong *et al.*[60] et (—) courbe tracée avec les paramètres donnés par : (2.1, 2.2). (b) Longueur de déplacement correspondante  $L(t)$  donnée par(2.3)

Dans la figure (2.1) la constante  $t^*$  est l'instant auquel la vitesse devient nulle, trouvée en résolvant  $\lambda^2 \tau e^{-2t^*/\tau} = t^*$ , ce qui donne  $t^* \approx 0.180s$ . La position,  $L(t)$ , de la paupière supérieure est définie par  $U(t) = \dot{L}(t)$ , ce qui donne

$$L(t) = \begin{cases} L_{cl} + U_0 \tau \left\{ -\frac{1}{2} \left( \frac{t}{\tau} \right)^2 + \lambda \left[ \frac{\sqrt{\pi}}{2} \operatorname{erf} \left( \sqrt{\frac{t}{\tau}} \right) - \sqrt{\frac{t}{\tau}} e^{-\frac{t}{\tau}} \right] \right\}, & 0 \leq t \leq t^*; \\ L_{op}, & t > t^*. \end{cases} \quad (2.3)$$

Où  $L_{cl}$  est la position effective de la paupière supérieure fermée (ou partiellement fermée) à  $t=0$ . Ils soulignent le point important que, à partir des données, ils sont seulement en mesure de déterminer la distance que la paupière supérieure a parcourue (ie  $L_{op} - L_{cl}$ ) plutôt que  $L_{op}$  ou  $L_{cl}$  indépendamment. Pour  $t^* = 0.18s$ , ils utilisent l'équation 2.3 pour déterminer que  $L_{cl} = 0.002m$ , correspond à une distance entre les paupières,  $L_{op} = 0.01m$  lorsque l'œil est complètement ouvert. Cette valeur est plus grande que la distance "fermée" citée ailleurs (voir par exemple Braun *et al.*[6] et soulignent la nécessité d'un ensemble de données décrivant la distance de la paupière plutôt que la vitesse de la paupière. Ils ont abouti à une valeur différente pour  $L_{cl}$ . Une conséquence de ce choix pour  $L_{cl}$  est que Aydemir *et al.* [1] ont un plus grand volume de liquide entre les paupières que les autres auteurs. Ils partent de l'hypothèse que leurs choix pour ces deux valeurs n'altéreront pas significativement leurs résultats, et qu'à l'avenir, plus un ensemble de données complet peut devenir disponible. La quantité confinée entre les paupières fermées représente le volume du liquide lacrymal qui s'étendra sur l'œil lorsque les paupières se sépareront. En utilisant

ces valeurs, ils sont en mesure de calculer une vitesse moyenne pour la phase d'ouverture, trouvée en calculant  $U = U_{av} = \frac{1}{t^*} \int_0^{t^*} \dot{L}(t) dt = 0.044 \text{ m/s}$

### 2.1.2 Modèle de mouvement de paupière supérieure de Bruna

Bruna *et al.* [10] supposent que la paupière inférieure est stationnaire et que la paupière supérieure bouge pendant un clignement. Dans leur étude, ils s'intéressent à l'évolution du film lacrymal sur un cycle de clignement, consistant en la phase d'ouverture ou de remontée, la période inter-clignement et la phase de fermeture. Cependant, dans leur étude, Ils se limitent au mouvement ascendant et à la phase poste-ouverture. Ils supposent que les paupières ne sont pas complètement fermées au début du clignement : il y a une fraction  $\lambda$  du domaine complètement ouvert  $[0, L_{op}]$  qui est exposée lorsque les paupières sont en position fermée.

Pour décrire le mouvement de la paupière supérieure, et donc le domaine mobile  $x \in [0, L(t)]$ , ils utilisent le modèle proposé par BERKE *et al.* [3] pour leurs permettre de définir des clignements partiels comme dans Braun *et al.* [6]. D'après BERKE *et al.*, la durée du mouvement vers le haut est  $\Delta t_u = 175.8 \text{ ms}$  et la vitesse maximale vers le haut est  $V_{max} = 9.1 \text{ cms}^{-1}$  correspondant à un clignement complet ( $\lambda = 0$ ).

La position de la paupière supérieure se déplace entre  $L_{cl} \leq L(t) \leq L_{op}$  pendant  $\Delta t_u$  pour la course ascendante tant qu'elle reste fixe  $L(t) = L_{op}$  pendant  $\Delta t_i$  correspondant à l'inter-clignement. En particulier, la position de la paupière supérieure est donnée par

$$L(t) = \begin{cases} L_{cl} + (L_{op} - L_{cl}) \left( \frac{t}{\Delta t_u} \right)^2 \exp \left[ 1 - \left( \frac{t}{\Delta t_u} \right)^2 \right], & 0 \leq t \leq \Delta t_u, \\ L_{op}, & \Delta t_u \leq t \leq \Delta t_u + \Delta t_i \end{cases} \quad (2.4)$$

La vitesse de la paupière supérieure  $\dot{L}(t)$  est obtenue en différenciant l'équation 2.4. La figure 2.4 montre la position de la paupière  $L(t)$  et la vitesse  $\dot{L}(t)$  sur un cycle de clignement.

## 2.2 Équations régissant la dynamique du film lacrymal en coordonnées sphériques

Les films lacrymaux ont déjà été modélisés sous la forme d'un film mince de liquide newtonien se déplaçant sur une surface solide. Le rapport d'aspect du problème est utilisé pour réduire les équations de Navier-Stokes aux équations de film mince via la théorie de la lubrification ([10, 1, 5,

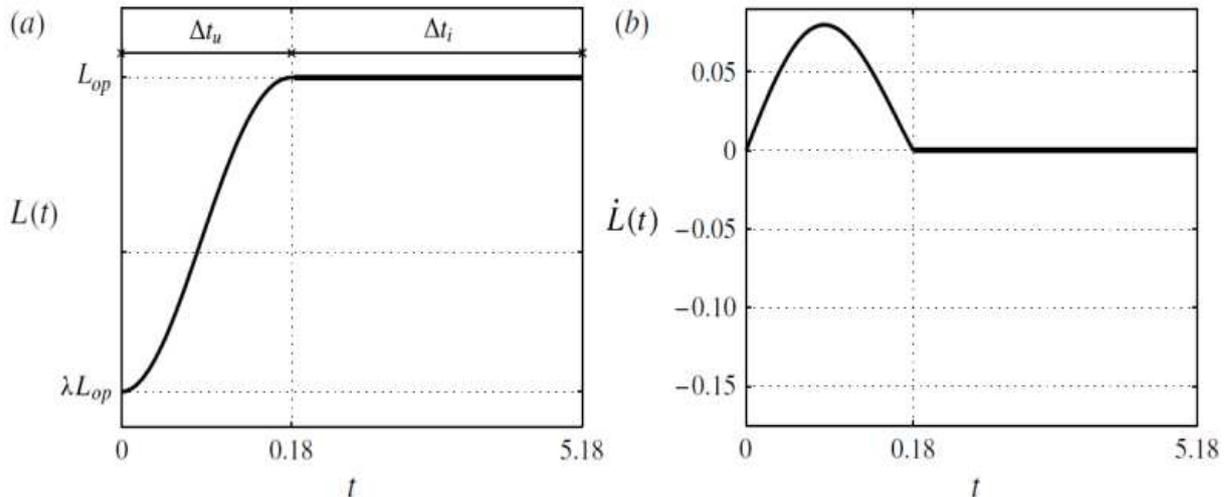


FIGURE 2.2 – (a) La position de la paupière supérieure  $L(t)$  donnée par (2.4) et (b) la vitesse correspondante  $\dot{L}(t)$  pendant la course ascendante du clignement. Les valeurs des paramètres sont  $\Delta t_u = 0.1758s$ ,  $\Delta t_i = 5s$ ,  $L_{op} = 0.01m$ ,  $\lambda = 0.1$ .

29, 31, 25, 34, 60, 2]). Le modèle de revêtement présenté par Wong *et al.* [60] est le modèle le plus simple pour capturer l'évolution dynamique de l'épaisseur du film lacrymal. Le modèle comprend des forces capillaires et visqueuses et suppose que la vitesse de surface est égale à la vitesse de la paupière supérieure de sorte que le lipide est traîné avec le mouvement de la paupière supérieure.

Dans cette étude, nous cherchons principalement à déterminer si la courbure du substrat affecte la dynamique du film lacrymal. Nous considérons les couches aqueuses et de mucus comme une seule couche continue d'un liquide newtonien bidimensionnel s'étendant entre deux paupières sur une surface cornéenne imperméable, stationnaire et sphérique de rayon constant  $R_C$ . La paupière supérieure se déplace tandis que la paupière inférieure est considérée stationnaire; voir le schéma de la figure 2.5. Nous supposons que l'épaisseur du film lacrymal est toujours plus mince que sa longueur de l'arc, et nous allons exploiter la minceur de la géométrie afin de simplifier le problème selon la théorie de la lubrification. En premier lieu nous utilisons un système de coordonnées sphériques  $(r, \theta, \phi)$ , ensuite, via une transformation de coordonnées le repérage est ramené vers un système de coordonnées curvilignes  $(x, y)$  où  $x$  indique l'abscisse curviligne le long de la surface cornéenne et  $y$  est l'ordonnée normale à la cornée. Le film lacrymal, à propriétés constantes, est limitée par une atmosphère passive dont la viscosité et la densité sont supposées négligeables. Similairement à l'étude d'Aydemir *et al.* [1], l'évaporation et le flux liquide sous la paupière supérieure sont négligés; ainsi, le volume de la couche aqueuse reste constant.

### 2.2.1 Équations de mouvement du fluide en coordonnées sphériques

Notre point de départ est les équations de Navier-Stokes pour un fluide newtonien, incompressible et bidimensionnel.

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (2.5)$$

$$\rho(\partial_t + \mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\nabla p + \mu \Delta \mathbf{u} + \rho \mathbf{g}, \quad (2.6)$$

où :  $\mathbf{u}$  est le vecteur vitesse,  $\mathbf{g} = (g \cos \theta, -g \sin \theta)$  est le vecteur accélération gravitationnelle,  $p$  est la pression.  $\rho$  et  $\mu$  sont respectivement la masse volumique et la viscosité dynamique du film lacrymal.

Sur la figure 2.3 est schématisé la géométrie du problème en coordonnées sphériques. Où  $r$  indique la distance radiale par rapport au centre de la cornée,  $\theta$  est l'angle polaire mesuré à partir d'une direction zénithale fixe,  $\theta_0$  indique l'angle polaire de la paupière inférieure, et  $\kappa = \frac{1}{R_C}$  est la courbure géométrique. Dans notre modèle, nous considérons seulement le cas bidimensionnel et axisymétrique, dans lequel la composante azimutale de la vitesse est nulle et toutes les variables sont indépendantes de l'angle azimutal  $\phi$ , qui varie entre 0 et  $2\pi$ . Le film lacrymal évolue sur la plage  $\theta_0 \leq \theta \leq \theta_{op}$  et  $R_C \leq r \leq R_C + h$ . Nous notons que  $\theta_{op}$  et  $h^*$  sont respectivement l'angle zénithal lorsque l'œil est complètement ouvert et la hauteur dimensionnelle du ménisque.

Le champ de vitesse bidimensionnel s'écrit dans ce cas

$$\mathbf{u} = v_r \mathbf{e}_r + v_\theta \mathbf{e}_\theta \quad (2.7)$$

où  $v_r$  et  $v_\theta$  sont les composantes du champ de vitesse le long des directions polaires et radiales en coordonnées sphériques respectivement.

Les équations (2.5 et 2.6), se réduisent à :

$$\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{2v_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_\theta \cot \theta}{r} = 0 \quad (2.8)$$

$$\rho \left( \frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta^2}{r} \right) = -\frac{\partial p}{\partial r} + \rho g \cos \theta + \mu \left( \frac{\partial^2 v_r}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{2v_r}{r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_r}{\partial \theta^2} + \frac{\cot \theta}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} - \frac{2v_\theta \cot \theta}{r^2} \right) \quad (2.9)$$

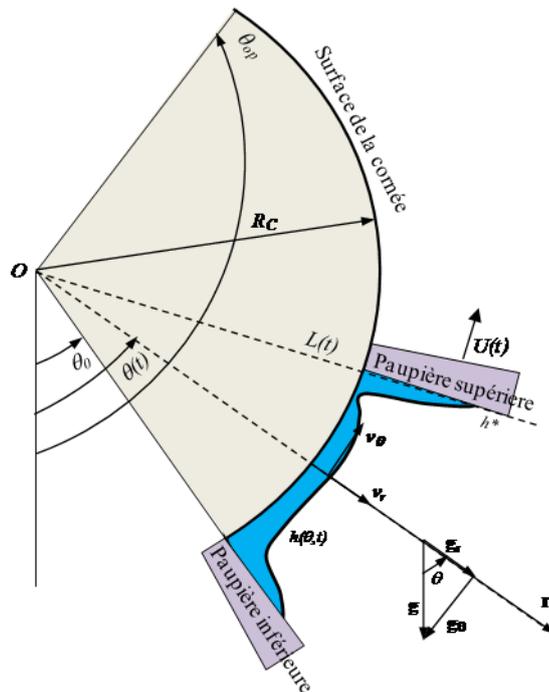


FIGURE 2.3 – Schématisation du film lacrymal dans le plan  $(r, \theta)$

$$\rho \left( \frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_r v_\theta}{r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} \right) = -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} - \rho g \sin \theta + \mu \left( \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r^2 \sin^2 \theta} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{\cot \theta}{r^2} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right) \quad (2.10)$$

Les deux bases cartésienne  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$  et sphérique  $(\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_\phi)$  sont schématisées sur la figure 2.4, et le passage entre les deux se fait par :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{e}_r \\ \mathbf{e}_\theta \\ \mathbf{e}_\phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \phi & \sin \theta \sin \phi & -\cos \theta \\ \cos \theta \cos \phi & \cos \theta \sin \phi & \sin \theta \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_3 \end{pmatrix} \quad (2.11)$$

Dans ce qui suit, le repérage de la surface libre en coordonnées sphérique sera donné par la variable,  $r_h$ , dont l'expression est

$$r_h = R_C + h(\theta, t) \quad (2.12)$$

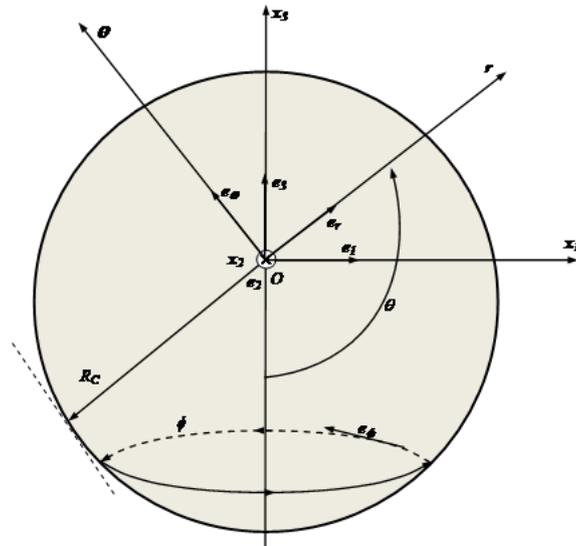


FIGURE 2.4 – Passage des coordonnées cartésiennes aux coordonnées sphériques

## 2.2.2 Équations de transport du surfactant (lipides polaires) en coordonnées sphériques

Nous supposons que la couche de lipides polaires est contrainte de se trouver à la surface de la couche aqueuse, à  $r = r_h$ , et agit comme un agent tensioactif insoluble, sa concentration est désignée par  $\Gamma$  et son évolution est décrite par l'équation de convection-diffusion suivante [52, 28] :

$$\Gamma_t + (u_t \Gamma)_s - \mathcal{D} \Gamma_{ss} + \tilde{\kappa} u_n \Gamma = 0 \quad (2.13)$$

où  $\Gamma$ ,  $\Gamma_s$  et  $\Gamma_{ss}$  indiquent la concentration en lipides à la surface libre et ses première et seconde dérivées, le long de la surface libre.  $u_t = \mathbf{u} \cdot \mathbf{t}|_{r=r_h}$  et  $u_n = \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}|_{r=r_h}$  sont les composantes tangentielle et normale de la vitesse à la surface libre. Les vecteurs  $\mathbf{n}$  et  $\mathbf{t}$  sont respectivement les vecteurs normal et tangent sur la surface libre.  $\tilde{\kappa}$  est la courbure moyenne de la surface libre et  $\mathcal{D}$  est la diffusivité de surface du lipide polaire. Nous considérons que le lipide réduit la tension de surface,  $\gamma$ , à l'interface entre la couche aqueuse et l'air environnant. Nous supposons que  $\gamma$  dépend linéairement de la concentration en lipides polaires, telle que.

$$\gamma = \gamma_0 - RT\Gamma \quad (2.14)$$

Ici,  $\gamma_0$  est la tension superficielle en l'absence de lipide polaire,  $R = 8.31 \text{ J / mol K}$  est la constante universelle des gaz et  $T \approx 310 \text{ K}$  est la température du film.

Dans ce qui suit, nous donnons les définitions des opérateurs qui nous permettront d'exprimer les équations de mouvement du fluide et les conditions aux limites qui leurs sont associées en coordonnées sphériques.

### 2.2.2.1 Gradient de surface et courbure du film

Le vecteur gradient  $\nabla$ , bidimensionnel, et la fonction de la surface libre  $f(r, \theta, t)$  sont définies respectivement, en coordonnées sphériques, comme suit :

$$\nabla = \left( \frac{\partial}{\partial r}, \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right)^T \quad (2.15)$$

$$f(r, \theta, t) = r - R_C - h = 0 \quad (2.16)$$

Les vecteurs normal et tangent à la surface libre sont respectivement  $\mathbf{n}$  et  $\mathbf{t}$ , s'écrivent :

$$\mathbf{n} = \frac{\nabla f}{\|\nabla f\|} = (n_r, n_\theta)^T = \left( 1 + \left( \frac{1}{r_h} \frac{\partial h}{\partial \theta} \right)^2 \right)^{-1/2} \left( 1, -\frac{1}{r_h} \frac{\partial h}{\partial \theta} \right)^T \quad (2.17)$$

$$\mathbf{t} = (t_r, t_\theta)^T = \left( 1 + \left( \frac{1}{r_h} \frac{\partial h}{\partial \theta} \right)^2 \right)^{-1/2} \left( \frac{1}{r_h} \frac{\partial h}{\partial \theta}, 1 \right)^T \quad (2.18)$$

Un élément de l'abscisse curviligne,  $s$ , le long de la surface libre s'exprime :

$$ds = ((\partial r)^2 + (r_h \partial \theta)^2)^{1/2} = \left( 1 + \left( \frac{1}{r_h} \frac{\partial h}{\partial \theta} \right)^2 \right)^{1/2} r_h d\theta \quad (2.19)$$

À partir de l'élément  $ds$  (2.19), nous déduisons :

$$(ds)^2 = \left( 1 + \left( \frac{1}{r_h} \frac{\partial h}{\partial \theta} \right)^2 \right) r_h^2 d\theta^2 \quad (2.20)$$

Les dérivées le long de la surface libre d'ordre 1 et d'ordre 2 respectivement sont déduites facilement à partir des équations (2.19, et 2.20) et s'écrivent dans ce cas :

$$\frac{\partial}{\partial s} = \left( 1 + \left( \frac{1}{r_h} \frac{\partial h}{\partial \theta} \right)^2 \right)^{-1/2} \frac{1}{r_h} \frac{\partial}{\partial \theta} \quad (2.21)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial s^2} = \left( 1 + \left( \frac{1}{r_h} \frac{\partial h}{\partial \theta} \right)^2 \right)^{-1} \frac{1}{r_h^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \quad (2.22)$$

Le vecteur gradient de surface  $\nabla_s$  est défini par l'expression  $\nabla_s = \nabla - \mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \nabla)$ . Le développement de cette expression, en combinant les équations (2.15, 2.17 et 2.18), se ramène à :

$$\nabla_s = \mathbf{t} \left( 1 + \left( \frac{1}{r_h} \frac{\partial h}{\partial \theta} \right)^2 \right)^{-1/2} \frac{1}{r_h} \frac{\partial}{\partial \theta} \quad (2.23)$$

Tenant compte de l'équation (2.21), une autre expression du vecteur gradient de surface  $\nabla_s$  est déduite et s'écrit :

$$\nabla_s = \frac{\partial}{\partial s} \mathbf{t} \quad (2.24)$$

L'expression de la courbure du film en coordonnées sphériques est donnée par :

$$\tilde{\kappa} = \nabla \cdot \mathbf{n} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 n_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(\sin \theta n_\theta)}{\partial \theta} \quad (2.25)$$

Après développement la courbure du film se ramène à :

$$\tilde{\kappa} = \frac{\frac{2}{r_h} + \frac{3}{r_h^3} \left(\frac{\partial h}{\partial \theta}\right)^2 - \frac{1}{r_h^2} \frac{\partial^2 h}{\partial \theta^2} - \frac{1}{r_h^2} \frac{\partial h}{\partial \theta} \left(1 + \left(\frac{1}{r_h} \frac{\partial h}{\partial \theta}\right)^2\right) \cot \theta}{\left(1 + \left(\frac{1}{r_h} \frac{\partial h}{\partial \theta}\right)^2\right)^{3/2}} \quad (2.26)$$

### 2.2.2.2 Vitesses tangentielle et normale de la surface libre

Les composantes tangentielle et normale du vecteur vitesse à la surface libre, définies précédemment, ont comme expressions :

$$u_{\mathbf{t}} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{t}|_{r_h} = \frac{\left(\frac{1}{r_h} \frac{\partial h}{\partial \theta}\right) v_r + v_\theta}{\left(1 + \left(\frac{1}{r_h} \frac{\partial h}{\partial \theta}\right)^2\right)^{1/2}} \quad (2.27)$$

$$u_{\mathbf{n}} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}|_{r_h} = \frac{v_r - \left(\frac{1}{r_h} \frac{\partial h}{\partial \theta}\right) v_\theta}{\left(1 + \left(\frac{1}{r_h} \frac{\partial h}{\partial \theta}\right)^2\right)^{1/2}} \quad (2.28)$$

## 2.2.3 Conditions aux limites en coordonnées sphériques

### 2.2.3.1 Surface de la cornée

L'épithélium cornéen est supposé être imperméable. Ainsi, nous supposons l'absence de glissement et de conditions de flux, traduit par les conditions aux limites :

$$v_r = 0, \quad v_\theta = 0, \quad \text{à} \quad r = R_C. \quad (2.29)$$

### 2.2.3.2 Interface liquide lacrymal-air (Surface libre)

Le mouvement de la surface libre du film lacrymal,  $r = R_C + h(\theta, t)$ , est donné par la condition limite cinématique, s'écrivant en coordonnées sphériques

$$v_r = h_t + \frac{1}{r_h} \frac{\partial h}{\partial \theta} v_\theta \quad \text{à} \quad r = r_h \quad (2.30)$$

$$\text{Avec : } h_t = \frac{\partial h}{\partial t}$$

On note le tenseur des contraintes dans le fluide par  $\mathbf{T} = -p\mathbf{I} + \mu[\nabla\mathbf{u} + \nabla\mathbf{u}^T]$  et soit  $\mathbf{n}$  le vecteur unitaire normal à la surface et  $\mathbf{t}$  le vecteur unitaire tangent à la surface. A l'interface air-liquide, la tension normale est équilibrée par la tension superficielle,

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{T} \cdot \mathbf{n}) = \gamma \nabla \cdot \mathbf{n} = \gamma \tilde{\kappa} \quad \text{à} \quad r = r_h \quad (2.31)$$

où  $\tilde{\kappa}$  est la courbure de l'interface donnée par l'équation (2.26) et  $\gamma$  est la tension de surface (qui dépend de la concentration locale du lipide voir équation (2.14)). De même, la contrainte tangentielle est équilibrée par le gradient de tension superficielle (ou contrainte de Marangoni)

$$\mathbf{t} \cdot (\mathbf{T} \cdot \mathbf{n}) = \mathbf{t} \cdot \nabla_s \gamma \quad \text{à} \quad r = r_h \quad (2.32)$$

Pour la surface libre  $r = r_h$ , ces équilibres de contraintes se réduisent à :

$$p_0 - p + 2\mu \frac{\frac{\partial v_r}{\partial r} + \left(\frac{1}{r_h} \frac{\partial h}{\partial \theta}\right)^2 \left(\frac{1}{r_h} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r_h}\right) - \frac{1}{r_h} \frac{\partial h}{\partial \theta} \left(\frac{1}{r_h} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta}{r_h} + \frac{\partial v_\theta}{\partial r}\right)}{1 + \left(\frac{1}{r_h} \frac{\partial h}{\partial \theta}\right)^2} =$$

$$-\gamma \frac{\frac{2}{r_h} + \frac{3}{r_h^3} \left(\frac{\partial h}{\partial \theta}\right)^2 - \frac{1}{r_h^2} \frac{\partial^2 h}{\partial \theta^2} - \frac{1}{r_h^2} \frac{\partial h}{\partial \theta} \left(1 + \left(\frac{1}{r_h} \frac{\partial h}{\partial \theta}\right)^2\right) \cot \theta}{\left(1 + \left(\frac{1}{r_h} \frac{\partial h}{\partial \theta}\right)^2\right)^{3/2}} \quad (2.33)$$

$$\mu \frac{2 \left(\frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{1}{r_h} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} - \frac{v_r}{r_h}\right) \left(\frac{1}{r_h} \frac{\partial h}{\partial \theta}\right) - \left(\frac{1}{r_h} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta}{r_h} + \frac{\partial v_\theta}{\partial r}\right) \left(1 - \left(\frac{1}{r_h} \frac{\partial h}{\partial \theta}\right)^2\right)}{1 + \left(\frac{1}{r_h} \frac{\partial h}{\partial \theta}\right)^2} = \frac{\frac{1}{r_h} \frac{\partial \gamma}{\partial \theta}}{\left(1 + \left(\frac{1}{r_h} \frac{\partial h}{\partial \theta}\right)^2\right)^{1/2}} \quad (2.34)$$

Où  $p_0$  est la pression atmosphérique.

### 2.2.3.3 Paupières

Nous supposons que la paupière inférieure est stationnaire et que la paupière supérieure bouge pendant un clignement. Les glandes de Meibomius sont situées à la jonction entre la région hydrophile et hydrophobe des bords de la paupière, connue sous le nom de jonction muco-cutanée voir (figure 1.2). Le composant aqueux du liquide lacrymal ne peut pas passer sur ces cellules hydrophobes et le liquide devient piégé le long de cette ligne, où le film fluide peut prendre n'importe quel angle de contact. Par conséquent, nous considérons la hauteur du film lacrymal à chaque extrémité du domaine (la hauteur du ménisque) [10, 1, 5, 29, 31]

$$h(\theta_0, t) = h(\theta_L, t) = h^* \quad (2.35)$$

Où :  $\theta_0$  et  $\theta_L = \theta_0 + L(t)/R_C$  sont respectivement l'angle polaire de la paupière inférieure et supérieure, et  $L(t)$  est la distance de l'arc curviligne entre les deux paupières donné par les équations (2.3, 2.4) selon le modèle choisi (voir les sections 2.1.1 et 2.1.2). Nous supposons qu'aucun liquide ne s'échappe sous la paupière inférieure et nous supposons que la paupière supérieure délivre un flux  $Q$  de liquide dans le film lacrymal lorsque l'œil s'ouvre, comme cela a été considéré dans Jones *et al.* ([29] et [31]). L'hypothèse la plus simple pour le flux fourni par la paupière supérieure est que l'écart,  $h_l$ , entre le bas de la paupière et le globe oculaire est fixe. Étant donné un écoulement de Couette entre la surface de l'œil et le bas de la paupière, le flux est donné par  $Q = h_l \dot{L}/2$ . Nous procédons sous cette hypothèse, notant que nous nous attendons à ce que, dans la pratique, la hauteur de cet écart varie à mesure que la vitesse de la paupière change.

À la paupière inférieure, les conditions aux limites sont

$$\bar{u}_\theta = 0, \quad u_{\theta s} = 0, \quad \text{à } \theta = \theta_0 \quad (2.36)$$

où  $\bar{u}_\theta$  est la vitesse moyenne du liquide dans le film lacrymal et  $u_{\theta s} = u_\theta|_{r_h}$  est la vitesse tangentielle à la surface libre, tandis que sur la paupière supérieure (mobile), nous équilibrons les flux, et imposons donc

$$\bar{u}_\theta = \left(1 - \frac{h_l}{2h^*}\right) \dot{L}(t), \quad u_{\theta s} = \dot{L}(t), \quad \text{à } \theta = \theta_L \quad (2.37)$$

Où :  $\theta_L = \theta_0 + \frac{L(t)}{R_C}$  représente l'angle polaire de la paupière supérieure et  $\dot{L}(t)$ , donné par l'équation (2.1 dans le cas du modèle d'Aydemir *et al.*, ou en différenciant l'équation 2.4) dans le modèle

de Bruna et al (voir les sections 2.1.1 et 2.1.2)

### 2.2.4 Conditions initiales en coordonnées sphériques

Nous supposons que, au départ (avant le clignement), les paupières sont presque fermées, avec la distance entre elles,  $L_{cl}$ . En outre, nous supposons que la couche de fluide a une épaisseur uniforme  $h^*$  et que la quantité de lipide est connue et répartie uniformément avec la concentration  $\Gamma^*$ . Ainsi, nous écrivons,

$$L = L_{cl}, \quad \theta_L = \theta_{cl} = \theta_0 + \frac{L_{cl}}{R_C}, \quad h(\theta, 0) = h^*, \quad \Gamma(\theta, 0) = \Gamma^*. \quad (2.38)$$

## 2.3 Equations régissant la dynamique du film lacrymal en coordonnées curvilignes

Pour faire apparaître la courbure du substrat (La cornée) et son effet dans les équations régissant l'évolution du film lacrymal, les équations précédentes sont réécrites dans un système de coordonnées curvilignes  $(x, y)$  où  $x$  indique l'abscisse curviligne le long de la surface cornéenne et  $y$  est l'ordonnée normale à la cornée (voir la figure 2.5). Les coordonnées curvilignes introduites admettent une transition simple vers un système de coordonnées cartésiennes dans le fluide lorsque le rayon de courbure du substrat est augmenté à l'infini. Ce qui permet une quantification des effets de la courbure comparé au modèle cartésien développé par Aydemir *et al.*, généralisé dans cette étude. Dans ce qui suit nous donnons les formules de passage entre les deux systèmes de coordonnées sphériques et curvilignes.

### 2.3.1 Relations de passage des coordonnées sphériques vers les coordonnées curvilignes

La réécriture des équations de la section 2.2 en coordonnées curvilignes passe par la définition des relations de passage entre les deux systèmes de repérage sphérique et curviligne, qui sont données par :

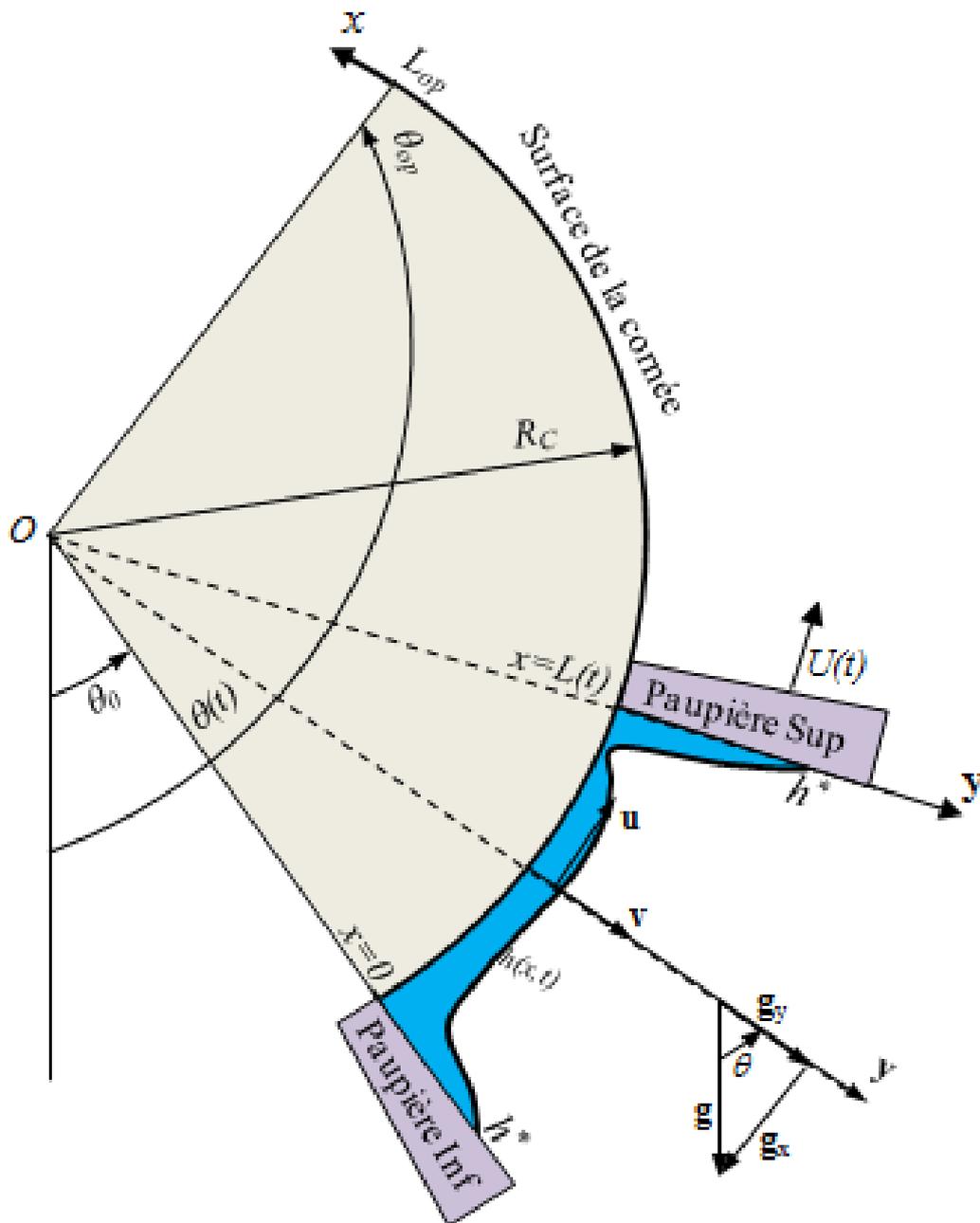


FIGURE 2.5 – Schématisation du film lacrymal dans le plan curviligne  $(x, y)$

$$y = r - R_C \quad (2.39)$$

$$x = R_C(\theta - \theta_0) \quad (2.40)$$

Où l'abscisse curviligne  $0 \leq x \leq L(t)$ , et l'ordonnée normale  $0 \leq y \leq h(x, t)$ . Le champ de vitesse dans le système de coordonnées curvilignes s'écrit :

$$\mathbf{u} = u\mathbf{e}_x + v\mathbf{e}_y \quad (2.41)$$

où

$$u = v_\theta, \quad v = v_r \quad (2.42)$$

### 2.3.2 Equations de mouvement du fluide en coordonnées curvilignes

En posant  $r_\kappa = 1 + \kappa y$ , les équations (2.8 à 2.10), se réécrivent comme suit

$$u_x + r_\kappa v_y + 2\kappa v + \kappa u \cot(\kappa x + \theta_0) = 0 \quad (2.43)$$

$$\begin{aligned} & \rho (r_\kappa u_t + uu_x + r_\kappa v u_y + \kappa u v) = -p_x - r_\kappa \rho g \sin(\kappa x + \theta_0) + \\ & \mu \left( r_\kappa u_{yy} + 2\kappa u_y + \frac{\kappa u_x \cot(\kappa x + \theta_0)}{r_\kappa} + \frac{u_{xx}}{r_\kappa} - \frac{\kappa^2 u}{r_\kappa \sin^2(\kappa x + \theta_0)} + \frac{2\kappa v_x}{r_\kappa} \right) \end{aligned} \quad (2.44)$$

$$\begin{aligned} & \rho (r_\kappa v_t + uv_x + r_\kappa v v_y - \kappa u^2) = -r_\kappa p_y + r_\kappa \rho g \cos(\kappa x + \theta_0) + \\ & \mu \left( r_\kappa v_{yy} + 2\kappa v_y + \frac{v_{xx}}{r_\kappa} + \frac{\kappa v_x \cot(\kappa x + \theta_0)}{r_\kappa} - \frac{2\kappa^2 v}{r_\kappa} - \frac{2\kappa u_x}{r_\kappa} - \frac{2\kappa^2 u \cot(\kappa x + \theta_0)}{r_\kappa} \right) \end{aligned} \quad (2.45)$$

Nous rappelons que  $\kappa = \frac{1}{R_C}$

### 2.3.3 Equations de transport du surfactant (lipides polaires) en coordonnées curvilignes

Compte tenu des relations de passage (2.39 et 2.40), le vecteur gradient dans ce cas se ramène à :

$$\nabla = \begin{pmatrix} \frac{R_C}{R_C + y} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{1 + \kappa y} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{pmatrix} \quad (2.46)$$

Tandis que les vecteurs normal et tangent à la surface libre et le vecteur gradient de surface de tension superficielle sont donnés par :

$$\mathbf{n} = \begin{pmatrix} -\frac{\frac{h_x}{1+\kappa h}}{\left[1 + \left(\frac{h_x}{1+\kappa h}\right)^2\right]^{1/2}} \\ \frac{1}{\left[1 + \left(\frac{h_x}{1+\kappa h}\right)^2\right]^{1/2}} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{t} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\left[1 + \left(\frac{h_x}{1+\kappa h}\right)^2\right]^{1/2}} \\ \frac{\frac{h_x}{1+\kappa h}}{\left[1 + \left(\frac{h_x}{1+\kappa h}\right)^2\right]^{1/2}} \end{pmatrix}, \quad \nabla_s \gamma = \begin{pmatrix} \frac{\frac{h_x}{1+\kappa h} \frac{\gamma_x}{1+\kappa h}}{\left[1 + \left(\frac{h_x}{1+\kappa h}\right)^2\right]} \\ \frac{\frac{\gamma_x}{1+\kappa h}}{\left[1 + \left(\frac{h_x}{1+\kappa h}\right)^2\right]} \end{pmatrix} \quad (2.47)$$

Et La courbure du film s'écrit

$$\tilde{\kappa} = \frac{\frac{2\kappa}{1+\kappa h} + \frac{3\kappa(h_x)^2}{(1+\kappa h)^3} + \frac{h_{xx}}{(1+\kappa h)^2} - \frac{\kappa h_x}{(1+\kappa h)^2} \left(1 + \left(\frac{h_x}{1+\kappa h}\right)^2\right) \cot(\kappa x + \theta_0)}{\left(1 + \left(\frac{h_x}{1+\kappa h}\right)^2\right)^{3/2}} \quad (2.48)$$

Ce qui permet d'écrire l'équation de transport des lipides polaires, en coordonnées curvilignes, sous la forme :

$$r_{\kappa h}^2 \left(1 + \frac{h_x^2}{r_{\kappa h}^2}\right)^{\frac{1}{2}} \Gamma_t + r_{\kappa h} (u_t \Gamma)_x - \frac{\mathcal{D}}{\left(1 + \frac{h_x^2}{r_{\kappa h}^2}\right)^{\frac{1}{2}}} \Gamma_{xx} = \frac{\left(2\kappa r_{\kappa h} + 3\kappa \frac{h_x^2}{r_{\kappa h}} - h_{xx} - \kappa h_x \left(1 + \frac{h_x^2}{r_{\kappa h}^2}\right) \cot(\kappa x + \theta_0)\right) \left(v - \frac{h_x}{r_{\kappa h}} u\right) \Gamma}{\left(1 + \frac{h_x^2}{r_{\kappa h}^2}\right)^{\frac{3}{2}}} \quad (2.49)$$

où :  $r_{\kappa h} = r_{\kappa}|_{y=h} = 1 + \kappa h$

## 2.3.4 Conditions aux limites en coordonnées curvilignes

### 2.3.4.1 Surface de la cornée

L'équation(2.28) devient

$$u = 0, \quad v = 0, \quad \text{à} \quad y = 0. \quad (2.50)$$

### 2.3.4.2 Interface liquide lacrymal-air (Surface libre)

Les équations cinématique et d'équilibre dynamique normale et tangentielle de la surface libre s'écrivent en coordonnées curvilignes

$$(r_{\kappa h}) v = (r_{\kappa h}) h_t + u h_x \quad \text{à} \quad y = h(x, t). \quad (2.51)$$

$$p_0 - p + 2\mu \frac{v_y + \frac{h_x^2}{r_{\kappa h}^3} (u_x - \kappa v) - \frac{h_x}{r_{\kappa h}^2} (r_{\kappa h} u_y + v_x - \kappa u)}{1 + \frac{h_x^2}{r_{\kappa h}^2}} = -\gamma \frac{\frac{2\kappa}{r_{\kappa h}} + \frac{3\kappa h_x^2}{r_{\kappa h}^2} - \frac{h_{xx}}{r_{\kappa h}^2} - \frac{\kappa h_x}{r_{\kappa h}^2} \left(1 + \frac{h_x^2}{r_{\kappa h}^2}\right) \cot(\kappa x + \theta_0)}{\left(1 + \frac{h_x^2}{r_{\kappa h}^2}\right)^{\frac{3}{2}}} \quad (2.52)$$

$$\mu \frac{\frac{2}{r_{\kappa h}} (r_{\kappa h} v_y - u_x - \kappa v) h_x - (r_{\kappa h} u_y + v_x - \kappa u) \left(1 - \frac{h_x^2}{r_{\kappa h}^2}\right)}{\left(1 + \frac{h_x^2}{r_{\kappa h}^2}\right)} = \frac{\gamma_x}{\left(1 + \frac{h_x^2}{r_{\kappa h}^2}\right)^{1/2}} \quad (2.53)$$

### 2.3.4.3 Paupières

$$h(0, t) = h(L, t) = h^* \quad (2.54)$$

À la paupière inférieure, les conditions aux limites sont

$$\bar{u} = 0, \quad u_s = 0, \quad \text{à } x = 0 \quad (2.55)$$

où  $\bar{u}_\theta$  est la vitesse moyenne du liquide dans le film lacrymal et  $u_{\theta s} = u_\theta|_{r_h}$  est la vitesse tangentielle à la surface libre, tandis que sur la paupière supérieure (mobile), nous équilibrons les flux et imposons donc

$$\bar{u} = \left(1 - \frac{h_l}{2h^*}\right) \dot{L}(t), \quad u_s = \dot{L}(t), \quad \text{à } x = L \quad (2.56)$$

Où  $\dot{L}(t)$ , donné par les équations(2.1),ou en différenciant (2.4) comme mentionné précédemment.

### 2.3.5 Conditions initiales en coordonnées curvilignes

Nous supposons que, au départ (avant un clignement), les paupières sont presque fermées, avec la distance entre elles,  $L_{cl}$ , comme déterminée à la section. 2.1 En outre, nous supposons que la couche de fluide a une épaisseur uniforme  $h^*$  et que la quantité de lipide est connue et répartie uniformément avec la concentration  $\Gamma^*$ . Ainsi, nous écrivons,

$$L = L_{cl}, \quad h(x, 0) = h^*, \quad \Gamma(x, 0) = \Gamma^*. \quad (2.57)$$

## 2.4 Équations adimensionnelles régissant la dynamique du film lacrymal en coordonnées curvilignes

La distance entre les paupières varie de  $L_{cl}$  lorsque l'œil est fermé à  $L_{op}$  lorsque l'œil est complètement ouvert. Nous prenons  $L_{op}$  comme échelle de longueur caractéristique du problème. L'épaisseur caractéristique du film varie à travers l'œil, et est la plus grande dans les ménisques  $h^*$ , et la plus petite dans les régions proches de chaque ménisque appelées «lignes noires». Nous supposons qu'il est toujours vrai que la distance typique entre les paupières est beaucoup plus grande que la hauteur du ménisque épinglé,  $h^*$  et que  $h^*$  est beaucoup plus grande que l'épaisseur  $h_0$  de la majorité du film. Dans notre étude, nous nous identifions aux données du modèle d'Aydemir *et al.*, concernant le choix de l'échelle caractéristique de la hauteur du film, où ils définissent un rapport d'aspect basé sur l'épaisseur de la majorité du film,  $\epsilon = h_0/L_{op} \ll 1$ . Aydemir *et al.* estiment que  $h_0 = 10^{-5}$  m, loin des paupières. Il vaut la peine de souligner que, par rapport à l'épaisseur typique du film lacrymal,  $h_0$  est surestimé d'un facteur trois par rapport à [33].

La vitesse moyenne de la phase d'ouverture de la paupière supérieure  $U = U_{av} = \frac{1}{t^*} \int_0^{t^*} \dot{L}(t) dt$ , est supposé comme vitesse d'écoulement caractéristique, elle vaut  $4.4 \times 10^{-2} m/s$  dans le modèle de Aydemir *et al.* et  $5.1 \times 10^{-2} m/s$  dans le modèle de Bruna *et al.*

Afin de montrer l'effet de la courbure sur la dynamique du film lacrymal indépendamment du volume initial du fluide et du modèle considéré, nous traitons deux cas de figure : dans le premier cas qui caractérise la plus grande partie de l'étude nous choisissons les paramètres de Aydemir *et al.* qui prend entre autres comme valeur de la hauteur du ménisque  $h^* = 10^{-3} m$  et dans le deuxième cas, représentant une partie moins importante de l'étude, nous nous plaçons dans les conditions du modèle de Bruna *et al.*, qui considère une valeur moins importante de la hauteur du ménisque  $h^* = 2.5 \times 10^{-4} m$ .

Les équations précédentes de la section 2.3 sont réécrites sous la forme adimensionnelles en utilisant la mise à l'échelle suivante :

$$\begin{aligned} x &= L_{op} x', & y &= \epsilon L_{op} y', & L &= L_{op} L', & t &= \frac{L_{op}}{U} t', & u &= U u', \\ v &= \epsilon U v', & p &= p_0 + \frac{\mu U}{\epsilon^2 L_{op}} p', & h &= \epsilon L_{op} h', & \Gamma &= \Gamma^* \Gamma', & \kappa &= \frac{1}{L_{op}} \kappa'. \end{aligned} \quad (2.58)$$

Pour plus de commodité, nous laissons tomber l'exposant "prime" dans les variables adimen-

sionnelles, les équations adimensionnelles de mouvement, de transport de surfactant lipides, de conditions aux limites et initiales s'écrivent :

$$u_x + r_\kappa v_y + 2\epsilon\kappa v + \kappa u \cot(\kappa x + \theta_0) = 0 \quad (2.59)$$

$$\begin{aligned} \epsilon^2 \text{Re} (r_\kappa u_t + uu_x + r_\kappa v u_y + \epsilon\kappa uv) = -p_x - r_\kappa \text{St} \sin(\kappa x + \theta_0) + \\ \left( r_\kappa u_{yy} + 2\epsilon\kappa u_y + \frac{\epsilon^2 \kappa u_x \cot(\kappa x + \theta_0)}{r_\kappa} + \frac{\epsilon^2 u_{xx}}{r_\kappa} - \frac{\epsilon^2 \kappa^2 u}{r_\kappa \sin^2(\kappa x + \theta_0)} + \frac{2\epsilon^3 \kappa v_x}{r_\kappa} \right), \end{aligned} \quad (2.60)$$

$$\begin{aligned} \epsilon^4 \text{Re} \left( r_\kappa v_t + uv_x + r_\kappa v v_y - \frac{\kappa u^2}{\epsilon} \right) = -r_\kappa p_y + \epsilon r_\kappa \text{Stcos}(\kappa x + \theta_0) + \\ \epsilon^2 \left( r_\kappa v_{yy} + 2\epsilon\kappa v_y + \frac{\epsilon^2 v_{xx}}{r_\kappa} + \frac{\epsilon^2 \kappa v_x \cot(\kappa x + \theta_0)}{r_\kappa} - \frac{2\epsilon^2 \kappa^2 v}{r_\kappa} - \frac{2\epsilon\kappa u_x}{r_\kappa} - \frac{2\epsilon\kappa^2 u \cot(\kappa x + \theta_0)}{r_\kappa} \right) \end{aligned} \quad (2.61)$$

où  $\text{Re} = \frac{\rho UL_{\text{op}}}{\mu}$  et  $\text{St} = \frac{\rho g L_{\text{op}}^2 \epsilon^2}{\mu U}$  sont les nombres de Reynolds et de Stockes respectivement.

Nous rappelons que  $r_\kappa = 1 + \epsilon\kappa y$  et  $r_{\kappa h} = r_\kappa|_{y=h} = 1 + \epsilon\kappa h(x, t)$  est l'ordonnée sphérique de la surface libre.

L'équation adimensionnelle pour la concentration de lipide polaire est

$$\begin{aligned} r_{\kappa h}^2 \left( 1 + \frac{\epsilon^2 h_x^2}{r_{\kappa h}^2} \right)^{\frac{1}{2}} \Gamma_t + r_{\kappa h} (u_t \Gamma)_x - \frac{1}{\text{Pe} \left( 1 + \frac{\epsilon^2 h_x^2}{r_{\kappa h}^2} \right)^{\frac{1}{2}}} \Gamma_{xx} = \\ \frac{\epsilon \left( 2\kappa r_{\kappa h} + 3\kappa \frac{\epsilon^2 h_x^2}{r_{\kappa h}} - \epsilon h_{xx} - \epsilon\kappa h_x \left( 1 + \frac{\epsilon^2 h_x^2}{r_{\kappa h}^2} \right) \cot(\kappa x + \theta_0) \right) \left( v - \frac{h_x}{r_{\kappa h}} u \right) \Gamma}{\left( 1 + \frac{\epsilon^2 h_x^2}{r_{\kappa h}^2} \right)^{\frac{3}{2}}}, \end{aligned} \quad (2.62)$$

Où  $\text{Pe} = \frac{UL_{\text{op}}}{\mathcal{D}}$  est le nombre de Peclet et  $u_t$  la vitesse tangentielle à la surface libre donnée par :

$$u_t = \left[ 1 + \frac{\epsilon^2 h_x^2}{r_{\kappa h}^2} \right]^{-\frac{1}{2}} \left( u + \frac{\epsilon^2 h_x}{r_{\kappa h}} v \right), \quad (2.63)$$

### 2.4.1 Conditions aux limites et initiales adimensionnelles

À la surface de l'œil, nous avons

$$u = v = 0, \quad y = 0 \quad (2.64)$$

A l'interface film lacrymal-air à  $y = h(x, t)$ , Les conditions aux limites deviennent :

$$(r_{\kappa h}) v = (r_{\kappa h}) h_t + u h_x, \quad (2.65)$$

$$\begin{aligned} - \left( \frac{\epsilon^2}{\text{Ca}} - \epsilon^2 \text{Ma} \Gamma \right) \frac{\frac{2\kappa}{r_{\kappa h}} + \frac{3\kappa\epsilon^2 h_x^2}{r_{\kappa h}^2} - \frac{\epsilon h_{xx}}{r_{\kappa h}^2} - \frac{\epsilon\kappa h_x}{r_{\kappa h}^2} \left( 1 + \frac{\epsilon^2 h_x^2}{r_{\kappa h}} \right) \cot(\kappa x + \theta_0)}{\left( 1 + \frac{\epsilon^2 h_x^2}{r_{\kappa h}} \right)^{\frac{3}{2}}} = \\ -p + 2\epsilon^2 \frac{v_y + \frac{\epsilon^2 h_x^2}{r_{\kappa h}^3} (u_x - \epsilon\kappa v) - \frac{h_x}{r_{\kappa h}^2} (r_{\kappa h} u_y + \epsilon^2 v_x - \epsilon\kappa u)}{1 + \frac{\epsilon^2 h_x^2}{r_{\kappa h}^2}}, \end{aligned} \quad (2.66)$$

$$- \frac{\epsilon \text{Ma} \Gamma_x}{\left( 1 + \frac{\epsilon^2 h_x^2}{r_{\kappa h}^2} \right)^{1/2}} = \frac{\frac{2\epsilon}{r_{\kappa h}} (r_{\kappa h} v_y - u_x - \epsilon\kappa v) h_x + (r_{\kappa h} u_y + \epsilon^2 v_x - \epsilon\kappa u) \left( 1 - \frac{\epsilon^2 h_x^2}{r_{\kappa h}^2} \right)}{\left( 1 + \frac{\epsilon^2 h_x^2}{r_{\kappa h}^2} \right)} \quad (2.67)$$

Avec :  $\text{Ca} = \frac{\mu U}{\gamma_0}$  et  $\text{Ma} = \frac{RT\Gamma^*}{\mu U}$  sont respectivement les nombres, adimensionnels, Capillaire et de Marongoni.

Où la courbure adimensionnelle du film s'écrit :

$$\tilde{\kappa} = \frac{\frac{2\kappa}{r_{\kappa h}} + \frac{3\kappa\epsilon^2 h_x^2}{r_{\kappa h}^2} - \frac{\epsilon h_{xx}}{r_{\kappa h}^2} - \frac{\epsilon\kappa h_x}{r_{\kappa h}^2} \left( 1 + \frac{\epsilon^2 h_x^2}{r_{\kappa h}} \right) \cot(\kappa x + \theta_0)}{\left( 1 + \frac{\epsilon^2 h_x^2}{r_{\kappa h}} \right)^{\frac{3}{2}}} \quad (2.68)$$

Sur les paupières les conditions aux limites sont :

$$x = 0, \quad \bar{u} = 0, \quad u_s = 0, \quad h = \mathcal{H}. \quad (2.69)$$

$$x = L(t), \quad \bar{u} = \left( 1 - \frac{\mathcal{H}_l}{\mathcal{H}} \right) \dot{L}, \quad u_s = \dot{L}, \quad h = \mathcal{H}, \quad (2.70)$$

Où  $\mathcal{H} = \frac{h^*}{\epsilon L_{\text{op}}}$  et  $\mathcal{H}_l = \frac{h_l}{\epsilon L_{\text{op}}}$ .  $L(t)$  et  $\dot{L}$  sont respectivement la longueur d'ouverture de la paupière supérieure et sa vitesse sous la forme adimensionnelle données comme suit :

**Modèle d'Aydemir *et al.* [1] pour le mouvement de la paupière supérieure.**

$$L(t) = \begin{cases} \delta + U^* \tau^* \left\{ -\frac{1}{2} \left( \frac{t}{\tau^*} \right)^2 + \lambda \left[ \frac{\sqrt{\pi}}{2} \text{erf} \left( \sqrt{\frac{t}{\tau^*}} \right) - \sqrt{\frac{t}{\tau^*}} e^{-\frac{t}{\tau^*}} \right] \right\}, & 0 \leq t \leq \tau^*; \\ 1, & t > \tau^*, \end{cases} \quad (2.71)$$

$$\dot{L}(t) = \begin{cases} U^* (\lambda \sqrt{t/\tau^*} e^{-t/\tau^*} - t/\tau^*), & 0 \leq t \leq \tau^* \\ 0, & t > \tau^* \end{cases} \quad (2.72)$$

où  $U^* = \frac{U_0}{U}$ ,  $\tau^* = \frac{\tau U}{L_{op}}$  et  $\delta = \frac{L_{cl}}{L_{op}} = 0.2$ .

**Modèle de Bruna *et al.* [10] pour le mouvement de la paupière supérieure.**

$$L(t) = \begin{cases} \delta + (1 - \delta) \left(\frac{t}{\Delta t_u^*}\right)^2 \exp\left[1 - \left(\frac{t}{\Delta t_u^*}\right)^2\right], & 0 \leq t \leq \Delta t_u^*, \\ 1, & t \geq \Delta t_u^*, \end{cases} \quad (2.73)$$

$$\dot{L}(t) = \begin{cases} \frac{2(1-\delta)t}{\Delta t_u^{*2}} \left(1 - \left(\frac{t}{\Delta t_u^*}\right)^2\right) \exp\left[1 - \left(\frac{t}{\Delta t_u^*}\right)^2\right], & 0 \leq t \leq \Delta t_u^*, \\ 0, & t \geq \Delta t_u^*, \end{cases} \quad (2.74)$$

où  $\Delta t_u^* = \frac{\Delta t_u U}{L_{op}}$  et  $\delta = \frac{L_{cl}}{L_{op}} = 0.1$ .

Nous rappelons que  $L_{cl}$  est la position effective de la paupière supérieure fermée (ou partiellement fermée) à  $t = 0$ .

Les conditions initiales sont :

$$L(0) = \delta, \quad h(x, 0) = \mathcal{H}, \quad \Gamma(x, 0) = 1, \quad (2.75)$$

### 2.4.2 Valeurs des paramètres

Dans la table 2.1, Nous dressons les valeurs des paramètres intervenant dans le problème selon le modèle d'Aydemir *et al.* [1] :

En utilisant les paramètres de la table 2.1, nous déterminons les valeurs des groupements adimensionnels correspondants, qui sont dressés dans la table 2.2

Dans l'étude de Bruna [10] la plupart des paramètres utilisés par Aydemir [1] ont été repris à l'exception de certains paramètres que nous dressons dans la table 2.3. En se basant sur ces valeurs, les groupes adimensionnels s'écrivent comme dans la table 2.4.

Description	Paramètre	Valeur	Unité
Masse volumique de la couche aqueuse	$\rho$	$10^3$	$Kgm^{-3}$
viscosité dynamique	$\mu$	$1.3 \times 10^{-3}$	$Nsm^{-2}$
Tension de surface larmes-Air	$\gamma_0$	$4.5 \times 10^{-2}$	$Nm^{-1}$
Hauteur des ménisques aux paupières	$h^*$	$10^{-3}$	$m$
Coefficient de diffusion surfacique des lipides	$\mathcal{D}$	$3 \times 10^{-8}$	$m^2s^{-1}$
Concentration de lipides	$\Gamma^*$	$4 \times 10^{-7}$	$molm^{-2}$
Distance d'ouverture complete des paupières	$L_{op}$	$10^{-2}$	$m$
Rayon de courbure de la cornée	$R_C$	$10^{-2}$	$m$
Jeu paupière supérieure cornée	$h_l$	$3 \times 10^{-6}$	$m$
Vitesse moyenne de la paupière supérieure	$U$	$44 \times 10^{-3}$	$ms^{-1}$

TABLE 2.1 – Valeurs des paramètres selon (Aydemir *et al.* [1])

Description	Nombre adimensionnel	Valeur
Rapport de forme	$\epsilon$	$10^{-3}$
Rapport $L_{cl}/L_{op}$	$\delta$	0.2
Nombre de Stockes	St	$1.71 \times 10^{-2}$
Nombre de Reynolds	Re	$3.38 \times 10^2$
Nombre Capillaire	Ca	$1.27 \times 10^{-3}$
Nombre de Marongoni	Ma	18
Nombre de Peclet	Pe	$1.47 \times 10^4$
Courbure adimensionnelle	$\kappa$	1
Hauteur adimensionnelle des ménisques	$\mathcal{H}$	100
Jeu adimensionnel paupière supérieure cornée	$\mathcal{H}_l$	0.3

TABLE 2.2 – Valeurs des groupements adimensionnels selon (Aydemir *et al.* [1])

Description	Paramètre	Valeur	Unité
Hauteur des ménisques aux paupières	$h^*$	$2.5 \times 10^{-4}$	$m$
Jeu paupière supérieure cornée	$h_l$	$5 \times 10^{-6}$	$m$
Vitesse moyenne de la paupière supérieure	$U$	$51 \times 10^{-3}$	$ms^{-1}$

TABLE 2.3 – Valeurs des paramètres selon (Bruna *et al.* [10])

Description	Nombre adimensionnel	Valeur
Rapport de forme	$\epsilon$	$10^{-3}$
Rapport $L_{cl}/L_{op}$	$\delta$	0.1
Nombre de Stockes	St	$1.48 \times 10^{-2}$
Nombre de Reynolds	Re	$3.91 \times 10^2$
Nombre Capillaire	Ca	$1.47 \times 10^{-3}$
Nombre de Marangoni	Ma	15.54
Nombre de Peclet	Pe	$1.7 \times 10^4$
Courbure adimensionnelle	$\kappa$	1
Hauteur adimensionnelle des ménisques	$\mathcal{H}$	25
Jeu adimensionnel paupière supérieure cornée	$\mathcal{H}_1$	0.5

TABLE 2.4 – Valeurs des groupements adimensionnels selon (Bruna *et al.* [10])

Sur la base de ces valeurs, la taille des nombres adimensionnels tels que  $\epsilon^2 Re$  et  $1/Pe$  était très petite, donc l'inertie et la diffusion de surface pouvaient être négligées. Alors que Jones *et al.* font valoir qu'un flux de liquide sous la paupière supérieure est nécessaire pour éviter la rupture dans l'amincissement à long terme du film lacrymal, Aydemir et al (2011) ne considèrent pas ce flux puisque, sur des durées courtes à modérées, la taille de  $\mathcal{H}_1/\mathcal{H}$  indique que ce flux sera petit. Nous considérons donc le cas où le volume de liquide dans le film lacrymal est constant. Il est connu que la courbure entre les ménisques au niveau des paupières et le film lacrymal change brusquement. Cela peut induire un écoulement capillaire et conduire à un gradient de tension de surface important à la surface libre, ce qui provoque un flux de Marangoni, influençant la dynamique du film lacrymal. Afin de considérer les écoulements capillaires et Marangoni, les termes devant les nombres  $\epsilon^3/Ca$  et  $\epsilon Ma$ , devraient être conservés même s'ils sont petit. Pour simplifier notre notation, nous réécrivons les paramètres suivant sous la forme :

$$\mathcal{C} = \frac{\epsilon^3}{Ca}, \quad \mathcal{B} = \frac{St}{\mathcal{C}}, \quad \mathcal{M} = \epsilon Ma \quad (2.76)$$

où  $\mathcal{B}$  est le nombre de Bond.

### 2.4.3 Réduction des équations à la limite du film mince (étude phénoménologique)

Suivant la théorie classique de la lubrification, nous cherchons des solutions du problème sous forme d'expansions de perturbations pour les variables dépendantes, et formulons le problème d'ordre dominant :

$$f = f_0 + \epsilon f_1 + \dots \quad (2.77)$$

La courbure adimensionnelle du film donnée par l'expression (2.68), développée en termes d'une série de Taylor par rapport au paramètre de rapport d'aspect  $\epsilon$ , devient

$$\tilde{\kappa} = 2\kappa - 2\epsilon\kappa^2 h - \epsilon h_{xx} - \epsilon\kappa h_x \cot(\kappa x + \theta_0) + O(\epsilon^2). \quad (2.78)$$

A l'ordre zéro, les équations du problème sous forme adimensionnelle sont les suivantes :

$$u_x + v_y + \kappa u \cot(\kappa x + \theta_0) = 0, \quad (2.79)$$

$$0 = -p_x + u_{yy} - \text{St} \sin(\kappa x + \theta_0), \quad (2.80)$$

$$0 = -p_y, \quad (2.81)$$

$$\Gamma_t + (u\Gamma)_x = 0, \quad (2.82)$$

où à  $y = h(x, t)$ ,  $u = u_s$ .

Les conditions aux limites associées aux équations ci-dessus se réduisent :

$$y = 0 \quad u = v = 0, \quad (2.83)$$

$$y = h(x, t) \quad v = h_t + u h_x, \quad (2.84)$$

$$p = \frac{\epsilon^2}{\text{Ca}} (2\kappa - 2\epsilon\kappa^2 h - \epsilon h_{xx} - \epsilon\kappa h_x \cot(\kappa x + \theta_0)), \quad (2.85)$$

$$u_y = -\epsilon \text{Ma} \Gamma_x, \quad (2.86)$$

L'intégration du système d'équations ci-dessus conduit à

$$u = -\mathcal{M}\Gamma_x y + \frac{\mathcal{C}}{2} \{ \kappa^2 h_x + h_{xxx} + \kappa h_{xx} \cot(\kappa x + \theta_0) - \kappa^2 h_x \cot^2(\kappa x + \theta_0) - \mathcal{B} \sin(\kappa x + \theta_0) \} (2h - y) y, \quad (2.87)$$

Les vitesses moyenne  $\bar{u}$  et de surface  $u_s$  respectivement, peuvent être facilement déduites à partir de (2.87) et écrites comme :

$$u_s = -\mathcal{M}\Gamma_x h + \frac{\mathcal{C}}{2} h^2 \{ \kappa^2 h_x + h_{xxx} + \kappa h_{xx} \cot(\kappa x + \theta_0) - \kappa^2 h_x \cot^2(\kappa x + \theta_0) - \mathcal{B} \sin(\kappa x + \theta_0) \}, \quad (2.88)$$

$$\bar{u} = \frac{1}{h} \int_0^h u dy = -\frac{\mathcal{M}}{2} \Gamma_x h + \frac{\mathcal{C}}{3} h^2 \{ \kappa^2 h_x + h_{xxx} + \kappa h_{xx} \cot(\kappa x + \theta_0) - \kappa^2 h_x \cot^2(\kappa x + \theta_0) - \mathcal{B} \sin(\kappa x + \theta_0) \}, \quad (2.89)$$

En combinant l'équation de continuité (2.79) et la condition cinématique à l'interface (2.84) on obtient :

$$h_t + \frac{1}{\sin(\kappa x + \theta_0)} (\sin(\kappa x + \theta_0) \bar{u} h)_x = 0, \quad (2.90)$$

En injectant les relations (2.89) et (2.88) dans (2.90) et (2.82), respectivement, nous obtenons le système suivant de deux équations différentielles partielles non linéaires couplées pour l'épaisseur du film lacrymal  $h$  et la concentration du lipide polaire,  $\Gamma$ .

$$h_t + \frac{1}{\sin(\kappa x + \theta_0)} \left[ \left( -\frac{\mathcal{M}}{2} \Gamma_x h^2 + \frac{\mathcal{C}}{3} h^3 \{ \kappa^2 h_x + h_{xxx} + \kappa h_{xx} \cot(\kappa x + \theta_0) - \kappa^2 h_x \cot^2(\kappa x + \theta_0) - \mathcal{B} \sin(\kappa x + \theta_0) \} \right) \sin(\kappa x + \theta_0) \right]_x = 0 \quad (2.91)$$

$$\Gamma_t + \left[ -\mathcal{M} h \Gamma_x + \frac{\mathcal{C}}{2} h^2 \Gamma \{ \kappa^2 h_x + h_{xxx} + \kappa h_{xx} \cot(\kappa x + \theta_0) - \kappa^2 h_x \cot^2(\kappa x + \theta_0) - \mathcal{B} \sin(\kappa x + \theta_0) \} \right]_x = 0 \quad (2.92)$$

En posant  $\kappa = 0$  and  $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$  dans (2.91) et (2.92) on retrouve les deux équations (33a et 33b) pour l'épaisseur du film et la concentration en lipides donnée dans Aydemir *et al.* [1] Ces équations sont résolues dans le domaine mobile sur  $0 \leq x \leq L(t)$  sous les conditions aux limites et initiales suivantes :

$$\begin{aligned} \kappa^2 h_x + h_{xxx} + \kappa h_{xx} \cot \theta_0 - \kappa^2 h_x \cot^2 \theta_0 - \mathcal{B} \sin \theta_0 &= 0, \\ \Gamma_x &= 0, \quad h = \mathcal{H}, \quad \text{à } x = 0, \end{aligned} \quad (2.93)$$

$$\begin{aligned} \kappa^2 h_x + h_{xxx} + \kappa h_{xx} \cot(\kappa L(t) + \theta_0) - \kappa^2 h_x \cot^2(\kappa L(t) + \theta_0) \\ - \mathcal{B} \sin(\kappa L(t) + \theta_0) &= \frac{6\dot{L}}{\mathcal{C} \mathcal{H}^2}, \end{aligned} \quad (2.94)$$

$$\Gamma_x = \frac{2\dot{L}}{\mathcal{M} \mathcal{H}}, \quad h = \mathcal{H}, \quad \text{à } x = L(t), \quad (2.95)$$

$$L(0) = \delta, \quad \Gamma(x, 0) = 1, \quad h(x, 0) = \mathcal{H}, \quad (2.96)$$

### 2.4.4 Équation d'évolution du film lacrymal en absence de lipides

L'équation d'évolution du film lacrymal,  $h$ , en absence de lipides polaires, associée aux conditions aux limites et initiales, est un modèle réduit du modèle complet (2.91 à 2.96) qui se traduit par le système d'équations suivant :

$$h_t + \frac{1}{\sin(\kappa x + \theta_0)} \left[ \frac{\mathcal{C}}{3} h^3 \left\{ \kappa^2 h_x + h_{xxx} + \kappa h_{xx} \cot(\kappa x + \theta_0) - \kappa^2 h_x \cot^2(\kappa x + \theta_0) - \mathcal{B} \sin(\kappa x + \theta_0) \right\} \sin(\kappa x + \theta_0) \right]_x = 0 \quad (2.97)$$

On note la différence de la condition limite sur la paupière mobile entre le système réduit (sans lipides) et le système complet (avec lipides).

$$\begin{aligned} \kappa^2 h_x + h_{xxx} + \kappa h_{xx} \cot \theta_0 - \kappa^2 h_x \cot^2 \theta_0 - \mathcal{B} \sin \theta_0 &= 0, \\ h &= \mathcal{H}, \quad \text{à } x = 0, \end{aligned} \quad (2.98)$$

$$\begin{aligned} \kappa^2 h_x + h_{xxx} + \kappa h_{xx} \cot(\kappa L(t) + \theta_0) - \kappa^2 h_x \cot^2(\kappa L(t) + \theta_0) \\ - \mathcal{B} \sin(\kappa L(t) + \theta_0) &= \frac{3\dot{L}}{\mathcal{C} \mathcal{H}^2}, \end{aligned} \quad (2.99)$$

$$h = \mathcal{H}, \quad \text{à } x = L(t), \quad (2.100)$$

$$L(0) = \delta, \quad h(x, 0) = \mathcal{H}. \quad (2.101)$$

## 2.5 Conclusion

Les équations de l'épaisseur du film et de la concentration des lipides polaires, établies, associées à des conditions initiales et aux limites forment un système d'équations différentielles aux dérivées partielles non linéaires, et couplées (équations 2.91 à 2.96). En raison de leur complexité, ces équations ne peuvent être résolues qu'à l'aide de techniques numériques. Nous allons exposer dans le chapitre suivant la procédure numérique adoptée pour la résolution de ce système.

## Procédure numérique

Plusieurs méthodes numériques sont disponibles dans la littérature dont on peut citer à titre d'exemples, les plus répandues; la méthode des différences finies, la méthode des volumes finis, la méthode des éléments finis et les méthodes spectrales.

Nous avons opté, pour la résolution du système résultant, pour la méthode des différences finies, essentiellement utilisée en thermique et en mécanique des fluides, basée sur l'approximation des opérateurs par les développements de Taylor ou combinaisons de valeurs ponctuelles de la fonction en un nombre fini de points discrets ou nœuds du maillage. Cette méthode a été utilisée avec succès par plusieurs auteurs ([10, 1, 5, 29]) pour sa grande simplicité à mettre en œuvre pour des géométries présentant des topologies 'simples'. Elle s'inscrit dans le processus général de discrétisation d'un problème physique selon les étapes suivantes :

1. Modélisation de la physique du problème par : - le choix des équations régissant le problème avec conditions limites et initiales, - le choix du domaine physique, - la considération des propriétés physiques, autres hypothèses ...
2. Représentation discrète de la géométrie : génération d'un maillage.
3. Obtention de l'équation discrète : Cette étape consiste à remplacer tous les termes de dérivées sous une forme discrète à l'aide d'une technique basée sur les développements limités.
4. Assemblage du système discret : Application de l'équation discrète sur l'ensemble des nœuds autorisés.
5. Mise en place et introduction des conditions aux limites dans le système d'équations discret
6. Résolution du système discret qu'il soit linéaire ou non linéaire par des méthodes de résolution adéquates.
7. Post-traitement : affichage des résultats

## 8. Analyse des résultats

### 3.1 Méthode des différences finies

La méthode des différences finies est une technique de discrétisation, en espace et en temps, destinée à transformer une ou plusieurs relations différentielles continues (au sens mathématique du terme) en un nombre équivalent de relations dites discrètes, à savoir applicables en un nombre fini (ie discret) de points (appelés encore nœuds de coordonnées connues). Elle consiste à approximer les dérivées des équations de la physique au moyen des développements de Taylor et se déduit directement de la définition de la dérivée. Elle est due aux travaux de plusieurs mathématiciens du 18ème siècle (Euler, Taylor, Leibniz...).

#### 3.1.1 Discrétisation du domaine ou Maillage

On parle d'un domaine discret pour spécifier des entités en nombres finis. La notion de 'domaine discret' s'oppose à la notion de 'domaine continu' qui représente un domaine géométrique d'une infinité de points géométriques.

**Le maillage** est un découpage spatiale particulier d'un domaine continu représenté soit par : une courbe rectiligne ou non en 1D, une surface en 2D, ou un volume en 3D, en sous-domaines élémentaires finis et bien définis composés : de nœuds et d'éléments aussi bien : linéique de type barre en 1D, surfaciques en 2D (triangles, quadrangles) ou volumiques en 3D (tétraèdres, hexaèdres, prismes ...).

L'objet d'un maillage est de procéder à une simplification d'un système par un modèle représentant ce système dans l'optique de simulations de calculs ou de représentations graphiques.

**Nœud** : Les nœuds sont des points de coordonnées du domaine étudié en lesquels sont définies les valeurs d'une fonction, utilisées lors d'une approximation nodale par exemple.

**Maillage dynamique** : Les maillages dynamiques sont principalement utilisés en mécanique des fluides lorsqu'une ou plusieurs frontières du domaine sont assujetties à un déplacement au cours du temps. Il est alors nécessaire d'adapter le maillage pour assurer une continuité entre les noeuds internes et les noeuds 'mobiles'. Les principales applications sont : l'étude de problèmes à surface libre (houle, hydraulique environnementale ...), les interactions fluide-structure, les propagations de fronts (remplissage de moules par exemple), étalement des larmes sur une cornée avec mouvement de paupières, ....

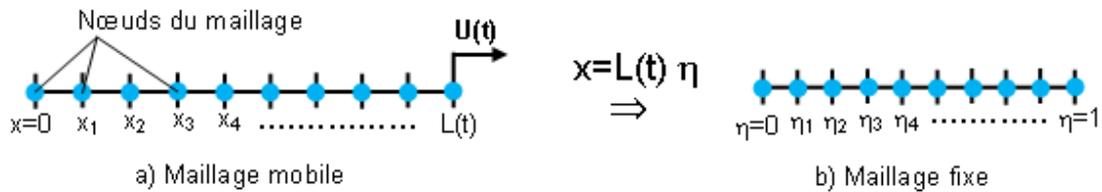


FIGURE 3.1 – Maillage fixe et mobile

Une technique particulière est souvent associée à une ré-écriture des équations de la mécanique des fluides pour la prise en compte des vitesses de mailles.

Étant donné l'évolution du domaine étudié compris entre une paupière inférieure fixe et une paupière supérieure mobile, comme dans d'autres études ([10, 1, 5, 29, 31, 25, 34]), pour les calculs numériques il est commode de représenter (ou cartographier) le problème sur un domaine de calcul fixe en utilisant le changement de variables, comme suit :

$$x = L(t)\eta \quad (3.1)$$

$$h(x, t) = H(\eta, t) \quad (3.2)$$

$$\Gamma(x, t) = \Gamma(\eta, t) \quad (3.3)$$

Où  $L(t)$  est le déplacement de la paupière supérieure donné par les équations (2.3 et 2.4).

Sur la figure 3.1 est illustrée la transformation d'un maillage mobile en maillage fixe.

Pour réécrire le système d'équation (2.91 à 2.96) dans le domaine fixe  $0 \leq \eta \leq 1$ . transformons d'abords  $h_t$  et  $\Gamma_t$  en tenant compte de (3.1 à 3.3).

$$h_t = H_t + H_\eta \frac{\partial \eta}{\partial t} = H_t + H_\eta \left( -\frac{x\dot{L}}{L^2} \right) = H_t - \frac{\dot{L}}{L} \eta H_\eta. \quad (3.4)$$

$$\Gamma_t = \Gamma_t + \Gamma_\eta \frac{\partial \eta}{\partial t} = \Gamma_t + \Gamma_\eta \left( -\frac{x\dot{L}}{L^2} \right) = \Gamma_t - \frac{\dot{L}}{L} \eta \Gamma_\eta. \quad (3.5)$$

En injectant les relations (3.4) et (3.5) dans (2.90) et (2.82), respectivement, nous obtenons le système suivant de deux équations différentielles partielles non linéaires couplées pour l'épaisseur du film lacrymal  $H$  et la concentration du lipide polaire,  $\Gamma$ .

$$\begin{aligned} & \left[ LH \sin(\kappa L \eta + \theta_0) \right]_t - \dot{L} \left[ \eta H \sin(\kappa L \eta + \theta_0) \right]_\eta - \left[ \frac{\mathcal{M}}{2L} H^2 \Gamma_\eta \sin(\kappa L \eta + \theta_0) \right. \\ & \quad - \frac{\mathcal{C}}{3L^3} H^3 \sin(\kappa L \eta + \theta_0) \left( \kappa^2 L^2 H_\eta + H_{\eta\eta\eta} + \kappa L H_{\eta\eta} \cot(\kappa L \eta + \theta_0) \right. \\ & \quad \left. \left. - \kappa^2 L^2 H_\eta \cot^2(\kappa L \eta + \theta_0) - \mathcal{B} L^3 \sin(\kappa L \eta + \theta_0) \right) \right]_\eta = 0. \end{aligned} \quad (3.6)$$

$$\begin{aligned} & \left( L \Gamma \right)_t - \dot{L} \left( \eta \Gamma \right)_\eta - \left[ \frac{\mathcal{M}}{L} H \Gamma \Gamma_\eta - \frac{\mathcal{C}}{2L^3} H^2 \Gamma \left( \kappa^2 L^2 H_\eta + H_{\eta\eta\eta} + \kappa L H_{\eta\eta} \cot(\kappa L \eta + \theta_0) \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - \kappa^2 L^2 H_\eta \cot^2(\kappa L \eta + \theta_0) - \mathcal{B} L^3 \sin(\kappa L \eta + \theta_0) \right) \right]_\eta = 0. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Ces équations sont résolues dans le domaine fixe  $0 \leq \eta \leq 1$ . sous les conditions aux limites et initiales suivantes :

$$\begin{aligned} & \kappa^2 L^2 H_\eta + H_{\eta\eta\eta} + \kappa L H_{\eta\eta} \cot(\theta_0) - \kappa^2 L^2 H_\eta \cot^2(\theta_0) - \mathcal{B} L^3 \sin(\theta_0) = 0, \\ & \Gamma_\eta = 0, \quad H = \mathcal{H}, \quad \text{à } \eta = 0, \end{aligned} \quad (3.8)$$

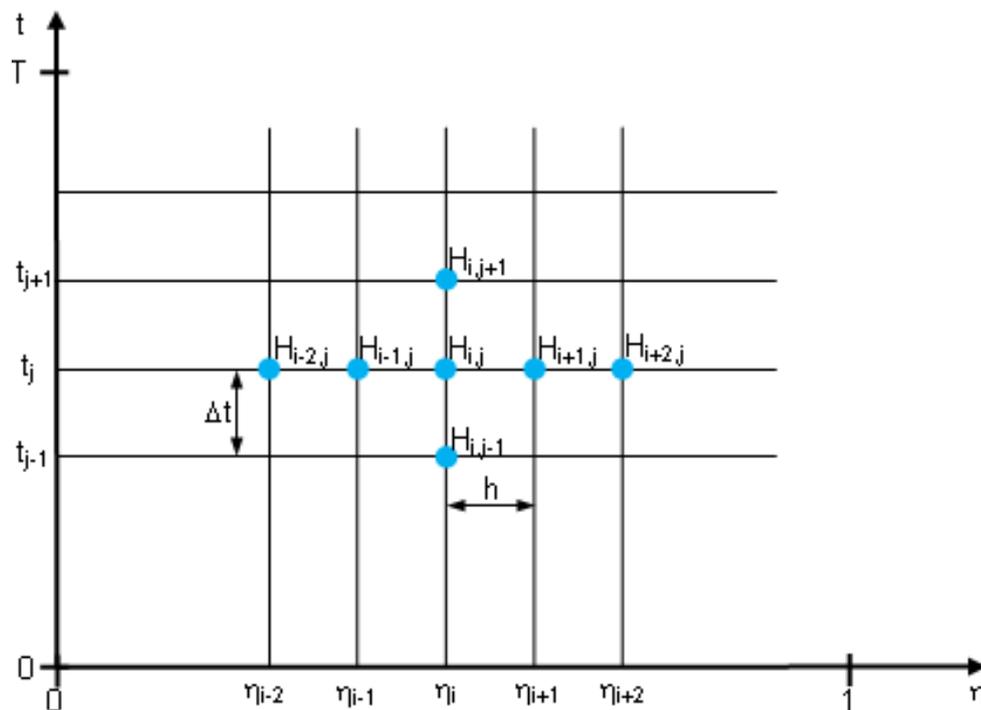
$$\begin{aligned} & \kappa^2 L^2 H_\eta + H_{\eta\eta\eta} + \kappa L H_{\eta\eta} \cot(\kappa L + \theta_0) - \kappa^2 L^2 H_\eta \cot^2(\kappa L + \theta_0) \\ & - \mathcal{B} L^3 \sin(\kappa L + \theta_0) = \frac{6 \dot{L} L^3}{\mathcal{C} \mathcal{H}^2}, \end{aligned} \quad (3.9)$$

$$\Gamma_\eta = \frac{2 \dot{L} L}{\mathcal{M} \mathcal{H}}, \quad H = \mathcal{H}, \quad \text{à } \eta = 1, \quad (3.10)$$

$$L(0) = \delta, \quad \Gamma(\eta, 0) = 1, \quad H(\eta, 0) = \mathcal{H}, \quad (3.11)$$

### 3.1.2 Discrétisation spatiales des équations

Lorsque nous voulons résoudre une ou plusieurs équations différentielles, partielles, continues (au sens mathématique du terme) sur un ordinateur, nous ne pouvons généralement le faire que dans un sens approximatif, car un ordinateur ne peut traiter qu'une quantité finie de données. Le processus consistant à transformer une équation ou plusieurs équations continues en un nombre équivalent de relations dites discrètes, à savoir applicables en un nombre fini (ie discret) de points (appelés encore nœuds de coordonnées connues) est appelé **discrétisation d'équations**.

FIGURE 3.2 – Discrétisation spatio-temporelle de  $H(\eta, t)$ 

Il y a plusieurs façons de procéder, les plus populaires, comme cité précédemment, étant les discrétisations différences finies, éléments finis et volumes finis. Le point commun à toutes ces approches est qu'à la fin, l'équation ou plusieurs équations différentielles, sont transformées en un ensemble discret d'équations linéaires ou non linéaires à résoudre.

Considérons le système d'équations (3.6 à 3.11) aux dérivées partielles, non linéaire, en temps et en espace, dont on cherche la solution  $H(\eta, t), \Gamma(\eta, t)$  sur le domaine spatio-temporel  $\Omega = [0, 1] \times [0, T]$ .

Dans la suite de ce chapitre nous attribuons la notation  $h$  au pas de l'espace.

Afin d'appliquer la méthode des différences finies, le domaine spatial  $[0, 1]$  doit être divisé en  $M$  intervalles, chacun de longueur  $h = 1/M$ . Le domaine temporel est aussi divisé en  $N$  intervalles de pas  $\Delta t = T/N$ . Le domaine  $\Omega$  est donc découpé suivant un maillage où chaque point  $(\eta_i, t_j)_{i=0,1,\dots,M}^{j=0,1,\dots,N}$  est repéré sur l'axe  $\eta$  par sa position  $\eta_i = ih$  et sur l'axe  $t$  par  $t_j = j\Delta t$  comme le montre les figures ci dessous.

On pose dans ce qui suit :

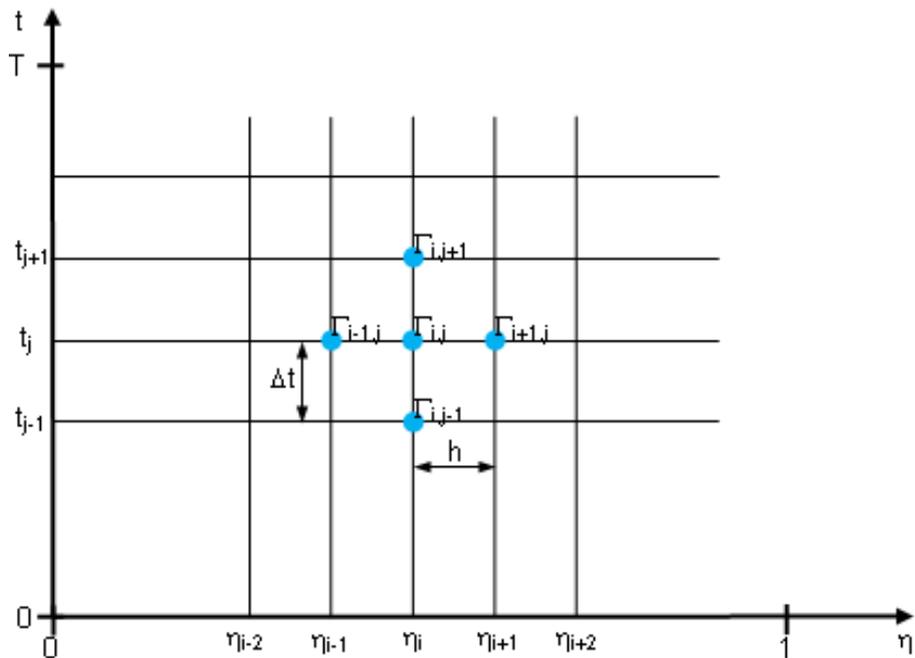


FIGURE 3.3 – Discrétisation spatio-temporelle de  $\Gamma(\eta, t)$

$$\begin{aligned}
 H(\eta_i, t_j) &= H[i \times h, j \times \Delta t] = H_{i,j} \\
 H(\eta_{i-1}, t_j) &= H[(i - 1) \times h, j \times \Delta t] = H_{i-1,j} \\
 H(\eta_{i-2}, t_j) &= H[(i - 2) \times h, j \times \Delta t] = H_{i-2,j} \\
 H(\eta_{i+1}, t_j) &= H[(i + 1) \times h, j \times \Delta t] = H_{i+1,j} \\
 H(\eta_{i+2}, t_j) &= H[(i + 2) \times h, j \times \Delta t] = H_{i+2,j}
 \end{aligned}
 \tag{3.12}$$

$$\begin{aligned}
 \Gamma(\eta_i, t_j) &= \Gamma[i \times h, j \times \Delta t] = \Gamma_{i,j} \\
 \Gamma(\eta_{i-1}, t_j) &= \Gamma[(i - 1) \times h, j \times \Delta t] = \Gamma_{i-1,j} \\
 \Gamma(\eta_{i+1}, t_j) &= \Gamma[(i + 1) \times h, j \times \Delta t] = \Gamma_{i+1,j}
 \end{aligned}
 \tag{3.13}$$

**Développement de Taylor**

Soit  $H(\eta, t)$  une fonction indéfiniment dérivable sur un domaine  $\Omega = [0, 1] \times [0, T]$  et  $(\eta_0, t_0) \in \Omega$ .

On peut alors effectuer le développement de Taylor de  $H(\eta, t)$ , par rapport à  $\eta$ , en  $(\eta_0, t_0)$  à l'ordre  $n$

$$T_n(H)(\eta, t) = H(\eta_0, t_0) + \frac{(\eta - \eta_0)}{1!} \left( \frac{\partial H}{\partial \eta} \right)_{(\eta_0, t_0)} + \dots + \frac{(\eta - \eta_0)^n}{n!} \left( \frac{\partial^n H}{\partial \eta^n} \right)_{(\eta_0, t_0)} \quad (3.14)$$

et se demander si  $T_n(H)(\eta, t)$  converge lorsque  $n$  tend vers l'infini, si la limite est égale à  $H(\eta, t)$  et si on peut facilement majorer la différence entre  $H(\eta, t)$  et  $T_n(H)(\eta, t)$ . Si c'est le cas, on pourra utiliser  $T_n(H)(\eta, t)$  comme valeur approchée de  $H(\eta, t)$ .

On peut parfois répondre à ces questions simultanément en regardant le développement de Taylor de  $H(\eta, t)$  avec reste : il existe  $\xi$  compris entre  $\eta_0$  et  $\eta$  tel que :

$$R_n(\eta, t) = H(\eta, t) - T_n(H)(\eta, t) = \frac{(\eta - \eta_0)^{n+1}}{(n+1)!} \left( \frac{\partial^{n+1} H}{\partial \eta^{n+1}} \right)_{(\xi, t)} \quad (3.15)$$

### Erreur de troncature

L'erreur de troncature est l'erreur commise lors de la discrétisation de termes de dérivées. Cette erreur est générée lors du choix de l'ordre de précision de la discrétisation, c'est-à-dire du terme à partir duquel nous négligeons le reste du développement limité.

L'erreur commise suite à la troncature des termes à partir d'un certain rang (2, 3, ...) est nommée erreur de troncature .

Il s'en suit alors que l'équation discrétisée à résoudre diffère de l'équation originale au terme près, à savoir :

Équation continue = équation discrète +  $O(h^n)$ , où  $O(h^n) = R_n(\eta, t)$ . Cette notion est utilisée pour vérifier la consistance d'un schéma discret obtenu par la méthode des différences finies.

### Consistance

Lors du passage d'une équation continue à une équation discrète, la discrétisation des termes de dérivées se traduit en différences finies par une troncature de l'ordre d'approximation de ses derniers termes.

Définition : Un schéma discret est dit consistant, si l'erreur de troncature tend vers zéro quand les pas de discrétisation  $h$  et  $\Delta t$  tendent eux aussi vers zéro.

La consistance d'un schéma est un des critères à vérifier pour assurer sa convergence vers la solution.

L'idée de base de la méthode des différences finies peut être décrite en considérant la définition

de la dérivée d'une fonction  $H(\eta, t)$  au point  $\eta = \eta_0$  et à l'instant  $t = t_0$ .

$$\frac{\partial H}{\partial \eta} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{H(\eta_0 + h, t_0) - H(\eta_0, t_0)}{h} \quad (3.16)$$

Si  $H(\eta, t)$  est continue, on peut s'attendre à ce que l'équation précédente soit une approximation raisonnable de  $\frac{\partial H}{\partial \eta}$  si  $h$  est suffisamment petit. Le développement en série de Taylor de  $H(\eta_0 + h, t_0)$  autour du point  $(\eta_0, t_0)$ , à l'ordre  $n$  donne :

$$\begin{aligned} H(\eta_0 + h, t_0) = H(\eta_0, t_0) + \frac{h}{1!} \left( \frac{\partial H}{\partial \eta} \right)_{(\eta_0, t_0)} + \frac{h^2}{2!} \left( \frac{\partial^2 H}{\partial \eta^2} \right)_{(\eta_0, t_0)} + \frac{h^3}{3!} \left( \frac{\partial^3 H}{\partial \eta^3} \right)_{(\eta_0, t_0)} \\ + \dots + \frac{h^n}{n!} \left( \frac{\partial^n H}{\partial \eta^n} \right)_{(\eta_0, t_0)} + O(h^n). \end{aligned} \quad (3.17)$$

$$\begin{aligned} H(\eta_0 - h, t_0) = H(\eta_0, t_0) - \frac{h}{1!} \left( \frac{\partial H}{\partial \eta} \right)_{(\eta_0, t_0)} + \frac{h^2}{2!} \left( \frac{\partial^2 H}{\partial \eta^2} \right)_{(\eta_0, t_0)} - \frac{h^3}{3!} \left( \frac{\partial^3 H}{\partial \eta^3} \right)_{(\eta_0, t_0)} \\ + \dots - \frac{h^n}{n!} \left( \frac{\partial^n H}{\partial \eta^n} \right)_{(\eta_0, t_0)} + O(h^n). \end{aligned} \quad (3.18)$$

Considérons la fonction  $H(\eta, t)$  représentée dans  $\Omega = [0, 1] \times [0, T]$ . Une grille spatiale a été introduite, c'est-à-dire que nous considérons seulement la fonction dans un ensemble discret de points,  $\{\eta_i\}_{i=0, \dots, M}$ , avec  $\eta_i = ih$ . Ici  $h$  est l'espacement de la grille spatiale, ici pris comme une constante. mais en principe nous pouvons avoir un espacement différent entre chaque point de grille discrète. Nous estimons ensuite les dérivées de cette fonction, en utilisant uniquement les valeurs de la fonction dans les ensembles discrets de points. Cette approximation s'appelle une *différence finie*. Nous donnons maintenant des approximations de différences finies alternatives de  $\frac{\partial H}{\partial \eta}$ ,  $\frac{\partial^2 H}{\partial \eta^2}$ ,  $\frac{\partial^3 H}{\partial \eta^3}$  et  $\frac{\partial^4 H}{\partial \eta^4}$  à  $\eta = \eta_i$ .

### Molécule de discrétisation

On appelle molécule de discrétisation, la représentation 'graphique' de la forme discrète d'un opérateur dérivée d'ordre quelconque.

Nous donnons ci-dessous les molécules de discrétisation pour une dérivée première en espace (respectivement décentrée à droite, décentrée à gauche, et centrée).

### Différence décentrée avancée d'ordre un

Une discrétisation décentrée de la dérivée d'une fonction  $H(\eta, t)$ , par rapport à la variable d'espace  $\eta$ , est une relation dans laquelle les contributions des valeurs nodales de la fonction de part et d'autre du point considéré (nœud  $i$ ) ne sont pas équivalentes. Nous avons les deux formes possibles de décentrement suivantes (respectivement droite et gauche).

A partir de l'équation (3.17) on peut approximer la première dérivée d'ordre un avancée  $\frac{\partial H}{\partial \eta}$ ,

$$\frac{\partial H}{\partial \eta} = \frac{H(\eta_i + h, t_j) - H(\eta_i, t_j)}{h} + O(h) \quad (3.19)$$

En tenant compte de l'équation (3.12), l'équation précédente est approximée par :

$$\frac{\partial H}{\partial \eta} \approx \frac{H_{i+1,j} - H_{i,j}}{h} \quad (3.20)$$

#### Différence décentrée retardée d'ordre un

A partir de l'équation (3.18) on peut approximer la première dérivée d'ordre un retardée  $\frac{\partial H}{\partial \eta}$ ,

$$\frac{\partial H}{\partial \eta} = \frac{H(\eta_i, t_j) - H(\eta_{i-1}, t_j)}{h} + O(h) \quad (3.21)$$

En introduisant l'équation (3.12), l'équation (3.21) s'écrit :

$$\frac{\partial H}{\partial \eta} \approx \frac{H_{i,j} - H_{i-1,j}}{h} \quad (3.22)$$

L'approximation de la différence directe de  $\frac{\partial H}{\partial \eta}$  est de premier ordre, ce qui signifie que l'erreur d'approximation de la dérivée première s'échelonne linéairement avec  $h$  : si  $h$  est réduit d'un facteur deux, l'erreur est réduite d'un facteur de deux.

#### Différence centrée

Une discrétisation centrée de la dérivée d'une fonction  $H(\eta, t)$ , par rapport à la variable d'espace  $\eta$ , est une relation dans laquelle les contributions de ses valeurs nodales de part et d'autre du point considéré (nœud  $i$ ) sont équivalentes :

Cela donne pour la première dérivée en  $\eta$  au premier ordre, à partir des deux équations (3.19) et (3.21), l'expression suivante :

$$\frac{\partial H}{\partial \eta} = \frac{H(\eta_i + h, t_j) - H(\eta_{i-1}, t_j)}{2h} + O(h^2) \quad (3.23)$$

Ou sous la forme suivante

$$\frac{\partial H}{\partial \eta} \approx \frac{H_{i+1,j} - H_{i-1,j}}{2h} \quad (3.24)$$

L'approximation de la différence centrée de  $\frac{\partial H}{\partial \eta}$ , est du second ordre, ce qui signifie que l'erreur d'approximation est quadratique avec  $h$  : si  $h$  est réduit par un facteur de deux, l'erreur est réduite d'un facteur quatre.

Nous pouvons également générer des approximations d'ordre supérieur à la dérivée première de  $\frac{\partial H}{\partial \eta}$ . Les approximations d'ordre supérieur impliqueront des couplages entre plusieurs points voisins.

### Application du schéma différence centrée pour les dérivées d'ordre supérieur

Pour la résolution de notre problème nous avons opté pour une discrétisation en différences centrées pour la variable spatiale  $\eta$ . Dans ce qui suit nous donnons les expressions des dérivées spatiales d'ordre 2,3 et 4 en différences centrées.

$$\frac{\partial^2 H}{\partial \eta^2} \approx \frac{H_{i+1,j} - 2H_{i,j} + H_{i-1,j}}{h^2} \quad (3.25)$$

$$\frac{\partial^3 H}{\partial \eta^3} \approx \frac{H_{i+2,j} - 2H_{i+1,j} + 2H_{i-1,j} - H_{i-2,j}}{2h^3} \quad (3.26)$$

$$\frac{\partial^4 H}{\partial \eta^4} \approx \frac{H_{i+2,j} - 4H_{i+1,j} + 6H_{i,j} - 4H_{i-1,j} + H_{i-2,j}}{h^4} \quad (3.27)$$

### 3.1.3 Discrétisation temporelle des équations résultantes

La résolution numérique de problèmes instationnaires, à savoir dépendant du temps, conduit à l'issue d'une phase de discrétisation spatiale, à un système d'équations laissant apparaître des dérivées en temps.

La discrétisation temporelle consiste alors à découper l'axe des temps 't' en intervalles réguliers ou non puis à déterminer des relations de récurrence donnant les solutions actuelles (à  $t = t_{j+1}$ ) en fonction des solutions précédentes respectivement (à  $t = t_j$  et  $t = t_{j-1}$ )

Les indices  $j-1$ ,  $j$  et  $j+1$  désignent respectivement trois instants successifs.

Ces relations de récurrence permettent, moyennant la connaissance du nombre adéquat de conditions initiales, de déterminer les solutions successives prises par le vecteur des inconnues

### Système du 1er ordre en temps

Les problèmes instationnaires à l'ordre 1, aussi appelés 'transitoires', ont la particularité de faire apparaître une dérivée première en temps de la variable inconnue du problème.

pour des schémas temporels d'ordre 1. La discrétisation du terme transitoire fait intervenir les deux temps actuel ( $t = t_{j+1}$ ) et précédent ( $t = t_j$ ). Les indices  $j$  et  $j+1$  désignent respectivement deux instants successifs.

### 3.1.4 Schéma d'Euler

Il s'agit d'une méthode d'intégration des schémas temporels.

Elle est due à Euler Leohnard (1707-1783) mathématicien Suisse, élève de Jean Bernoulli. Ce schéma est le plus connu et le plus simple à utiliser. Si nous considérons notre problème régi par les équations (3.6 et 3.7), et qui peuvent se mettre sous la forme suivante :

$$\begin{aligned}\frac{\partial H}{\partial t} &= f_1(H, \Gamma, t) \\ \frac{\partial \Gamma}{\partial t} &= f_2(H, \Gamma, t)\end{aligned}\tag{3.28}$$

#### Schéma d'Euler explicite

Étant donné un pas de temps  $\Delta t$  et une suite d'instant  $t_j = j\Delta t$  le schéma d'Euler explicite associé aux système d'équations différentielles, non linéaires précédent est donné, en discrétisant les dérivées partielles en temps des membres de gauches du système, en utilisant l'approximation décentrée à droite de ces dérivées, ce qui donne la relation de récurrence suivante :

$$\begin{aligned}H_{j+1} &= H_j + \Delta t [f_1(H, \Gamma, t)]_{t=t_j} \\ \Gamma_{j+1} &= \Gamma_j + \Delta t [f_2(H, \Gamma, t)]_{t=t_j}\end{aligned}\tag{3.29}$$

Où les indices  $j$  et  $j+1$  désignent des instants successifs de calculs et les fonctions  $f_1(H, \Gamma, t)$ , et  $f_2(H, \Gamma, t)$  sont évaluées après discrétisation spatiale à l'instant  $t = t_j$ .

Ce schéma est très simple, mais présente un inconvénient majeur : il est instable! Il reste stable sous la condition que  $\Delta t < h/2$  (pour l'équation de la chaleur), condition s'appelle la condition de Courant-Friedrich-Levy, ou CFL. Autre défaut, il est relativement peu précis, car d'ordre  $O(\Delta t)$  sur

le temps.

### Schéma d'Euler implicite

Il est un peu plus compliqué que le schéma explicite mais il présente l'énorme avantage d'être intrinsèquement stable. Sa précision est la même que le schéma explicite. Les termes de la discrétisation spatiale sont évalués cette fois-ci à l'instant actuel ( $t = t_{j+1}$ ) et non pas à l'instant précédent comme dans le cas du schéma explicite.

De la même façon, en utilisant l'approximation décentrée à droite pour les dérivées première en temps du système (3.28), nous obtenons les relations de récurrence suivante :

$$\begin{aligned} H_{j+1} &= H_j + \Delta t [f_1(H, \Gamma, t)]_{t=t_{j+1}} \\ \Gamma_{j+1} &= \Gamma_j + \Delta t [f_2(H, \Gamma, t)]_{t=t_{j+1}} \end{aligned} \quad (3.30)$$

Où les indices  $j$  et  $j+1$  désignent des instants successifs de calculs et les fonctions  $f_1(H, \Gamma, t)$ , et  $f_2(H, \Gamma, t)$  sont évaluées après discrétisation spatiale à l'instant  $t = t_{j+1}$ .

### Le schéma de Crank-Nicolson

Le schéma de Crank-Nicolson, qui date de 1947, mixte les deux approches explicites et implicites. Les dérivées temporelles des membres de gauche sont discrétisées par une approximation décentrée avancée et les termes de droite sont évalués comme une moyenne temporelle de ce que donnent la méthode d'Euler explicite et la méthode d'Euler implicite.

$$\begin{aligned} H_{j+1} &= H_j + \frac{\Delta t}{2} [f_1(H, \Gamma, t)]_{t=t_j} + \frac{\Delta t}{2} [f_1(H, \Gamma, t)]_{t=t_{j+1}} \\ \Gamma_{j+1} &= \Gamma_j + \frac{\Delta t}{2} [f_2(H, \Gamma, t)]_{t=t_j} + \frac{\Delta t}{2} [f_2(H, \Gamma, t)]_{t=t_{j+1}} \end{aligned} \quad (3.31)$$

Cette méthode est inconditionnellement stable, mais nécessite certaines conditions de régularité sur les équations à résoudre pour que le résultat ait une précision satisfaisante.

## 3.2 Conclusion

Nous résumons dans ce qui suit la procédure suivie pour la discrétisation du système d'équations résultant (3.6 et 3.7 associé aux conditions aux limites 3.8 à 3.11) :

1- Maillage du domaine : nous avons considéré deux cas de figures à savoir deux pas d'espace ;

$h=1/600$  pour le cas du modèle d'Aydemir *et al.* [1] (large volume de larmes) et  $h=1/1250$  pour le cas du modèle de Bruna *et al.* [10] (volume réduit de larmes), et un pas de temps  $\Delta t = 10^{-4}$ .

2- Discrétisation par des différences centrées pour les dérivées spatiales d'ordre 1 à 4 de la hauteur du film, et les dérivées spatiales d'ordre 1 et 2 de la concentration des lipides.

2- Discrétisation par une différence décentrée avancée du premier ordre pour les dérivées temporelles d'ordre 1 du système ( $H_t$  et  $\Gamma_t$ ).

4- Adoption du schéma semi-implicite de Crank-Nicolson pour la discrétisation temporelle des termes temporels du système différentiel.

5- Étant donné la non linéarité du système discret obtenu, nous avons utilisé la méthode de Newton Raphson pour sa résolution.

**Remarque :** Le code de calcul contenant la discrétisation des équations et la résolution des systèmes discrets est écrit sous Maple.

Dans le chapitre 5 seront donnés et interprétés les résultats numériques obtenus.

## Résultats et discussions

Pour évaluer l'influence de la courbure de la cornée sur la dynamique du film lacrymal, nous avons résolu le système des deux équations différentielles partielles non linéaires couplées (2.91 - 2.92) pour l'épaisseur du film,  $h$ , et la concentration en lipides,  $\Gamma$ , avec les conditions aux limites et initiales (système d'équations 2.93 à 2.96). Les simulations numériques ont été effectuées pour des surfaces de cornée plates et sphériques, placées dans des positions horizontales (c'est-à-dire, la personne est couchée) et verticales (c'est-à-dire que la personne est debout).

Les simulations numériques ont été réalisées en suivant la même procédure décrite par Aydemir et al [1]. Nous avons utilisé un schéma de différences finies précis de second ordre sur une grille spatiale uniforme et une discrétisation d'Euler semi implicite de type Crank-Nicolson pour simuler l'évolution dans le temps. De même pour Jones *et al.* [31] nous avons effectué une transformation de coordonnées pour ramener le domaine mobile à un domaine de calcul fixe. Le système résultant d'équations non-linéaires a été résolu en utilisant une méthode de Newton-Raphson.

Dans notre simulation, nous avons utilisé une discrétisation spatiale uniforme avec 1250 points de grille. Pour cette discrétisation, l'erreur absolue est inférieure à  $2 \times 10^{-2}$ ; voir Fig.17a dans Bruna et Beward [10]. À des temps de simulation relativement courts, loin des temps de rupture, le code converge sans difficulté. Cependant, pour des temps de simulation plus longs, des problèmes de convergence ont été rencontrés dès que  $h_{\min}$  est devenu inférieur à deux espacements de grille ( $h \rightarrow 0$ ). Les résultats restent fiables tant que l'épaisseur minimale du film n'est pas inférieure à deux espacements de grille.

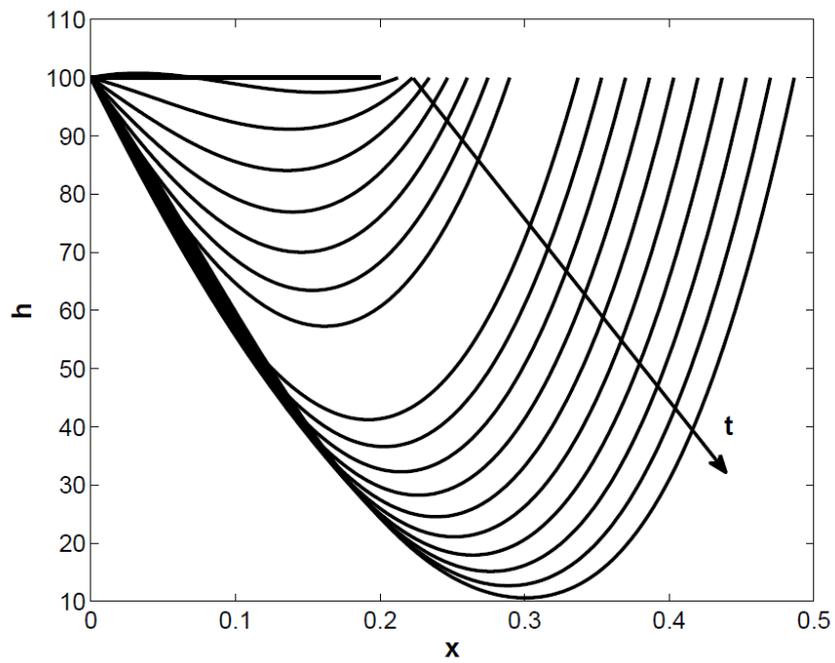
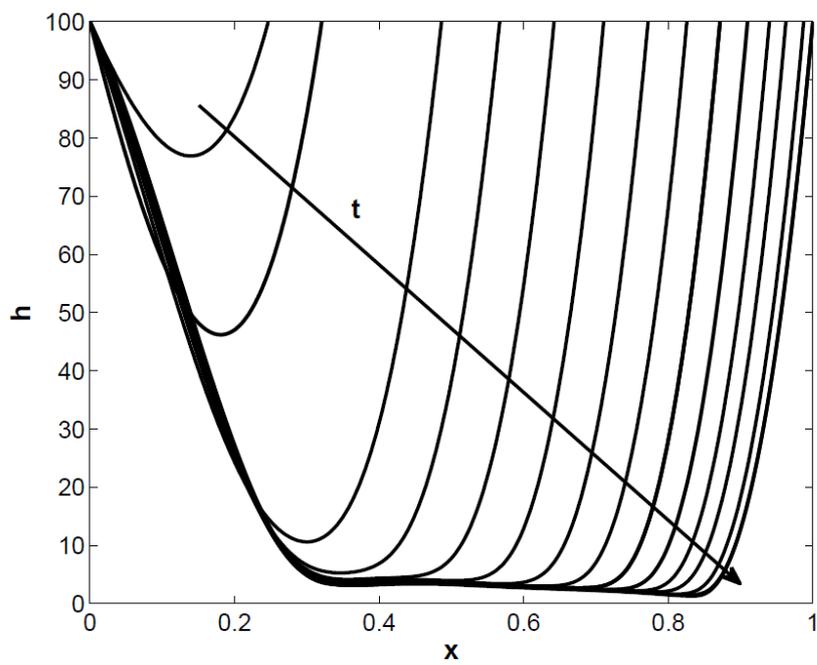
Dans ce qui suit nous exposerons l'essentiel des résultats obtenus que nous discuterons ensuite, puis conclure.

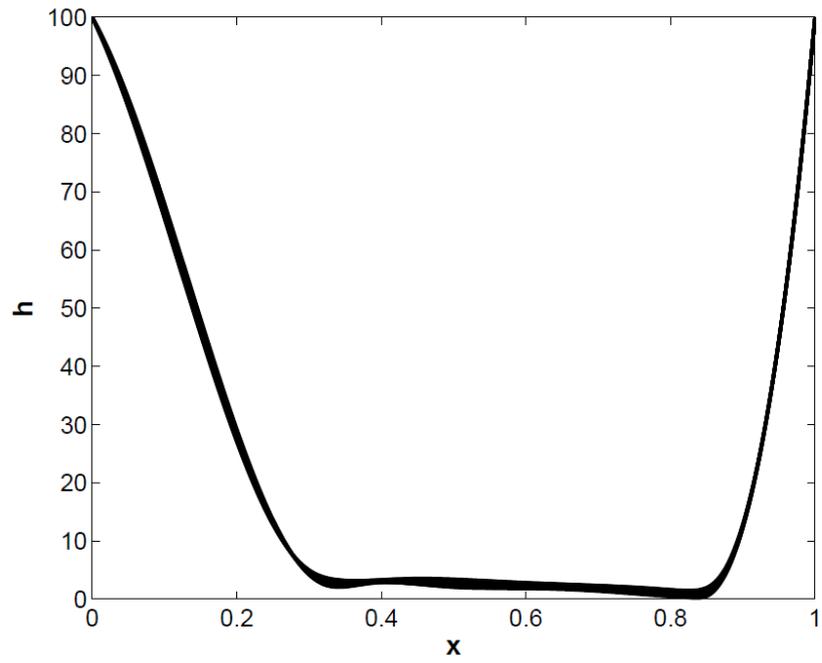
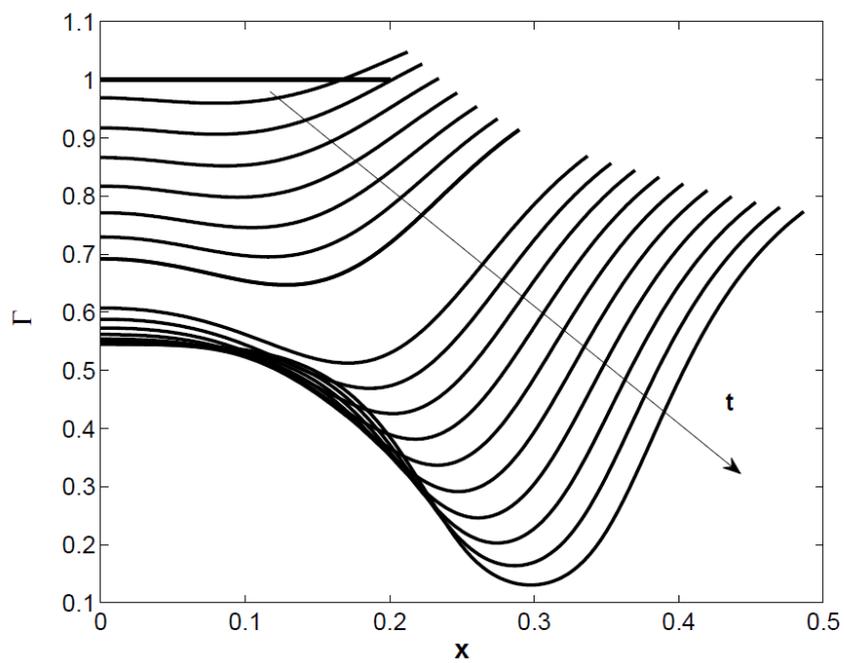
## 4.1 Grand volume de larmes comparaison au cas d'Aydemir

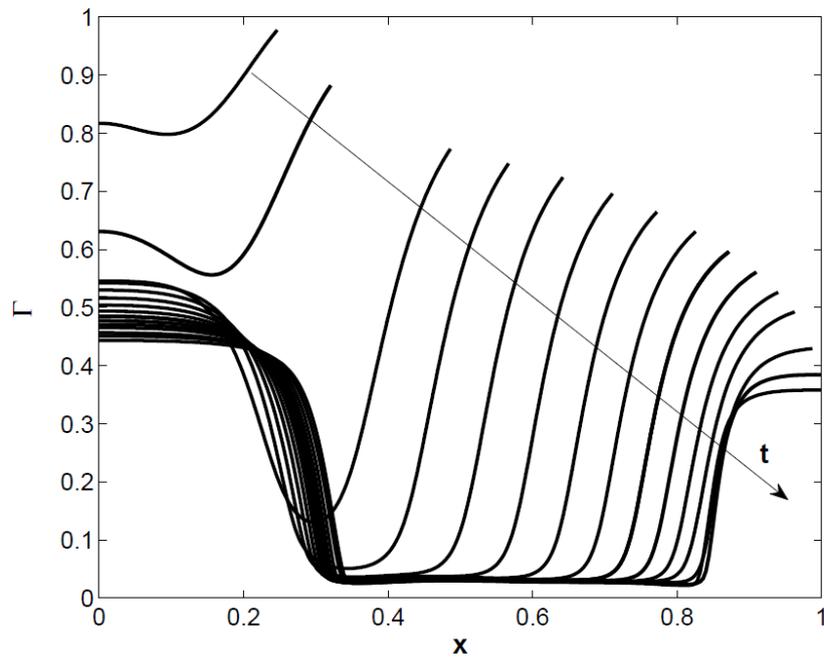
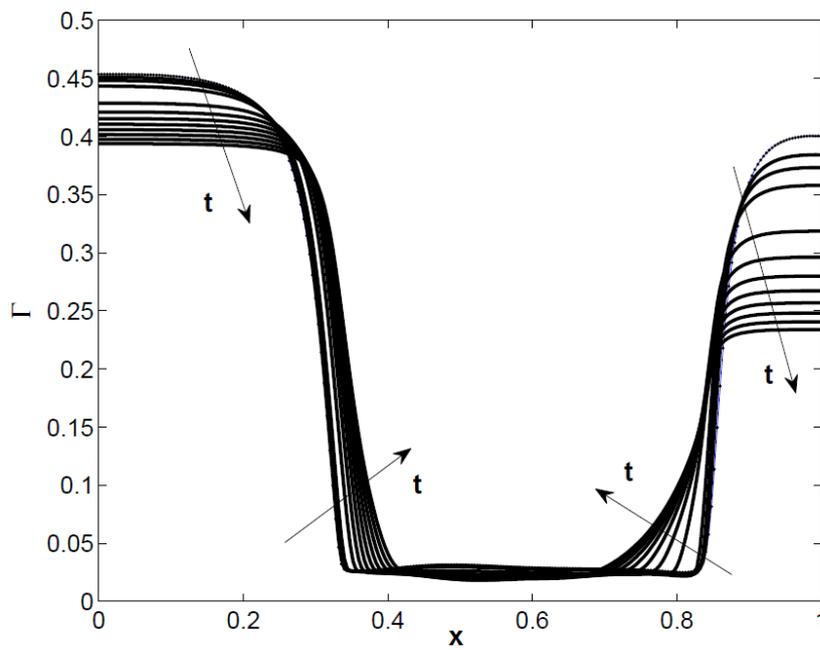
### 4.1.1 Hauteur du film et concentration de lipides

Les résultats des simulations numériques pour l'épaisseur du film lacrymal et la concentration en lipides à trois stades différents pendant la phase d'ouverture des yeux sont montrés sur les figures (4.1, 4.2, 4.3, 4.4, 4.5 et 4.6). Les flèches indiquent une augmentation du temps. Les paramètres du système sont  $\mathcal{H} = 100$ ,  $\mathcal{C} = 7,87 \times 10^{-7}$ ,  $\mathcal{B} = 2,18 \times 10^4$  et  $\mathcal{M} = 1,75 \times 10^{-2}$ . Les figures (4.1 et 4.4), correspondent à un temps adimensionnel compris entre 0 et 0,2, les figures (4.2 et 4.5), correspondent à un temps adimensionnel compris entre 0,2 et 0,792 et les figures (4.3 et 4.6), correspondent à un temps adimensionnel compris entre 0,9 et 2. Ces résultats sont similaires à ceux montrés sur la figure 4 d'Aydemir et *al.* [1]. Les figures (4.1 et 4.4) montrent l'épaisseur du film lacrymal et la concentration en lipides aux premiers stades de l'ouverture des yeux. L'épaisseur du film et les profils de concentration des lipides sont presque paraboliques, leurs minima se produisant presque au même endroit et diminuant continuellement avec le temps. Aux stades intermédiaires, le film lacrymal et la concentration lipidique s'accumulent au ménisque et évoluent entre les paupières; voir les figures (4.2 et 4.5). L'étape postérieure correspond au début de la phase d'inter clignement, au cours de laquelle la paupière supérieure cesse de bouger. La forte concentration en lipides et la grande courbure du film lacrymal au ménisque induisent les écoulements capillaires et de Marangoni; voir les figures (4.3 et 4.6). Ces écoulements font que l'épaisseur du film lacrymal continue d'évoluer pendant la phase d'inter clignement.

Dans les figures (4.7 a), 4.7 b), 4.8 a), et 4.8 b)), nous comparons les évolutions de l'épaisseur du film lacrymal,  $h$ , et la concentration lipidique,  $\Gamma$ , pour les surfaces de cornée plate et sphérique. Les positions verticales et horizontales de la surface de la cornée sont considérées. Cette dernière position n'est pas considérée dans la littérature; cependant, il peut être intéressante pour les personnes âgées, qui peuvent s'allonger pendant des périodes relativement longues. Cette catégorie de personnes est plus susceptible de présenter des symptômes de rupture du film lacrymal ou de syndrome oculaire sec [44]. Les paramètres des simulations sont  $\mathcal{H} = 100$ ,  $\mathcal{C} = 7.87 \times 10^{-7}$ ,  $\mathcal{M} = 0.0175$ ,  $\mathcal{B} = 2,18 \times 10^4$  et  $t = 5$ . Dans le cas d'une surface de cornée plate placée en position horizontale,  $\mathcal{B} = 0$ . Les figures (4.7 et 4.8) correspondent aux surfaces de la cornée dans les positions verticale et horizontale, respectivement. Les figures comparent l'épaisseur du film lacrymal et les profils de concentration lipidique à  $t = 5$ . Pour la surface de la cornée en position verticale,

FIGURE 4.1 – Épaisseur du film,  $h$ , aux stades précoces d'ouverture des paupières.FIGURE 4.2 – Épaisseur du film,  $h$ , aux stades intermédiaires d'ouverture des paupières.

FIGURE 4.3 – Épaisseur du film,  $h$ , aux stades tardifs d'ouverture des paupières.FIGURE 4.4 – Concentration lipidique,  $\Gamma$ , aux stades précoces d'ouverture des paupières.

FIGURE 4.5 – Concentration lipidique,  $\Gamma$ , aux stades intermédiaires d'ouverture des paupières.FIGURE 4.6 – Concentration lipidique,  $\Gamma$ , aux stades tardifs d'ouverture des paupières.

les profils de  $h$  et  $\Gamma$  pour les géométries plates et sphériques sont similaires. Cependant, pour la cornée en position horizontale, les profils de  $h$  et  $\Gamma$  présentent des écarts. Ces divergences sont dues à la gravité, qui ne contribue pas à la dynamique du film lacrymal lorsque la cornée est plate et placée en position horizontale. Cependant, la gravité influence la dynamique du film lacrymal grâce à sa composante  $g\cos\theta$  lorsque la cornée est sphérique et placée en position horizontale.

### 4.1.2 Hauteur minimale du film

Dans la figure 4.9, nous comparons l'évolution de l'épaisseur minimale du film,  $h_{\min}$ , pour les surfaces de cornée plate et sphérique. Les positions verticales et horizontales de la surface de la cornée sont considérées. Sur la figure 4.9, les graphes a) et b) correspondent aux surfaces de la cornée dans les positions verticale et horizontale, respectivement. Les figures comparent l'évolution de l'épaisseur minimale du film avec le temps (jusqu'à  $t = 5$ ). Les paramètres des simulations sont  $\mathcal{H} = 100$ ,  $\mathcal{C} = 7.87 \times 10^{-7}$ ,  $\mathcal{M} = 0.0175$ ,  $\mathcal{B} = 2,18 \times 10^4$ . Dans le cas d'une surface de cornée plate placée en position horizontale,  $\mathcal{B} = 0$ .

Le résultat important ici est la différence entre les vitesses d'amincissement des épaisseurs minimales de film,  $h_{\min}$ , pour les deux géométries. Dans le cas d'une cornée sphérique placée en position verticale, l'épaisseur minimale du film lacrymal s'amincit plus lentement que ne le fait une cornée plate placée en position verticale; voir la figure 4.9 a). Ce résultat est inversé lorsque les cornées sont en position horizontale; voir la figure 4.9 b).

### 4.1.3 Vitesses moyenne et superficielle du film lacrymal

Les paramètres de la simulation sont  $\mathcal{H} = 100$ ,  $\mathcal{C} = 7.87 \times 10^{-7}$ ,  $\mathcal{B} = 2.18 \times 10^4$  et  $\mathcal{M} = 0.0175$ .  $\mathcal{B} = 0$  pour une cornée plate en position horizontale.

La dynamique du flux lacrymal est le résultat des effets combinés de la gravité, des forces de Marangoni et capillaires; les effets d'inertie sont négligés. La force de Marangoni entraîne les larmes des ménisques vers la région centrale, tandis que la force capillaire aspire les larmes de la région centrale vers les ménisques. La force de gravité draine le volume des larmes. Cette compétition entre les forces a pour résultat les écoulements de surface et d'ensemble représentés sur les figures 4.10, 4.11, 4.12 et 4.13, pour les positions à la fois verticales et horizontales de la surface de la cornée; respectivement. Les quatre figures montrent deux instants distincts,  $t = 1$  et  $t = 2$ , dans la phase d'inter clignement, qui commence à environ  $t = 0,792$ . Les figures 4.10, 4.11, 4.12

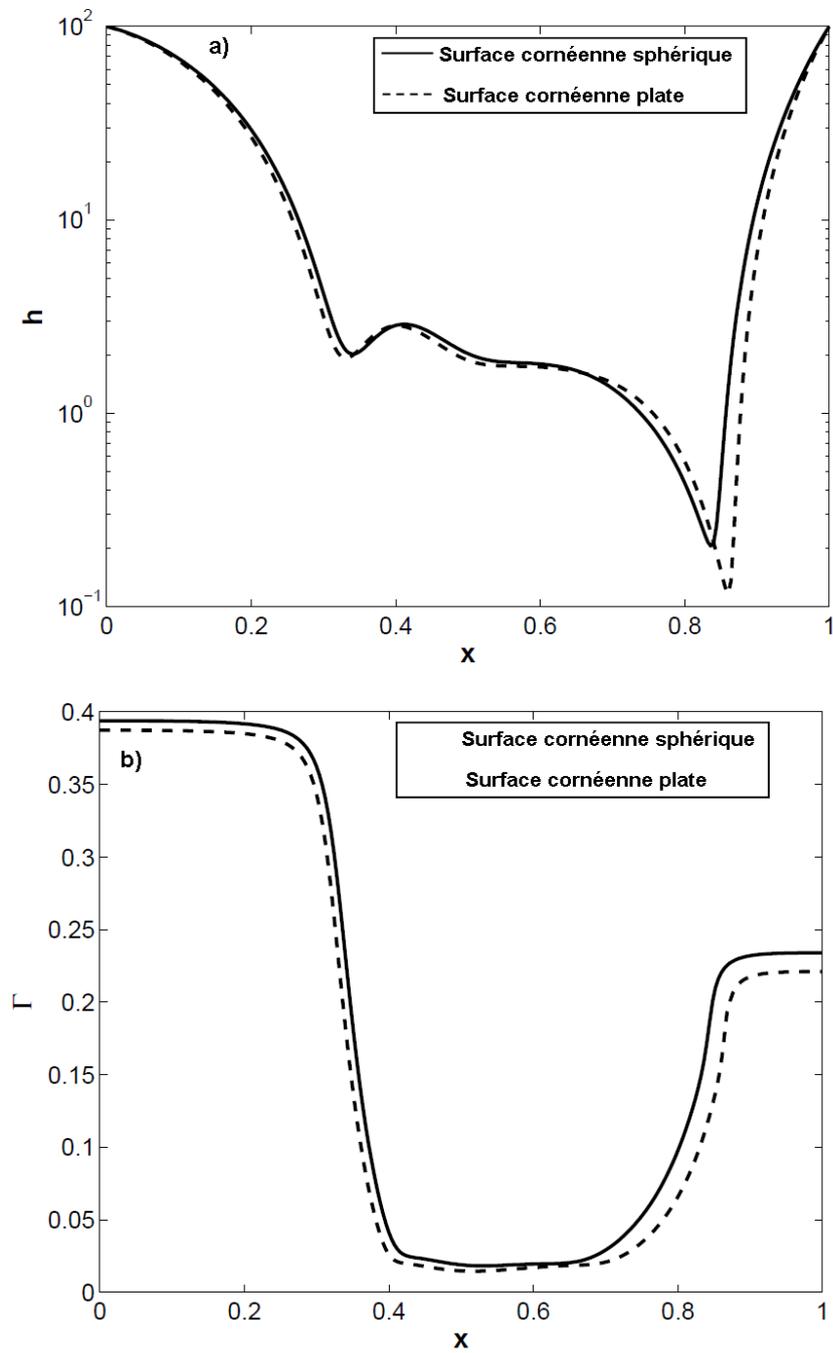


FIGURE 4.7 – Comparaison de l'épaisseur du film lacrymal,  $h$ , et de la concentration lipidique,  $\Gamma$ , pour les surfaces de cornée plate et sphérique. La cornée est en position verticale.

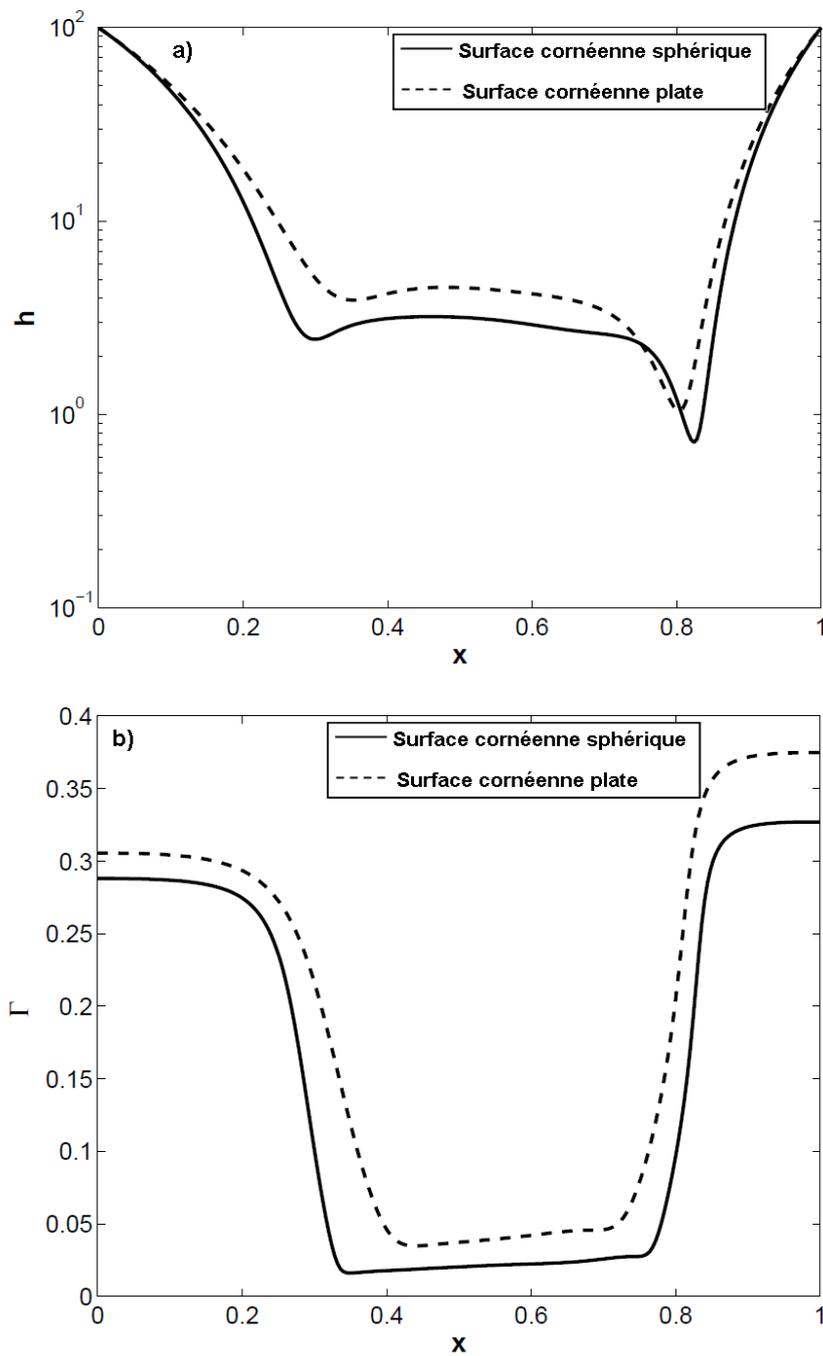


FIGURE 4.8 – Comparaison de l'épaisseur du film lacrymal,  $h$ , et de la concentration lipidique,  $\Gamma$ , pour les surfaces de cornée plate et sphérique. La cornée est en position horizontale.

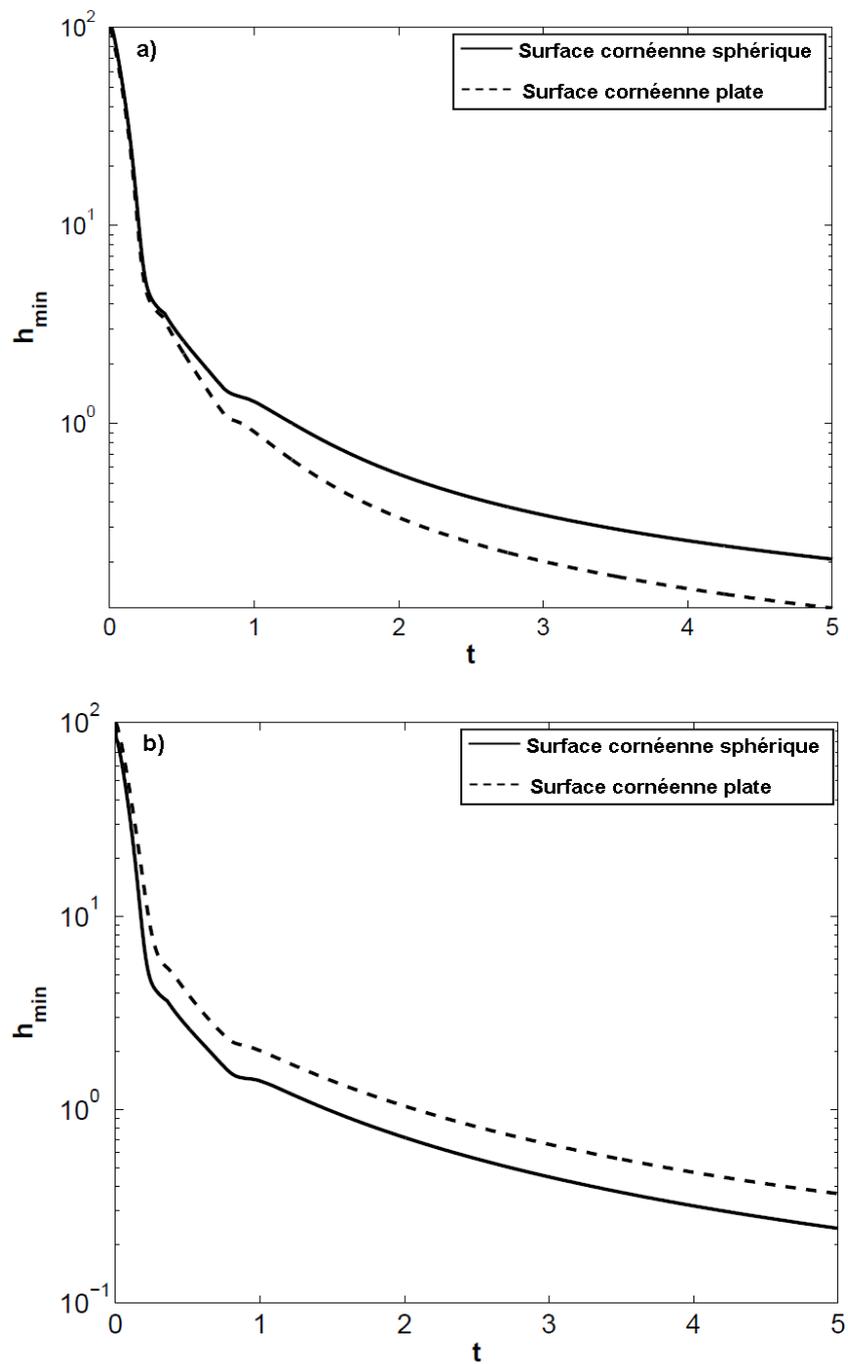


FIGURE 4.9 – Comparaison de l'épaisseur du film,  $h_{\min}$ , pour les surfaces de cornée plate et sphérique. a) La cornée est en position verticale. b) La cornée est en position horizontale.

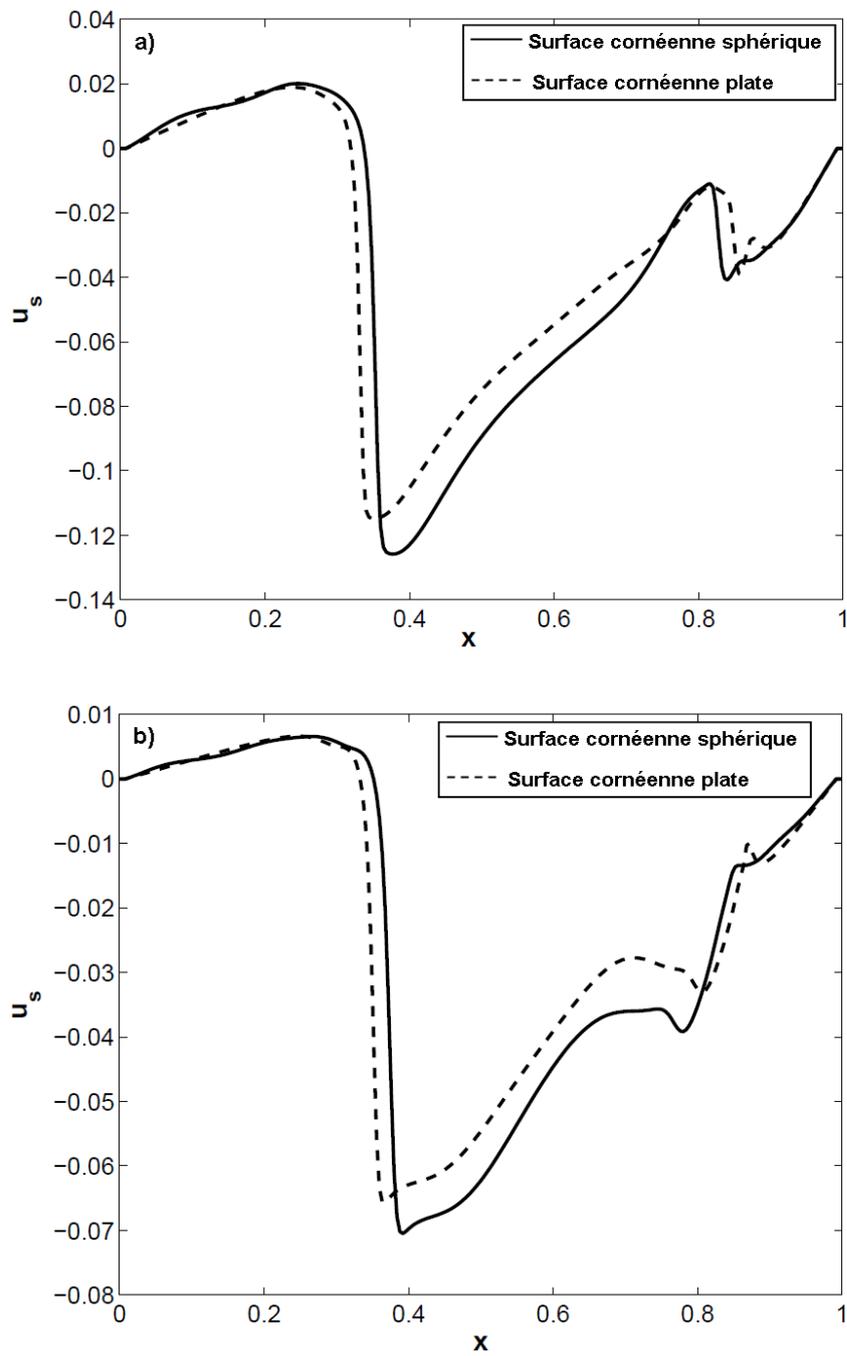


FIGURE 4.10 – Comparaison entre les vitesses superficielles dans le cas de surface de cornée plate et sphérique dans une position verticale. a)  $t = 1$  et b)  $t = 2$ .

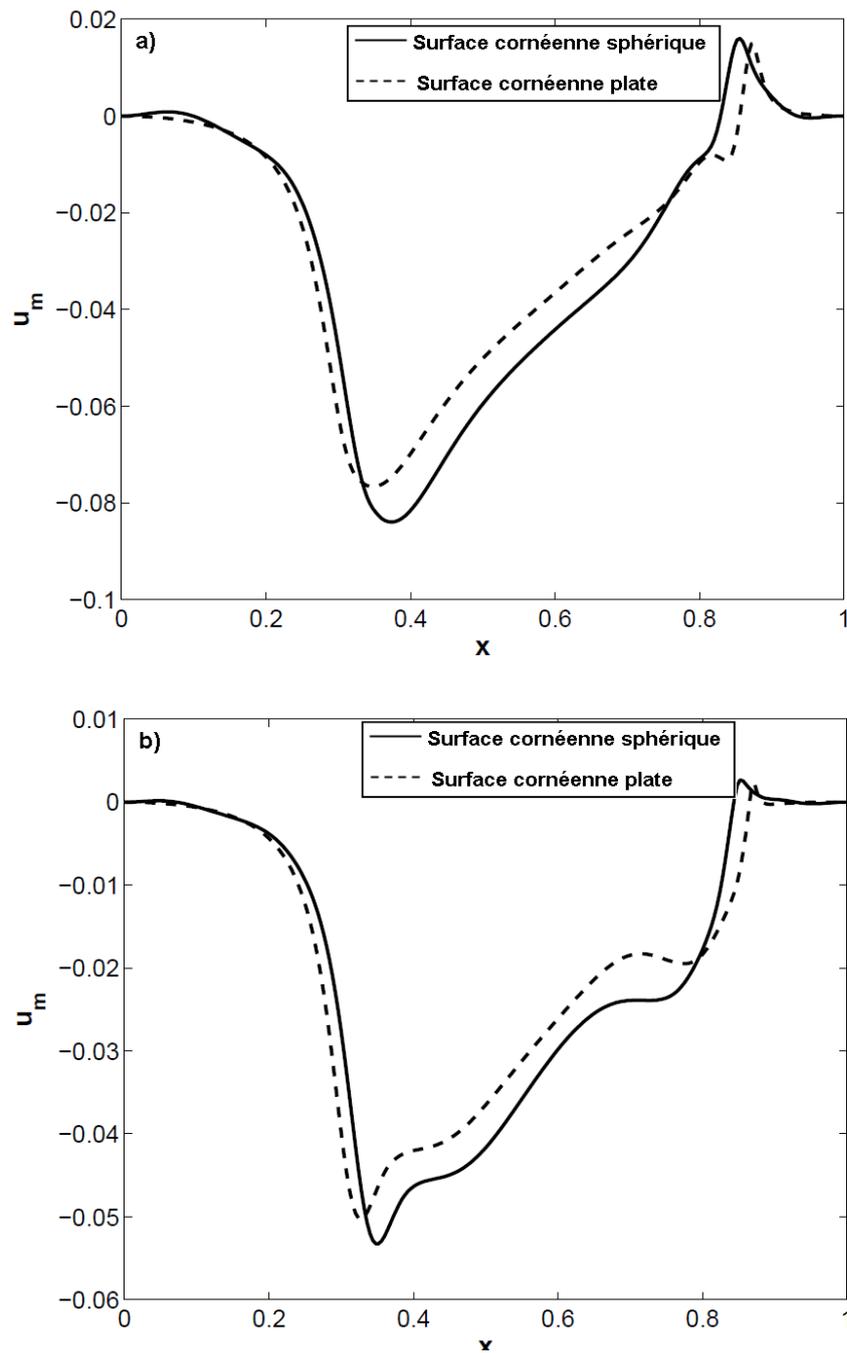


FIGURE 4.11 – Comparaison entre les vitesses moyennes dans le cas de surface de cornée plate et sphérique dans une position verticale. a)  $t = 1$  et b)  $t = 2$ .

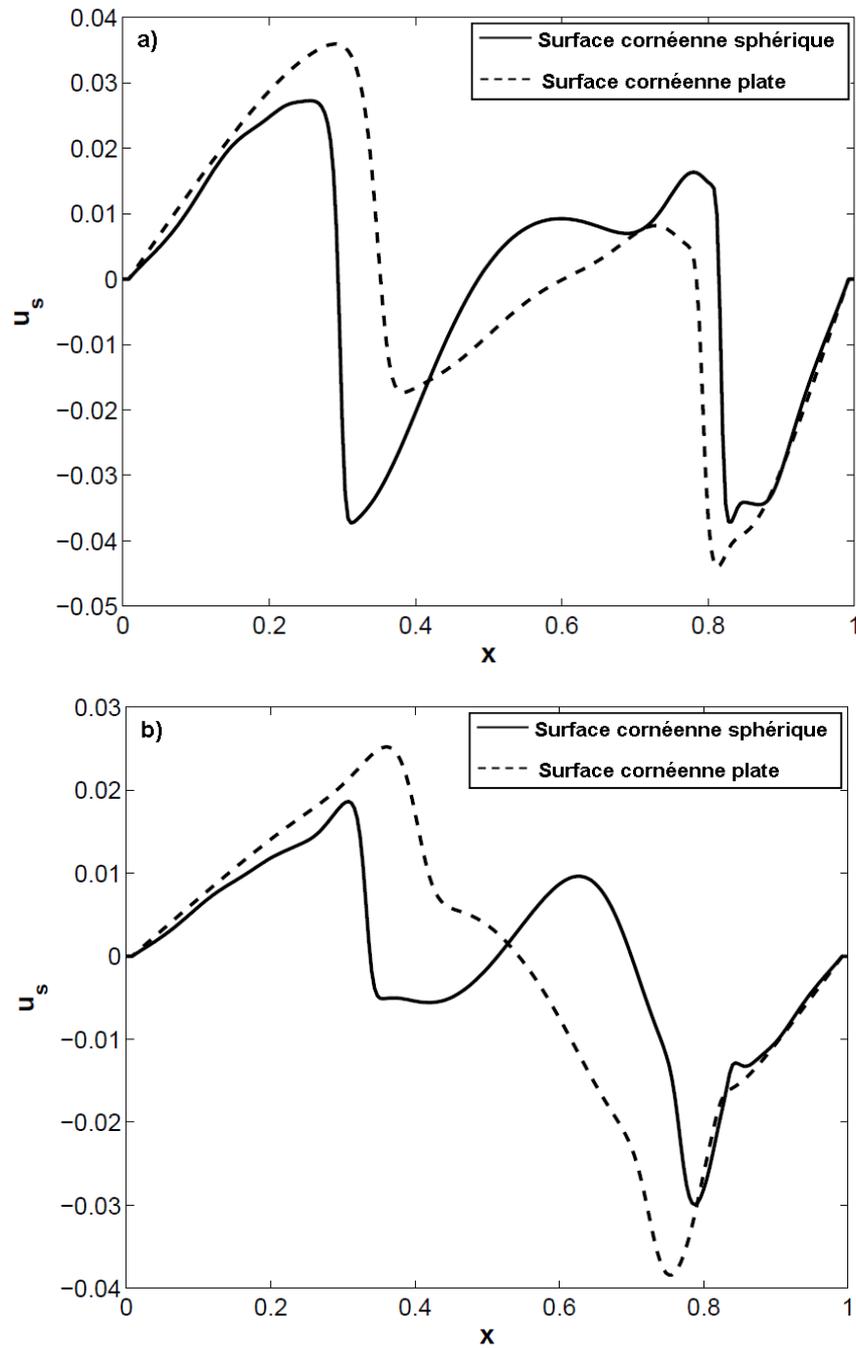


FIGURE 4.12 – Comparaison entre les vitesses superficielles dans le cas de surface de cornée plate et sphérique dans une position horizontale. a)  $t = 1$  et b)  $t = 2$ .

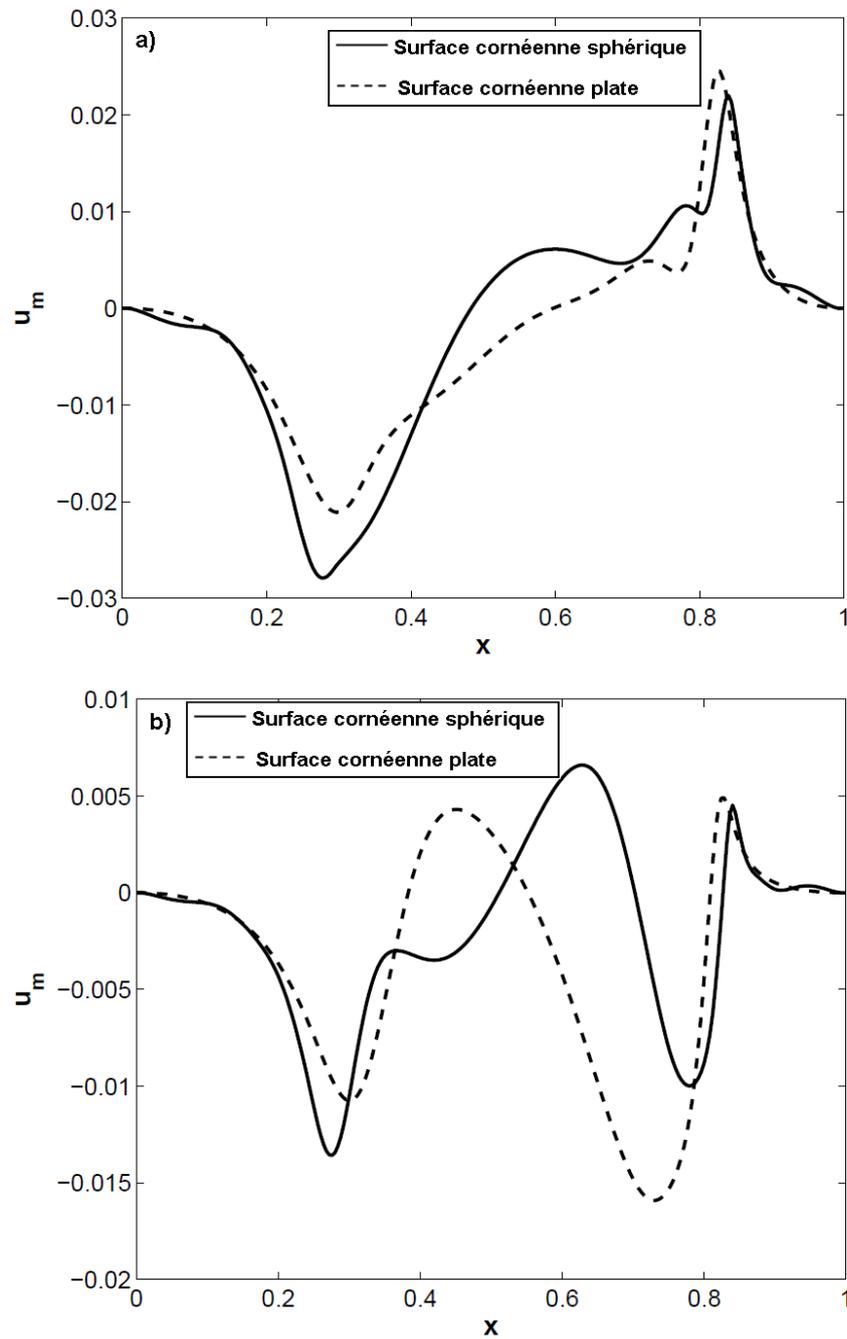


FIGURE 4.13 – Comparaison entre les vitesses moyennes dans le cas de surface de cornée plate et sphérique dans une position horizontale. a)  $t = 1$  et b)  $t = 2$ .

et 4.13 indiquent que le film lacrymal continue à se déplacer vers le haut (vitesses positives) près de la paupière inférieure. Le modèle actuel, similaire à celui d'Aydemir et *al.* [1], capture le flux de surface ascendant de Marangoni observé *in vivo* [31].

Les figures 4.10 et 4.11 montrent que les vitesses superficielles et moyennes sont qualitativement similaires. Ils présentent des discordances claires au voisinage de la région centrale de la cornée, où le film lacrymal s'écoule vers la paupière inférieure. De manière similaire, les figures 4.12 et 4.13 comparent la vitesse de la surface du film lacrymal et la vitesse moyenne sur des géométries de cornée plate et sphérique lorsque celles-ci sont placées dans une position horizontale. Les profils de vitesse sont quantitativement et qualitativement différents. Comme indiqué ci-dessus, ces écarts sont dus aux différences de rôle de la gravité dans les deux géométries. Cela affecte la compétition entre les forces de Marangoni et les forces capillaires. La force de gravité draine le film lacrymal vers la paupière inférieure, en travaillant contre la force de Marangoni, qui tend à conduire le flux vers le centre ou la région de plus faible concentration. En raison de l'absence de gravité, la vitesse de surface ascendante de l'écoulement de Marangoni près de la paupière inférieure est plus élevée dans le cas d'une cornée plate que dans le cas d'une cornée sphérique. De plus, l'étendue du flux de la surface de larmes vers le haut est également plus large dans une géométrie plane que dans une géométrie sphérique.

#### 4.1.4 Effet du nombre de Marangoni sur la dynamique de l'écoulement

Le paramètre de Marangoni mis à l'échelle  $\mathcal{M}$  décrit le couplage de la concentration en lipides à l'épaisseur du film ; les comportements associés sont moins simples. Formellement, mettre  $\mathcal{M} = 0$  dans 2.91 donne la PDE pour  $h(x, t)$  dans 2.97. Cependant, lorsque la paupière est en mouvement, les conditions aux limites pour  $h$  sont différentes.

Dans cette section on considère les paramètres des simulations comme suit :  $\mathcal{H} = 100$ ,  $\mathcal{C} = 7.87 \times 10^{-7}$ ,  $\mathcal{B} = 2.18 \times 10^4$  et  $t = 1.5$ . Les valeurs du nombre de Marangoni retenus sont :  $\mathcal{M} = 0.00, 0.01, 0.02, 0.03, 0.04$  et  $0.05$ . Seule la position verticale est étudiée dans ce cas.

##### a) Hauteur du film lacrymal

Les figures 4.14, 4.15 et 4.16 montrent l'influence du paramètre fondamental de la dynamique du film lacrymal, le nombre de Marangoni, sur la hauteur du film, la hauteur du film au centre de la cornée et la hauteur minimale respectivement.

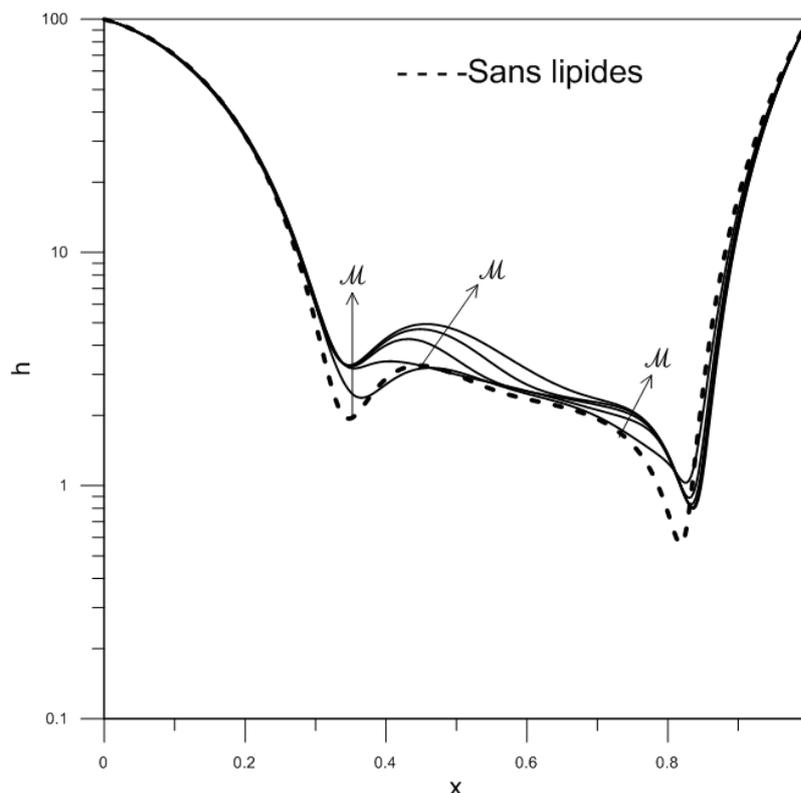


FIGURE 4.14 – Épaisseur du film,  $h$ , pour différents nombres de Marangoni.

Pour  $\mathcal{M} > 0$ , les distributions de lipides illustrées à la figure 4.18 génèrent un gradient de tension superficielle qui favorise l'écoulement de fluide depuis les ménisques dans le film mince déposé. Par conséquent, une diminution de  $\mathcal{M} \rightarrow 0$  devrait permettre de réduire l'épaisseur du film. En effet, les simulations montrent qu'un profil de hauteur similaire à celui produit par le modèle réduit 2.97 est obtenu, comme le montre la figure 4.14. Bien que les ménisques ne diffèrent pas beaucoup, l'échelle logarithmique utilisée permet de montrer que la présence de lipides modifie les détails du film mince déposé sur la cornée. Pour la plupart, le film lacrymal avec la couche lipidique est plus épais que le film liquide pur correspondant.

En effet, les figures 4.15 et 4.16 montrent une comparaison des épaisseurs au centre de la cornée et minimales de film respectivement pour ces deux modèles; pour ce problème, le système avec lipides avait une épaisseur au centre de la cornée et minimale plus grandes pour tous les temps. Ceci suggère que la présence des lipides est bénéfique pour prévenir un amincissement extrême du film pouvant conduire à la sécheresse oculaire.

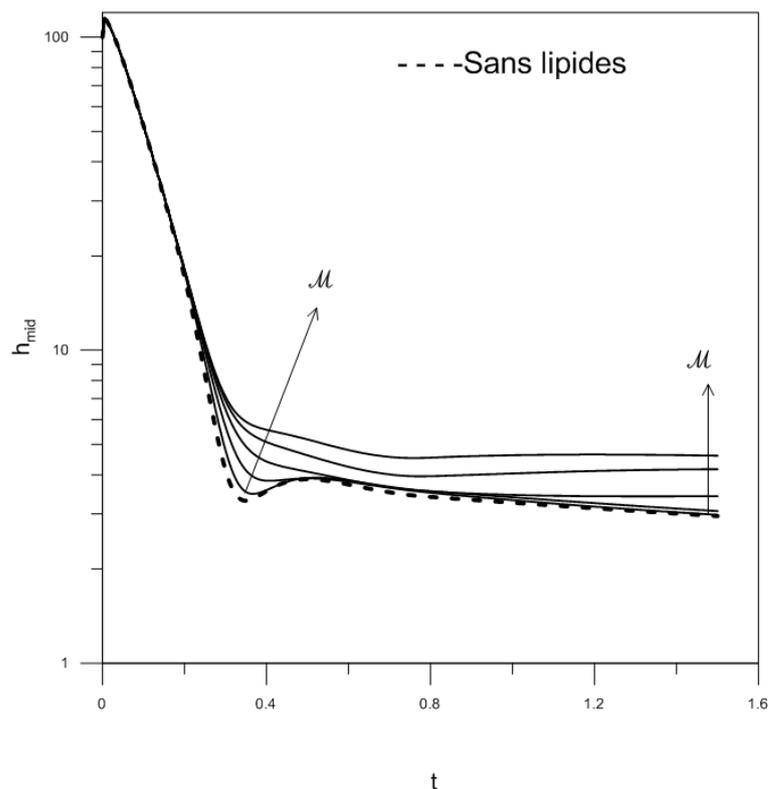


FIGURE 4.15 – Hauteur du film au centre de la cornée,  $h_{\text{mid}}$ , pour différents nombres de Marangoni.

### b) Concentration des lipides

L'effet du nombre de Marangoni sur la répartition des lipides polaires est représenté sur la figure 4.17. On constate que pour de faibles nombres de Marangoni la concentration lipidique s'accumule aux ménisques et forme un plateau dans la région centrale, formant des courbes de concentration lipidiques presque symétriques. Pour des nombres de Marangoni plus grands le plateau central se rétrécit d'avantage pour former une parabole proche du ménisque supérieur. La concentration des lipides devient beaucoup plus consistante dans le ménisque inférieure et la région centrale adjacente comparativement à celle du ménisque supérieure. L'asymétrie de la répartition des lipides est ainsi accentuée.

### c) Vitesses moyenne et de surface

Pour décrire le transport dans la dernière phase (c'est-à-dire après que la paupière a cessé de bouger) de la dynamique du film, on considère les vitesses de surface et globales (moyennes), équations 2.88 et 2.89, respectivement. On garde l'effet du drainage concurrent dû à la pesanteur

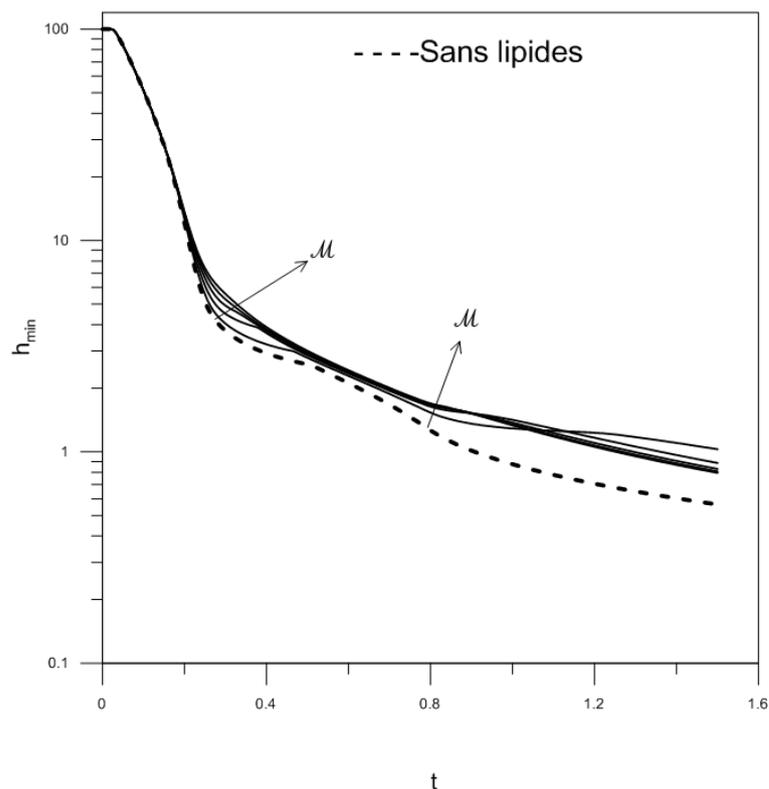


FIGURE 4.16 – Hauteur minimale du film,  $h_{\min}$ , pour différents nombres de Marangoni.

en fixant  $\mathcal{B} = 2.18 \times 10^4$  et en traçant les vitesses de surface et moyennes illustrées sur les figures 4.18 et 4.19, pour  $t = 1.5$ . La première observation est que le liquide continue à s'écouler malgré la fixation des paupières (On rappelle que les modèles de lubrification considérés dans cette thèse négligent l'inertie du fluide). Ce mouvement est provoqué par l'interaction entre les forces capillaires, de Marangoni, et de gravité. L'augmentation de la valeur du nombre de Marangoni a pour résultat la région de la surface du fluide où la vitesse est positive augmente en taille, ce qui indique que le lipide a pour effet de faire glisser le liquide dans l'œil (voir la figure 4.18). La figure 4.19 montre les valeurs correspondantes de la vitesse moyenne. Nous remarquons comme prévu que le liquide est retiré du film mince appartenant aux deux ménisques (en raison de la pression négative dans le ménisque générée par leur courbure). Au fur et à mesure que le nombre de Marangoni augmente, l'influence du ménisque diminue et le liquide en vrac commence également à être transporté dans l'œil. Nous notons le comportement intéressant qui, à mesure que le nombre de Marangoni augmente, crée une région juste en dessous du ménisque supérieur dans laquelle le liquide s'écoule du ménisque.

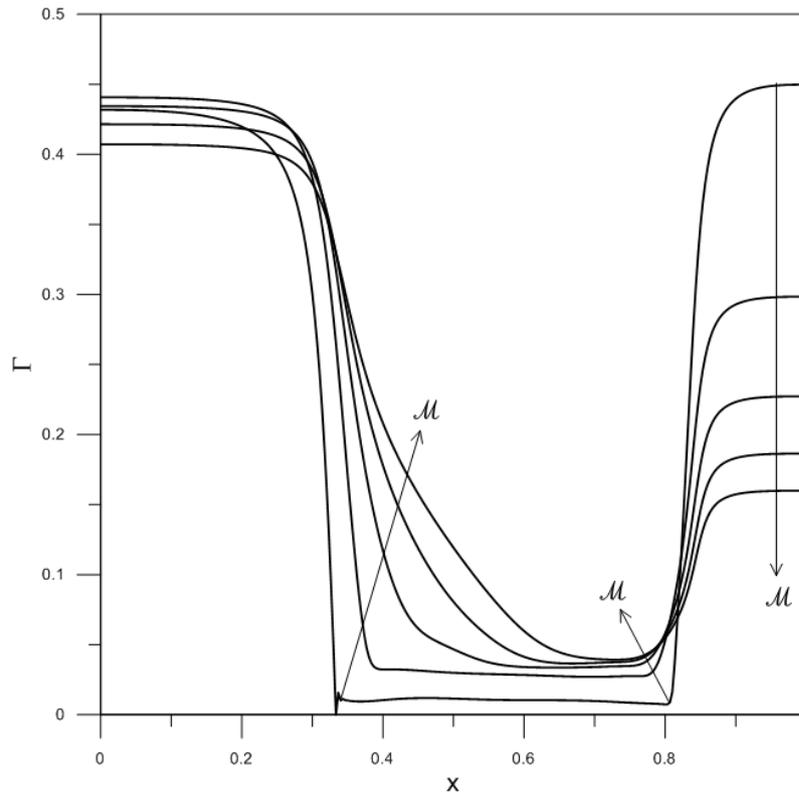


FIGURE 4.17 – Concentrations des lipides,  $\Gamma$ , pour différents nombres de Marongni.

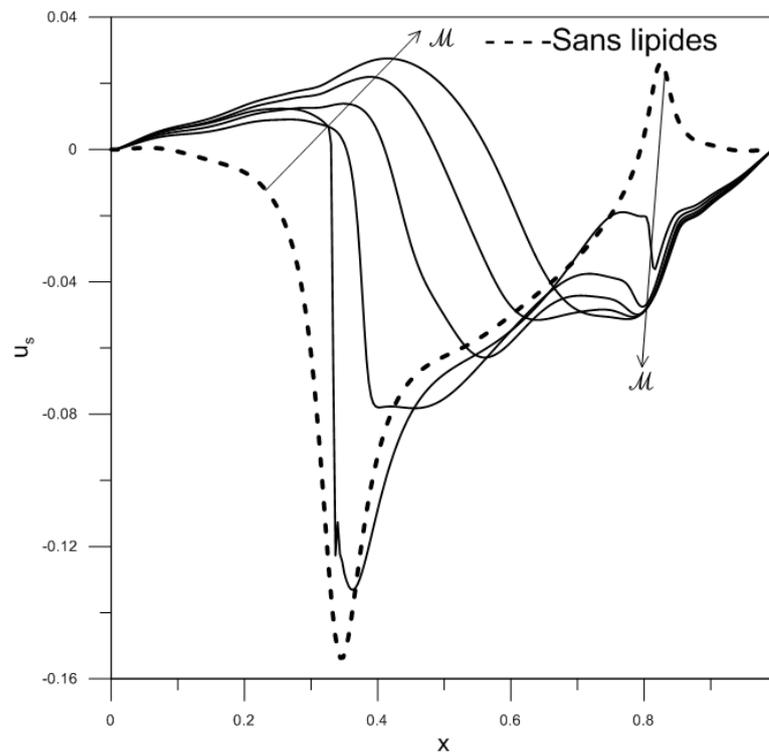


FIGURE 4.18 – Vitesse de surface,  $u_s$ , pour différents nombres de Marongni.

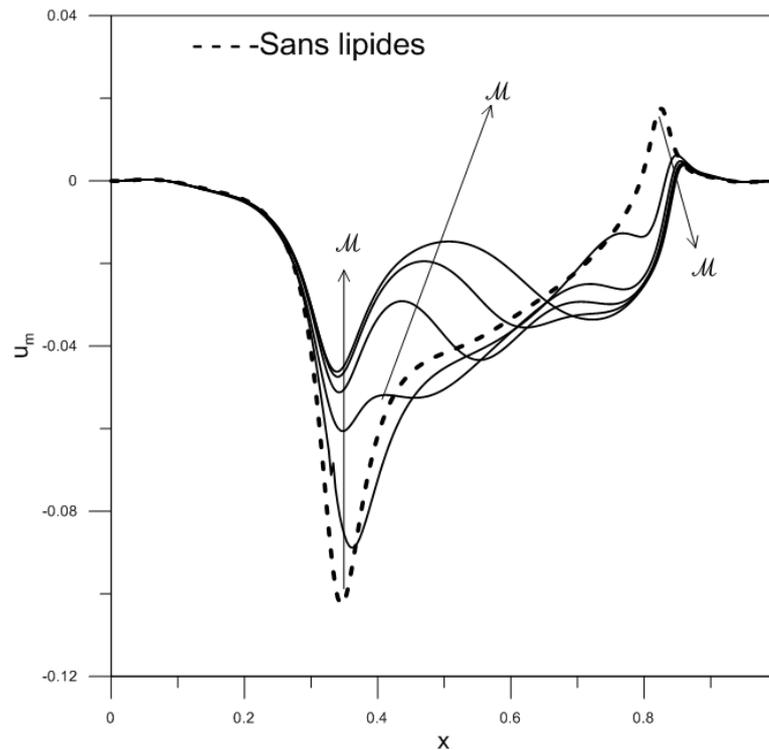


FIGURE 4.19 – Vitesse moyenne,  $u_m$ , pour différents nombres de Marongoni.

#### 4.1.5 Effet du nombre Capillaire sur la dynamique de l'écoulement

Le paramètre Capillaire modifié  $\mathcal{C}$  caractérise l'effet de la tension superficielle sur l'écoulement du film. Remarquons dans l'équation 2.76, qu'en faisant varier le paramètre  $\mathcal{C}$ , le nombre de Bond  $\mathcal{B}$ , varie aussi. Nous rappelons que le nombre de Bond  $\mathcal{B} = \frac{St}{\mathcal{C}}$  est inversement proportionnel au nombre de Capillaire modifié  $\mathcal{C}$ .

Pour étudier l'effet de la tension superficielle sur l'écoulement du film lacrymal dans la position verticale de la cornée (position debout), on fixe les paramètres des simulations comme suit :  $\mathcal{H} = 100$ ,  $\mathcal{M} = 1.71 \times 10^{-2}$ ,  $St = 1.48 \times 10^{-2}$  et  $t = 1.5$ . Les valeurs du nombre  $\mathcal{C}$  considérées sont :  $\mathcal{C} = (10^{-7}, 5 \times 10^{-7}, 10^{-6}, 5 \times 10^{-6}, 10^{-5}, 5 \times 10^{-4}, 10^{-4})$ .

##### a) Hauteur du film lacrymal

Les figures 4.20, 4.21 et 4.22 montrent l'influence du paramètre Capillaire modifié  $\mathcal{C}$ , sur la hauteur du film, la hauteur du film au centre de la cornée et la hauteur minimale respectivement.

Pour des valeurs  $\mathcal{C}$  proches du cas pratique (c'est à dire des valeurs proches de  $7.87 \times 10^{-7}$ ), les

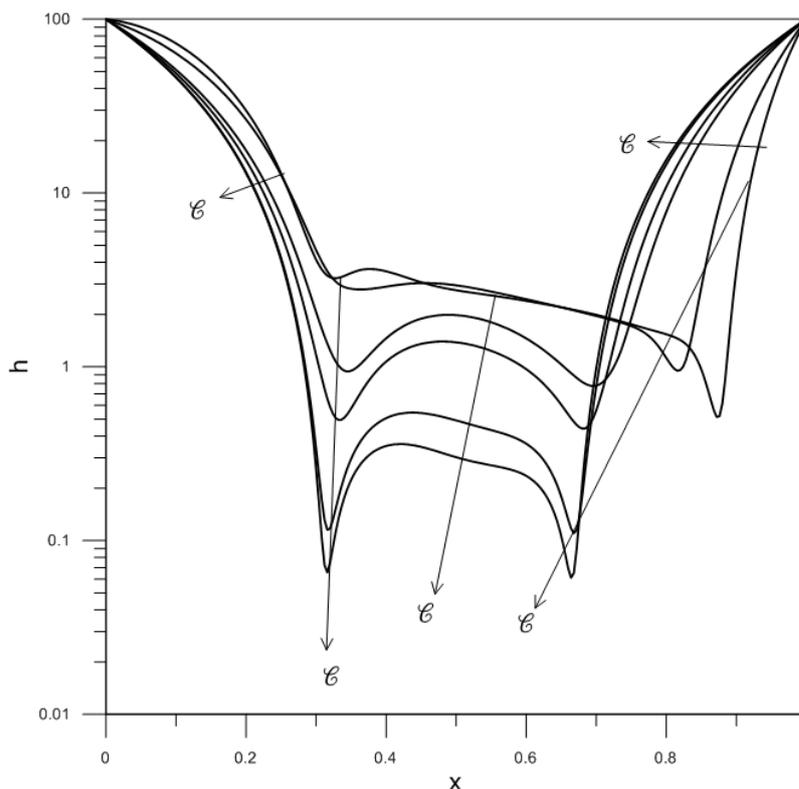


FIGURE 4.20 – Épaisseur du film,  $h$ , pour différents nombres Capillaires.

distributions de l'épaisseur du film illustrées à la figure 4.20 montrent une asymétrie des courbes, résultat d'une compétition entre plusieurs effets (effet du tirage de la paupière supérieur vers l'avant avant qu'elle cesse de bouger, effet de la gravité qui tire le film vers le bas, effet de Marangoni qui génère des flux vers les ménisques et l'effet Capillaire qui tire le film vers le centre à partir des ménisques), formant ainsi un creux (zone du film minimal) proche du ménisque supérieur. Au fur et à mesure que le nombre Capillaire modifié  $\mathcal{C}$  augmente, l'effet de la tension superficielle l'emporte devant les autres effets ce qui se traduit par des courbes d'épaisseurs du film presque symétriques. En effet, la figure 4.20 montre l'apparition de deux creux près du ménisque inférieur et supérieur respectivement.

Les figures 4.21 et 4.22 montrent une comparaison des épaisseurs au centre de la cornée et minimales de film respectivement pour différents nombres de Capillaire modifié  $\mathcal{C}$ . On constate sur la figure 4.21 que le film au centre de la cornée  $h_{\text{mid}}$  diminue considérablement avec l'augmentation du Capillaire modifié. De la même manière l'amincissement extrême du film  $h_{\text{min}}$ , représenté sur la figure 4.22 diminue avec l'augmentation du Capillaire modifié. Comme mentionné précédemment la position de  $h_{\text{min}}$  est située près du ménisque supérieur pour des valeurs de Capillaire

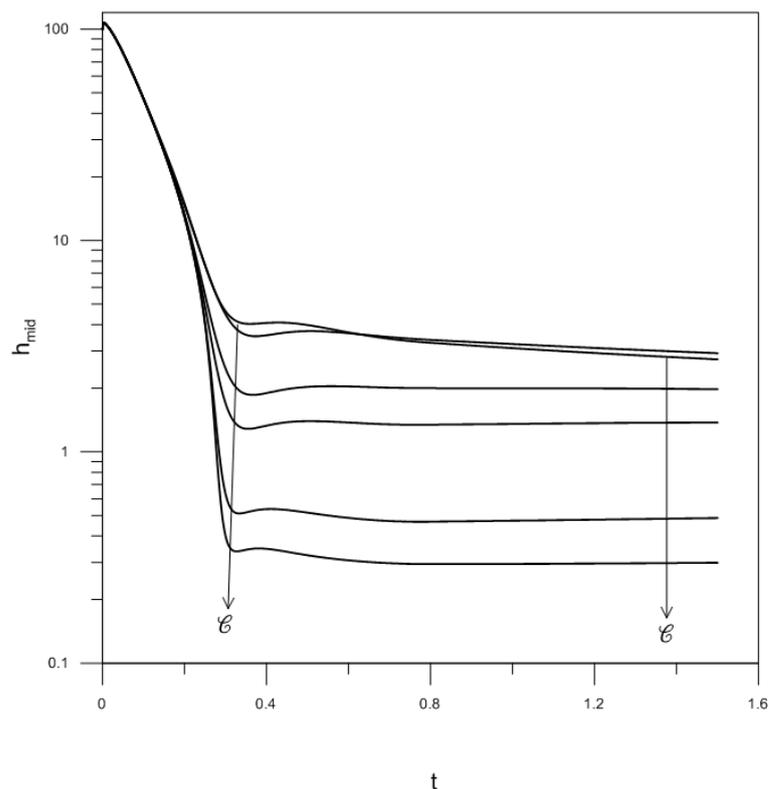


FIGURE 4.21 – Hauteur du film au centre de la cornée,  $h_{\text{mid}}$ , pour différents nombres Capillaires.

modifié proches du cas réel. Cette position change pour se repositionner près du ménisque inférieur pour des valeurs de  $\mathcal{C}$  plus importante, ceci peut se voir facilement sur la figure 4.20.

### b) Concentration des lipides

L'effet du nombre Capillaire modifié sur la répartition des lipides polaires est représenté sur la figure 4.23. On constate que pour de faibles nombres de Capillaire modifié la concentration lipidique s'accumule aux ménisques et forme un plateau dans la région centrale. Dans ce cas, la plus grande concentration se trouve sur le ménisque inférieur, vient après le ménisque supérieur et enfin le plateau central. Pour des nombres de Capillaire modifié plus grands, la concentration des lipides sur le plateau central s'atténue pour s'effacer carrément, et la présence de lipides est renversée entre les deux ménisques pour devenir plus importante au niveau du ménisque supérieur comparativement au ménisque inférieur. A partir de là, on peut conclure que les deux effets de Marangoni et de Capillaire s'opposent.

### c) Vitesses moyenne et de surface

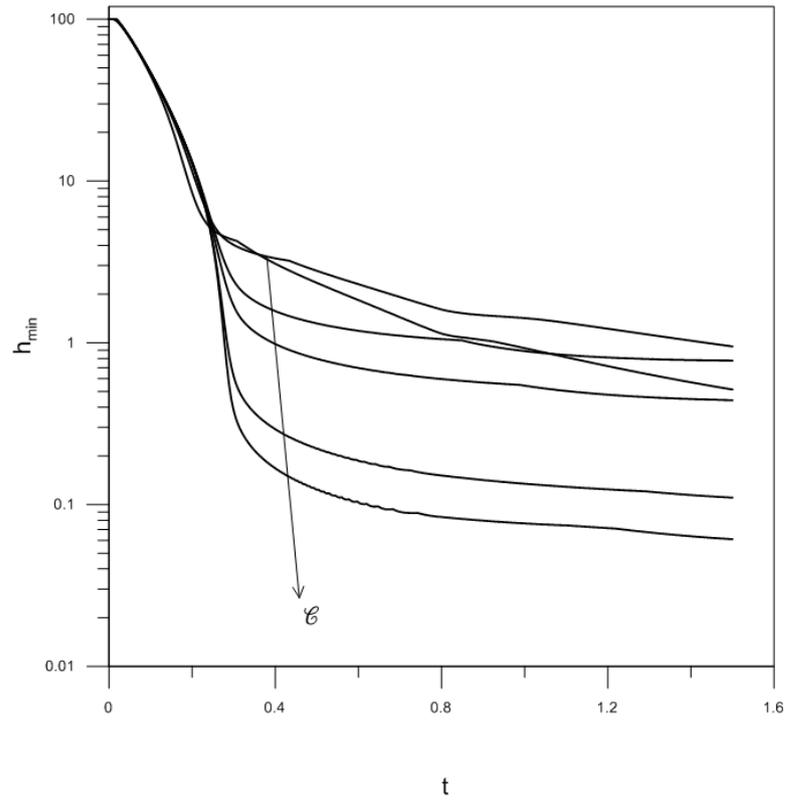


FIGURE 4.22 – Hauteur minimale du film,  $h_{\min}$ , pour différents nombres Capillaires.

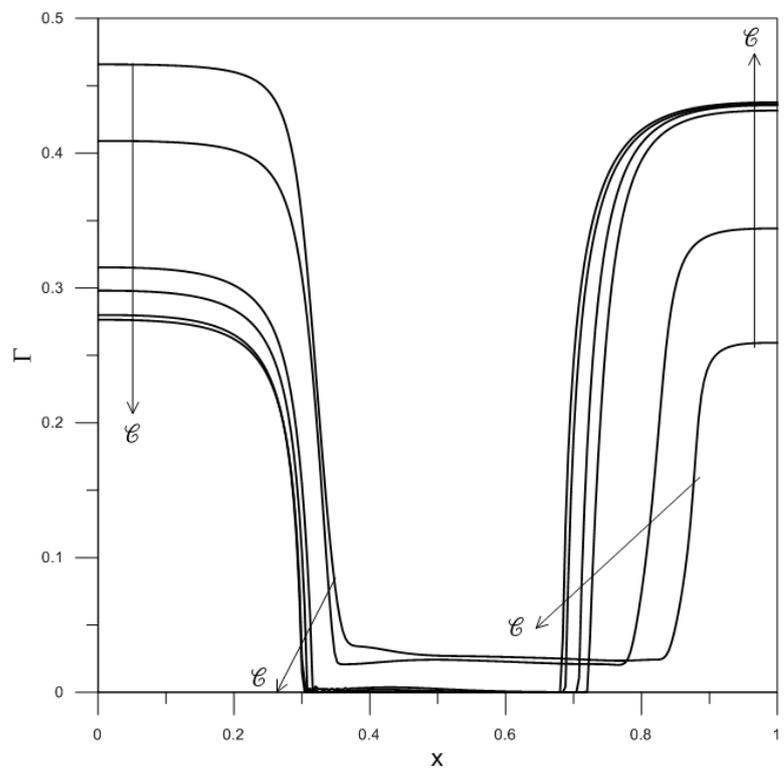


FIGURE 4.23 – Concentrations des lipides,  $\Gamma$ , pour différents nombres Capillaires.

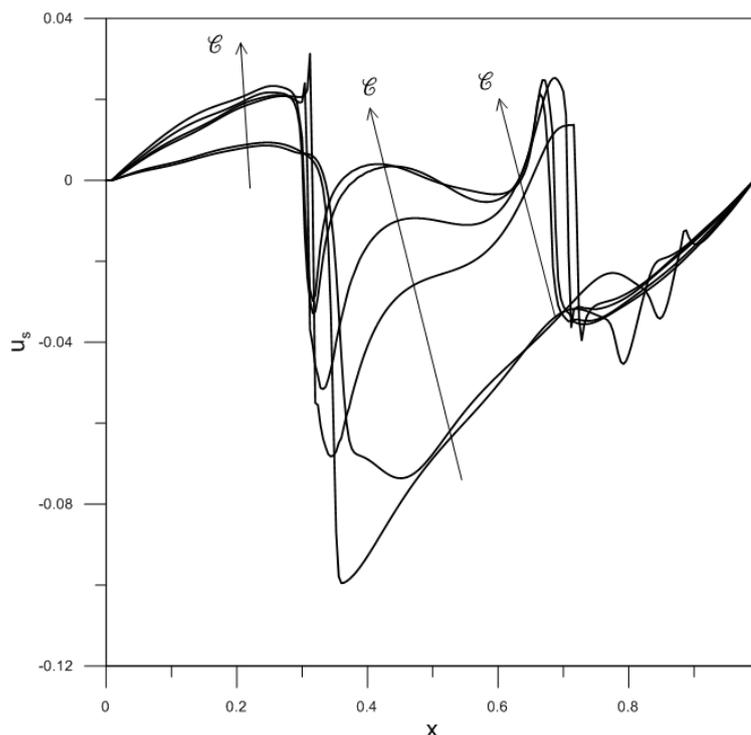


FIGURE 4.24 – Vitesse de surface,  $u_s$ , pour différents nombres Capillaires.

Pour étudier l'effet du nombre Capillaire modifié sur les vitesses de surface et moyennes données par les équations 2.88 et 2.89 respectivement, on considère les figures 4.24 et 4.25. Contrairement au nombre de Marongoni, l'augmentation de la valeur du nombre Capillaire modifié a pour résultat la région de la surface du fluide où la vitesse est positive reste presque constante en taille. On constate sur la figure 4.25, que l'augmentation de  $\mathcal{C}$  accentue le transport du liquide lacrymal vers les deux ménisques inférieur et supérieur tout en créant deux creux auprès de ces ménisques.

## 4.2 Volume de larmes réduit

Comme dans l'étude d'Aydemir *et al.* [1], le volume de larmes est important à cause des valeurs assignées aux deux paramètres du problème, à savoir  $L_{cl} = 2 \times 10^{-3}$  m et  $h^* = 10^{-3}$  m. Nous rappelons que le premier est la position effective de la paupière supérieure fermée à  $t = 0$ , alors que le second est la hauteur des ménisques. Ce choix a entraîné la grande épaisseur moyenne du film lacrymal dans la région centrale de la surface de la cornée. On pourrait se demander si ce grand volume de larmes pourrait surestimer le rôle de la gravité sur le taux d'amincissement du film lacrymal. Pour résoudre cette question, nous avons effectué une simulation à volume réduit

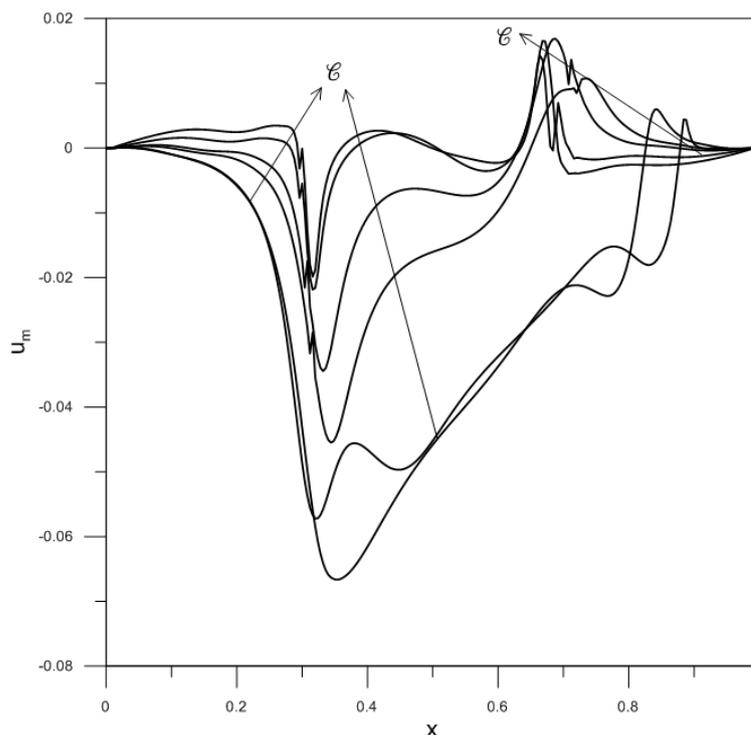
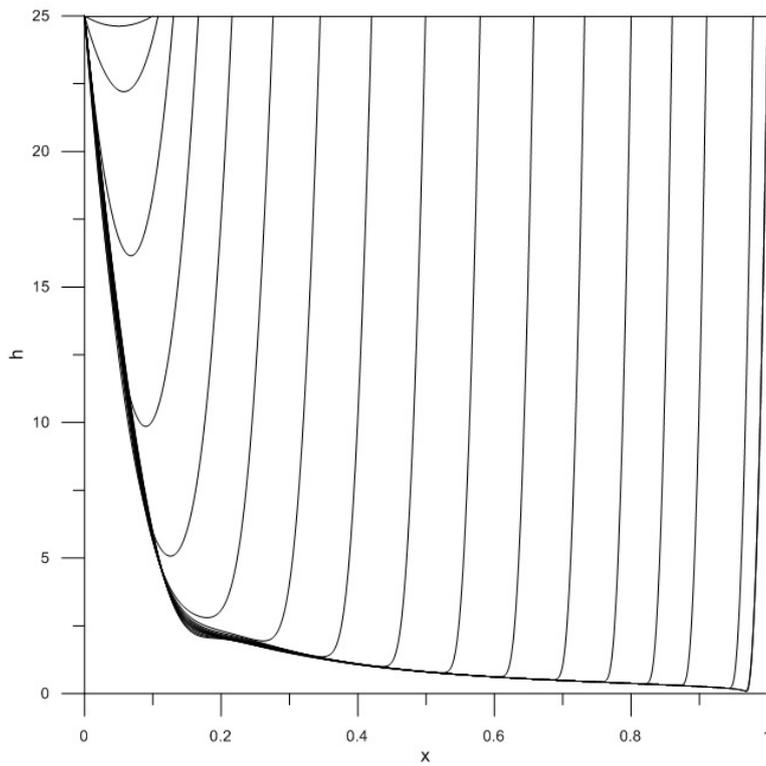
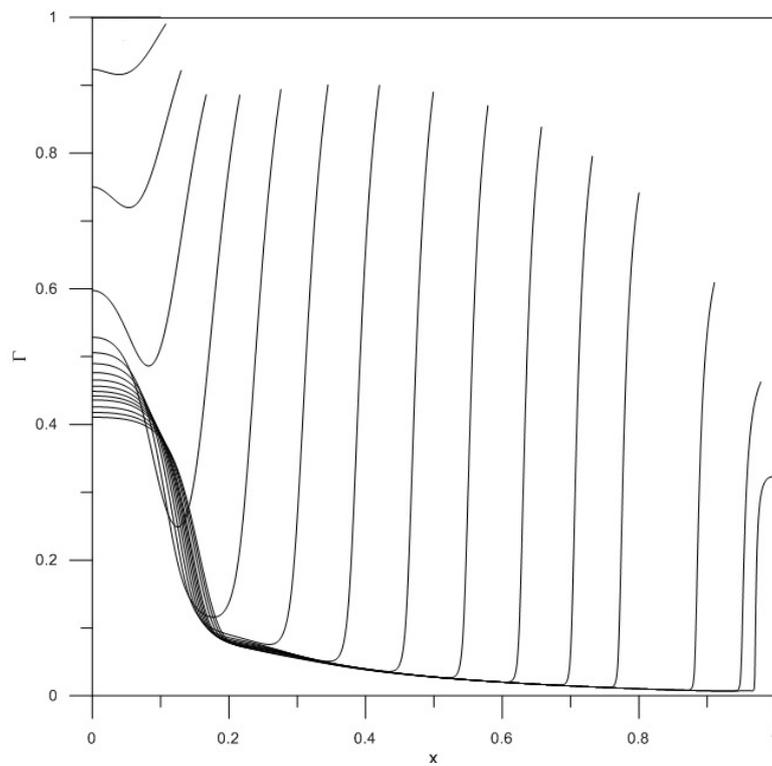


FIGURE 4.25 – Vitesse moyenne,  $u_m$ , pour différents nombres Capillaires.

comme dans Bruna et Breward [10]. Dans cette simulation, la valeur de  $L_{cl}$  est divisée par 2 et  $h^*$  par 4, ce qui vient à diviser le volume initial par 8. Les paramètres des simulations sont  $\mathcal{H} = 25$ ,  $\mathcal{C} = 6,79 \times 10^{-7}$ ,  $\mathcal{M} = 1,5 \times 10^{-2}$ , et  $\mathcal{B} = 2,18 \times 10^4$ . Les résultats des simulations effectuées dans le cas de volume des larmes réduit sont présentés sur les figures 4.26, 4.27, 4.28, 4.29, 4.30 et 4.31. Les simulations ont été réalisées dans les mêmes conditions que dans Bruna et Breward [10] où le mouvement de la paupière supérieure est donné par les équations (2.73 et 2.74)

Avec ce volume de larmes réduit, l'épaisseur du film dans la région centrale de la cornée est d'environ huit microns. Cette valeur est supérieure à la hauteur typique (inférieure à 5 microns) trouvée dans la littérature [33]. Les courbes de l'épaisseur du film  $h$  figure 4.26 et de la concentration lipidique  $\Gamma$  figure 4.27 sont similaires à celles obtenues par Bruna et Breward [10]. Du point de vue de la rupture du film lacrymal, la différence entre les épaisseurs minimales du film lacrymal entre les prédictions d'approximation plate et sphérique pour la surface de la cornée est toujours significative; voir la figure 4.29. Cet écart reste significatif même lorsque la gravité est mise à zéro (résultats non montrés ici).

Nous avons essayé de diminuer la hauteur du film lacrymal,  $h^*$ , au niveau des ménisques, afin d'approcher la valeur expérimentale d'environ 60 microns. Cependant, des problèmes de conver-

FIGURE 4.26 – Évolutions de l'épaisseur du film lacrymal,  $h$ , pendant la phase de clignementFIGURE 4.27 – Évolutions de la concentration lipidique,  $\Gamma$ , pendant la phase de clignement

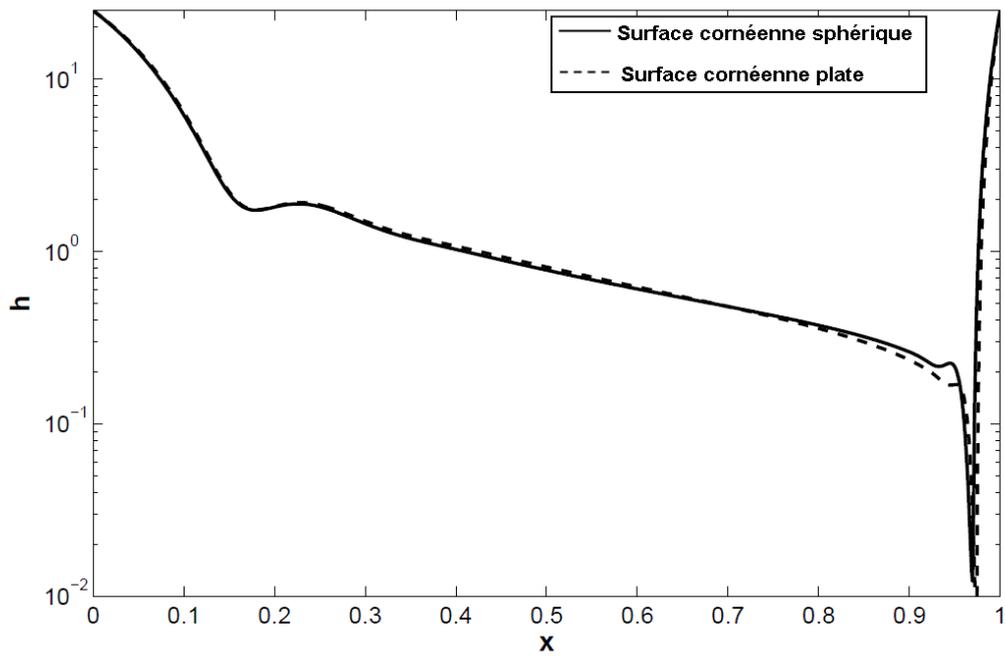


FIGURE 4.28 – Comparaison de l'épaisseur du film lacrymal,  $h$ , entre les surfaces de cornée plate et sphérique à  $t=2$ .

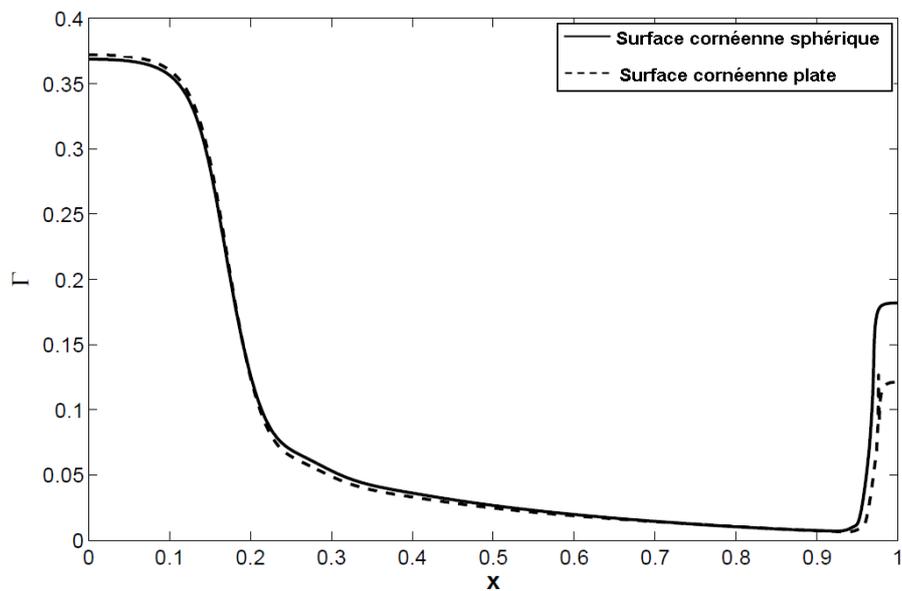


FIGURE 4.29 – Comparaison du profil de concentration lipidique,  $\Gamma$ , entre les surfaces de cornée plate et sphérique à  $t=2$ .

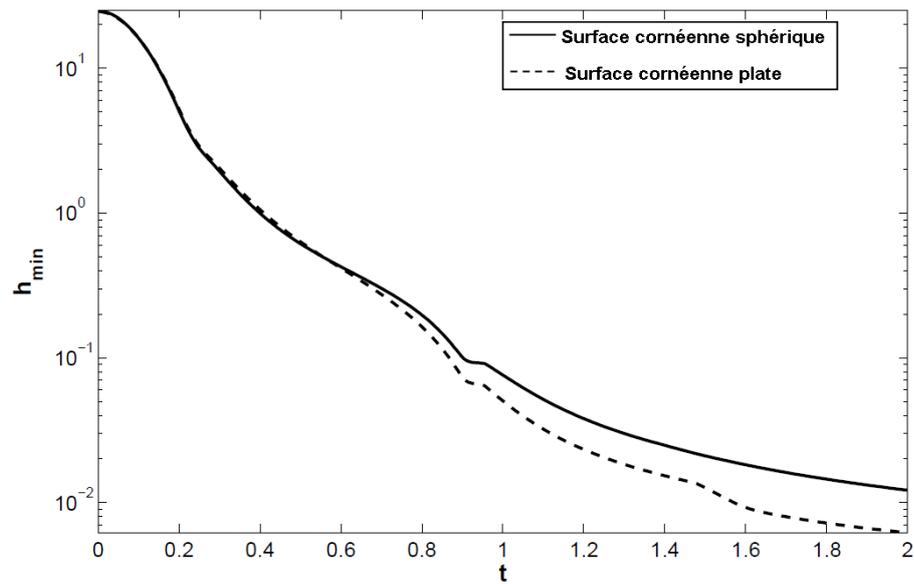


FIGURE 4.30 – Comparaison de l'évolution de l'épaisseur minimale du film,  $h_{\min}$ , entre les surfaces de cornée plate et sphérique à  $t=2$ .

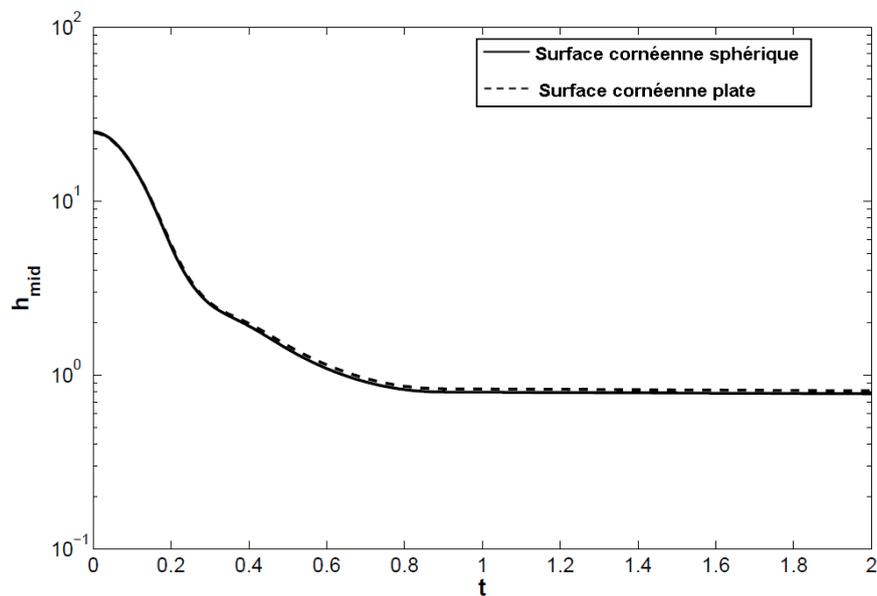


FIGURE 4.31 – Comparaison de l'évolution de l'épaisseur du film au milieu de la surface de la cornée,  $h_{\text{mid}}$ , entre les surfaces de cornée plate et sphérique à  $t=2$ .

gence ont été rencontrés; l'épaisseur minimale du film devient plus petite que l'espacement de deux points de la grille et le film lacrymal se brise ( $h \rightarrow 0$ ) près de la paupière mobile avant la fin de la phase ascendante. Nous nous demandons si Bruna et Breward [10] n'ont pas rencontré un problème similaire, ce qui pourrait expliquer leur choix de  $h^* = 250$  microns pour leur simulation.

Dans la phase d'ouverture, la courbure du film lacrymal est forte et la concentration en lipides est élevée près de la paupière supérieure; voir les figures 4.4 et 4.5. Nous rappelons que la capillarité draine le film lacrymal vers le haut vers le ménisque tandis que les flux de Marangoni et de gravité ont tendance à drainer le film lacrymal vers le centre de la cornée. Ensuite, dans nos simulations, la capillarité peut avoir surmonté le Marangoni et les écoulements gravitaires entraînant une rupture du film lacrymal avant le début de la phase d'interclignement.

Les figures 4.28 et 4.29 comparent les profils de l'épaisseur du film lacrymal et de la concentration lipidique à  $t = 2$ . Les figures 4.30 et 4.31 comparent les profils de l'épaisseur minimale du film lacrymal et l'épaisseur du film au milieu de la surface de la cornée jusqu'à  $t = 2$ . Les résultats obtenus pour les surfaces de cornée plates et sphériques sont similaires. Une discordance n'est trouvée que pour l'épaisseur minimale du film; voir la figure 4.30. Il convient de souligner que l'épaisseur du film lacrymal au milieu de la cornée n'a pas montré de divergence significative entre la prédiction des approximations plate et sphérique de la surface de la cornée; voir la figure 4.31. Cela confirme les résultats de Braun *et al.* [7]; la courbure n'a presque aucune influence sur l'épaisseur du film lacrymal au milieu de la cornée. L'influence de la courbure n'est significative que sur  $h_{\min}$ , près de la paupière supérieure.

# Conclusion générale

Dans cette étude on a généralisé le modèle d'Aydemir *et al.* [1] en approximant la surface de la cornée comme sphérique plutôt que plate. La courbure de la cornée est introduite dans le modèle, qui consiste en une paire d'équations aux dérivées partielles non linéaires de l'épaisseur de la couche aqueuse couplée à la concentration des lipides en surface. Ces lipides sont considérés comme un surfactant insoluble qui modifiait localement la tension superficielle. Les paramètres clés du modèle sont le nombre Capillaire, le nombre de Bond, le nombre de Marangoni et la courbure de la cornée. Ce modèle est résolu dans un domaine, évolutif dans le temps, compris entre la paupière supérieure mobile et la paupière inférieure fixe.

L'objectif de cette étude était de déterminer l'effet de la courbure sur le comportement de l'écoulement obtenu par d'Aydemir *et al.* [1]. À l'exception de Braun *et al.* [7] qui considère la cornée comme un sphéroïde prolaté et Gareth Alan Douglas Hurst [20] qui considère la cornée comme une forme cylindrique, l'influence de la courbure du substrat (cornée) sur l'évolution du film lacrymal est souvent négligée dans la littérature et les modèles qui se dégagent sont principalement des modèles cartésiens (ou plans).

Ce développement fournit donc une nouvelle quantification des effets de la courbure comparé au modèle plan développé par Aydemir *et al.* [1]. On constate en effet, (voir les figures (4.1 à 4.6)), que les profils de l'épaisseur du film lacrymal  $h$  et de la concentration lipidique  $\Gamma$  obtenus, durant la phase d'ouverture et pendant le clignement, pour la surface de la cornée sphérique en position verticale sont similaires à ceux obtenus par Aydemir *et al.* [1]. Cependant, pour la cornée en position horizontale (voir la figure (4.8)), les profils de  $h$  et  $\Gamma$  présentent des écarts, qui sont dûs à l'effet de la gravité, qui est nulle lorsque la cornée est plate et placée en position horizontale. Alors

que l'effet de la gravité est présent grâce à sa composante tangentielle ( $g\cos\theta$ ) lorsque la cornée est sphérique et placée en position horizontale..

Les résultats importants obtenus montrent que, loin de la paupière supérieure, l'influence de la courbure est faible. Cela confirme les résultats de Braun *et al.* [7] (voir la figure(4.31)). Par ailleurs, l'interaction de la courbure avec la gravité, la capillarité et le gradient de concentration des lipides polaires sur la surface influence la vitesse d'amincissement de l'épaisseur minimale du film, qui se produit près de la paupière mobile, la vitesse de surface et la vitesse moyenne (voir les figures(4.10 à 4.13 et 4.30)).

Étant donnée l'ouverture elliptique de la fonte palpébrale, pour le futur travail, nous comptons généraliser cette étude au cas tridimensionnel où nous allons tenir compte de la forme réelle du domaine évolutif compris en les deux paupières. D'autres perspectives peuvent être envisagées comme :

- La modélisation du film lacrymal comme la superposition de couches de fluides non newtoniens en tenant compte par exemple de l'effet élastique des mucines (grosses molécules) en suspension dans la couche aqueuse et de l'effet rhéofluidifiant, observé expérimentalement, de la couche lipidique.
- Introduction de l'effet thermique, du Marangoni thermique et de l'évaporation dans la modélisation.

# Annexe 1

## Conservation du volume

Soit un élément de volume de larmes  $dV$  s'écrivant :

$$dV = 2\pi R_C h \sin(\theta) dx. \quad (1)$$

Le volume de larmes initial piégé entre les deux paupières, sachant que la paupière supérieure est en position fermée, est donné par :

$$V_0 = 2\pi R_C h^* \int_0^{L_{cl}} \sin(\kappa x + \theta_0) dx. \quad (2)$$

Le volume de larmes à un instant  $t$  quelconque pendant et après le clignement :

$$V = 2\pi R_C \int_0^{L(t)} [h \sin(\kappa x + \theta_0)] dx. \quad (3)$$

La dérivée temporelle du volume  $V$  :

$$\frac{dV}{dt} = 2\pi R_C \frac{d}{dt} \int_0^{L(t)} [h \sin(\kappa x + \theta_0)] dx. \quad (4)$$

En tenant compte du changement de variable (3.1 et 3.2). Alors, la variation temporelle du volume (4) devient :

$$\frac{dV}{dt} = 2\pi R_C \int_0^1 \frac{d}{dt} [LH(\eta, t) \sin(\kappa L\eta + \theta_0)] d\eta. \quad (5)$$

Pour montrer que les conditions aux limites satisfont à la conservation du volume, intégrons l'équation cinématique (3.6) dans le domaine fixe  $0 \leq \eta \leq 1$ .

L'intégration de l'équation (3.6) par rapport à la variable  $\eta$  donne :

$$\begin{aligned} & \int_0^1 [LH \sin(\kappa L \eta + \theta_0)]_t d\eta = \dot{L} \mathcal{H} \sin(\kappa L + \theta_0) \\ & + \frac{\mathcal{H}^2 \mathcal{M}}{2L} \sin(\kappa L + \theta_0) [\Gamma_\eta]_{\eta=1} - \frac{\mathcal{H}^2 \mathcal{M}}{2L} \sin(\theta_0) [\Gamma_\eta]_{\eta=0} + \frac{\mathcal{C} \mathcal{B} \mathcal{H}^3}{3} (\sin^2(\kappa L + \theta_0) - \sin^2(\theta_0)) \\ & - \frac{\mathcal{C} \mathcal{H}^3}{3L^3} \sin(\kappa L + \theta_0) \left[ \kappa^2 L^2 H_\eta + H_{\eta\eta\eta} + \kappa L H_{\eta\eta} \cot(\kappa L + \theta_0) - \kappa^2 L^2 H_\eta \cot^2(\kappa L + \theta_0) \right]_{\eta=1} \\ & + \frac{\mathcal{C} \mathcal{H}^3}{3L^3} \sin(\theta_0) \left[ \kappa^2 L^2 H_\eta + H_{\eta\eta\eta} + \kappa L H_{\eta\eta} \cot(\theta_0) - \kappa^2 L^2 H_\eta \cot^2(\theta_0) \right]_{\eta=0}. \end{aligned} \quad (6)$$

Les conditions aux limites sont :

$$\left[ \kappa^2 L^2 H_\eta + H_{\eta\eta\eta} + \kappa L H_{\eta\eta} \cot(\theta_0) - \kappa^2 L^2 H_\eta \cot^2(\theta_0) - \mathcal{B} L^3 \sin(\theta_0) \right]_{\eta=0} = 0, \quad (7)$$

$$[\Gamma_\eta]_{\eta=0} = 0, \quad (8)$$

$$\begin{aligned} & \left[ \kappa^2 L^2 H_\eta + H_{\eta\eta\eta} + \kappa L H_{\eta\eta} \cot(\kappa L + \theta_0) - \kappa^2 L^2 H_\eta \cot^2(\kappa L + \theta_0) \right. \\ & \left. - \mathcal{B} L^3 \sin(\kappa L + \theta_0) \right]_{\eta=1} = \frac{6 \dot{L} L^3}{\mathcal{C} \mathcal{H}^2}, \end{aligned} \quad (9)$$

$$[\Gamma_\eta]_{\eta=1} = \frac{2 \dot{L} L}{\mathcal{M} \mathcal{H}}. \quad (10)$$

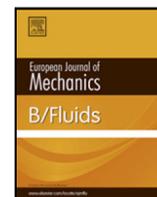
En utilisant les conditions aux limites (7 à 10) dans l'équation (6), on obtient :

$$\int_0^1 [LH \sin(\kappa L \eta + \theta_0)]_t d\eta = 0. \quad (11)$$

D'où, le volume du film lacrymal est conservé.

## **Annexe 2**

### **Article**



## Influence of curvature on tear film dynamics

Moussa Allouche<sup>a,b</sup>, Hamid Ait Abderrahmane<sup>c,\*</sup>, Seddik M. Djouadi<sup>c,1</sup>,  
Kacem Mansouri<sup>b</sup>

<sup>a</sup> Laboratoire de Mécanique, Matériaux et Énergétique, Faculté de Technologie, Université de Bejaia, Algeria

<sup>b</sup> Laboratoire d'Énergétique, Mécanique et Ingénierie, Faculté des Sciences de l'Ingénieur, Université de Boumerdes, Algeria

<sup>c</sup> Department of Mechanical Engineering, Khalifa University of Science and Technology, Masdar Institute of Science and Technology, Abu Dhabi, United Arab Emirates

### ARTICLE INFO

#### Article history:

Received 20 March 2016

Received in revised form 28 June 2017

Accepted 29 June 2017

Available online 8 July 2017

#### Keywords:

Tear film flow

Curved substrate

Lubrication theory

Polar lipid

### ABSTRACT

This paper generalizes the model of Aydemir et al. (2010) by approximating the cornea surface as spherical rather than flat. The model, which consists of a pair of coupled nonlinear partial differential equations for the thickness of the aqueous layer and the concentration of the lipid, is solved in the domain squeezed between a moving upper lid and fixed lower lid. Away the upper lid the curvature has a weak influence on the film thickness; this confirms the conclusion of Braun et al. (2012). However, the curvature influences the thinning rate of the tear film near the upper eyelid.

© 2017 Elsevier Masson SAS. All rights reserved.

### 1. Introduction

The tear film on the surface of the eye plays a key role in protecting the cornea surface from contamination, keeping the eye moist, providing a high-quality optical surface, cleaning the eye of foreign bodies, and lubricating the gap between the eyelids and the cornea [1]. All of these functions are simultaneously performed in approximately 5–10 s, a period of time during which the eye remains open. During this interblink period, the tear film deposited on the cornea surface thins and eventually breaks. This breakup is often associated with blurred vision, burning sensations and tearing. These are symptoms of a wide spread disease, known as dry-eye syndrome [2].

The quest to understand this syndrome from a fluid dynamics perspective has given rise to a growing interest in the problem of tear film dynamics. A variety of investigations dealing with evaporation, gravity, viscosity and surface tension effects are conducted [3–7]. For further background, we refer the reader to Braun's review [8].

Tear film is a tri-layered liquid film formed by mucus, aqueous and lipid layers [3,4,9]. The mucus is very thin and has hydrophilic properties; it coats the ocular surface. Above the mucus layer is the aqueous layer, which forms most of the volume of the tears. The lipids, which consist of polar and non-polar components, form

the outermost layer. The polar lipids are spread on the interface between the aqueous and the non-polar lipid layers. The polar lipids act as surfactants; they decrease the surface tension and reduce the evaporation from the aqueous layer.

Several mathematical models for the tear film dynamics have been proposed; they are derived using the lubrication theory. Although tear films exhibit shear thinning and elastic properties [10], most of the models consider the aqueous layer as a Newtonian fluid. The first models are typically one-dimensional nonlinear partial differential equation for the thickness of the aqueous layer. They are solved in a domain trapped between two stationary eyelids [11–13]. Gravitational and evaporative effects are added to the single-layer model of the tear film dynamics [5]. Some relatively recent studies have solved the one-dimensional models within time dependent domains, where the lower eyelid is assumed to be stationary while the upper eyelid is moving. For instance, Jones et al. [6] investigated the stability of the tear film flow as it was laid down by the motion of the upper eyelid between the blinks. Their lubrication model includes the effects of surface tension, viscosity, gravity, and evaporation. They pointed out the influence of the eyelid velocity and the lipid layer concentration on the tear layer stability. This result was confirmed by Jones et al. [14], who investigated both the evolution of tear film thickness and lipid spreading on the tear film surface. These authors showed the role of the Marangoni flow, due to nonuniform distribution of the lipids, in drawing the tear film upwards along the cornea during the opening phase.

Recent mathematical models have also considered eye blinking. For instance, Braun et al. [15] solved a single nonlinear partial

\* Corresponding author.

E-mail address: [haitabd@hotmail.com](mailto:haitabd@hotmail.com) (H.A. Abderrahmane).

<sup>1</sup> On leave from the Department of Electrical Engineering and Computer Science, University of Tennessee, Knoxville, USA.

differential equation for the tear film thickness using a sinusoidal motion of the upper eyelid. This model was refined by Heryudono et al. [7] and solved with a realistic lid motion. Aydemir et al. [4] solved their model, which consists of two coupled non-linear partial differential equations for the film thickness and the lipid concentration, in a moving domain. The motion of the upper eyelid was deduced from the measurements of its speed during the opening phase [11]. More recently, Bruna and Breward [3] extended the monolayer model of Aydemir et al. [4] by including a non-polar lipid layer. The non-polar lipid layer was placed above the aqueous layer while the polar lipid is spread on the interface between the two layers. There are also some models, that consider the mucus and aqueous layers as separate, with a lipid spreading on the surface of the aqueous layer [13,16,17].

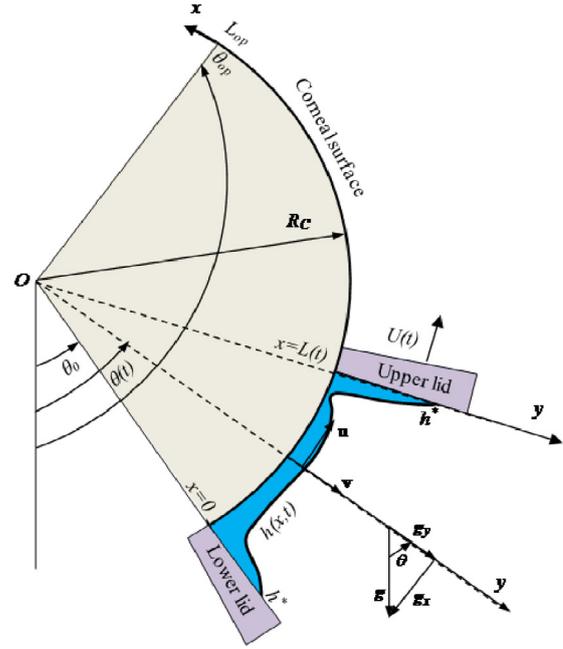
Nearly all tear film models assume the substrate (the cornea or contact lens) under the tear film to be flat. This approximation is based on the fact that the tear film's thickness, which is of the order of a few microns, is very small compared to the average radius of curvature of the cornea surface, which is of the order of a centimeter [18]. Gorla and Gorla [19,20] assumed a cylindrical shape for the cornea and investigated the rupture of the tear film covering the cornea. Braun et al. [21] reconsidered the flat cornea approximation by assuming a prolate spheroidal corneal shape. They have considered the flow of a thin fluid film on the cornea driven only by the pressure gradient due to the variations of the curvature. They concluded, based on the thinning rate at the center of the cornea, that the curvatures do not have a strong effect on the tear film dynamics. The radius of the cornea curvature is of the same order as the distance between the eyelids when the eye is fully open. Hence, its interplay with the motion of the upper eyelid and other flows driven by Marangoni, capillarity, and gravity are worth considering.

In this paper, we extend the study of Aydemir et al. [4] by considering the corneal surface to be spherical rather than flat. We might have considered a prolate spheroidal cornea surface, which is considered to be the best approximation for the cornea surface. The curvature of the prolate spheroidal varies along the cornea surface [21]. However, in order to focus on the interplay of the curvature with Marangoni, capillarity, and gravity effects, we assumed that cornea surface to be spherical, with constant curvature. The spherical approximation can be considered as reasonable one. In fact, the pressure gradient in the tear film, due to the curvature variation in the case of prolate spheroid substrate, was found not strong enough to have a significant effect on the thinning rate, observed in typical conditions [21]. The curvatures of a prolate spheroid shape vary slightly over the eye domain. Furthermore, the spherical approximation is of interest if one considers that with aging, the cornea surface becomes more spherical [22] and the tear film break-up time decreases significantly [23].

This paper parallels the work by Aydemir et al. [4] up to some extent. In Section 2, we present the formulation of the problem and the reduced model. In Section 3, we discuss the results of the numerical simulations. Finally, we provide some concluding remarks in the last section.

## 2. Formulation

We consider a two-dimensional tear film layer spreading between two eyelids on an impermeable, stationary, spherical corneal surface of constant radius  $R_C$ . The upper eyelid is moving while the lower one is considered stationary; see the schematic in Fig. 1. We use a system of curvilinear coordinates  $(x, y)$  where  $x$  indicates the curvilinear abscissa along the corneal surface and  $y$  is the normal ordinate. The aqueous layer, with constant material properties, is considered as a Newtonian liquid and is bounded by a passive atmosphere whose viscosity and density are assumed to be



**Fig. 1.** Schematic of the tear film problem depicting the spherical cornea surface, curvilinear coordinates  $(x, y)$  and the two eyelids. The upper eyelid is moving while the lower one is fixed at polar angle  $\theta_0 = 1.0708$  rad. The maximal polar angle and opening of the upper eyelid are  $\theta_{op} = 2.0708$  rad and  $L_{op} = 1$  cm.  $R_C = 1$  cm, is the radius of curvature of the spherical cornea.

negligible. Similarly to the study by Aydemir et al. [4], evaporation and liquid flux under the upper eyelid are neglected; thus, the volume of the aqueous layer remains constant.

The equations of conservation of mass and momentum are:

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (1)$$

$$\rho(\partial_t + \mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\nabla p + \mu \Delta \mathbf{u} + \rho \mathbf{g}, \quad (2)$$

where  $\mathbf{u} = (u, v)$  is the velocity vector,  $\mathbf{g} = (-g \sin \theta, g \cos \theta)$  is the gravitational vector,  $p$  is the pressure.  $\rho$  and  $\mu$  are the density and dynamic viscosity of the aqueous layer, respectively. We assume that the polar lipid layer acts as an insoluble surfactant at the surface of the aqueous layer,  $y = h(x, t)$ , and its transport is described by the following convection and diffusion equation:

$$\Gamma_t + (u_t \Gamma)_s - \mathcal{D} \Gamma_{ss} + \tilde{\kappa} u_n \Gamma = 0, \quad (3)$$

where  $\Gamma$ ,  $\Gamma_s$  and  $\Gamma_{ss}$  indicate the lipid concentration at the free surface and its first and second derivatives, along the free surface.  $u_t = \mathbf{u} \cdot \mathbf{t}|_{y=h(x,t)}$  and  $u_n = \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}|_{y=h(x,t)}$  are the tangential and normal components of the velocity at the free surface, respectively. The vectors  $\mathbf{n}$  and  $\mathbf{t}$  are the outward unit normal and tangent vectors to the free surface, respectively.  $\tilde{\kappa}$  is the mean curvature of the free surface and  $\mathcal{D}$  is the surface diffusivity of the polar lipid. We consider that the lipid reduces the surface tension,  $\gamma$ , at the interface between the aqueous layer and the surrounding air. We assume that  $\gamma$  is linearly dependent on the polar lipid concentration, such that.

$$\gamma = \gamma_0 - RT \Gamma. \quad (4)$$

Here  $\gamma_0$  is the surface tension in the absence of polar lipid,  $R = 8.31$  J/mol K is the universal gas constant, and  $T \approx 310$  K is the film temperature.

The boundary conditions of the problem are the no-slip condition at the corneal surface and the kinematic and the dynamic

conditions at the free surface:

$$\text{on } y = 0 \quad u = v = 0, \quad (5)$$

$$\text{on } y = h(x, t) \quad (1 + \kappa h)v = (1 + \kappa h)h_t + uh_x, \quad (6)$$

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{T} \cdot \mathbf{n}) = \gamma \nabla \cdot \mathbf{n}, \quad (7)$$

$$\mathbf{t} \cdot (\mathbf{T} \cdot \mathbf{n}) = \mathbf{t} \cdot \nabla_s \gamma. \quad (8)$$

$\kappa = \frac{1}{R_C}$  is the curvature of the cornea surface and  $\mathbf{T} = -p\mathbf{I} + \mu [\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T]$  denotes the stress tensor in the tear film.  $\nabla$  and  $\nabla_s$  are the gradient and surface gradient, given in Appendix A. We suppose that the tear film can assume any contact angle along the eyelids and that the height of the pinned meniscus is  $h^*$ . Then the boundary conditions at the eyelids are:

$$h(0, t) = h(L, t) = h^*, \quad (9)$$

where  $L(t)$  is the distance between the eyelids along the corneal surface given by Aydemir et al. [4].

$$L(t) = \begin{cases} L_{cl} + U_0 \tau \left\{ -\frac{1}{2} \left( \frac{t}{\tau} \right)^2 \right. \\ \left. + \lambda \left[ \frac{\sqrt{\pi}}{2} \operatorname{erf} \left( \sqrt{\frac{t}{\tau}} \right) - \sqrt{\frac{t}{\tau}} e^{-\frac{t}{\tau}} \right] \right\}, & 0 \leq t \leq t^*; \\ L_{op}, & t > t^*. \end{cases} \quad (10)$$

$L_{cl} = 2 \times 10^{-3}$  m is the effective distance between the two eyelids when closed.  $L_{op} = 0.01$  m is the distance between the eyelids when the eye is fully open. The approximate values for the parameters  $t^*$ ,  $U_0$ ,  $\tau$  and  $\lambda$  are 0.180 s, 0.0163 m/s, 0.0865 s and 11.6, respectively.  $t^*$  indicates the time at which the speed of the upper eyelid becomes zero or  $L = L_{op}$ . The distance  $L(t)$  is the integral of the speed function  $\dot{L}(t)$  of the upper eyelid, obtained experimentally after curve fitting the data by Wong et al. [11].

$$\dot{L}(t) = \begin{cases} U_0 \left( \lambda \sqrt{t/\tau} e^{-t/\tau} - t/\tau \right), & 0 \leq t \leq t^*; \\ 0, & t > t^*. \end{cases} \quad (11)$$

We assumed that the distance,  $L(t)$ , between the eyelids, is always larger than  $h^*$ , which is also assumed to be much larger than the typical tear film height,  $h_0 = 10^{-5}$  m, far from the eyelids. It is worth highlighting that compared to the typical tear film thickness,  $h_0$  is overestimated approximately by a factor of three [24]. For the purpose of the results comparisons, we choose, in this study, to follow Aydemir et al. [4]. We defined the aspect ratio of the problem,  $\epsilon = \frac{h_0}{L_{op}} \ll 1$ . This intrinsic difference in scales between the longitudinal and the transverse coordinates is at the heart of the lubrication theory used to simplify the problem into a system of two PDEs for the film thickness,  $h$ , and the polar lipid concentration,  $\Gamma$ , at the free surface. We supposed the fluid layer initially to have uniform thickness  $h^*$  and the lipid to be evenly distributed, with known concentration  $\Gamma^*$ . Then the initial conditions were:

$$L = L_{cl}, \quad h(x, 0) = h^*, \quad \Gamma(x, 0) = \Gamma^*. \quad (12)$$

The governing equations for the boundary and initial conditions above (1)–(12) were rewritten in non-dimensional form using the following scaling. The characteristic length scales in the longitudinal and film depth directions were taken as  $L_{op}$  and  $h_0$ . Following Aydemir et al. [4], we chose the average velocity of the opening phase  $U = U_{av} = \frac{1}{t^*} \int_0^{t^*} \dot{L}(t) dt = 0.044$  m/s, as the characteristic flow speed. The problem was nondimensionalized using the following scaling:

$$\begin{aligned} x &= L_{op} x', & y &= \epsilon L_{op} y', & L &= L_{op} L', & t &= \frac{L_{op}}{U} t', \\ u &= U u', \end{aligned} \quad (13)$$

$$v = \epsilon U v', \quad p = p_0 + \frac{\mu U}{\epsilon^2 L_{op}} p', \quad h = \epsilon L_{op} h',$$

$$\Gamma = \Gamma^* \Gamma', \quad \kappa = \frac{1}{L_{op}} \kappa'.$$

Following Aydemir et al. [4] we chose the following values for  $\mu \approx 1.3 \times 10^{-3}$  N s/m<sup>2</sup>,  $\rho \approx 10^3$  kg/m<sup>3</sup>,  $\gamma_0 \approx 4.5 \times 10^{-2}$  N/m,  $h^* = 10^{-3}$  m,  $\Gamma^* \approx 4 \times 10^{-7}$  mol/m<sup>2</sup> and  $\mathcal{D} \approx 3 \times 10^{-8}$  m<sup>2</sup>/s. Based on these values, the size of the dimensionless numbers such as  $\epsilon^2 \text{Re}$  and  $\text{Pe}$  were very small, so inertia and surface diffusion could be neglected; see Appendix A for details. It is known that the curvature between the menisci at the eyelids and the tear film changes sharply. This can induce a capillary flow and lead to a significant surface tension gradient at the free surface, which gives rise to Marangoni flow, influencing the tear film dynamics. In order to consider the capillary and Marangoni flows, the terms in front of the numbers  $\epsilon^3/\text{Ca}$  and  $\epsilon \text{Ma}$ , should be retained even though they are small.

In the following, the primes in the notations are dropped for convenience. In leading order, the equations of the problem in non-dimensional form are as follows; see Appendix A for more details.

$$u_x + r_\kappa v_y + 2\epsilon \kappa v + \kappa u \cot \theta = 0, \quad (14)$$

$$0 = -p_x + r_\kappa u_{yy} + 2\epsilon \kappa u_y - r_\kappa \text{St} \sin \theta, \quad (15)$$

$$0 = -r_\kappa p_y + \epsilon r_\kappa \text{St} \cos \theta, \quad (16)$$

$$\text{at } y = 0,$$

$$u = v = 0, \quad (17)$$

and

$$\text{at } y = h(x, t),$$

$$r_{\kappa h}^2 \Gamma_t + r_{\kappa h} (u_t \Gamma)_x = 2\epsilon \kappa (h_x u - r_{\kappa h} v) \Gamma, \quad (18)$$

$$r_{\kappa h} v = r_{\kappa h} h_t + u h_x, \quad (19)$$

$$\begin{aligned} p &= \epsilon^2 \left( \frac{1}{\text{Ca}} - \text{Ma} \Gamma \right) \\ &\times (2\kappa - 2\epsilon \kappa^2 h - \epsilon h_{xx} - \epsilon \kappa h_x \cot(\kappa x + \theta_0)), \end{aligned} \quad (20)$$

$$r_{\kappa h} u_y - \epsilon \kappa u = -\epsilon \text{Ma} \Gamma_x. \quad (21)$$

$\text{Ca} = \frac{\mu U}{\gamma_0}$ ,  $\text{St} = \frac{\epsilon^2 \rho g L_{op}^2}{\mu U}$  and  $\text{Ma} = \frac{RT \Gamma^*}{\mu U}$  are the capillary, Stokes, and Marangoni numbers, respectively.  $r_\kappa = 1 + \epsilon \kappa y$  is the dimensionless radius coordinate and  $r_{\kappa h} = r_\kappa|_{y=h}$ . Note that the term  $\text{Ma} \Gamma$  is small compared to  $\frac{1}{\text{Ca}}$ ; it is neglected in the following. Following classical lubrication theory, we look for solutions of the problem in the form of perturbation expansions for the dependent variables:

$$f = f_0 + \epsilon f_1 + \dots \quad (22)$$

At zero order, the equations of the problem in non-dimensional form are as follows:

$$u_x + v_y + \kappa \cot(\kappa x + \theta_0) u = 0, \quad (23)$$

$$0 = -p_x + u_{yy} - \text{St} \sin(\kappa x + \theta_0), \quad (24)$$

$$0 = -p_y, \quad (25)$$

$$\Gamma_t + (u \Gamma)_x = 0, \quad (26)$$

where at  $y = h(x, t)$ ,  $u = u_s$ . The boundary conditions associated with the equations above are the following:

$$y = 0 \quad u = v = 0, \quad (27)$$

$$y = h(x, t) \quad v = h_t + uh_x, \quad (28)$$

$$p = \frac{\epsilon^2}{Ca} (2\kappa - 2\epsilon\kappa^2 h - \epsilon h_{xx} - \epsilon\kappa h_x \cot(\kappa x + \theta_0)), \quad (29)$$

$$u_y = -\epsilon Ma \Gamma_x. \quad (30)$$

The integration of the above system of equations leads to

$$u = -\mathcal{M}\Gamma_x y + \frac{C}{2} \{ \kappa^2 h_x + h_{xxx} + \kappa h_{xx} \cot(\kappa x + \theta_0) - \kappa^2 h_x \cot^2(\kappa x + \theta_0) - \mathcal{B} \sin(\kappa x + \theta_0) \} (2h - y) y, \quad (31)$$

where  $C = \frac{\epsilon^3}{Ca}$ ,  $\mathcal{B} = \frac{St}{C}$  and  $\mathcal{M} = \epsilon Ma$ .

The surface and depth-averaged velocities can be easily deduced from (31) and written as

$$u_s = -\mathcal{M}\Gamma_x h + \frac{C}{2} h^2 \{ \kappa^2 h_x + h_{xxx} + \kappa h_{xx} \cot(\kappa x + \theta_0) - \kappa^2 h_x \cot^2(\kappa x + \theta_0) - \mathcal{B} \sin(\kappa x + \theta_0) \}, \quad (32)$$

$$\bar{u} = \frac{1}{h} \int_0^h u dy = -\frac{\mathcal{M}}{2} \Gamma_x h + \frac{C}{3} h^2 \{ \kappa^2 h_x + h_{xxx} + \kappa h_{xx} \cot(\kappa x + \theta_0) - \kappa^2 h_x \cot^2(\kappa x + \theta_0) - \mathcal{B} \sin(\kappa x + \theta_0) \}. \quad (33)$$

Combining the continuity equation (23) and the kinematic condition at the interface (28) we obtain:

$$h_t + \frac{1}{\sin(\kappa x + \theta_0)} (\sin(\kappa x + \theta_0) \bar{u} h)_x = 0. \quad (34)$$

Plugging the relations (33) and (32) into (34) and (26), respectively, we obtain the following system of two coupled nonlinear partial differential equations for the tear film thickness  $h$  and the concentration of the polar lipid,  $\Gamma$ .

$$h_t + \frac{1}{\sin(\kappa x + \theta_0)} \left[ \left( -\frac{\mathcal{M}}{2} \Gamma_x h^2 + \frac{C}{3} h^3 \times \left\{ \kappa^2 h_x + h_{xxx} + \kappa h_{xx} \cot(\kappa x + \theta_0) - \kappa^2 h_x \cot^2(\kappa x + \theta_0) - \mathcal{B} \sin(\kappa x + \theta_0) \right\} \right) \sin(\kappa x + \theta_0) \right]_x = 0 \quad (35)$$

$$\Gamma_t + \left[ -\mathcal{M}h\Gamma\Gamma_x + \frac{C}{2} h^2 \Gamma \left\{ \kappa^2 h_x + h_{xxx} + \kappa h_{xx} \cot(\kappa x + \theta_0) - \kappa^2 h_x \cot^2(\kappa x + \theta_0) - \mathcal{B} \sin(\kappa x + \theta_0) \right\} \right]_x = 0. \quad (36)$$

Setting  $\kappa = 0$  and  $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$  in (35) and (36) we retrieve the two equations (33a and 33b) for the film thickness and lipid concentration given in Aydemir et al. [4]. These equations are solved in the moving domain on  $0 \leq x \leq L(t)$  subject to the following boundary and initial conditions:

$$\kappa^2 h_x + h_{xxx} + \kappa h_{xx} \cot \theta_0 - \kappa^2 h_x \cot^2 \theta_0 - \mathcal{B} \sin \theta_0 = 0, \quad \Gamma_x = 0, \quad h = \mathcal{H}, \quad \text{at } x = 0, \quad (37)$$

$$\kappa^2 h_x + h_{xxx} + \kappa h_{xx} \cot(\kappa L(t) + \theta_0) - \kappa^2 h_x \cot^2(\kappa L(t) + \theta_0) - \mathcal{B} \sin(\kappa L(t) + \theta_0) = \frac{6\dot{L}}{C\mathcal{H}^2}, \quad (38)$$

$$\Gamma_x = \frac{2\dot{L}}{\mathcal{M}\mathcal{H}}, \quad h = \mathcal{H}, \quad \text{at } x = L(t), \quad (39)$$

$$L(0) = \delta, \quad \Gamma(x, 0) = 1, \quad h(x, 0) = \mathcal{H}, \quad (40)$$

where  $\mathcal{H} = \frac{h^*}{\epsilon L_{op}}$  and  $\delta = \frac{L_{cl}}{L_{op}}$ .  $L(t)$  is the opening length of the upper eyelid in nondimensional form given as follows:

$$L(t) = \begin{cases} \delta + U^* \tau^* \left\{ -\frac{1}{2} \left( \frac{t}{\tau^*} \right)^2 + \lambda \left[ \frac{\sqrt{\pi}}{2} \operatorname{erf} \left( \sqrt{\frac{t}{\tau^*}} \right) - \sqrt{\frac{t}{\tau^*}} e^{-\frac{t}{\tau^*}} \right] \right\}, \\ 0 \leq t \leq 0.792; \\ 1, \quad t > 0.792, \end{cases} \quad (41)$$

where  $U^* = \frac{U_0}{U}$  and  $\tau^* = \frac{\tau U}{L_{op}}$ .

### 3. Results

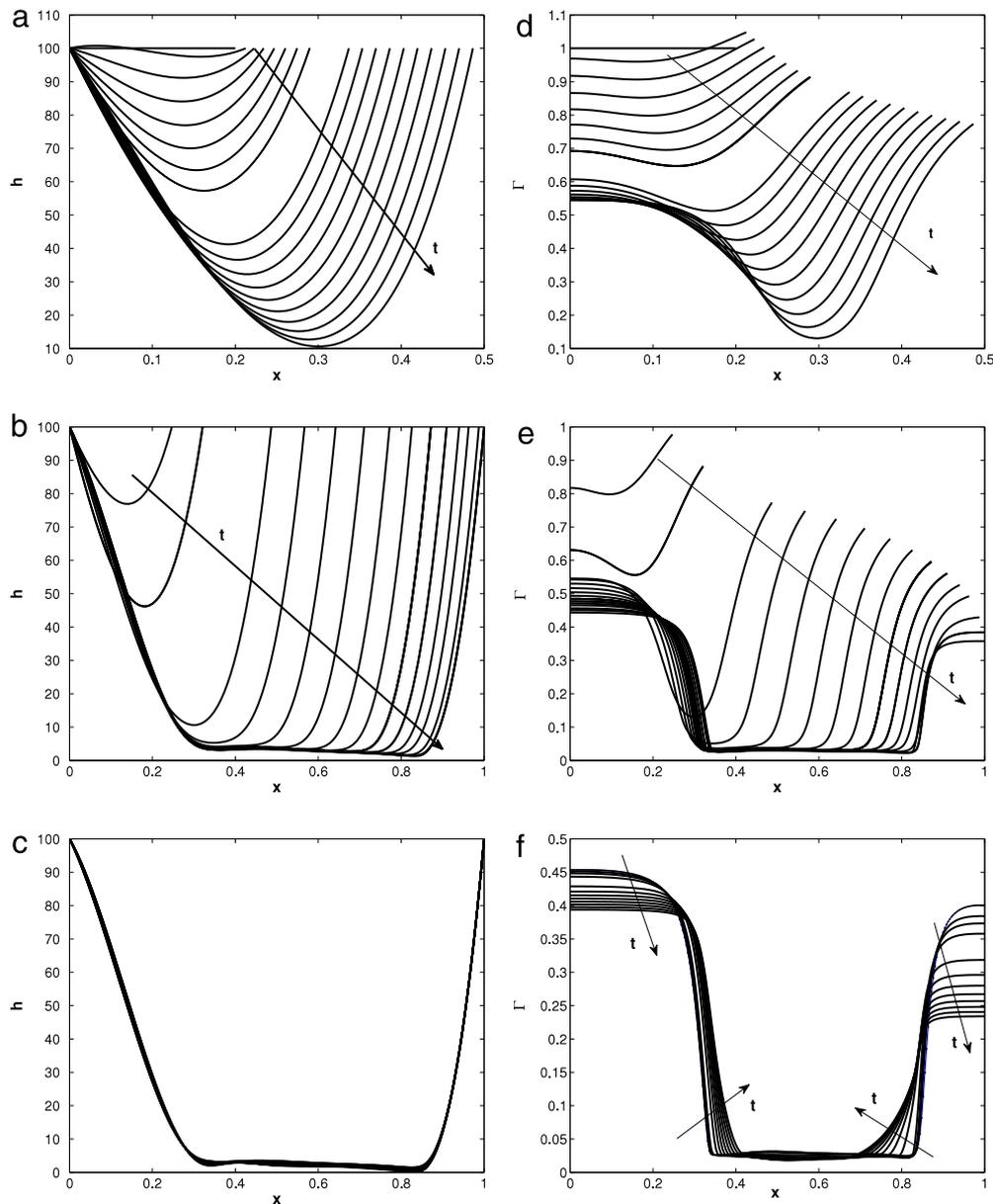
To assess the influence of the cornea curvature on the tear film dynamics, we solved the system of the two coupled nonlinear partial differential equations (35)–(36) for the film thickness,  $h$ , and the lipid concentration,  $\Gamma$ , with the boundary and initial conditions (37)–(40). The numerical simulations were conducted for both flat and spherical cornea surfaces, placed in horizontal (i.e., person is lying down) and vertical positions (i.e., person is standing up).

The numerical simulations were conducted following the same procedure as in Aydemir et al. [4]. We used a second-order accurate finite-difference scheme on a uniform spatial grid and implicit backward Euler discretization to simulate time-evolution. Similarly to Jones et al. [14] we performed a coordinate transformation to map the moving boundary domain to a fixed computational domain. The resulting system of non-linear equations was solved using a Newton–Raphson method.

In our simulation, we have used a uniform spatial discretization with 1250 grid points. For this discretization, the absolute error is less than  $2 \times 10^{-2}$ ; see Fig. 17a in Bruna and Breward (2014) [3]. At relatively short simulation times, far from the break-up times, the code converges without any difficulty. However, for longer simulation times, convergence problems were encountered as soon as  $h_{min}$  becomes inferior to two grid spacing ( $h \rightarrow 0$ ). The results remain reliable as long as the minimum film thickness does not get smaller than two grid spacing.

The results of the numerical simulations for the tear film thickness and the lipid concentration at three different stages during the eye opening phase are shown in Fig. 2. These results are similar to those shown in Fig. 4 of Aydemir et al. [4]. Fig. 2(a), (d) show the tear film thickness and the lipid concentration at early stages of the eye opening. The film thickness and the lipid concentration profiles are nearly parabolic, their minima occurring at almost the same location and continuously decreasing with time. At intermediate stages, the tear film and the lipid concentration accumulate at the menisci and evolve between the eyelids; see Fig. 2(b), (e). The later stage corresponds to the beginning of the interblink phase, during which the upper eyelid stops moving. The high lipid concentration and large curvature of tear film at the menisci induce Marangoni and capillary flows; see Fig. 2(f). These flows cause the tear film thickness to continue to evolve during the interblink phase.

In Fig. 3, we compare the evolutions of the tear film thickness,  $h$ , the lipid concentration,  $\Gamma$ , and the minimum film thickness,  $h_{min}$ , for both flat and spherical cornea surfaces. Vertical and horizontal positions of the cornea surface are considered. The latter position is not considered in the literature; however, it can be of interest for elderly persons, who may be in horizontal positions for relatively long periods of time. This category of persons is more likely to experience symptoms of tear film breakup or dry eye syndrome [23]. In Fig. 3, the first and second columns correspond to the cornea surfaces in vertical and horizontal positions, respectively. The figures compare the tear film thickness and the lipid concentration profiles



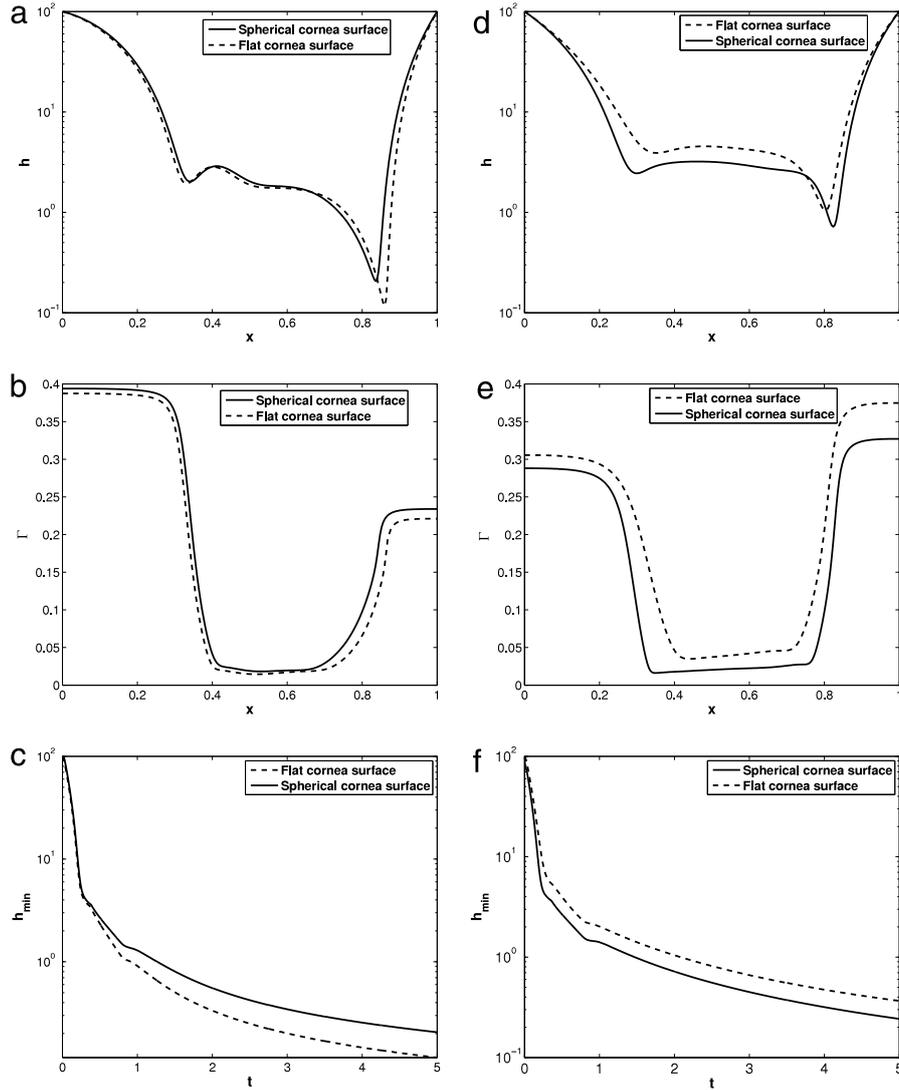
**Fig. 2.** Film thickness  $h$  (first column) and lipid concentration  $\Gamma$  (second column). First, second and third rows correspond to early, intermediate and late stages of the opening phase of the eye, respectively. The arrows indicate increasing time. The system parameters are  $\mathcal{H} = 100$ ,  $C = 7.87 \times 10^{-7}$ ,  $\mathcal{B} = 2.18 \times 10^4$  and  $\mathcal{M} = 1.75 \times 10^{-2}$ . (a) and (d) corresponds to time between 0 and 0.2 s. (b) and (e) corresponds to time between 0.2 and 0.792 s. (c) and (f) corresponds to time between 0.9 and 2 s.

at  $t = 5$  and depict the evolution of the minimum film thickness with time (up to  $t = 5$ ). For the cornea surface in a vertical position, the profiles of  $h$  and  $\Gamma$  for flat and spherical geometries are similar. However, for the cornea in a horizontal position, the profiles of  $h$  and  $\Gamma$  exhibit discrepancies. These discrepancies are due to gravity, which does not contribute to the tear film dynamics when the cornea is flat and placed in a horizontal position. However, gravity does influence the tear film dynamics through its  $g \cos \theta$  component when the cornea is spherical and placed in a horizontal position. The important result here is the difference between the thinning rates of the minimum film thicknesses,  $h_{\min}$ , for the two geometries. In the case of a spherical cornea placed in a vertical position, the minimum tear film thickness thins at a slower rate than does a flat cornea placed in a vertical position; see Fig. 3(c). This result is reversed when the corneas are in horizontal position; see Fig. 3(f).

The dynamics of the tear flow is the result of the competition of gravity and Marangoni and capillary forces only; inertia effects are

neglected. The Marangoni force drives the tears from the menisci towards the central region, while the capillary force sucks the tears from the central region to the menisci. The gravity force drains the tears volume down. This competition between forces results in the surface and bulk flows depicted in Figs. 4 and 5 for both vertical and horizontal positions of the cornea surface; respectively. The two figures show two distinct instants,  $t = 1$  and  $t = 2$ , within the interblink phase, which begins at approximately  $t = 0.792$ . Figs. 4 and 5 indicate that the tear film continues to move upward (positive velocities) near the lower eyelid. The present model, similarly to the one by Aydemir et al. [4], captures the upward Marangoni surface flow observed in vivo [14].

Fig. 4 shows that the surface and depth-averaged velocities are qualitatively similar. They exhibit clear discrepancies in the vicinity of the central region of the cornea, where the tear film drains towards the lower eyelid. Similarly, Fig. 5 compares the tear film surface and depth-averaged velocities over flat and spherical cornea geometries when these are placed in a horizontal position.



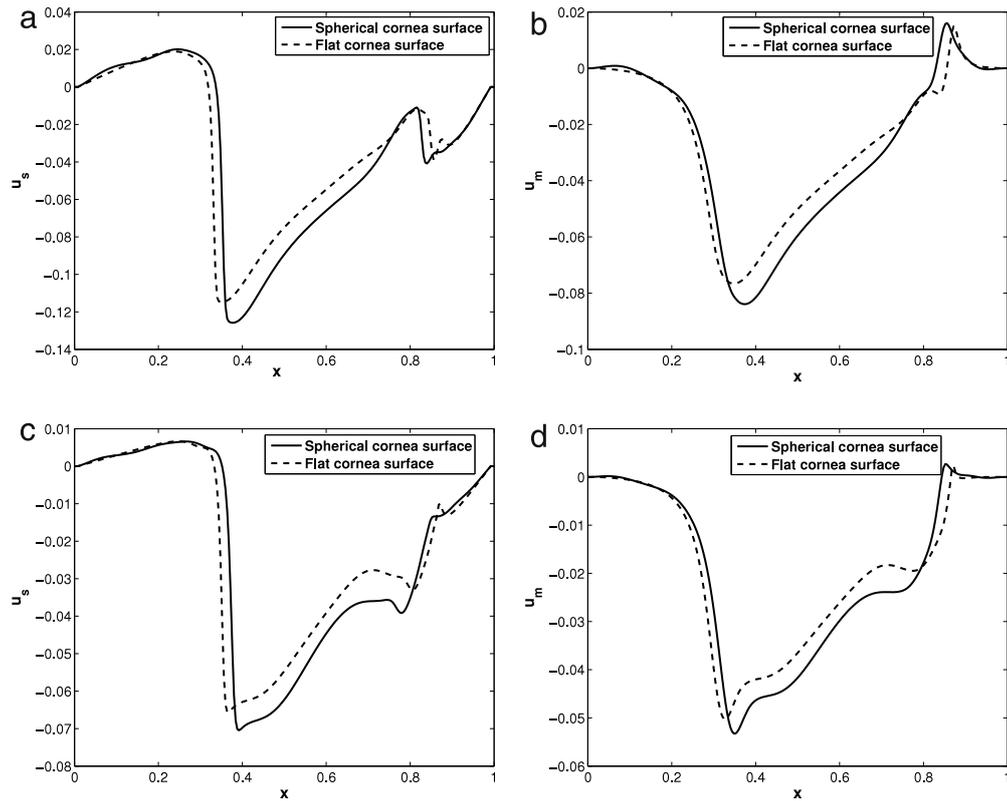
**Fig. 3.** Comparison between the tear film flow dynamics for flat and spherical cornea surfaces. The first column corresponds to a cornea surface in a vertical position while the second corresponds to a cornea surface in a horizontal position. (a) and (d) show tear film thickness  $h$  at  $t = 5$ . (b) and (e) show lipid concentration profile,  $L$ , at  $t = 5$ . (c) and (f) show evolution of minimum film thickness  $h_{\min}$  up to  $t = 5$ . The parameters of the simulations are  $\mathcal{H} = 100$ ,  $c = 7.87 \times 10^{-7}$ ,  $\mathcal{M} = 0.0175$ ,  $\mathcal{B} = 2.18 \times 10^4$ . In the case of a flat cornea surface placed in horizontal position,  $\mathcal{B} = 0$ .

The velocity profiles are quantitatively and qualitatively different. As indicated above, these discrepancies are due to the differences in the role of gravity in the two geometries. This affects the competition between the Marangoni and the capillary forces. The gravity force drains the tear film towards the lower eyelid, working against the Marangoni force, which tends to drive the flow towards the center or the region of lower concentration. Because of the absence of gravity, the upward surface velocity of the Marangoni flow near the lower eyelid is higher in the case of a flat cornea than in the case of a spherical cornea. Moreover, the extent of the upward tear surface flow is also wider in a flat geometry than in a spherical one.

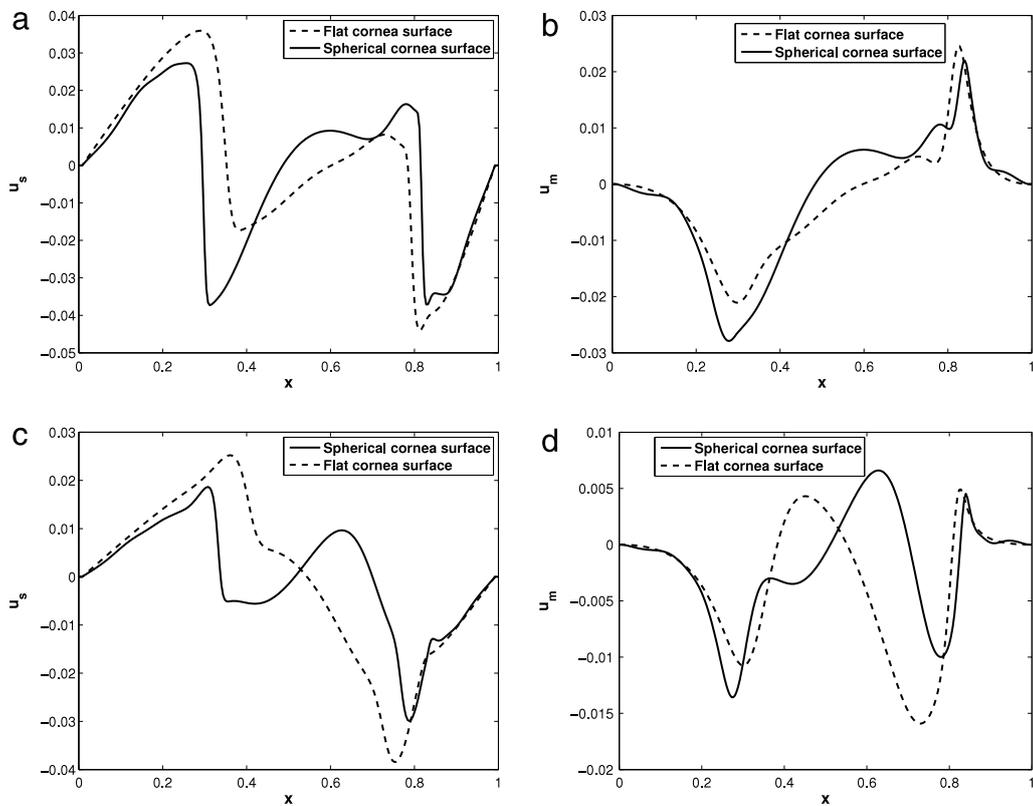
Fig. 6 depicts the influence of two fundamental parameters of the tear film dynamics, the capillary and Marangoni numbers, on the surface velocity of the tear film. In a vertical position, the variation of the capillary and Marangoni numbers has a weak influence on the surface velocities. The profiles are similar and the discrepancies between the surface velocities for flat and spherical geometries are relatively small. However, in a horizontal position, the discrepancies become significant. The curvature amplifies the discrepancies between the surface velocities because of the modification of the drainage due to gravity.

As in the study by Aydemir et al. [4], the tears volume is large because of the values assigned to the two parameters of the problem, namely  $L_{cl} = 2 \times 10^{-3}$  m and  $h^* = 10^{-3}$  m. We recall that the former is the effective position of the closed upper eyelid at  $t = 0$  while the latter is the height of the menisci. This choice resulted in the large average tear film thickness in the central region of the cornea surface. One could ask whether this large tear volume might overestimate the role of the gravity on the tear film thinning rate. To resolve this question, we conducted a simulation with reduced volume as in Bruna and Breward [3]. In this simulation, the value of  $L_{cl}$  is divided by 2 and  $h^*$  by 4, which come to divide the initial volume by 8. The results of the simulations conducted in the case of reduced tear volumes are shown in Fig. 7. The simulations were conducted under the same conditions as in Bruna and Breward [3] where the movement of the upper eyelid is given by:

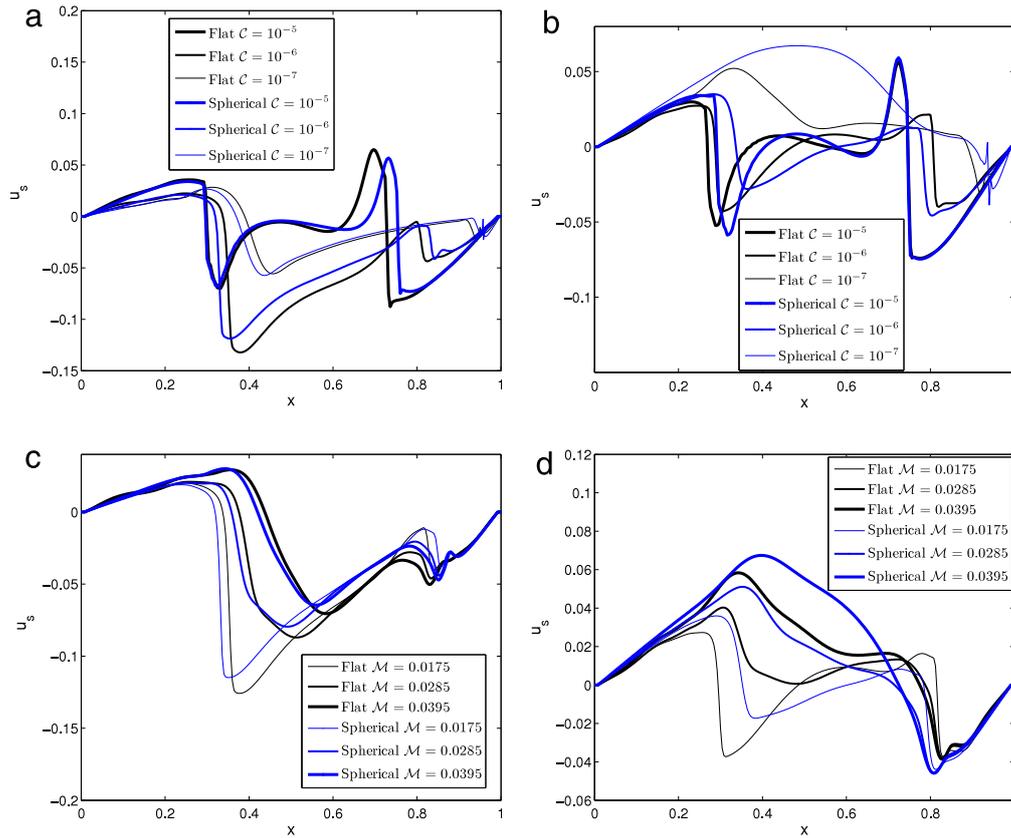
$$L(t) = \begin{cases} \lambda + (1 - \lambda) \left( \frac{t}{\Delta t_u} \right)^2 \\ \times \exp \left[ 1 - \left( \frac{t}{\Delta t_u} \right)^2 \right], & 0 \leq t \leq \Delta t_u, \\ 1, & t \geq \Delta t_u, \end{cases} \quad (42)$$



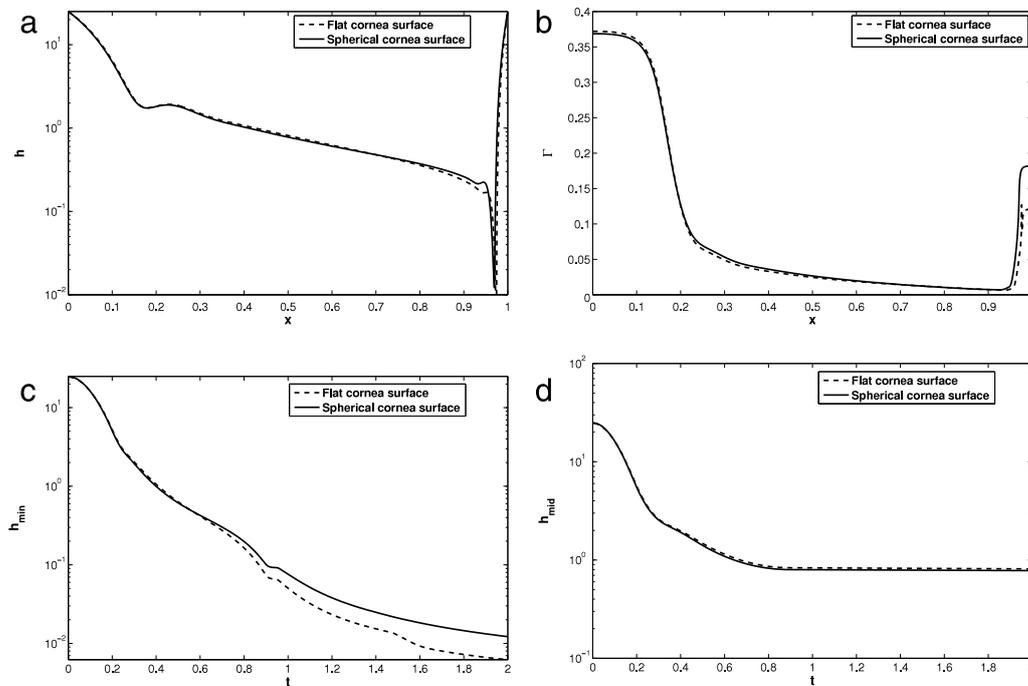
**Fig. 4.** Comparison between surface and depth-averaged velocities in the case of flat and spherical cornea surfaces in a vertical position (a) and (b)  $t = 1$  ( $t = 0.2272$  s). (c) and (d)  $t = 2$  ( $t = 0.454$  s). The system parameters are  $\mathcal{H} = 100$ ,  $c = 7.87 \times 10^{-7}$ ,  $B = 2.18 \times 10^4$  and  $\mathcal{M} = 0.0175$ .



**Fig. 5.** Comparison between surface and depth-averaged velocities in the case of flat and spherical cornea surfaces in a horizontal position (a) and (b)  $t = 1$  ( $t = 0.2272$  s). (c) and (d)  $t = 2$  ( $t = 0.2272$  s). The system parameters are  $\mathcal{H} = 100$ ,  $c = 7.87 \times 10^{-7}$ ,  $\mathcal{M} = 1.75 \times 10^{-2}$ , and  $B = 2.18 \times 10^4$  for a spherical cornea while  $B = 0$  is for a flat cornea.



**Fig. 6.** Influence of capillary and Marangoni flows on the surface velocity at  $t = 1$  ( $t = 0.2272$  s). (a) cornea surface in a vertical position, (b) cornea surface in a horizontal position with  $\mathcal{M} = 0.0175$ . (c) cornea surface in a vertical position, (d) cornea surface in a horizontal position with  $C = 7.87 \times 10^{-7}$ . The values of the other parameters are  $\mathcal{H} = 100$ , and  $\mathcal{B} = 2.18 \times 10^4$  for a spherical cornea surface while  $\mathcal{B} = 0$  for flat cornea surface in a horizontal position.



**Fig. 7.** Comparison between the tear film flow dynamics for flat and spherical cornea surfaces obtained under conditions of reduced tear volume as in Bruna and Breward [3]. (a) tear film thickness  $h$  at  $t = 2$  ( $t = 0.392$  s), (b) lipid concentration profile at  $t = 2$  ( $t = 0.392$  s)  $\Gamma$ , (c) evolution of minimum film thickness  $h_{min}$  up to  $t = 2$  ( $t = 0.392$  s), (d) evolution of the film thickness at the middle of the cornea surface up to  $t = 2$  ( $t = 0.392$  s). The parameters of the simulations are  $\mathcal{H} = 25$ ,  $C = 6.79 \times 10^{-7}$ ,  $\mathcal{M} = 1.5 \times 10^{-2}$ , and  $\mathcal{B} = 2.18 \times 10^4$ .

where  $\Delta t_u = 0.89658$  is the dimensionless opening time and  $\lambda = 0.1$  is the dimensionless effective initial opening of the eye; see Bruna and Breward [3] for details. The velocity of the upper eyelid is obtained by differentiating  $L(t)$  given above. With this reduced tear volume, the film thickness in the central region of the cornea is approximately eight microns. This value is higher than the typical height (less than  $5 \mu\text{m}$ ) found in the literature [24]. From the perspective of tear film breakup, the difference in the minimum tear film thicknesses between the predictions of flat and spherical approximation for the cornea surface is still significant; see Fig. 7c. This discrepancy remains significant even when the gravity is set to zero (results not shown here).

We tried to decrease the tear film height,  $h^*$ , at the menisci, in order to approach the experimental value of approximately  $60 \mu\text{m}$ . However, convergence problems were encountered; the minimum film thickness gets smaller than two points grid spacing and the tear film broke ( $h \rightarrow 0$ ) near the moving eyelid before the upstroke phase ended. We wonder whether Bruna and Breward [3] did not encounter a similar issue, which might explain their choice of  $h^* = 250 \mu\text{m}$  for their simulation.

In the opening phase, the curvature of the tear film is strong and the lipid concentration is high near the upper eyelid; see Fig. 2(h), (e). We recall that capillarity drains the tear film upwards towards the meniscus while the Marangoni and gravity flows tend to drain the tear film towards the center of the cornea. Then, in our simulations the capillarity may have overcome the Marangoni and gravity flows resulting in tear film breakup before the interblink phase started.

Fig. 7 compares the profiles of the tear film thickness and lipid concentration at  $t = 2$ , the minimum tear film thickness and the film thickness in the middle of the cornea surface evolutions up to  $t = 2$ . The results obtained for the flat and spherical cornea surfaces are similar. A discrepancy is found only for the minimum film thickness; see Fig. 7c. It is worth highlighting that the tear film thickness at the middle of the cornea did not show any significant discrepancy between the prediction of the flat and spherical approximations of the cornea surface; see Fig. 7d. This confirms the results of Braun et al. [21]; the curvature has almost no influence on the tear film thickness at the middle of the cornea. The influence of the curvature is significant only on  $h_{\min}$ , near the upper eyelid.

#### 4. Conclusion

In this paper we have generalized the model of Aydemir et al. [4] by approximating the cornea surface as spherical rather than flat. We have included the curvature in the model, which consists of a pair of coupled nonlinear partial differential equations for the aqueous layer thickness and the lipid surface concentration. This model is solved in the domain squeezed between a moving upper lid and a fixed lower lid. This study shows that, away from the upper eyelid, the influence of the curvature is weak. This confirms the results of Braun et al. [21]. However, the interplay of the curvature with gravity, capillarity and the concentration gradient of the polar lipid on the surface influences the thinning rate of the minimum film thickness, which occurs near the moving eyelid, and surface velocity.

#### Appendix A. Spherical and curvilinear coordinates

The curvilinear coordinates  $(x, y)$  depicted in Fig. 1 are related to spherical coordinates  $(r, \theta, \phi)$  as follows:

$$y = r - R_C, \quad x = \frac{\theta - \theta_0}{\kappa}, \quad (\text{A.1})$$

where  $r$  indicates the radial distance.  $\theta$  is the polar angle measured from a fixed zenith direction,  $\theta_0$  indicates the polar angle of the

lower eyelid, and  $\kappa = \frac{1}{R_C}$  is the geometric curvature. In our model, we consider only the two-dimensional and axisymmetric case, in which the azimuthal component of the velocity is zero and all variables are independent of the azimuthal angle  $\phi$ , which varies between 0 and  $2\pi$ . In our model, the tear film evolves over the range  $0 \leq x \leq L_{op}$  and  $0 \leq y \leq h^*$ . We recall that  $L_{op}$  and  $h$  are the distance between the eyelids when the eye is fully open and the dimensional pinned meniscus height, respectively.

In the following, we provide the definitions of the operators that allowed us to express the governing equations and the boundary conditions (1)–(8) in curvilinear coordinates. These definitions are derived using the relations between curvilinear and spherical coordinates. The velocity field components  $u$ , along the cornea surface, and  $v$ , along the normal direction, correspond to the velocity components,  $v_\theta$  and  $v_r$ , along the polar and radial directions in spherical coordinates, respectively.

The gradient vector operator  $\nabla$  is:

$$\left( \frac{1}{1 + \kappa y} \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right). \quad (\text{A.2})$$

The outward unit normal vector  $\mathbf{n}$ :

$$\mathbf{n} = \left( -\frac{h_x}{1 + \kappa h} \left[ 1 + \left( \frac{h_x}{1 + \kappa h} \right)^2 \right]^{-1/2}, \right. \\ \left. \left[ 1 + \left( \frac{h_x}{1 + \kappa h} \right)^2 \right]^{-1/2} \right). \quad (\text{A.3})$$

The unit tangent vector  $\mathbf{t}$ :

$$\mathbf{t} = \left( \left[ 1 + \left( \frac{h_x}{1 + \kappa h} \right)^2 \right]^{-1/2}, \right. \\ \left. \frac{h_x}{1 + \kappa h} \left[ 1 + \left( \frac{h_x}{1 + \kappa h} \right)^2 \right]^{-1/2} \right), \quad (\text{A.4})$$

where  $h_x$  indicates  $\frac{\partial h}{\partial x}$ .

The derivatives along the free surface are

$$\frac{\partial}{\partial s} = (1 + \kappa h)^{-1} \left[ 1 + \left( \frac{h_x}{1 + \kappa h} \right)^2 \right]^{-1/2} \frac{\partial}{\partial x}, \quad (\text{A.5})$$

$$\frac{\partial^2}{\partial s^2} = (1 + \kappa h)^{-2} \left[ 1 + \left( \frac{h_x}{1 + \kappa h} \right)^2 \right]^{-1} \frac{\partial^2}{\partial x^2}. \quad (\text{A.6})$$

The surface vector gradient  $\nabla_s$  defined by  $\nabla_s = \nabla - \mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \nabla)$  is given by:

$$\nabla_s = \left[ 1 + \left( \frac{h_x}{1 + \kappa h} \right)^2 \right]^{-1/2} \frac{\frac{\partial}{\partial x}}{1 + \kappa h} \mathbf{t}; \quad (\text{A.7})$$

taking into account equation (A.5), the surface gradient is written:

$$\nabla_s = \frac{\partial}{\partial s} \mathbf{t}. \quad (\text{A.8})$$

The curvature of the free surface tear film is given by

$$\tilde{\kappa} = \frac{\left[ \frac{2\kappa}{1 + \kappa h} + \frac{3\kappa(h_x)^2}{(1 + \kappa h)^3} + \frac{h_{xx}}{(1 + \kappa h)^2} - \frac{\kappa h_x}{(1 + \kappa h)^2} \left( 1 + \left( \frac{h_x}{1 + \kappa h} \right)^2 \right) \cot \theta \right]}{\left[ 1 + \left( \frac{h_x}{1 + \kappa h} \right)^2 \right]^{3/2}}. \quad (\text{A.9})$$

The governing equations, the boundary and initial conditions (1)–(8), (12), written first in spherical coordinates, are rewritten in curvilinear coordinates using the relations (A.1)–(A.7) above. These are

$$\tilde{\kappa} = \frac{\frac{2\kappa}{1+\epsilon\kappa h} + \frac{3\kappa(\epsilon h_x)^2}{(1+\epsilon\kappa h)^3} + \frac{\epsilon h_{xx}}{(1+\epsilon\kappa h)^2} - \frac{\epsilon\kappa h_x}{(1+\epsilon\kappa h)^2} \left[ 1 + \left( \frac{\epsilon h_x}{1+\epsilon\kappa h} \right)^2 \right] \cot(\kappa x + \theta_0)}{\left[ 1 + \left( \frac{\epsilon h_x}{1+\epsilon\kappa h} \right)^2 \right]^{3/2}}. \quad (\text{A.13})$$

Box I.

$$\begin{aligned} & r_{\kappa h}^2 \left( 1 + \frac{\epsilon^2 h_x^2}{r_{\kappa h}^2} \right)^{\frac{1}{2}} \Gamma_t + r_{\kappa h} (u_t \Gamma)_x - \frac{1}{\text{Pe} \left( 1 + \frac{\epsilon^2 h_x^2}{r_{\kappa h}^2} \right)^{\frac{1}{2}}} \Gamma_{xx} \\ &= \frac{\epsilon \left( 2\kappa r_{\kappa h} + 3\kappa \frac{\epsilon^2 h_x^2}{r_{\kappa h}} - \epsilon h_{xx} - \epsilon\kappa h_x \left( 1 + \frac{\epsilon^2 h_x^2}{r_{\kappa h}} \right) \cot \theta \right) \left( v - \frac{h_x}{r_{\kappa h}} u \right) \Gamma}{\left( 1 + \frac{\epsilon^2 h_x^2}{r_{\kappa h}^2} \right)^{\frac{3}{2}}}, \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

Box II.

converted afterwards to a nondimensional form using the scaling in (13). We dropped the primes in the notations for convenience.

$$u_x + r_{\kappa} v_y + 2\epsilon\kappa v + \kappa \cot \theta u = 0, \quad (\text{A.10})$$

$$\begin{aligned} \epsilon^2 \text{Re} \left( r_{\kappa} u_t + uu_x + r_{\kappa} v u_y + \epsilon\kappa u v \right) &= -p_x - r_{\kappa} \text{St} \sin \theta \\ &+ \left( r_{\kappa} u_{yy} + 2\epsilon\kappa u_y + \epsilon^2 \frac{\kappa \cot \theta}{r_{\kappa}} u_x \right. \\ &\left. + \epsilon^2 \frac{u_{xx}}{r_{\kappa}} - \epsilon^2 \frac{\kappa^2}{r_{\kappa} \sin^2 \theta} + 2\epsilon^3 \frac{\kappa}{r_{\kappa}} v_x \right), \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

$$\begin{aligned} \epsilon^4 \text{Re} \left( r_{\kappa} v_t + uv_x + r_{\kappa} v v_y - \frac{\kappa}{\epsilon} u^2 \right) &= -r_{\kappa} p_y + \epsilon r_{\kappa} \text{St} \cos \theta \\ &+ \epsilon^2 \left( r_{\kappa} v_{yy} + 2\epsilon\kappa v_y + \epsilon^2 \frac{v_{xx}}{r_{\kappa}} + \epsilon^2 \frac{\kappa \cot \theta}{r_{\kappa}} v_x \right. \\ &\left. - 2\epsilon^2 \frac{\kappa^2}{r_{\kappa}} v - 2\epsilon \frac{\kappa^2 \cot \theta}{r_{\kappa}} u - 2\epsilon \frac{\kappa}{r_{\kappa}} u_x \right). \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

The dimensionless curvature of the tear film free surface is given in Eq. (A.13) (see Box I).

This curvature, expanded in terms of a Taylor series with respect to aspect ratio parameter  $\epsilon$ , becomes

$$\tilde{\kappa} = 2\kappa - 2\epsilon\kappa^2 h - \epsilon h_{xx} - \epsilon\kappa h_x \cot(\kappa x + \theta_0) + O(\epsilon^2). \quad (\text{A.14})$$

We recall that  $r_{\kappa} = 1 + \epsilon\kappa y$  and  $\text{St} = \frac{\rho g l_{\text{op}}^2 \epsilon^2}{\mu U}$ .  $r_{\kappa h} = r_{\kappa}|_{y=h} = 1 + \epsilon\kappa h(x, t)$  and  $\text{Re} = \frac{\rho U l_{\text{op}}}{\mu}$  is the Reynolds number.

The transport equation of the polar lipid (3) in dimensionless form is given in Eq. (A.15) (see Box II), where  $\text{Pe} = \frac{U l_{\text{op}}}{D}$  is the Péclet number and the tangential velocity  $u_t$  at the surface is given by:

$$u_t = \left[ 1 + \frac{\epsilon^2 h_x^2}{r_{\kappa h}^2} \right]^{-\frac{1}{2}} \left( u + \frac{\epsilon^2 h_x}{r_{\kappa h}} v \right). \quad (\text{A.16})$$

The boundary condition at  $y = h(x, t)$  are:

$$\begin{aligned} (r_{\kappa h}) v &= (r_{\kappa h}) h_t + u h_x, \\ &- \left( \frac{\epsilon^2}{\text{Ca}} - \epsilon^2 \text{Ma} \Gamma \right) \\ &\times \frac{\left( \frac{2\kappa}{r_{\kappa h}} + \frac{3\kappa \epsilon^2 h_x^2}{r_{\kappa h}^2} - \frac{\epsilon h_{xx}}{r_{\kappa h}} - \frac{\epsilon\kappa h_x}{r_{\kappa h}^2} \left( 1 + \frac{\epsilon^2 h_x^2}{r_{\kappa h}} \right) \cot \theta \right)}{\left( 1 + \frac{\epsilon^2 h_x^2}{r_{\kappa h}^2} \right)^{\frac{3}{2}}} \\ &= -p + 2\epsilon^2 \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

$$\times \left\{ \frac{v_y + \frac{\epsilon^2 h_x^2}{r_{\kappa h}^3} (u_x - \epsilon\kappa v) - \frac{h_x}{r_{\kappa h}^2} (r_{\kappa h} u_y + \epsilon^2 v_x - \epsilon\kappa u)}{1 + \frac{\epsilon^2 h_x^2}{r_{\kappa h}^2}} \right\}, \quad (\text{A.18})$$

$$\begin{aligned} & \frac{2\epsilon}{r_{\kappa h}} (r_{\kappa h} v_y - u_x - \epsilon\kappa v) h_x + (r_{\kappa h} u_y + \epsilon^2 v_x - \epsilon\kappa u) \left( 1 - \frac{\epsilon^2 h_x^2}{r_{\kappa h}^2} \right) \\ &= - \frac{\epsilon \text{Ma} \Gamma_x}{\left( 1 + \frac{\epsilon^2 h_x^2}{r_{\kappa h}^2} \right)^{1/2}}. \end{aligned} \quad (\text{A.19})$$

$\text{Ca} = \frac{\mu U}{\gamma_0}$  and  $\text{Ma} = \frac{RT \Gamma^*}{\mu U}$  are the capillary and Marangoni numbers, respectively.

The boundary conditions at  $y = 0$  are:

$$x = 0, \quad \bar{u} = 0, \quad u_s = 0, \quad h = \mathcal{H}. \quad (\text{A.20})$$

$$x = L(t), \quad \bar{u} = \dot{L}, \quad u_s = \dot{L}, \quad h = \mathcal{H}, \quad (\text{A.21})$$

where  $\mathcal{H} = \frac{h^*}{L_{\text{op}}}$ .  $L(t)$  is the opening length of the upper eyelid in nondimensional given in (41). The initial conditions are:

$$L(0) = \delta, \quad h(x, 0) = \mathcal{H}, \quad \Gamma(x, 0) = 1, \quad (\text{A.22})$$

where  $\delta = \frac{L_{\text{cl}}}{L_{\text{op}}}$ . We recall that  $L_{\text{cl}}$  is the effective position of the closed (or partially closed) of upper eyelid at  $t = 0$ .

## Appendix B. Volume conservation

Tear element volume is

$$dV = 2\pi R_C h \sin(\theta) dx. \quad (\text{B.1})$$

The initial tear volume is:

$$V_0 = 2\pi R_C h^* \int_0^{L_{\text{cl}}} \sin(\kappa x + \theta_0) dx. \quad (\text{B.2})$$

The tear volume at any given time is

$$V = 2\pi R_C \int_0^{L(t)} [h \sin(\kappa x + \theta_0)] dx. \quad (\text{B.3})$$

The temporal derivative of the tear volume is

$$\frac{dV}{dt} = 2\pi R_C \frac{d}{dt} \int_0^{L(t)} [h \sin(\kappa x + \theta_0)] dx. \quad (B.4)$$

We proceed with the following change of variables

$$x = L(t)\eta, \quad \text{and} \quad h(x, t) = H(\eta, t), \quad (B.5)$$

where  $0 \leq \eta \leq 1$ . Then, the derivative (B.4) becomes

$$\frac{dV}{dt} = 2\pi R_C \int_0^1 \frac{d}{dt} [LH(\eta, t) \sin(\kappa L\eta + \theta_0)] d\eta. \quad (B.6)$$

To show that the boundary conditions satisfy the conservation of volume, let us write the kinematic equation (13) in the fixed domain  $0 \leq \eta \leq 1$ . To do transform first  $h_t$ .

$$h_t = H_t + H_\eta \frac{\partial \eta}{\partial t} = H_t + H_\eta \left( -\frac{x\dot{L}}{L^2} \right) = H_t - \frac{\dot{L}}{L} \eta H_\eta. \quad (B.7)$$

Using (B.5) and (B.7) the Eq. (35) becomes, after some calculations

$$\begin{aligned} & \left[ LH \sin(\kappa L\eta + \theta_0) \right]_t - \dot{L} \left[ \eta H \sin(\kappa L\eta + \theta_0) \right]_\eta \\ & - \left[ \frac{\mathcal{M}}{2L} H^2 \Gamma_\eta \sin(\kappa L\eta + \theta_0) \right. \\ & - \frac{\mathcal{C}}{3L^3} H^3 \sin(\kappa L\eta + \theta_0) \\ & \times \left( \kappa^2 L^2 H_\eta + H_{\eta\eta\eta} + \kappa L H_{\eta\eta} \cot(\kappa L\eta + \theta_0) \right. \\ & \left. \left. - \kappa^2 L^2 H_\eta \cot^2(\kappa L\eta + \theta_0) - \mathcal{B} L^3 \sin(\kappa L\eta + \theta_0) \right) \right]_\eta = 0. \quad (B.8) \end{aligned}$$

The integration of (B.8) with respect to the variable  $\eta$  gives:

$$\begin{aligned} & \int_0^1 [LH \sin(\kappa L\eta + \theta_0)]_t d\eta = \dot{L} \mathcal{H} \sin(\kappa L + \theta_0) \\ & + \frac{\mathcal{H}^2 \mathcal{M}}{2L} \sin(\kappa L + \theta_0) [\Gamma_\eta]_{\eta=1} - \frac{\mathcal{H}^2 \mathcal{M}}{2L} \sin(\theta_0) [\Gamma_\eta]_{\eta=0} \\ & + \frac{\mathcal{C} \mathcal{B} \mathcal{H}^3}{3} (\sin^2(\kappa L + \theta_0) - \sin^2(\theta_0)) \\ & - \frac{\mathcal{C} \mathcal{H}^3}{3L^3} \sin(\kappa L + \theta_0) \left[ \kappa^2 L^2 H_\eta + H_{\eta\eta\eta} + \kappa L H_{\eta\eta} \right. \\ & \times \cot(\kappa L + \theta_0) - \kappa^2 L^2 H_\eta \cot^2(\kappa L + \theta_0) \left. \right]_{\eta=1} \\ & + \frac{\mathcal{C} \mathcal{H}^3}{3L^3} \sin(\theta_0) \left[ \kappa^2 L^2 H_\eta + H_{\eta\eta\eta} + \kappa L H_{\eta\eta} \cot(\theta_0) \right. \\ & \left. - \kappa^2 L^2 H_\eta \cot^2(\theta_0) \right]_{\eta=0}. \quad (B.9) \end{aligned}$$

The boundary conditions are

$$\left[ \kappa^2 L^2 H_\eta + H_{\eta\eta\eta} + \kappa L H_{\eta\eta} \cot(\theta_0) - \kappa^2 L^2 H_\eta \cot^2(\theta_0) - \mathcal{B} L^3 \sin(\theta_0) \right]_{\eta=0} = 0, \quad (B.10)$$

$$[\Gamma_\eta]_{\eta=0} = 0, \quad (B.11)$$

$$\left[ \kappa^2 L^2 H_\eta + H_{\eta\eta\eta} + \kappa L H_{\eta\eta} \cot(\kappa L + \theta_0) - \kappa^2 L^2 H_\eta \cot^2(\kappa L + \theta_0) - \mathcal{B} L^3 \sin(\kappa L + \theta_0) \right]_{\eta=1} = \frac{6\dot{L}L^3}{\mathcal{C}\mathcal{H}^2}, \quad (B.12)$$

$$[\Gamma_\eta]_{\eta=1} = \frac{2\dot{L}L}{\mathcal{M}\mathcal{H}}. \quad (B.13)$$

Using the boundary conditions (B.10)–(B.13) in Eq. (B.9), we obtain:

$$\int_0^1 [LH \sin(\kappa L\eta + \theta_0)]_t d\eta = 0. \quad (B.14)$$

Then, tear film volume is conserved.

## References

- [1] F.J. Holly, M.A. Lemp, Tear physiology and dry eyes, *Surv. Ophthalmol.* 22 (1977) 69–87.
- [2] M. Lemp, C. Baudoin, J. Baum, M. Dogru, G. Foulks, et al., The definition and classification of dry eye disease: Report of the definition and classification subcommittee of the international dry eye workshop (2007), *Ocul. Surf.* 5 (2) (2007) 75–92.
- [3] M. Bruna, C.J.W. Beward, The influence of non-polar lipids on tear film dynamics, *J. Fluid Mech.* 746 (2014) 565–605.
- [4] E. Aydemir, C. Beward, T. Witelski, *Bull. Math. Biol.* 73 (6) (2011) 1171–1201.
- [5] R.J. Braun, A.D. Fitt, Modeling the drainage of the precorneal tear film after a blink, *Math. Med. Biol.* 20 (2003) 1–28.
- [6] M.B. Jones, C.P. Please, D.L.S. McElwain, G.R. Fulford, A.P. Roberts, M.J. Collins, Dynamics of tear film deposition and drainage, *Math. Med. Biol.* 22 (2005) 265–288.
- [7] A. Heryudono, R.J. Braun, T.A. Driscoll, K.L. Maki, L.P. Cook, P.E. King-Smith, Single-equation models for the tear film in a blink cycle: realistic lid motion, *Math. Med. Biol.* 24 (4) (2007) 347–377.
- [8] R.J. Braun, Dynamics of the tear film, *Annu. Rev. Fluid Mech.* 44 (2012) 267–297.
- [9] L. Li, R.J. Braun, K.L. Maki, W.D. Henshaw, P.E. King-Smith, Tear film dynamics with evaporation, wetting, and time-dependent flux boundary condition on an eye-shaped domain, *Phys. Fluids* 26 (5) (2014) 052101.
- [10] J. Tiffany, Viscoelastic properties of human tears and polymer solutions, in: D. Sullivan (Ed.), *Lacrimal Gland, Tear Film, and Dry Eye Syndromes*, in: *Advances in Experimental Medicine and Biology*, vol. 350, Springer US, 1994, pp. 267–270.
- [11] H. Wong, I. Fatt, C. Radke, Deposition and thinning of the human tear film, *J. Colloid Interface Sci.* 184 (1) (1996).
- [12] A. Sharma, E. Ruckenstein, An analytical nonlinear theory of thin film rupture and its application to wetting films, *J. Colloid Interface Sci.* 113 (2) (1986) 456–479.
- [13] A. Sharma, E. Ruckenstein, The role of lipid abnormalities, aqueous and mucus deficiencies in the tear film breakup, and implications for tear substitutes and contact lens tolerance, *J. Colloid Interface Sci.* 111 (1) (1986) 8–34.
- [14] M.B. Jones, D.L.S. McElwain, G.R. Fulford, M.J. Collins, A.P. Roberts, The effect of the lipid layer on tear film behavior, *Bull. Math. Biol.* 68 (2006) 1355–1381.
- [15] R.J. Braun, P.E. King-Smith, Model problems for the tear film in a blink cycle: Single equation models, *J. Fluid Mech.* 586 (2007) 465–490.
- [16] Y.L. Zhang, O.K. Matar, R.V. Craster, Rupture analysis of the corneal mucus layer of the tear film, *Mol. Simul.* 30 (2–3) (2004) 167–172.
- [17] Y.L. Zhang, O.K. Matar, R.V. Craster, Analysis of tear film rupture: effect of non-Newtonian rheology, *J. Colloid Interface Sci.* 262 (1) (2003) 130–148.
- [18] R.E. Berger, S. Corrsin, A surface tension gradient mechanism for driving the pre-corneal tear film after a blink, *J. Biomech.* 7 (3) (1974) 225–238.
- [19] M.S.R. Gorla, R.S.R. Gorla, Nonlinear theory of tear film rupture, *J. Biomech. Eng.* 122 (5) (2000) 498–503.
- [20] M.S.R. Gorla, R.S.R. Gorla, Rheological effects on tear film rupture, *Int. J. Fluid Mech. Res.* 31 (6) (2004) 552–562.
- [21] R.J. Braun, R. Usha, G. McFadden, T. Driscoll, L. Cook, P. King-Smith, Thin film dynamics on a prolate spheroid with application to the cornea, *J. Eng. Math.* 73 (1) (2012) 121–138.
- [22] D. Gatinel, M. Haouat, T. Hoang-Xuan, A review of mathematical descriptors of corneal asphericity, *J. Fr. Ophthalmol.* 1 (2002) 81–90.
- [23] M. Ozdemir, H. Temizdemir, A review of mathematical descriptors of corneal asphericity, *Eye* 24 (2010) 79–83.
- [24] E. King-Smith, B. Fink, R. Hill, K. Koelling, J. Tiffany, The thickness of the tear film, *Curr. Eye Res.* 29 (4–5) (2004) 357–368.

# Bibliographie

- [1] E. Aydemir, C.J.W. Breward, and T.P. Witelski. The effect of polar lipids on tear film dynamics. *Bull. Math. Biol.*, 73 (6) :1171–1201, 2011.
- [2] R. E. Berger and Stanley Corrsin. A surface tension gradient mechanism for driving the pre-corneal tear film after a blink. *J of Biomech*, 7 (3) :225 – 238, 1974.
- [3] A. BERKE and S. MUELLER. The kinetics of lid motion and its effects on the tear film. *Advances in Experimental Medicine and Biology*, 438 :417–424, 1998.
- [4] R.J. Braun. Dynamics of the tear film. *Annu Rev Fluid Mech*, 44 :267–297, 2012.
- [5] R.J. Braun and A.D. Fitt. Modelling drainage of the precorneal tear film after a blink. *Math. Med. Biol.*, 20(1) :1–28, 2003.
- [6] R.J. Braun and P.E. King-Smith. Model problems for the tear film in a blink cycle : Single equation models. *J. Fluid Mech.*, 586 :465–490, 2007.
- [7] R.J. Braun, R. Usha, G.B. McFadden, T.A. Driscoll, L.P. Cook, and P.E. King-Smith. Thin film dynamics on a prolate spheroid with application to the cornea. *J Eng Math*, 73(1) :121–138, 2011.
- [8] A. J. Bron, J.M. TIFFANY, S.M. GOUVEIA, N. YOKOI, and L.W. VOON. Functional aspects of the tear film lipid layer. *Exp. Eye Res*, 78 (3) :347–360, 2004.
- [9] A.J. Bron and al. Tfos dewes ii pathophysiology report. *The Ocular Surface*, 15 :438 – 510, 2017.
- [10] M. Bruna and C.J.W. Breward. The influence of non-polar lipids on tear film dynamics. *J. Fluid Mech.*, 746 :565–605, 2014.
- [11] J. Chen, K. B. Green Church, and K. K. Nichols. Shotgun lipidomic analysis of human meibomian gland secretions with electrospray ionization tandem mass spectrometry. *Invest. Ophthalmol. Vis. Sci.*, 51 (12) :6220 – 6231, 2010.

- [12] M. Collins, R. Seeto, L. Campbell, and M. Ross. Blinking and corneal sensitivity. *Acta Ophthalmol. (Copenh)*, 67 :525–531, 1989.
- [13] MJ. Collins, K. Kloevekorn-Norgall, T. Buehren, SC. Voetz, and Lingelbach. Regression of lid-induced corneal topography changes after reading. *Optom Vis Sci*, 82 :843–849, 2005.
- [14] J.P. Craig and A. Tomlinson. Importance of the lipid layer in human tear film stability and evaporation. *Optom. Vis. Sci.*, 74(1) :8–13, 1997.
- [15] T. Hoang-Xuan D. Gatinel, M. Haouat. A review of mathematical descriptors of corneal asphericity. *J Fr Ophtalmol.*, 25(1) :81–90, 2002.
- [16] J. DIECKOW and P. ARGUESO. *The human tear film. In Ocular Surface : Anatomy and Physiology, Disorders and Therapeutic Care.* CRC Press, 2012.
- [17] MG. Doane. Interaction of eyelids and tears in corneal wetting and the dynamics of the normal human eyeblink. *Am. J. Ophthalmol*, 89(4) :507–516, 1980.
- [18] N. Ehlers. The precorneal film. biomicroscopical, histological and chemical investigations. *Acta Ophthalmol Suppl*, 1 :81 – 134, 1965.
- [19] I. Fatt and B. Weissman. *Physiology of the Eye : An Introduction to the Vegetative Functions.* Butterworth-Heinemann, 2nd ed., 1992.
- [20] D. Gatinel, M. Haouat, and T. Hoang-Xuan. *Modelling and Analysis of Ophthalmic Fluid Dynamics.* PhD thesis, THE UNIVERSITY OF LEEDS, 2014.
- [21] I. K. Gipson. Distribution of mucins at the ocular surface. *Exp. Eye Res*, 78 (3) :379 – 388, 2004.
- [22] TR. Golding, AS. Bruce, and JC. Mainstone. Relationship between tear-meniscus parameters and tear-film breakup. *Cornea*, 16(6) :649–661, 1997.
- [23] Madhu Sudan Reddy Gorla and Rama Subba Reddy Gorla. Nonlinear theory of tear film rupture. *J of Biomech*, 122 (5) :498–503, 2000.
- [24] Madhu Sudan Reddy Gorla and Rama Subba Reddy Gorla. Rheological effects on tear film rupture. *Int. J. Fluid Mech. Res.*, 31 (6) :552–562, 2004.
- [25] A. Heryudono, R. J. Braun, T. A. Driscoll, K. L. Maki, L. P. Cook, and P. E. King-Smith. Single-equation models for the tear film in a blink cycle : realistic lid motion. *Math. Med. Biol.*, 24 (4) :347–377, 2007.
- [26] RR. Hodges, JA. Bair, RB. Carozza, D. Li, MA. Shatos, and DA. Dartt. Signaling pathways used by egf to stimulate conjunctival goblet cell secretion. *Exp Eye Res*, 103 :99 – 113, 2012.

- [27] F. J. Holly and M. A. Lemp. Tear physiology and dry eyes. *Surv Ophthalmol*, 22 (2) :69 – 87, 1977.
- [28] Huaxiong Huang, Ming-Chih Lai, and Hsiao-Chieh Tseng. A parametric derivation of the surfactant transport equation along a deforming fluid interface. *Front. Appl. Comput. Math.*, 2008.
- [29] M. B. Jones, C. P. Please, D. L. S. McElwain, G. R. Fulford G. R., A. P. Roberts, and M. J. Collins. Dynamics of tear film deposition and draining. *Math. Med. Biol.*, 22 (3) :265 – 288, 2005.
- [30] M.B. Jones, G.R. Fulford, CP Please, DL McElwain, and MJ. Collins. Elastohydrodynamics of the eyelid wiper. *Bull Math Biol*, 70 (2) :323 – 343, 2008.
- [31] M.B. Jones, D. L. S. McElwain, G. R. Fulford, M. J. Collins, and A. P. Roberts. The effect of the lipid layer on tear film behaviour. *Bull. Math. Biol.*, 68 (6) :1355 – 1381, 2006.
- [32] N. Winter Katlyn, M. Anderson Daniel, and R.J. Braun. A model for wetting and evaporation of a post-blink precorneal tear film. *Math. Med. Biol.*, 27 (3) :211–225, 2010.
- [33] Ewen King-Smith, Barbara Fink, Richard Hill, Kurt Koelling, and John Tiffany. The thickness of the tear film. *Current Eye Research*, 29 (4-5) :357–368, 2004.
- [34] P.E. King-Smith, J.J. Nichols, K.K. Nichols, B.A. Fink, and R.J. Braun. Contributions of evaporation and other mechanisms to tear film thinning and break-up. *Optom Vis Sci*, 85 (8) :623–630, 2008.
- [35] M.A. Lemp. The definition and classification of dry eye disease. *Ocul Surf.*, 5 (2) :75–92, 2007.
- [36] Li. Longfei, R. J. Braun, K. L. Maki, W. D. Henshaw, and P. E. King-Smith. Tear film dynamics with evaporation, wetting, and time-dependent flux boundary condition on an eye-shaped domain. *Physics of Fluids*, 26 (5) :1171–1201, 2014.
- [37] P.A. Lozato, P.J. Pisella, and C. Baudouin. Phase lipidique du film lacrymal :physiologie et pathologie. *J. Fr. Ophthalmol*, 24 (6) :643–658, 2001.
- [38] J.C. Mainstone, A.S. Bruce, and T.R. Golding. Tear meniscus measurement in the diagnosis of dry eye. *Curr. Eye Res.*, 15 (6) :653–661, 1996.
- [39] W. Mathers. Evaporation from the ocular surface. *Exp. Eye Res.*, 78(3) :389–394, 2004.
- [40] D. Miller. Tear dynamics and dry eye. *Prog Retin Eye Res*, 82 :368–371, 1969.
- [41] S. Mishima, A. Gasset, S. D. Jr. Klyce, and J. L. Baum. Determination of tear volume and tear flow. *Investig. Ophthalmol. Vis. Sci.*, 5 :264–276, 1966.

- [42] S. Mishima and D.M. Maurice. The oily layer of the tear film and evaporation from the corneal surface. *Exp. Eye Res.*, 1(1) :39–45, 1961.
- [43] B.A. Nichols, M.L. Chiappino, and C.R. Dawson. Demonstration of the mucous layer of the tear film by electron microscopy. *Invest. Ophthalmol. Vis. Sci.*, 26(4) :464–473, 1985.
- [44] M. Ozdemir and H. Temizdemir. Age-and gender-related tear function changes in normal population. *Eye*, 24(1) :79–83, 2010.
- [45] J.C. Pandit, B. Nagyova, A.J. Bron, and J.M. Tiffany. Physical properties of stimulated and unstimulated tears. *Exp Eye Res*, 68 (2) :247 – 253, 1999.
- [46] H. Pult, D.R. Korb, P.J. Murphy, B.H. Riede-Pult, and C. Blackie. A new model of central lid margin apposition and tear film mixing in spontaneous blinking. *Cont Lens Anterior Eye*, 38 (3) :173 – 180, 2015.
- [47] H. Pult, S.G. Tosatti, N.D. Spencer, J.M. Asfour, M. Ebenhoch, and P.J. Murphy. Spontaneous blinking from a tribological viewpoint. *Ocul Surf*, 13 (3) :236 – 249, 2015.
- [48] S. Read, M. Collins, L. Carney, and R. Franklin. The topography of the central and peripheral cornea. *Invest. Ophthalmol. Vis. Sci.*, 47(4) :1404–1415, 2006.
- [49] R. Valery Roy, A.J. Roberts, and M.E. Simpson. A lubrication model of coating flows over a curved substrate in space. *J. Fluid Mech.*, 454 :235– 261, 2002.
- [50] A. Sharma and E. Ruckenstein. An analytical nonlinear theory of thin film rupture and its application to wetting films. *J. Colloid Interface Sci*, 113 (2) :456–479, 1986.
- [51] A. Sharma and E. Ruckenstein. The role of lipid abnormalities, aqueous and mucus deficiencies in the tear film breakup, and implications for tear substitutes and contact lens tolerance. *J. Colloid Interface Sci*, 111 (1) :8–34, 1986.
- [52] H. A. Stone. A simple derivation of the time-dependent convective-diffusion equation for surfactant transport along a deforming interface. *Physics of Fluids*, 2 :111–112, 1990.
- [53] J.M. Tiffany. Viscoelastic properties of human tears and polymer solutions. In David A. Sullivan, editor, *Lacrimal Gland, Tear Film, and Dry Eye Syndromes*, volume 350 of *Advances in Experimental Medicine and Biology*, pages 267–270. Springer US, 1994.
- [54] J.M. Tiffany, A.J. Bron, F. Mossa, and S. Dikstein. Delivery of meibomian oil using the clinical meibometer. *Adv Exp Med Biol*, 438 :333–338, 1998.

- [55] J.M. Tiffany and J.K.G. Dart. Normal and abnormal functions of meibomian secretion. *R. Soc. Med. Intl Congr. Symp.*, 40 :1061 – 1064, 1981.
- [56] J.M. Tiffany, N. Winter, and G. Bliss. Tear film stability and tear surface tension. *Curr. Eye Res.*, 8 (5) :507 – 515, 1989.
- [57] A. Tomlinson, A.J. Bron, D.R. Korb, S. Amano, J.R. Paugh, E.I. Pearce, R. Yee, , N. Yokoi, R. Arita, and M. Dogru. The international workshop on meibomian gland dysfunction : Report of the diagnosis subcommittee. *Invest. Ophthalmol. Vis.*, 52(4) :2006–2049, 2011.
- [58] A. Tomlinson and S. Khanal. Assessment of tear film dynamics : quantification approach. *The Ocular Surface*, 3(2) :81–95, 2005.
- [59] K. Tsubota. Measurement of the surface tension of tears. *Arch. Ophthalmol.*, 17 :565–596, 1998.
- [60] H. Wong, I. Fatt, and C.J. Radke. Deposition and thinning of the human tear film. *J. Colloid Interface Sci*, 184 (1) :44–51, 1996.
- [61] Zhang, Yong Liang, Matar, K. Omar, and Richard V. Craster. Rupture analysis of the corneal mucus layer of the tear film. *Molecular Simulation*, 30 :167–172, 2004.
- [62] Yong Liang Zhang, Richard V. Craster, and Omar K. Matar. Surfactant driven flows overlying a hydrophobic epithelium : film rupture in the presence of slip. *J. Colloid Interface Sci*, 264 (1) :160–175, 2003.
- [63] Yong Liang Zhang, Omar K Matar, and Richard V Craster. Analysis of tear film rupture : effect of non-newtonian rheology. *J. Colloid Interface Sci*, 262 (1) :130–148, 2003.