



Publication pédagogique sous le titre :

Conférences en actuariat

Destinées aux étudiants de : Master. **Spécialité :** Finance et Assurance

Préparées par le Docteur : HAFFAR Adlane. **Département :** Finance et Comptabilité

Année universitaire : 2016/2017

Sommaire

Préambule.....	A
Chapitre N°1 : Calcul de base et principes de l'actuariat.....	1
1.1. Les outils statistiques essentiels.....	2
1.1.1. La décomposition de <i>Cholesky</i>	2
1.1.2. Les tests statistiques usuels.....	4
1.1.3. Le <i>bootstrap</i>	6
1.1.4. La simulation de <i>Monte Carlo</i>	7
1.2. Les séries temporelles.....	9
1.2.1. Le modèle AR.....	9
1.2.2. Le modèle MA.....	10
1.2.3. Le modèle ARMA.....	12
1.2.4. Le modèle ARCH.....	12
1.3. Rappels de calcul stochastique.....	14
1.3.1. Le Mouvement brownien.....	14
1.3.2. Processus de poisson.....	15
1.3.3. Calcul d' <i>Itô</i>	17
1.4. Cointégration et modèle à correction d'erreur.....	19
1.4.1. Définition de la cointégration.....	20
1.4.2. Présentation des modèles à correction d'erreur.....	20
Chapitre N°2 : L'actuariat de l'assurance non-vie.....	22
2.1. Le provisionnement: Définitions et généralités.....	23
2.1.1. Définitions.....	24
2.1.2. Typologie des provisions techniques.....	25
2.1.3. Les méthodes réglementaires de provisionnement.....	29
2.2. De « Solvabilité I » à « Solvabilité II ».....	30
2.2.1. Les risques liés à l'activité d'assurance.....	30
2.2.2. Le contexte actuel « Solvabilité I » : Présentation et critiques.....	31
2.2.3. Le nouveau référentiel « Solvabilité II ».....	33
2.3. Évaluation des provisions techniques sous « Solvabilité II ».....	36
2.3.1. Juste valeur et risque de provisionnement.....	36
2.3.2. Evolution des provisions techniques entre « Solvabilité I » et « Solvabilité II »	39
2.4. Évaluation déterministe des provisions techniques.....	41
2.4.1. Formulation du problème du provisionnement.....	41
2.4.2. Présentation de la méthode <i>Chain-Ladder</i>	47
2.4.3. La méthode de « <i>London Chain</i> ».....	54
2.4.4. La méthode de « <i>Grossing-Up</i> ».....	56
2.5. Provisionnement via des modèles stochastiques.....	59
2.5.1. Le modèle de « Mack ».....	59
2.5.2. Les Modèles Factoriels Stochastiques.....	67

Chapitre N°3: L'actuariat de l'assurance vie.....	83
3.1. Antisélection et hasard moral.....	84
3.1.1. Analyse de l'antisélection.....	84
3.1.2. Modèles avec hasard moral.....	87
3.2. Les produits d'assurance vie.....	90
3.2.1. Garanties en cas de décès.....	90
3.2.2. Garantie vie entière.....	91
3.2.3. Garanties en cas de vie.....	92
3.2.4. Combinaison de garanties.....	93
3.3. Calcul de base en assurance vie et décès.....	93
3.3.1. Quelques notations.....	94
3.3.2. Calculs d'annuités.....	100
Chapitre N°4 : L'actuariat des marchés des capitaux.....	104
4.1. L'actuariat des marchés financiers.....	105
4.1.1. Les actions.....	105
4.1.2. Les obligations.....	110
4.1.3. Les options.....	120
4.1.4. Les swaps.....	127
4.1.5. Les futures.....	129
4.2. L'actuariat du marché monétaire.....	133
4.2.1. La courbe des taux zéro-coupon.....	133
4.2.2. La théorie des anticipations pures ou non biaisées.....	136
Bibliographie.....	138

Préambule

L'environnement dans lequel évolue l'être humain est caractérisé par un ensemble d'événements aléatoires, pouvant mettre en péril, son intégrité physique, son patrimoine ou les biens appartenant à ceux faisant partie de sa communauté.

En effet, cet environnement est lié à deux concepts fondamentaux : « **Incertitude**: source du caractère aléatoire » et « **Risque** : Evènement dommageable dont la survenance est marquée par l'incertitude soit quant à sa réalisation, soit quant à la date de sa réalisation, soit dans son montant ». C'est en tenant compte de la distinction principale entre ces deux termes que l'on pourra apprécier l'activité d'une compagnie d'assurance. L'aléa (défini synthétiquement comme étant un « *élément de hasard, d'incertitude qui introduit, dans l'économie d'une opération, une chance de gain ou de perte pour les intéressés* »¹) et l'incertitude concernent principalement le **montant** des indemnités à allouer aux assurés ainsi que le **moment** de leur versement. A titre d'exemple, la garantie « Bris de glace » en assurance dommage automobile demeure risquée étant donné que la quantification de ce risque repose sur des probabilités objectives, alors qu'inversement, la survenance d'un événement naturel rend cette garantie incertaine.

La problématique de l'incertitude peut être étudiée en tenant compte de la particularité de l'activité d'assurance, qui se distingue par une « inversion du cycle de production ». Cette caractéristique consiste en le paiement d'une prime par les assurés dans un premier temps, puis, le cas échéant, qui donne lieu ultérieurement au règlement d'un sinistre garanti.

L'évolution de la sphère économique (concurrence accrue, crises financières, nouveaux risques,...) dans laquelle exercent les compagnies d'assurance a rendu nécessaire une évolution des normes réglementaires existantes. Au niveau international, la commission européenne a procédé à la révision et au durcissement desdites normes en mettant au jour un nouveau référentiel « Solvabilité II » (voté en date du 22 avril 2009). En revanche, au niveau national, le législateur Algérien a mis l'accent sur l'obligation de la bonne évaluation des dettes techniques des compagnies d'assurance et/ou de réassurance, en promulguant en 2013 un décret exécutif².

Il est à rappeler que la réglementation « Solvabilité I » *exige aux assureurs d'évaluer au mieux leurs engagements en veillant sur une constitution prudente des provisions techniques*. A ce titre, il y a lieu de noter que la mise en œuvre (prévue le 01 janvier 2016) du référentiel « Solvabilité II » par la commission européenne aura pour objectif de prendre en compte des risques tant du point de vue quantitatif que qualitatif.

Le référentiel « Solvabilité II » est fondé sur une structure à trois piliers, se présentant comme suit :

¹ G. CORNU, Vocabulaire juridique, Edition PUF, 7ème Edition, Paris, 1999, V° Aléa, P 1.

² Décret exécutif n° 13-114 du 16 Jomada El Oula 1434 correspondant au 28 mars 2013 relatif aux engagements réglementés des sociétés d'assurance et/ou de réassurance.

Préambule

Le but du *premier pilier* est la définition des *normes quantitatives* de calcul des *provisions techniques* et des *fonds propres*. Ces niveaux réglementaires sont définis pour les fonds propres : **MCR** (*Minimum Capital Requirement*) qui représente le niveau minimum de fonds propres en dessous duquel l'intervention de l'autorité de contrôle sera automatique et **SCR** (*Solvency Capital Requirement*) qui représente le capital cible nécessaire pour absorber le choc provoqué par un risque majeur (par exemple : un sinistre exceptionnel, un choc sur les actifs,...) ;

L'objectif du *deuxième pilier* est de fixer des *normes qualitatives* de suivi des risques en interne aux sociétés et comment l'autorité de contrôle doit exercer ses pouvoirs de surveillance dans ce contexte ;

Le *troisième pilier* a pour objectif de définir l'ensemble des informations détaillées auxquelles le public et l'autorité de contrôle auront accès.

L'un des enjeux majeurs de cette réforme, qui s'inscrit dans le cadre de cette recherche, porte sur le mode de calcul des *provisions techniques*. En effet, la nouvelle réglementation impose aux assureurs des normes bien définies consistant en la constitution des provisions techniques correspondant au montant actuel qu'ils auraient à payer s'ils transféraient immédiatement leurs engagements d'assurance et de réassurance à une autre partie prenante.

En assurance de dommages, la provision pour sinistre à payer reste la plus importante de toutes les réserves techniques. Elle peut être définie comme « une estimation des dépenses en principal et en frais, tant internes³ qu'externes⁴ nécessaires au règlement de tous les sinistres survenus et non payés ».

Dans le cadre du nouveau référentiel « Solvabilité II », cette catégorie de provisions (Provision pour Sinistre A Payer- PSAP-) doit être ajustée selon une approche, dite « **Best Estimate** ». Elle se définit comme étant la meilleure estimation des coûts des sinistres (la valeur actuelle probable des flux de trésorerie futurs). Le calcul du « *Best Estimate* » se fait sur la base des hypothèses réalistes, des informations crédibles et il fait appel à des modélisations actuarielles.

Les flux engendrés par la sinistralité représentent le montant moyen à payer aux assurés. Pour « Solvabilité II », il s'agit de compléter ces flux par une **marge de risque** permettant d'obtenir des flux dont la suffisance sera connue selon *un certain niveau de confiance*. Cette *marge servira à compenser une éventuelle sous-évaluation de la sinistralité et du montant des provisions*. L'indicateur de risque est celui de la **Value-at-Risk (VaR)**. Cette dernière correspond

³ Indemnisation des sinistres survenus.

⁴ Règlements effectués au titre de la garantie « responsabilité civile ».

Préambule

au montant de pertes qui ne devrait être dépassé qu'avec une probabilité donnée sur un horizon temporel donné.

L'une des principales sources d'incertitude pour une compagnie d'assurance non-vie réside en effet dans l'estimation de ses engagements envers ses assurés et en particulier, de ses provisions pour sinistres à payer. Cette incertitude émane essentiellement du fait que le montant de la charge ultime est sujet à une volatilité due à des événements aléatoires.

Par conséquent, l'objectif escompté de ce cours sera de mettre en lumière l'efficacité des modèles stochastiques de provisionnement en assurance dommages et de voir dans quelle mesure le recours à ces méthodes par les compagnies d'assurance pourrait apporter plus de précisions sur l'estimation de leurs provisions.

Les autres prérogatives de l'actuaire, et pas des moindres, consiste en la tarification des contrats d'assurance vie et non-vie, ainsi qu'à l'analyse des différents risques auxquels les compagnies d'assurance sont exposées, ainsi qu'à la maîtrise des techniques et produits de couverture qui permettent de protéger la solvabilité de ces dernières.

Ce cours est structuré en trois chapitres :

Chapitre N°1 : Calcul de base et principes de l'actuariat: Ce chapitre sera consacré aux théories et concepts usitées en actuariat, notamment pour les volets relatifs à la modélisation, à la projection ainsi qu'à la tarification.

Chapitre N°2 : L'actuariat de l'assurance non-vie: Ce chapitre sera consacré à la présentation des modèles déterministes et stochastiques, utilisés dans la détermination des provisions techniques, ainsi qu'aux modèles de calcul des pertes maximales dont les compagnies d'assurances peuvent être exposées.

Chapitre N°3: L'actuariat de l'assurance vie: Ce chapitre sera consacré à la compréhension des notions de l'antisélection et d'aléa moral, ainsi qu'à la présentation des produits de l'assurance vie, ainsi qu'à leur tarification.

Chapitre N°4 : L'actuariat des marchés des capitaux : Ce chapitre sera consacré à la présentation des principaux produits financiers constituant le portefeuille de placement des compagnies d'assurance, ainsi qu'aux techniques de gestion des risques relatifs à ces derniers.

Chapitre N°1 : Calcul de base et principes de l'actuariat

Dans ce chapitre, nous allons présenter les outils mathématiques les plus sollicités afin d'assimiler les principes de la finance moderne et de l'actuariat, et dont l'utilisation nécessite néanmoins le recours à des logiciels performants, permettant l'exécution d'importants calculs.

1.1. Les outils statistiques essentiels

On ne revient pas ici sur les problématiques d'estimation, l'estimation des paramètres des modèles utilisés est effectuée en privilégiant les méthodes de maximum de vraisemblance. Certains aspects des tests essentiels sont rappelés, ainsi que les principales propriétés de quelques outils incontournables utilisés dans la plupart des modèles¹.

1.1.1. La décomposition de *Cholesky*

Ce résultat d'algèbre est à la base de la décorrélation des vecteurs gaussiens.

- a. La décomposition d'une matrice symétrique définie positive

Soit Γ une matrice symétrique définie positive. D'après le théorème de *Cholesky*, il existe une unique matrice triangulaire A à diagonale positive telle que $\Gamma = A'A$. On appelle A la « racine carrée de Γ » et on note (par convention) $A = \sqrt{\Gamma}$. On désigne également A sous le terme de « décomposée de *Cholesky* de Γ ».

De manière pratique, il existe un mécanisme simple de construction explicite de A qui comporte 2 étapes :

- Etape 1 : Construction de la première colonne.

On pose $\sum_{1,1} = \sqrt{\Gamma_{1,1}}$ puis $\forall i = 2, \dots, d, \sum_{i,1} = \frac{\Gamma_{i,1}}{\sum_{i,1}}$

- Etape 2 : Construction par récurrence des colonnes $j \in \{2, \dots, d\}$.

On pose $\forall i = 2, \dots, j-1, \sum_{i,j} = 0, \sum_{j,j} = \sqrt{\Gamma_{j,j} - \sum_{k=1}^{j-1} \sum_{j,k}^2}$

$$\forall i = j+1, \dots, d, \sum_{i,j} = \frac{\Gamma_{i,j} - \sum_{k=1}^{j-1} \sum_{j,k} \sum_{i,k}}{\sum_{i,j}}$$

¹ Planchet. F, Théron. P, Jacquemin. J (2005). – Modèles financiers en assurance, analyse de risque dynamique -. Edition Economica. France. Page 62.

b. Application aux vecteurs gaussiens

En particulier, si on se donne Γ une matrice symétrique, définie positive, et si $X \sim N(0, Id_d)$ suit une loi gaussienne centrée d-dimensionnelle, on dispose d'une construction explicite d'une variable aléatoire de loi $N(m, \Gamma)$.

En effet, il existe une (unique) matrice A triangulaire inférieure à diagonale positive telle que $\Gamma = A^t A$: si on pose $Y = m + AX$, alors il découle de ce qui précède que $Y \sim N(m, \Gamma)$.

Enfin, toute combinaison linéaire des composantes de Y est combinaison linéaire des composantes de X qui sont des lois gaussiennes indépendantes, donc Y suit une loi gaussienne. On a donc bien $Y \sim N(m, \Gamma)$.

c. Utilisation en finance

Supposons que le titre i soit convenablement décrit par la dynamique suivante :

$$\frac{dS_t}{S_t} = (\mu_i - q_i)dt + \sigma_i dB_t^1$$

Faisons l'hypothèse réaliste que le cours du titre i est corrélé avec l'évolution du marché action dans son ensemble, ce que l'on décrira formellement :

$$dB^1 \times d\tilde{B}^a = \rho_i dt$$

Où \tilde{B}^a est un mouvement brownien qui régit l'évolution du marché actions.

Alors il existe un mouvement brownien B^i , indépendant de \tilde{B}^a tel que :

$$\frac{dS_t}{S_t} = (\mu_i - q_i)dt + \sigma_i \rho_i d\tilde{B}_t^a + \sigma_i \sqrt{1 - \rho_i^2} dB_t^i$$

On remarque que si :

$$\Gamma = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \rho \sigma_1 \sigma_2 \\ \rho \sigma_1 \sigma_2 & \sigma_2^2 \end{bmatrix}$$

Alors la décomposition de *Cholesky* s'écrit :

$$\Gamma = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \rho \sigma_1 \sigma_2 \\ \rho \sigma_1 \sigma_2 & \sigma_2^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ c & b \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} a & c \\ 0 & b \end{bmatrix}$$

Ce qui conduit aux équations :

$$a^2 = \sigma_1^2, ac = \rho \sigma_1 \sigma_2 \text{ et } c^2 + b^2 = \sigma_2^2$$

Le résultat découle alors du fait que pour décrire un mouvement brownien, il suffit de décrire les lois conjointes des martingales finies.

1.1.2. Les tests statistiques usuels

Ces tests vont nous permettre de vérifier la fiabilité des modèles retenus, et de valider les paramètres estimés.

Le test ARCH

Supposons que l'équation de la moyenne soit décrite par un processus *ARMA*. On considère la série Y_t générée par le processus suivant :

$$\begin{cases} \Phi(L)Y_t = \theta(L)\varepsilon_t \\ \sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 \end{cases}$$

L'hypocours nulle testée est celle d'homoscédasticité : $\alpha_1 = \dots = \alpha_q = 0$ contre l'hypocours alternative d'hétéroscédasticité conditionnelle : au moins un coefficient α_i ($i = 1, \dots, q$) est différent de 0. Si l'hypocours nulle est acceptée, alors $\sigma_t^2 = \alpha_0$: la variance conditionnelle est constante. En revanche, si l'hypocours nulle est rejetée, les résidus suivent un processus *ARCH*(q).

La mise en œuvre du test est simple et peut s'effectuer en trois étapes.

- Etape 1 : On estime l'équation de la moyenne, on récupère les résidus estimés $\hat{\varepsilon}_t$ et l'on calcule la série des $\hat{\varepsilon}_t^2$.
- Etape 2 : On régresse $\hat{\varepsilon}_t^2$ sur une constante et sur ses q valeurs passées (seuls les retards significatifs sont conservés).
- Etape 3 : On calcule la statistique TR^2 où T est le nombre d'observations et R^2 est le coefficient de détermination associé à la régression de l'étape 2.

Sous l'hypocours nulle d'homoscédasticité, la statistique TR^2 suit une loi de Khi-deux à q degrés de liberté. La règle de décision est :

- Si $TR^2 < \chi^2(q)$, l'hypocours nulle est acceptée : il n'existe pas d'effet *ARCH*.
- Si $TR^2 \geq \chi^2(q)$, on rejette l'hypocours nulle en faveur de l'hypocours alternative d'hétéroscédasticité conditionnelle².

² Lardic .S, Mignon .V (2002). – Économétrie des séries temporelles macroéconomiques et financières -. Edition Economica. France. Page 298.

*Le test de Breusch-Godfrey*³

Est un test général d'autocorrélation. On utilise le modèle de régression à deux variables pour illustrer le test bien que beaucoup de régresseurs puissent être ajoutés. On peut aussi ajouter des valeurs décalées de la variable dépendante. Soit

$$Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_t + u_t$$

Supposons que le terme d'erreur u_t suive le processus autorégressif du $p^{\text{ième}}$ ordre, AR(p), de la façon suivante :

$$u_t = \rho_1 u_{t-1} + \rho_2 u_{t-2} + \dots + \rho_p u_{t-p} + \varepsilon_t$$

Où ε_t est un terme d'erreur de type bruit blanc. On reconnaît qu'il s'agit là d'une simple extension du système AR(1).

L'hypothèse nulle H_0 qu'il faut tester est :

$$H_0: \rho_1 = \rho_2 = \dots = \rho_p = 0$$

Cette expression indique qu'il n'y a pas d'autocorrélation de quelque sorte que ce soit.

Le test de *Breusch-Godfrey* comprend les étapes suivantes :

1. Estimer le modèle de régression par les MCO et en déduire les résidus $\hat{\varepsilon}_t$.
2. Faire la régression suivante :

$$\hat{u}_t = \alpha_1 + \alpha_2 X_t + \hat{\rho}_1 \hat{u}_{t-1} + \dots + \hat{\rho}_p \hat{u}_{t-p} + \varepsilon_t \text{ (Auxiliaire)}$$

Et calculer R^2 à partir de cette régression.

3. Si la taille de l'échantillon est grande, *Breusch* et *Godfrey* ont montré que

$$(n - p)R^2 \sim \chi_p^2$$

Ce qui indique qu'asymptotiquement, $n - p$ fois la valeur de R^2 obtenu de la régression auxiliaire suit la distribution du χ^2 avec p degrés de liberté. Si, dans une étude, $(n - p)R^2$ est supérieur à la valeur critique de χ^2 pour le niveau de signification choisi, on rejette l'hypothèse nulle, en quel cas au moins un ρ est statistiquement et significativement différent de zéro.

³ L. G. Godfrey (1978). – Testing General Autoregressive and Moving Average Error Models When the Regressor include Lagged Dependent Variables -. *Econometrica*, vol 46. Pages 1293 to 1302. T.S, Breusch (1978). – Testing for Autocorrelation in Dynamic Linear Models -. *Australian Economic Papers*, vol 17. Australia. Pages 334 to 355.

Le test de Jarque-Bera⁴

C'est un test de normalité relatif aux grands échantillons, il est également basé sur les résidus des MCO. Il calcule d'abord l'asymétrie et l'aplatissement, puis mesure les résidus des MCO, le test s'écrit :

$$JB = \frac{n - k}{6} \left[S^2 + \frac{(K - 3)^2}{4} \right]$$

$$K \text{ (Coefficient d'aplatissement)} = \frac{\sum_{i=1}^n (X_t - \mu)^4}{\sigma^4}$$

$$S \text{ (Coefficient d'asymétrie)} = \frac{\sum_{i=1}^n (X_t - \mu)^3}{\sigma^3}$$

Où n est la taille de l'échantillon, et k le nombre de variables explicatives dans le cadre d'une régression linéaire.

Sous l'hypothèse nulle, la loi limite de la statistique de test est une loi du Khi-2 à 2 degrés de liberté.

Pour ce test, l'hypothèse nulle H_0 est celle de la normalité des résidus : lorsque la probabilité associée est supérieure à 5 %, on accepte l'hypothèse H_0 de normalité des résidus.

1.1.3. Le *bootstrap*

La technique du *bootstrap* consiste, à partir d'un échantillon originel unique, à créer par tirage aléatoire sans remise de nouveaux échantillons. Ces nouveaux échantillons sont constitués de « pseudo données » ayant la même loi sous-jacente. La répétition du rééchantillonnage à partir de données « sources » permet d'estimer la variabilité d'un paramètre déterminé.

a. Présentation de la méthode

Les méthodes de rééchantillonnage, telles que le *Jackknife* et le *Bootstrap*, permettent de remplacer les déductions théoriques en analyse statistique par des simulations de type *Monte-Carlo*. Reposant principalement sur des simulations, le *bootstrapping* jouit d'une mise en œuvre relativement simple.

L'usage du *bootstrap* dans la résolution de problèmes actuariels s'étend rapidement, en particulier en tarification et dans l'évaluation des provisions de sinistres. La prédiction d'un niveau « suffisant » de réserve, qui permet à la société d'assurance de faire face à ses

⁴ C. M. Jarque et A. K. Bera (1987). – A Test for Normality of Observations and Regression Residuals -. International Statistic Review. Vol 55. Pages 163 to 172.

engagements, est un sujet primordial de la science actuarielle. Depuis quelques années, la technique du *bootstrap* est communément utilisée pour analyser la variabilité des montants de sinistres pour obtenir des erreurs de prédiction pour différentes méthodes de provisionnement.

b. Mise en œuvre

La méthodologie doit être adaptée à chaque situation. Pour un modèle linéaire, il est commun d'adopter une des deux approches de rééchantillonnage effectué directement sur les observations, ou de rééchantillonnage appliqué sur les résidus du modèle.

Bien que la première approche soit plus robuste que le *bootstrap* sur les résidus, seule cette dernière peut être implémentée en matière de provisionnement. En effet, la technique du *bootstrap* nécessite le caractère i.i.d des données. Or, dans un modèle de régression, les variables réponses sont indépendantes mais non équidistribuées. Pour respecter le domaine d'application du *bootstrap*, il est classique d'appliquer cette méthode aux résidus du modèle choisi. Ceux-ci ont un caractère « plus » i.i.d que les variables originelles.

L'expression des résidus empiriques retenue est alors :

$$\hat{r}_{ij}^{(P)} = \frac{y_{i,j} - \hat{m}_{i,j}}{\sqrt{v(\hat{m}_{i,j})}}$$

Où v étant la fonction variance.

A partir du triangle des incréments, on constitue un triangle des résidus. Ce triangle sert ensuite de base à la création de k (nombre arbitraire ou en relation avec les permutations possibles du triangle) nouveaux triangles des résidus : les valeurs du triangle initial sont « casées » aléatoirement dans chaque nouveau triangle. Plus intuitivement, chaque nouveau triangle correspond à « une permutation » du triangle originel.

La formule $\hat{r}_{ij}^{(P)} = \frac{y_{i,j} - \hat{m}_{i,j}}{\sqrt{v(\hat{m}_{i,j})}}$ permet de constituer k triangles des incréments à partir des k

triangles des résidus. L'étape suivante consiste à estimer les paramètres $(\hat{c}, \hat{a}_i, \hat{b}_j)$ de chaque triangle et à obtenir k estimations de la statistique désirée $(\hat{m}_{i,j}, \hat{E}(R))$.

1.1.4. La simulation de Monte Carlo

Nous abordons maintenant la méthode de simulation de *Monte Carlo* pour l'évaluation des actifs dérivés.

L'évaluation des options par simulations de *Monte Carlo* repose en grande partie sur l'évaluation risque-neutre. Les paiements futurs espérés sont en effet calculés dans l'univers risque-neutre en suivant une procédure d'échantillonnage, avant d'être actualisés au taux d'intérêt sans risque. Considérons un actif dérivé ayant pour support une variable de marché S et délivrant un *payoff* à la date T . Avec des taux d'intérêt supposés constants, il est possible d'évaluer cet actif dérivé de la manière suivante :

1. Tirer au hasard une trajectoire de S dans l'univers risque-neutre.
2. Calculer le flux payé à l'échéance par l'actif dérivé pour cette trajectoire.
3. Répéter les étapes 1 et 2 de façon à disposer d'un grand nombre de flux terminaux de l'actif dérivé dans l'univers risque-neutre.
4. Calculer la moyenne des flux terminaux pour obtenir une estimation de l'espérance du flux terminal dans l'univers risque-neutre.
5. Actualiser les flux terminaux espéré au taux d'intérêt dans risque pour obtenir une estimation de la valeur de l'actif dérivé.

Supposons que, dans l'univers risque-neutre, la variable de marché sous-jacente suive le processus :

$$dS = \hat{\mu}Sdt + \sigma Sdz$$

Où z est un processus de *Wiener* standard, $\hat{\mu}$ désigne la rentabilité espérée dans l'univers risque-neutre, et σ la volatilité. Si on divise la vie de l'option en N intervalles de longueur Δt , on peut simuler la trajectoire suivie par S en approximant l'équation précédente par :

$$S(t + \Delta t) - S(t) = \hat{\mu}S(t)\Delta t + \sigma S(t)\varepsilon\sqrt{\Delta t}$$

Où $S(t)$ est la valeur de S à la date t , et ε est une variable normale centrée-réduite. La valeur de S à la date Δt est calculée à partir de la valeur initiale de S , la valeur de S à la date $2\Delta t$ est obtenue à partir de $S(\Delta t)$, et ainsi de suite. La simulation implique la construction d'une trajectoire selon la loi normale.

En pratique, on obtient des résultats plus précis en simulant $\ln(S)$ plutôt que S . D'après le lemme *d'Itô*, le processus suivi par $\ln(s)$ s'écrit :

$$d\ln(S) = \left(\hat{\mu} - \frac{\sigma^2}{2} \right) dt + \sigma dz$$

De telle façon que :

$$\ln(S(t + \Delta t)) - \ln(S(t)) = \left(\hat{\mu} - \frac{\sigma^2}{2} \right) \Delta t + \sigma \varepsilon \sqrt{\Delta t}$$

Ou encore :

$$S(t + \Delta t) = S(t) \exp \left[\left(\hat{\mu} - \frac{\sigma^2}{2} \right) \Delta t + \sigma \varepsilon \sqrt{\Delta t} \right]$$

Travailler avec $\ln(S(t))$ est plus aisé car il s'agit d'un processus de *Wiener* général. Cela signifie que l'équation suivante est vérifiée pour toute date T :

$$S(T) = S(0) \exp \left[\left(\hat{\mu} - \frac{\sigma^2}{2} \right) T + \sigma z_T \right]$$

Cette relation permet de construire une trajectoire de S et d'évaluer des options dont le *payoff* n'est pas standard à la date T .

L'avantage de la simulation de *Monte Carlo* est de pouvoir être utilisée aussi bien quand les flux terminaux de l'actif dérivé dépendent du chemin suivi par S , que quand ils dépendent seulement de la valeur terminale de S . En outre, des flux intermédiaires peuvent aussi être pris en compte ; de même, n'importe quel processus d'évolution peut être envisagé pour S . Les principaux inconvénients de la simulation de *Monte Carlo* sont le temps de calcul élevé et la difficulté à gérer les situations dans lesquelles l'actif dérivé peut être exercé prématurément.

1.2. Les séries temporelles

De nombreuses théories macroéconomiques reposent sur le postulat de dépendance de la variation des cours, que ce soit des cours des actions, des cours de taux... L'établissement de ce postulat a entraîné le développement d'outils mathématiques et de modèles capables de rendre compte de cette dépendance de la variation des cours : les séries temporelles.

1.2.1. Le modèle AR

De structure markovienne, le modèle *AR* permet de rendre compte de la saisonnalité d'un phénomène. Le modèle $AR(p)$ est défini par la loi conditionnelle de y sachant $(y_{t-1}, \dots, y_{t-p})$:

$$y_t \sim N \left(\mu - \sum_{i=1}^p \rho_i (y_{t-i} - \mu), \sigma^2 \right)$$

Il présente la particularité de fournir une vraisemblance explicite :

$$L(\mu, \rho_1, \dots, \rho_p, \sigma) = \sigma^{-n} \prod_{t=1}^n \exp \left\{ -\frac{(y_t - \mu + \sum_{i=1}^p \rho_i (y_{t-i} - \mu))^2}{2\sigma^2} \right\}$$

Si, par conséquent, on pose $y_0 = \dots = y_{-p} = 0$. La forme de cette vraisemblance conduit donc à des lois conjuguées (conditionnelles) normale sur μ , inverse gamma sur σ^2 et normale sur le vecteur $\rho = (\rho_1, \dots, \rho_p)$.

Si on impose l'hypocours additionnelle de stationnarité du modèle, la contrainte se traduit par une restriction du support de ρ à l'ensemble des ρ_i tels que le polynôme :

$$P(x) = 1 + \rho_1 x + \dots + \rho_p x^p$$

Ait toutes ses racines à l'extérieur du cercle unité. Voici une solution efficace au problème de génération d'un vecteur ρ sous les contraintes de racine sur le polynôme associé, solution qui passe par une reparamétrisation du modèle. Cette reparamétrisation consiste à écrire les paramètres ρ_1, \dots, ρ_p en fonction des autocorrélations partielles $\psi_i \in]-1, 1[$ ($i = 1, \dots, p$), cette représentation est intéressante du point de vue de la simulation des ρ_i puisque le résultat suivant donne une méthode constructive de calcul des ρ_i en fonction des ψ_i .

Les coefficients ρ_i se déduisent des ψ_i par l'algorithme suivant :

- Définir $\varphi_{ii} = \psi_i$ et $\varphi^{ij} = \varphi^{(i-1)j} - \psi_i \varphi^{(i-1)(i-j)}$, pour $i > 1$ et $j = 1, \dots, i-1$.
- Prendre $\rho_i = \varphi^{pi}$ pour $i = 1, \dots, p$.

Si l'on simule les ψ_i un à un dans une méthode d'échantillonnage, la vraisemblance fait apparaître une forme normale sur ψ_i , conditionnellement aux ψ_i :

$$\prod_{t=1}^T \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} \left(y_t - \mu - \sum_{j=i}^p (a_{ij} + b_{ij} \psi_i) (y_{t-j} - \mu) \right)^2 \right\}$$

Ce qui permet la simulation de ψ comme variable normale restreinte à $[-1, 1]$, soit par la méthode naïve de simulation de la loi normale correspondante jusqu'à ce que la variable générée soit dans $[-1, 1]$, soit par des algorithmes plus perfectionnés. Les autres paramètres du modèle, μ et σ^2 , se simulent aisément comme variables normales et inverse gamma, respectivement.

1.2.2. Le modèle MA

Le modèle $MA(q)$, défini à partir d'une suite i.i.d centrée et de variance $\sigma^2(\varepsilon_t)$ par :

$$y_t = \mu + \sum_{j=1}^q \theta_j \varepsilon_{t-j} + \varepsilon_t$$

N'a pas la structure markovienne du modèle $AR(p)$, et ne conduit pas à une vraisemblance explicite, au sens où :

$$L(\mu, \theta, \dots, \theta_q, \sigma) = \sigma^{-n} \prod_{t=1}^n \exp \left\{ -\frac{(y_t - \mu - \sum_{j=1}^q \theta_j \varepsilon_{t-j})^2}{2\sigma^2} \right\}$$

Est définie de manière récursive par :

$$\hat{\varepsilon}_t = y_t - \mu - \sum_{j=1}^q \theta_j \hat{\varepsilon}_{t-j}$$

Avec $\hat{\varepsilon}_0 = \dots = \hat{\varepsilon}_{1-q} = \mathbf{0}$. Comme pour le modèle $AR(p)$, il faut imposer des contraintes sur les paramètres θ_j à savoir que le polynôme

$$\theta(x) = 1 + \sum_{j=1}^q \theta_j x^j$$

Doit avoir ses racines à l'extérieur du cercle unité pour que le modèle soit identifiable, c'est-à-dire pour que l'on puisse affecter une valeur à chacun des paramètres.

A nouveau, une reparamétrisation du modèle permet de définir simplement une loi à *priori* sur les θ_j , et de simuler leur loi à *posteriori*. La reparamétrisation décrite *infra* s'applique de manière identique dans le cadre du modèle $MA(q)$. Mais la structure récursive de la vraisemblance ne permet pas de retrouver une forme explicite des lois conditionnelles des ψ_i .

L'alternative est de fonder la simulation des ψ_i ($1 \leq i \leq q$) sur une approximation instrumentale de la loi à *posteriori* :

$$\prod_{t=1}^n \exp \left\{ -\frac{(y_t - \sum_{j=1}^q \theta_j \hat{\varepsilon}_{t-j})^2}{2\sigma^2} \right\}$$

Où les $\hat{\varepsilon}_{t-j}$ sont calculées en fonction de la valeur précédente des ψ_i . On obtient une loi normale restreinte à $[-1,1]$ comme loi instrumentale sur ψ_i et la valeur simulée est acceptée suivant un rapport prédéfinie.

1.2.3. Le modèle ARMA

L'extension au modèle $ARMA(p,q)$ est relativement directe, puisque la partie AR peut être traité directement conditionnellement à la partie MA , c'est-à-dire conditionnellement aux paramètres de la partie MA .

Ce modèle est en effet donné par :

$$y_t = \mu - \sum_{i=1}^p \rho_i (y_{t-i} - \mu) + \sum_{j=1}^q \theta_j \hat{\varepsilon}_{t-j} + \sigma \varepsilon_t$$

Avec la condition initiale $y_0 = \dots = y_{-p} = 0$.

Une restriction supplémentaire apparaît : les polynômes \mathcal{G} et P ne doivent pas avoir de racines communes. L'extension de la reparamétrisation et des algorithmes précédents est immédiate puisque les parties AR et MA sont traitées séparément.

1.2.4. Le modèle ARCH

L'expérience a montré que les séries financières sont souvent caractérisées par des périodes d'agitation suivies de période d'accalmie, bref par des chocs de variance. Afin de modéliser ces phénomènes, nous nous basons sur le modèle suivant⁵ :

$$y_t = X_t' \beta + \varepsilon_t$$

Avec $\varepsilon_t = u_t \sqrt{\alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2}$, $\alpha_0 > 0$ et $\alpha_1 > 0$. La matrice X_t est de taille $(k, 1)$: $X_t = (x_{1t}, \dots, x_{kt})'$ et β est un paramètre. Les variables aléatoires u_t sont i.i.d normalement distribuées, centrées et réduites. Les erreurs ε_t ne sont alors plus indépendantes.

L'hypocours classique des modèles de régression, $E[\varepsilon_t | X_t] = 0$, est conservée. Remarquons que si $E[\varepsilon_t | X_t] = 0$, alors $Cov(X_t, \varepsilon_t) = Cov(X_t, E(\varepsilon_t | X_t)) = Cov(X_t, 0) = 0$.

Les propriétés de ce modèle sont :

$$E[\varepsilon_t | \varepsilon_{t-1}] = E \left[u_t \sqrt{\alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2} \right] = E[u_t] \times E \left[\sqrt{\alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2} \right] = 0$$

Car u_t est indépendante de ε_{t-1} .

On en déduit en particulier que

⁵ Engle .R (1982). – Autoregressive conditional heteroscedasticity with estimates of the variance of united kingdom inflations -. Enonometrica. University of Oxford, Oxford. Grande Bretagne. Page 987 – 1008.

$$E[\varepsilon_t] = E(E[\varepsilon_t | \varepsilon_{t-1}]) = 0$$

La variance conditionnelle s'obtient de la même manière

$$E[\varepsilon_t^2 | \varepsilon_{t-1}^2] = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2$$

On note en particulier que, conditionnellement à ε_{t-1} , ε_t est hétéroscédastique. La variance non-conditionnelle s'obtient avec l'équation de décomposition de la variance, ou, plus simplement en observant que :

$$E[\varepsilon_t^2] = E(E[\varepsilon_t^2 | \varepsilon_{t-1}^2]) = \alpha_0 + \alpha_1 E(\varepsilon_{t-1}^2)$$

Si $Var(\varepsilon_t) = Var(\varepsilon_{t-1})$, condition nécessaire pour que la série soit stationnaire, alors

$$Var(\varepsilon_t) = \frac{\alpha_0}{1 - \alpha_1}$$

Pour que la variance non-conditionnelle existe, il faut donc que $\alpha_1 < 1$.

Le modèle $ARCH(1)$ se généralise de manière naturelle à un modèle $ARCH(p)$ de la forme suivante :

$$y_t = X_t' \beta + \varepsilon_t$$

Avec $\varepsilon_t = u_t \sqrt{\alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \dots + \alpha_p \varepsilon_{t-p}^2}$, $\alpha_i > 0$, $1 \leq i \leq p$.

La variance non-conditionnelle est cette fois égale (sous hypocoours de stationnarité de la série) à

$$Var(\varepsilon_t) = \frac{\alpha_0}{1 - \alpha_1}$$

Ce qui implique pour ε_t que la variance non-conditionnelle existe si $\alpha_1 + \dots + \alpha_p < 1$.

Une extension du modèle $ARCH(p)$ est de type $GARCH(p,q)$ (G signifie « *Generalized* »), qui est une forme de modèle $ARMA$ sur la variance et qui se veut être une approche « économe » en nombre de paramètres pour modéliser les phénomènes de persistance des chocs de variance. Le modèle est le suivant :

$$y_t = X_t' \beta + \varepsilon_t$$

Avec cette fois pour les erreurs un modèle du type

$$\varepsilon_t = u_t \sqrt{h_t}$$

Et

$$h_t = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \delta_1 h_{t-1}$$

On impose les contraintes $\alpha_0 > 0$, $\alpha_1 > 0$, $\delta_1 > 0$ et $\alpha_1 + \delta_1 < 1$.

Les modèles *ARCH/GARCH* sont classiquement estimés par maximum de vraisemblance. Si l'on suppose que les résidus sont gaussiens, la fonction de vraisemblance prend la forme suivante :

$$L = \prod_{t=1}^T \frac{1}{\sigma_{\varepsilon,t} \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(\varepsilon_t - \mu)^2}{2\sigma_{\varepsilon,t}^2}\right)$$

Où on a noté $\sigma_{\varepsilon,t}^2$ la variance conditionnelle à ε_{t-1} de ε_t . Le logarithme de la vraisemblance est égal à :

$$\ln(L) = -\frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \left(\ln(2\pi) + \ln(\sigma_{\varepsilon,t}^2) + \frac{(\varepsilon_t - \mu)^2}{\sigma_{\varepsilon,t}^2} \right)$$

Et la maximisation peut être traitée par des algorithmes numériques standards.

1.3. Rappels de calcul stochastique

Le calcul stochastique est devenu, d'abord en finance, puis en assurance, un outil incontournable. Quelques brefs rappels sont présentés ici.

1.3.1. Le Mouvement brownien

Le scalaire Mouvement Brownien Standard, ou Processus de *Wiener* Standard, au cours de l'intervalle $[0, T]$ est une variable aléatoire $W(t)$ évoluant continuellement dans $t \in [0, T]$ et satisfait les trois conditions suivantes⁶ :

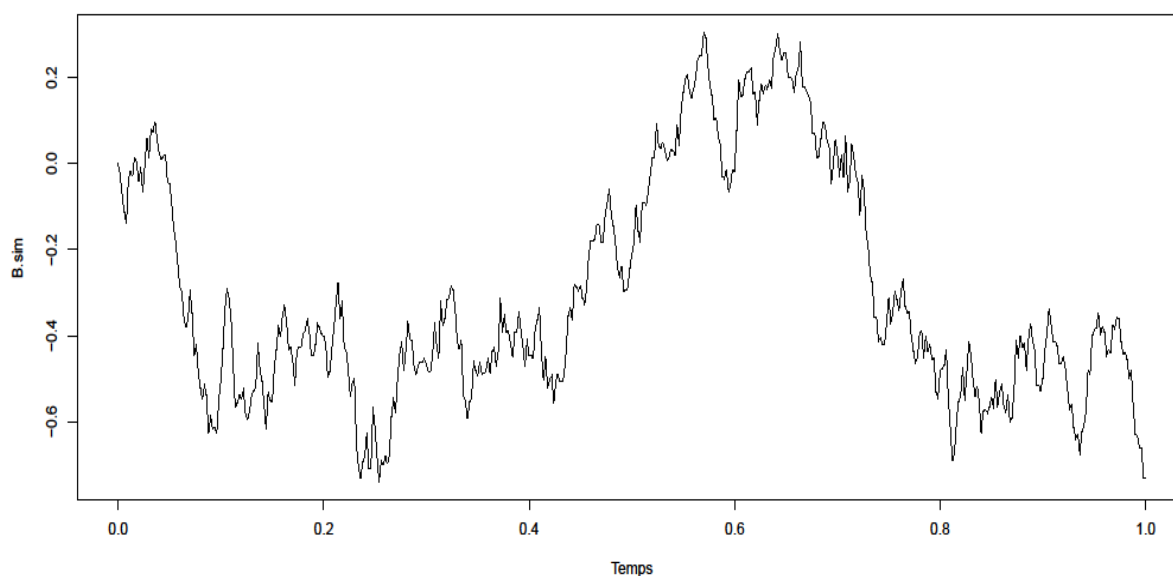
1. $W(0) = 0$ (Avec une probabilité de 1)
2. Pour $0 \leq s < t \leq T$ la variable aléatoire donnée par l'incrément $W(t) - W(s)$ est normalement distribuée d'une moyenne nulle et d'une variance $t - s$; pareillement, $W(t) - W(s) \sim \sqrt{t - s} N(0, 1)$, où $N(0, 1)$ est la distribution normale d'une variable aléatoire de moyenne nulle et de variance égale à l'unité.
3. Pour $0 \leq s < t < u < v \leq T$ les incréments $W(t) - W(s)$ et $W(v) - W(u)$ sont indépendants (Graphique 4.1).

⁶ Desmond J.H (2001). – An Algorithmic Introduction to Numerical Simulation of Stochastic Differential Equations -. SIAM review (Society for Industrial and Applied Mathematics). Page 525- 546.

Pour des raisons liées aux calculs informatiques, il est plus utile de considérer le Mouvement Brownien discrétisé, où $W(t)$ prend des valeurs discrètes dans t . On pose ainsi $\delta t = T/N$ pour chaque intégration positive N et mettons W_j noté $W(t_j)$ avec $t_j = j\delta t$. La condition 1 dit que $W_0 = 0$ avec une probabilité 1, et les conditions 2 et 3 montrent que :

$$W_j = W_{j-1} + dW_j, \quad j = 1, 2, \dots, N$$

Où chaque dW_j est une variable aléatoire indépendante de la forme $\sqrt{\delta t} N(0,1)$.



Graphique 1.1 : Trajectoire d'un mouvement brownien⁷.

1.3.2. Processus de poisson

Le processus de Poisson est un outil extrêmement utilisé tant pour la modélisation des sinistres que dans les modèles d'actifs dans lesquels on souhaite introduire des sauts.

On considère des événements qui se produisent à des dates aléatoires, et on s'intéresse, pour tout $t > 0$ au nombre d'évènements qui se sont produits au cours de l'intervalle $]0,t]$, que l'on note $N(t)$.

On définit alors le processus de Poisson d'intensité $\lambda > 0$ comme un processus $N(t)$ satisfaisant les conditions suivantes :

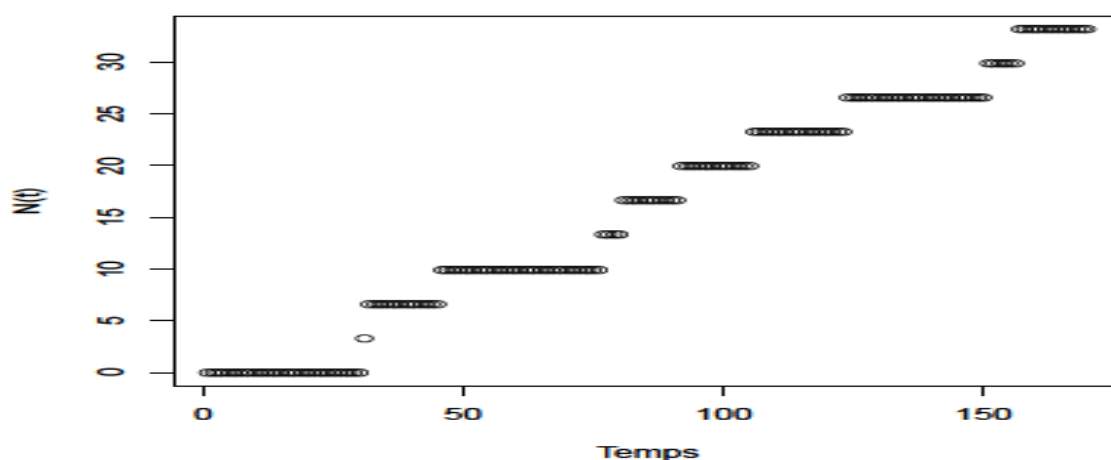
1. Le processus est à accroissements indépendants, $\forall 0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_n$, les variables aléatoires $N(t_i) - N(t_{i-1})$, $i = 1, \dots, n$ sont globalement indépendantes ;

⁷ Elaboré par nous-même à l'aide du logiciel statistique « R ».

2. Le processus est à accroissements stationnaires, $\forall t, h > 0$, la loi de $N(t + h) - N(t)$ ne dépend que de h ;
3. $P(N(t + h) - N(t) \geq 1) = \lambda h + o(h)$ et $P(N(t + h) - N(t) \geq 2) = o(h)$.

La troisième condition signifie que sur un petit intervalle de temps, on observe 0 ou 1 événement, et que la probabilité d'observer un événement est proportionnelle au temps écoulé. On peut remarquer que $N(0) = 0$.

Les trajectoires sont par définition croissantes, continues à droite avec une limite à gauche. Elles croissent par sauts d'une unité (Graphique 1.2).



Graphique 1.2 : Trajectoire d'un processus de Poisson⁸.

On vérifie par ailleurs sans difficulté que si N_t^1 et N_t^2 sont deux processus de Poisson indépendants d'intensités respectives λ_1 et λ_2 , alors $N_t = N_t^1 + N_t^2$ est un processus de Poisson d'intensité $\lambda_1 + \lambda_2$. Pour le vérifier on remarque que N_t est un processus à accroissements indépendants et stationnaire, et qu'il vérifie également la troisième condition.

Ce résultat admet la réciproque suivante : Si N_t est un processus de Poisson et que T_n désigne l'instant du $n^{\text{ième}}$ saut, et si on se donne des variables aléatoires de Bernoulli X_n indépendantes des instants de saut et de paramètre p , on peut construire deux processus en affectant les sauts de N_t à l'un si $X_n = 1$, à l'autre sinon, les 2 processus ainsi obtenus sont des processus de Poisson indépendants, de paramètres $p\lambda$ et $(1-p)\lambda$ ⁹.

⁸ Elaboré par nous-même à l'aide du logiciel statistique « R ».

⁹ Pollard M, Kou.S. G (2004). - A Jump Diffusion Model for Option Pricing -. Department of Statitics, University of California Berkeley. Stat 251 Paper Reveiw. USA.

Dans la troisième condition caractérisant le processus de Poisson, on peut introduire une intensité fonction du temps, $\lambda(y)$. On obtient un processus non homogène, la loi de l'accroissement $N(t + h) - N(t)$ est alors une loi de poisson de paramètre

$$\int_t^{t+h} \lambda(u) du$$

1.3.3. Calcul d'Itô

Nous souhaitons montrer comment le lemme *d'Itô* peut être vu comme une extension naturelle d'autres résultats plus simples. Considérons une fonction différentiable G d'une variable x . Si Δx représente une très petite variation de x et ΔG la variation de G qui en résulte, un résultat bien connu de calcul différentiel s'écrit :

$$\Delta G \approx \frac{dG}{dx} \Delta x \quad (1)$$

Autrement dit, ΔG est à peu près égal au taux de variation de G relativement à x multiplié par Δx . L'ordre de grandeur de l'erreur commise est Δx^2 . Pour une approximation plus précise, la formule de *Taylor* appliquée à G peut être utilisée :

$$\Delta G = \frac{dG}{dx} \Delta x + \frac{1}{2} \frac{d^2 G}{dx^2} \Delta x^2 + \frac{1}{6} \frac{d^3 G}{dx^3} \Delta x^3 + \dots$$

Pour une fonction différentiable G dépendant de deux variables x et y , le résultat analogue à celui de l'équation (1) est :

$$\Delta G \approx \frac{\partial G}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial G}{\partial y} \Delta y \quad (2)$$

Et l'application de la formule de *Taylor* à G donne :

$$\Delta G = \frac{\partial G}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial G}{\partial y} \Delta y + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} \Delta x^2 + \frac{\partial^2 G}{\partial x \partial y} \Delta x \Delta y + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial y^2} \Delta y^2 + \dots \quad (3)$$

Quand Δx et Δy tendent vers 0, l'équation (3) devient :

$$\partial G = \frac{\partial G}{\partial x} dx + \frac{\partial G}{\partial y} dy \quad (4)$$

Nous allons maintenant étendre l'équation (4) aux fonctions de variables qui suivent un processus *d'Itô*. Supposons qu'une variable x dans l'équation (4) suis un processus *d'Itô* :

$$dx = a(x, t)dt + b(x, t)dz \quad (5)$$

Et que G soit une fonction de x et du temps t . Par analogie avec l'équation (5), nous pouvons écrire :

$$\Delta G = \frac{\partial G}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial G}{\partial t} \Delta t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} \Delta x^2 + \frac{\partial^2 G}{\partial x \partial t} \Delta x \Delta t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial t^2} \Delta t^2 + \dots \quad (6)$$

L'équation (5) peut être réécrite en temps discret sous la forme :

$$\Delta x = a(x, t) \Delta t + b(x, t) \varepsilon \sqrt{\Delta t}$$

Ou, plus simplement, si on ne rappelle pas les arguments des fonctions a et b :

$$\Delta x = a \Delta t + b \varepsilon \sqrt{\Delta t} \quad (7)$$

Cette équation révèle une importante différence entre la situation de l'équation (6) et celle de l'équation (3). Quand un passage à la limite était utilisé pour passer de l'équation (3) à l'équation (4), les termes en Δx^2 étaient négligés puisqu'ils étaient d'ordre deux. Par contre, pour l'équation (7), nous avons :

$$\Delta x^2 = b^2 \varepsilon^2 \Delta t + \text{des termes d'ordre supérieur à 1 en } \Delta t \quad (8)$$

Ceci montre que le terme contenant Δx^2 dans l'équation (6) a une composante d'ordre 1 (en Δt) qui ne peut être ignorée.

Comme la variance d'une loi Normale standard est égale à 1, on a :

$$E(\varepsilon^2) - [E(\varepsilon)]^2 = 1$$

Où E est l'opérateur d'espérance. Puisque $E(\varepsilon) = 0$, c'est donc que $E(\varepsilon^2) = 1$. L'espérance de $\varepsilon^2 \Delta t$ est donc égale à Δt . On peut montrer que la variance de $\varepsilon^2 \Delta t$ est d'ordre Δt^2 et que, par conséquent, $\varepsilon^2 \Delta t$ peut être considéré comme non aléatoire et égal à son espérance Δt lorsque Δt tend vers zéro. Il découle de l'équation (8) que Δx^2 devient non stochastique et égal à $b^2 \Delta t$ quand Δt tend vers zéro. En passant à la limite sur Δx et Δt dans l'équation (6) et en utilisant ce dernier résultat, nous obtenons :

$$dG = \frac{\partial G}{\partial x} dx + \frac{\partial G}{\partial t} dt + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} b^2 dt \quad (9)$$

C'est la relation du lemme *d'Itô*. Si nous substituons à dx sa valeur donnée par l'équation (5), on obtient :

$$dG = \left(\frac{\partial G}{\partial x} a + \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} b^2 \right) dt + \frac{\partial G}{\partial x} b dz$$

Qui est le résultat souhaité¹⁰.

1.4. Cointégration et modèle à correction d'erreur

Le point de départ de la théorie de la cointégration réside dans le fait que de nombreuses séries macroéconomiques et financières sont non stationnaires. Or, si l'on applique les méthodes habituelles, deux principaux problèmes surgissent :

- Le problème des régressions fallacieuses (en anglais *spurious regressions*). Soient X_t et Y_t deux séries intégrées d'ordre 1 suivant chacune une marche aléatoire :

$$X_t = X_{t-1} + u_t$$

$$Y_t = Y_{t-1} + v_t$$

Où u_t et v_t sont deux bruits blancs indépendants. Si l'on effectue la régressions $Y_t = \alpha + \beta X_t + \varepsilon_t$, on devrait avoir $\beta = 0$. En effectuant des simulations de Monte Carlo, on trouve que β est significativement différent de zéro. En d'autres termes, X_t apparaît comme une variable explicative de Y_t , ce qui n'a aucun sens puisque, par hypocoours, les deux séries sont indépendantes. En effet, si Y_t est $I(1)$, cela signifie que, sous l'hypocoours nulle, v_t sera aussi $I(1)$. Or, on sait que les tests usuels de significativité des coefficients reposent sur l'hypocoours de bruit blanc des résidus, hypocoours qui n'est pas vérifiée ici.

- Certaines lois asymptotiques ne sont plus valables.

La modélisation *ARMA* n'est valable que pour des séries stationnaires. Si les séries ne sont pas stationnaires stochastiquement, on a vu que les différencier suffisait à les rendre stationnaires. Cette opération de différenciation a cependant deux limites principales :

- Elle ne prend en compte que les changements intervenus d'une période sur l'autre. Les relations entre les niveaux des variables ne sont pas étudiées. On masque alors les propriétés de long terme des séries.
- Si des relations stables existent à long terme entre des variables, on parle de relations de cointégration. Les modèles classiques, tels que les processus *ARMA*, sont incapables d'en rendre compte. Pour cela il faut utiliser une classe particulière de modèles, directement liés à la théorie de la cointégration : les modèles à correction d'erreur.

¹⁰ Hull .J (2007). - Options, futures et autres actifs dérivés -. Edition Pearson Education. France. Page 284.

La théorie de la cointégration permet d'étudier des séries non stationnaires mais dont une combinaison linéaire est stationnaire. Elle permet ainsi de spécifier des relations stables à long terme tout en analysant conjointement la dynamique de court terme des variables considérées¹¹.

1.4.1. Définition de la cointégration

Si X_t et Y_t sont deux séries $I(d)$ alors en général la combinaison linéaire z_t :

$$z_t = X_t - aY_t$$

Est aussi $I(d)$.

Cependant, il est possible que z_t ne soit pas $I(d)$ mais $I(d - b)$ où b est un entier positif. Dans ce cas X_t et Y_t sont dites cointégrées. a est le paramètre de cointégration et le vecteur $[1, -a]$ est le vecteur de cointégration.

Le cas le plus étudié correspond à : $d = b = 1$. Ainsi, deux séries non stationnaires ($I(1)$) sont cointégrées s'il existe une combinaison linéaire stationnaire ($I(0)$) de ces deux séries.

L'idée sous-jacente est la suivante. A court terme, X_t et Y_t peuvent avoir une évolution divergente, mais elles vont évoluer ensemble à long terme. Il existe donc une relation stable à long terme entre X_t et Y_t . Cette relation est appelée relation de cointégration ou encore relation de long terme. Elle est donnée par $X_t = aY_t$ (soit $z_t = 0$). A long terme, les mouvements similaires de X_t et Y_t ont tendance à se compenser de sorte à obtenir une série stationnaire. z_t mesure donc l'ampleur du déséquilibre entre X_t et Y_t et est appelée « erreur d'équilibre ». Les exemples correspondant à une telle situation sont nombreux en économie. On peut notamment penser à la relation entre consommation et revenu, à celle liant les taux d'intérêt à court et long terme, à celle existant entre les indices des bourses internationales.

1.4.2. Présentation des modèles à correction d'erreur

Les modèles à correction d'erreur, permettent de modéliser les ajustements qui conduisent à une situation d'équilibre de long terme. Ce sont des modèles dynamiques qui intègrent à la fois les évolutions de court terme et de long terme des variables.

Soient X_t et Y_t deux variables $CI(1,1)$. Le modèle à correction d'erreur s'écrit comme suit :

¹¹ Lardic .S, Mignon .V (2002). – Econométrie des séries temporelles macroéconomiques et financières -. Edition Economica. France. Page 211-212.

$$\begin{cases} \Delta X_t = \gamma_1 z_{t-1} + \sum_i \beta_i \Delta x_{t-i} + \sum_j \delta_j \Delta Y_{t-j} + d_1(L) \varepsilon_{x_t} \\ \Delta Y_t = \gamma_2 z_{t-1} + \sum_i \beta'_i \Delta x_{t-i} + \sum_j \delta'_j \Delta Y_{t-j} + d_2(L) \varepsilon_{y_t} \end{cases}$$

Où ε_{x_t} et ε_{y_t} sont deux bruits blancs. $z_t = X_t - aY_t$ est le résidu de la relation de cointégration entre X_t et Y_t . d_1 et d_2 sont des polynômes finis en L .

La différence par rapport à un modèle VAR usuel réside dans la présence de la variable z_{t-1} . Ces coefficients γ_i ($i = 1, 2$) représentent la force de rappel vers la cible de long terme, donnée par la relation de cointégration. On doit avoir $\gamma_i < 0$ pour $i = 1, 2$ et $|\gamma_1| + |\gamma_2| \neq 0$ sinon il n'existe pas de phénomène de retour à l'équilibre. Le modèle à correction d'erreur permet d'intégrer les fluctuations de court terme (représentées par les variables en différence première) autour de l'équilibre de long terme (donné par la relation de cointégration).

Le modèle à correction d'erreur décrit un processus d'ajustement. Il combine deux types de variables :

- Des variables en différence première (stationnaires) qui représentent les fluctuations de court terme ;
- Des variables en niveau, ici une variable z_t , combinaison linéaire stationnaire de variables non stationnaires, qui assure la prise en compte du long terme.

En conséquence, tous les termes intervenant dans un modèle à correction d'erreur sont stationnaires¹².

¹² Engle .F-R, Granger .C-W-J (1987) - Cointegration and error correction: representation, estimation and testing -. *Economica*. University of Oxford, Oxford. Grande Bretagne. Pages 251 – 276.

Chapitre N°2 : L'actuariat de l'assurance non-vie

Une compagnie d'assurance se distingue d'une entreprise traditionnelle du fait de l'inversion du cycle d'exploitation. En effet, les assurés paient une prime pour être couverts sur une période à venir pour d'éventuels sinistres. Ainsi, il est essentiel que la compagnie d'assurance soit toujours en mesure de payer ses engagements envers les assurés. Pour cela, elle devra constituer une provision technique correspondant à son engagement et disposant des fonds propres lui garantissant sa solvabilité.

L'actuel référentiel « Solvabilité I », veille à ce que les compagnies d'assurance constituent des provisions techniques prudentes. Dans le souci d'une bonne évaluation de ces provisions tenant compte les enjeux économiques et financiers entourant le monde des assureurs, la Commission Européenne a entamé une réforme portant sur l'amélioration des normes existantes.

En 2009, la réforme engagée s'est concrétisée par l'adoption du Parlement Européen de la directive « Solvabilité II ». Cette réforme, qui place la gestion des risques au cœur du système prudentiel des assurances, se caractérise par de nouvelles *exigences quantitatives* visant à mieux identifier et mesurer les risques portés par les assureurs. Ces exigences incluent le calcul des capitaux propres et celui *des provisions techniques, s'appuyant sur la notion de « Best Estimate »*.

Dans ce chapitre, nous consacrons la première section à la présentation des provisions techniques en assurance non-vie, puis nous nous attachons dans la deuxième section à décrire le contexte dans lequel s'inscrit la réforme entamée de la solvabilité en mettant en évidence les grandes lignes de la réglementation actuelle « Solvabilité I » et la nécessité du passage vers une un autre référentiel « Solvabilité II ». Et enfin, au niveau de la troisième section, nous abordons une nouvelle approche des provisions techniques sous « Solvabilité II ».

2.1. Le provisionnement en assurance non-vie : Définitions et généralités

Au 31 décembre de chaque année, date de clôture des comptes, les compagnies d'assurances doivent évaluer les engagements pris envers leurs assurés et bénéficiaires de contrat. Ces évaluations sont équivalentes pour les compagnies d'assurance aux travaux d'inventaire effectués dans les sociétés commerciales ou industrielles.

Les engagements techniques de l'assureur, appelés *Provisions Techniques*, sont une charge de l'exercice représentant les montants des indemnités à verser aux assurés et par conséquent, figurent au passif du bilan. Cette rubrique du bilan revêt une grande importance en matière d'assurance. En effet une évaluation insuffisante de ces provisions aurait un impact sur la sincérité du résultat de la société.

2.1.1. Définitions

En échange des primes perçues, l'assureur inscrit au passif de son bilan un engagement ; dette. Les provisions techniques figurant au passif du bilan représentent les engagements de la compagnie porteuse du risque vis-à-vis des assurés ou des tiers lésés. Elles occupent une place importante dans le bilan, jusqu'à 80% du passif (Leur part varie selon qu'il s'agit d'une assurance dommages ou vie).

Tab 2.1- Bilan simplifié d'une compagnie d'assurance

Actif	Passif
Immobilisations (Placements) 70% à 80 %	Fonds propres (10% à 20%)
Part des réassureurs dans les provisions techniques (10% à 20%)	Provisions Techniques (brutes de réassurance) (60% à 80%)
Créances et autres actifs (10% à 20%)	Dettes et autres passifs (10% à 20%)

Source : Elaboré par nos soins.

D'un point de vue comptable, la provision technique est une « somme affectée par l'entreprise à la couverture d'une charge ou d'une perte partielle virtuelle, future ou éventuelle ».

G.Simonet (1998)¹ a défini dans son ouvrage relatif à la comptabilité des entreprises d'assurances, les provisions comme étant : « les provisions destinées à permettre le règlement intégral des engagements pris envers les assurés et bénéficiaires de contrats. Elles sont liées à la technique même de l'assurance, et imposées par la réglementation ».

Une autre définition peut être donnée aux provisions techniques : « Ce sont des sommes mises de côté par l'assureur pour faire face à ses obligations vis-à-vis de ses assurés et bénéficiaires des contrats d'assurance conclus² ». Les provisions techniques constituent donc

¹ G.Simonet (1998), -Comptabilité des entreprises d'assurances-, 5^{ème} édition édition, l'Argus de l'assurance, Paris.

² Charre Serveau (M) et Landel (J), lexique juridique et pratique des termes d'assurance.

pour une compagnie, la matérialisation comptable de la dette que l'assureur a contractée envers les assurés en contrepartie des primes collectées. *Les sous-provisionner revient donc à sous-évaluer les engagements réglementés de l'assureur et, par symétrie, les droits des assurés*³.

Parmi toutes les définitions présentées ci-dessus nous pouvons retenir qu'une provision est définie comme : « *un passif certain dont le montant et l'échéance sont incertains* ».

2.1.2. Typologie des provisions techniques

Il existe différentes catégories des provisions techniques selon la nature de l'activité exercée par l'entreprise. Les principales réserves sont les suivantes :

- ✓ *En assurance vie* : les provisions mathématiques ;
- ✓ *En assurance de dommages* : Nous distinguons entre plusieurs types de provisions, dont les trois principales sont présentées comme suit :
 - La provision pour prime non acquise (PPNA) ;
 - La provision pour risque en cours (PREC) ;
 - La provision pour sinistres à payer (PSAP).

Nous tenons à préciser que dans le cadre de ce cours, nous nous limitons aux provisions pour sinistres à payer en assurances dommages.

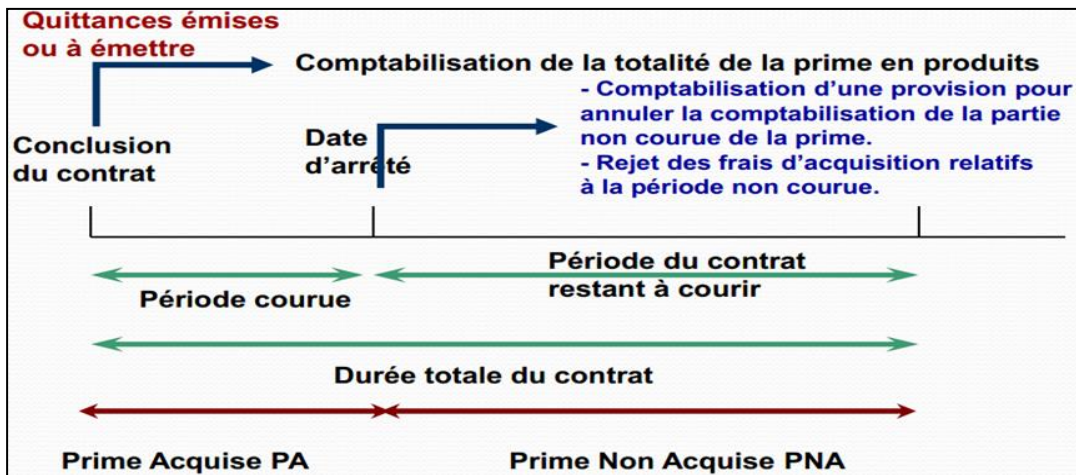
a. La Provision pour Primes Non Acquises « PPNA »

Elle est calculée en prorata temporis, reprenant la part des primes émises se rapportant à l'exercice comptable suivant. Cette provision naît du fait que la plupart des contrats d'assurance non-vie prévoient une durée de garantie d'un an, et la prime est payée d'avance. Chaque prime est donc répartie entre les exercices comptables au cours desquels elle donne droit à couverture. Un assuré qui s'acquitte de sa prime annuelle le 1er mars donnera lieu au report de 2/12 du montant de la prime sur l'exercice suivant, sous la forme d'une PPNA. Seule la quote-part des primes afférente à l'exercice en cours apparaît dans les primes acquise.

Le mécanisme de cette provision peut être schématisé comme suit :

³ Faye Mamadou, « Confection et analyse des Etas Cima IARD et Vie », Fanaf/IIA de formation des cadres d'assurances 06-10 Avril 2009.

Fig 2.1 Représentation illustrative d'une PPNA



✓ *Mode de calcul de :*

- *La prime acquise:*
- *La PPNA :*

Le calcul de la provision pour primes non acquises est directement défini par la réglementation. Compte tenu du nombre de contrats, il est courant que cette provision fasse l'objet d'un calcul automatisé intégré au système d'information de la compagnie (police par police).

b. La Provision pour Risque En Cours « PREC »

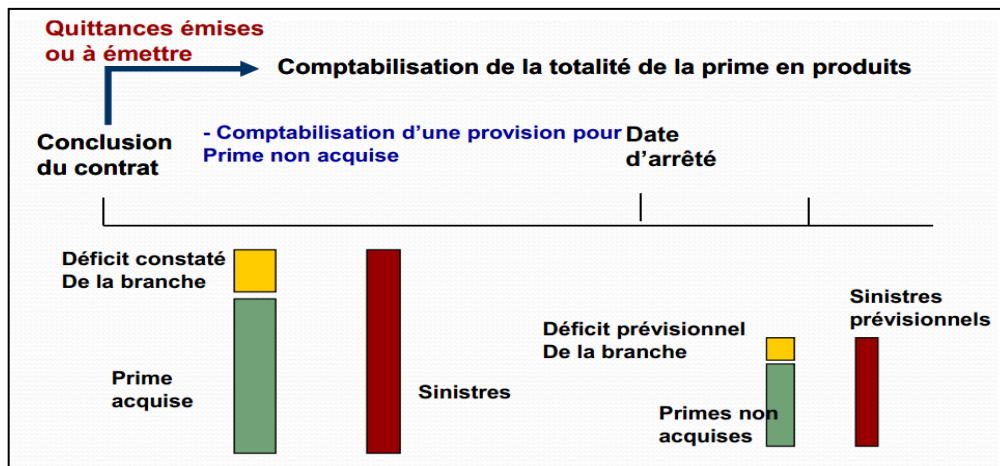
Elle a pour objet de pallier une éventuelle insuffisance des tarifs. Il s'agit ici de se prémunir contre un risque de modèle (modèle de tarification) : si le modèle retenu par l'actuaire s'avère erroné, ou s'il apparaît que des risques inconnus lors de la tarification, tombent sous le coup de la

$$\left[\begin{aligned} \text{Prime acquise de l'année} &= \\ \text{Prime émise durant l'année } N &+ \text{ Réserves de primes au 01/01 de l'année } N \\ &- \text{ Réserves de primes au 31/12 de l'année } N \end{aligned} \right]$$

garantie, l'assureur s'expose à des pertes systématiques, qu'il reflète dans son bilan sous la forme d'une PREC.

Le principe de cette provision est illustré comme suit :

Fig 2.2 Représentation illustrative d'une PREC



✓ **Mode de calcul d'une PREC :**

Cette provision est calculée, séparément pour chaque catégorie selon la formule suivante :

Les frais généraux correspondent aux frais, autres que ceux relatifs aux émissions et aux règlements de sinistres. Le ratio S/P utilisé est le rapport moyen des sinistres aux primes des deux derniers exercices.

c. La Provision pour Sinistres à Payer « PSAP »

Elle concerne les sinistres déjà survenus à la date d'inventaire mais qui ne sont pas encore réglés. Deux types de PSAP doivent être distingués: celles qui concernent des garanties en cours pour lesquelles les sinistres ne sont pas encore révélés, et la provision correspondant à des

$$PREC = \text{Provision de primes à reporter} \times \left[\frac{S}{P} + \left(\frac{1}{2} \times \left(\frac{\text{Frais généraux}}{\text{primes acquises}} \right) - 1 \right) \right]$$

sinistres survenus, mais non encore payés. Il y a lieu de distinguer aussi entre :

- ✓ les sinistres considérés réglables mais non encore payés : le montant du sinistre est déterminé, mais le paiement correspondant n'est pas encore (totalemment) effectué ;
- ✓ Les sinistres non encore réglés :
 - soit le sinistre est déclaré et il reste à en évaluer le montant final ;
 - Soit il est survenu mais pas encore déclaré et il faut estimer le nombre et le coût de tels sinistres (déclarés « *tardifs* » ou « *IBNR* » pour l'Anglais "*Incurring But Not Reported*"). Le cas typique d'un sinistre *IBNR* est l'incendie touchant un hôtel abritant les fêtes de la fin d'année. S'il survient avant douze coups de minuit, ce sinistre doit être imputé à l'année qui s'achève, même s'il ne sera déclaré qu'au début de l'année suivante.

La nature aléatoire des engagements de l'assureur et les cadences de règlement parfois très longues rendent les évaluations comptables difficiles : s'il est aisé d'enregistrer un paiement effectué, il est beaucoup plus ardu de prévoir des paiements futurs dont les montants sont *aléatoires*. Dans certains cas, l'évaluation des provisions tient plus de l'art (savoir évaluer) que de la science exacte (la mathématique actuarielle).

Bien évidemment, ces provisions pourront être par la suite réévaluées à la hausse ou à la baisse pour tenir compte d'informations complémentaires (un rapport d'expertise additif, facture d'acquisition,...etc). Les paiements effectués seront imputés aux provisions constituées à cet effet⁴.

N.B : En Algérie, les provisions techniques sont régies par plusieurs textes réglementaires, notamment l'ordonnance 95-07 du 25 janvier 1995 modifiée par la loi 06-04 du 20 février 2006 et le décret exécutif n° 13-114 du 28 mars 2013 relatif aux engagements réglementés des sociétés d'assurance et/ou de réassurance.

Les provisions pour sinistre à payer sont calculées (selon l'article n°6 du décret exécutif n°95-342):

- Exercice par exercice et dossier par dossier (la méthode dossier par dossier) ;
- Si le montant de l'indemnité a été fixé par une décision de justice, l'assureur doit constituer une provision au moins égale à cette indemnité, diminuée, s'il y a lieu des avances déjà versées ;
- Pour leur montant brut, sans tenir compte des recours à exercer et des sinistres mis à la charge de la réassurance (brutes de réassurance) ;
- Le réassureur procède de la même manière pour ce qui concerne ses acceptations.

Remarque:

Théoriquement, en assurance dommages outre l'automobile, la PSAP est relativement faible, car les règlements pouvant intervenir rapidement ;

En assurance automobile, la PSAP est très lourde, les accidents les plus coûteux demandent de longs délais de règlements, notamment pour déterminer les responsabilités ou pour attendre la consolidation d'une blessure.

⁴ Michel Denuit, mathématiques de l'assurance non-vie, Tome 1, page 19.

2.1.3. Les méthodes réglementaires de provisionnement

Le décret exécutif n°95-342 de 30/10/1995 relatif aux engagements réglementés prévoit quatre méthodes pour l'évaluation des provisions pour sinistres restant à payer.

$$\text{Coût moyen} = \frac{\text{coût total des sinistres cloturés au cours des trois derniers exercices}}{\text{nombre dossiers réglés et clôturés pendant ce temps}}$$

$$\text{Provision} = (\text{Coût moyen} \times \text{nombre de dossiers déclarés}) - \text{Règlements cumulés}$$

a. La méthode dossier par dossier

Cette méthode constitue un cours long et délicat. Chaque sinistre numéroté en continu dès que l'assureur en a connaissance, fait l'objet d'une évaluation basée sur les documents en sa possession (déclaration de sinistre, procès verbaux des autorités, rapport d'expertise, réclamation de la partie adverse, jugement,etc.). Et lorsqu'une indemnité a été fixée par une décision définitive de justice, la provision doit être au moins égale à cette indemnité.

Au moment de l'inventaire, tous les sinistres survenus et déclarés sont évalués individuellement. A la somme de ces évaluations dossier par dossier est ajoutée une estimation forfaitaire des tardifs (sinistres survenus non encore déclarés à la date de l'inventaire « IBNR »). Par ailleurs, les sinistres des années précédentes encore en suspens sont révisés, et leurs évaluations éventuellement corrigées pour prendre en compte de nouvelles informations.

Le total de ces différents éléments, majoré d'un chargement pour frais de gestion, constitue la provision pour sinistres restant à payer inscrite au passif du bilan de l'entreprise.

b. La méthode des coûts moyens

Elle est fondée comme son nom l'indique, sur les coûts moyens des sinistres des exercices précédents, le coût moyen tel qu'il résulte des statistiques est d'autant plus fiable que la fraction des sinistres définitivement réglés d'un exercice donné est plus importante. Mais si l'on remonte trop loin dans le temps, on risque de s'appuyer sur une population conditionnée par un autre environnement économique, administratif et jurisprudentiel (coûts de réparation différents, inflation, ...etc). Des correctifs sont donc nécessaires.

La méthode des coûts moyens ne peut pas s'appliquer qu'à un ensemble de sinistres survenus à la même année, suffisamment nombreux et homogènes, par exemple aux dommages subis à l'année x par des véhicules à moteurs de moins quatre roues.

c. La méthode de cadence de règlement

Elle consiste à évaluer la charge de sinistres survenus au cours d'un exercice, en partant des paiements effectués et de la cadence de règlement. Cette dernière est le rapport entre les sinistres déjà payés et la charge totale de sinistre.

d. La méthode de blocage des primes

Elle est basée sur le tarif. La provision pour sinistre à payer au titre d'un exercice de survenance déterminé est obtenue par différence entre les primes de l'exercice d'une part et les dépenses correspondantes déjà effectuées d'autre part : sinistres payés, frais d'acquisition et de gestion.

La provision ne sera suffisante que si le tarif est suffisant. Cette méthode suppose la permanence du taux de sinistres, elle reporte dans le futur tout jugement de résultat, ce qui constitue ses limites, mais elle peut être un palliatif en l'absence des données.

2.2. Solvabilité des compagnies d'assurance et provisionnement : De « Solvabilité I » à « Solvabilité II »

L'assureur est tenu d'être solvable. Dit autrement, être en mesure de faire face aux engagements pris vis-à-vis de ses assurés. Pour pouvoir assurer leur couverture, il doit alors *tarifier et provisionner prudemment par une mutualisation des risques*. Cependant, il existe des risques non mutualisables prudemment ce qui rend sa solvabilité non évidente. L'assureur a donc besoin d'une marge de solvabilité sous forme des fonds propres, en plus des provisions.

Le nouvel environnement réglementaire, posé par la réforme "Solvabilité II" qui est entré en vigueur le 01 janvier 2016 et qui a remplacé le système actuel "Solvabilité I", a réformé progressivement mais profondément le monde de l'assurance. Ces deux directives ont le même but principal, qui est de garantir aux assurés que les compagnies d'assurances pourront honorer leurs engagements à leur égard. Mais, la réglementation "*Solvency II*" est plus sophistiquée en matière de normes, essaie de combler les faiblesses de "*Solvency I*".

2.2.1. Les risques liés à l'activité d'assurance

Dans le cadre de l'exercice de son activité, l'assureur encourt les risques suivants :

- **Le risque de souscription** : il s'agit du risque de perte ou de changement défavorable de la valeur des engagements d'assurance, en raison d'hypothèses inadéquates en matière de tarification et de *provisionnement* ;

- **Le risque de marché** : ce risque est lié au niveau ou à la volatilité de la valeur de marché des instruments financiers ayant un impact sur la valeur des actifs et des passifs de l'entreprise concernée. Il reflète toute inadéquation structurelle entre les actifs et les passifs, en particulier au regard de leur durée⁵. L'exposition au risque de marché est mesurée par l'impact des mouvements de variables financières, comme le prix des actions, les taux d'intérêts, le prix de l'immobilier, et les taux de change ;
- **Le risque de crédit** : c'est le risque de perte ou de changement défavorable de la situation financière résultant de fluctuations affectant la qualité de crédit d'émetteurs de valeurs mobilières, de contreparties ou de tout autre débiteur et auquel les entreprises d'assurance ou de réassurance sont exposées sous forme de risque de contrepartie (le principal pour les entreprises d'assurance étant le risque de défaut des réassureurs);
- **Le risque opérationnel** : il s'agit du risque de perte résultant de procédures internes inadéquates ou défailtantes, ou de membres du personnel et de systèmes, ou d'événements extérieurs. Cette définition recouvre donc notamment les erreurs humaines, les fraudes et malveillances, les défailtances des systèmes d'information, les problèmes liés à la gestion du personnel, les litiges commerciaux, etc.

2.2.2. Le contexte actuel « Solvabilité I » : Présentation et critiques

a- Présentation :

Les règles de solvabilité étant devenues obsolètes avec l'asymétrie de l'information, le marché financier ayant évolué. Dans ce cas, toutes les conditions étaient réunies pour réviser les anciennes directives. La réforme « Solvabilité I » mise en place le 05 mars 2002 constitue le régime de solvabilité actuel. Elle a débuté par l'application de deux directives européennes celle de 1973 pour l'assurance non-vie et celle de 1979 pour l'assurance vie.

⁵ La durée est la moyenne des durées pondérées par les flux (principal et intérêts) actualisés correspondants.

Tab 2.2- Bilan simplifié dans le cadre de Solvabilité I

Actifs	Marge de Solvabilité
	Provisions Techniques

Source : Elaboré par nos soins.

Dans le cadre de la réglementation solvabilité I, les compagnies d'assurance doivent respecter trois contraintes sur leurs bilans :

- ✓ Les provisions techniques doivent être prudentes, ce qui suppose des hypothèses de calcul prudentes ;
- ✓ Une comptabilisation prudente des actifs, qui, à leur tour, doivent permettre le règlement intégral des engagements en particulier les engagements réglementés (*principe de représentation*);
- ✓ Les fonds propres doivent être supérieurs à un minimum appelé exigence de marge ou *marge de solvabilité*.

b. Critiques

La réglementation « Solvabilité I » est sujet à de nombreuses critiques. Elles sont de deux ordres : quantitatifs et qualitatifs⁶.

➤ Critiques qualitatives:

- En présence d'une inversion du cycle de production et d'asymétrie d'information, la solvabilité I ne peut pas concevoir un contrôle prudentiel caractérisé par une surveillance financière étroite permettant de garantir une gestion saine de l'entreprise dans le respect des intérêts des assurés. Dans la « Solvabilité I », l'aspect qualitatif est négligé, il n'y a pas de surveillance exercée sur le contrôle interne ;
- L'Union Européenne a remis en cause la directive « Solvabilité I » du fait qu'elle s'est avérée moins complète. Ce qui a nécessité une modernisation et une

⁶ Evra Benro (2008), - « Solvabilité II » : Calibrage des MCR/SCR dans le contexte QIS4 rapport de stage final - 2007/2008.

harmonisation au niveau international de cette dernière (mêmes normes à respecter pour toutes les entreprises);

- Le système ne répond pas aux normes internationales telles que "IAS-IFRS".

➤ **Critiques quantitatives:**

- « Solvabilité I » se base sur une vision rétrospective sous l'hypothèse que le passé reflète le futur, ce qui n'est pas le cas en réalité ;
- Elle ne tient pas en compte des profils spécifiques de chaque type de risques de la compagnie et les appréhende globalement (peu importe la qualité du portefeuille, diversifié ou concentré, la marge exigée est la même alors, comme nous le savons, un portefeuille diversifié présente moins de risque !) ;
- la prudence en matière de provisionnement pénalise les entreprises qui sur-provisionnent contrairement à celles qui sous-provisionnent (la première catégorie de compagnies immobilise plus de capital dans les provisions techniques à l'inverse de la deuxième catégorie).

Afin de créer un véritable marché unique au niveau européen, il était nécessaire de moderniser et d'harmoniser les règles prudentielles et d'homogénéiser les pratiques des autorités de contrôle à travers une nouvelle directive : « Solvabilité II ».

2.2.3. Le nouveau référentiel « Solvabilité II »

a. Présentations et objectifs

Le système actuel de solvabilité s'est enrichi au cours de temps du fait de l'identification de nouveaux risques et la mise en place de mesures destinées à s'en prémunir.

A la lumière des évolutions des techniques de gestion des risques, la Commission Européenne a proposé une révision du droit des assurances au sein de l'Union Européenne dans le but d'améliorer la protection des assurés et de renforcer la compétitivité des assureurs européens à l'échelle internationale. Cela passait par la création d'un système harmonisé prenant en compte les risques réels pesant sur les compagnies d'assurance.

L'objectif poursuivi par cette nouvelle directive est d'encourager les organismes d'assurance à mieux connaître et évaluer leurs risques (présentés ci-haut) notamment en adaptant les exigences réglementaires aux risques que les entreprises encourent dans leur activité⁷.

Les principaux objectifs de la « Solvabilité II » se présentent comme suit :

⁷ MARKT/2095/99-FR « Révision de la position financière globale d'une entreprise d'assurance, exercice de Solvabilité II ».

- Protéger les preneurs d'assurance ;
- Assurer la compétitivité, la transparence et la cohérence ;
- Fixer une marge de solvabilité mieux adaptée aux risques réellement encourus ;
- Prendre en compte les évolutions du marché ;
- Fonder le système sur des approches comptables communes.

Ce nouveau système doit fournir aux autorités de contrôle la possibilité d'évaluer au mieux la solvabilité des compagnies d'assurance reposant sur une approche prospective. C'est pour cette raison, les principaux enjeux de cette réforme sont les suivants :

- Assurer une application harmonisée de la réforme dans tous les pays de l'Espace Economique Européen ;
- Renforcer la compétitivité des assureurs pour mieux protéger les assurés ;
- Conduire les entreprises à mieux connaître et gérer leurs risques ;
- Faciliter la supervision de la solvabilité des compagnies d'assurance par les autorités de contrôle.

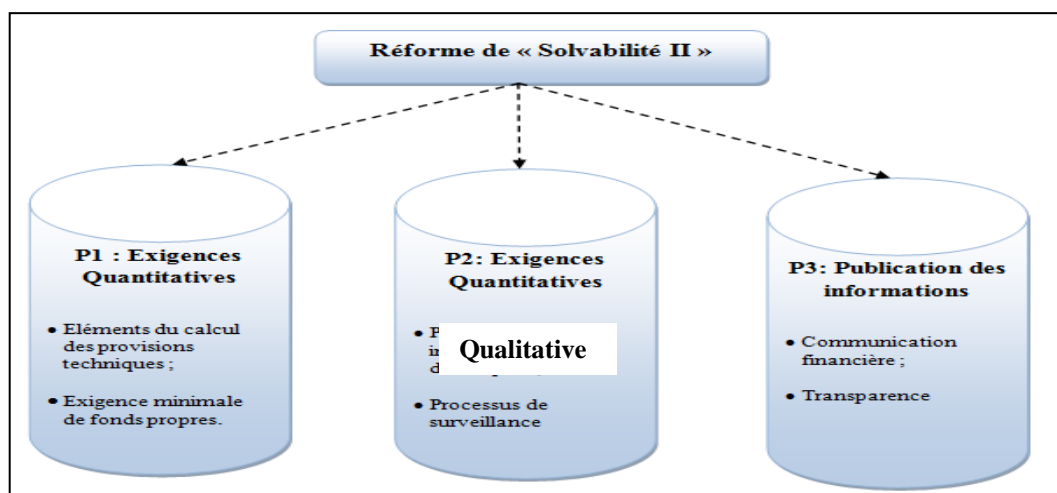
a. Structure du référentiel « Solvabilité II »

La directive « Solvabilité II » est organisée en trois piliers :

- ✓ **Pilier 1:** Exigences quantitatives;
- ✓ **Pilier 2:** Exigences qualitatives ;
- ✓ **Pilier 3 :** La diffusion de l'information.

Cette architecture en trois piliers est inspirée de la réforme pour le secteur bancaire « Bâle II ».

Fig 2.3- Architecture de Solvabilité II



i. Exigences quantitatives

Le premier pilier a pour objectif de définir des seuils quantitatifs aussi bien pour les fonds propres que pour les provisions techniques.

- **Fonds propres** : deux seuils en matière de capital sont instaurés :
 - ✓ **Capital Minimum Requis** (*Minimum Capital Requirement* « MCR »): Le Capital Minimum Requis représente le niveau en-dessous duquel les fonds propres ne doivent pas tomber sous peine d'intervention de l'autorité de contrôle, et retrait d'agrément si des mesures d'augmentation de capital ne sont pas réalisées immédiatement. Le MCR peut se définir comme le niveau de fonds propres en-dessous duquel les intérêts des assurés seraient sérieusement menacés si la compagnie était autorisée à poursuivre son activité ;
 - ✓ **Capital de Solvabilité Requis** (*Solvency Capital Requirement* « SCR »): Le Capital de Solvabilité Requis est le niveau de fonds propres nécessaire à la compagnie pour couvrir des pertes imprévues. Son calcul est basé sur une probabilité de ruine de 0,5% (*Value-at-Risk* de 99,5%) à un horizon d'un an, ce qui permet de faire face et d'honorer les engagements pour 199 cas sur 200. Le calcul du SCR se base sur le profil de risque réel de la compagnie et intègre les principaux risques auxquels elle est soumise, à savoir le *risque de souscription*, le *risque de marché*, le *risque de défaut* et le *risque opérationnel*.
- **Provisions Techniques** : Sous Solvabilité II, les provisions techniques seront à présent calculées par un best estimate ajouté d'une marge de risque.
- ✓ **Contrôle de la sinistralité** : La directive « Solvabilité II » vise à harmoniser les règles de calcul des provisions techniques en y intégrant de manière quantitative et explicite une marge de prudence.

Plusieurs pistes sont envisagées, mais le principe directeur est de mesurer le risque et de choisir le montant de provisions en référence à un niveau de risque prédéterminé. Ceci nécessite d'être capable, au préalable de modéliser *la charge ultime de sinistres et de définir ce qu'est le risque*. Dans le référentiel « Solvabilité II », le niveau des provisions est fixé en référence à une mesure du risque. Par exemple, on choisira la provision qui permet de payer l'intégralité des sinistres dans 75% des cas (*Value-at-Risk* à 75%).

ii. Les exigences qualitatives

Le deuxième pilier a pour objectif de fixer des normes qualitatives concernant les procédures de surveillance de la gestion des fonds propres de façon à s'assurer que la compagnie est en mesure de calculer ou de maîtriser ses risques et de veiller à ce qu'elle soit bien capitalisée.

Les entreprises d'assurance et de réassurance doivent mettre en place un système de gouvernance efficace, pour garantir une gestion prudente de leur activité. De plus, elles devront procéder à l'évaluation de leur besoin global de solvabilité dans le cadre de leur système de gestion des risques.

Les autorités de contrôle auront un droit de regard sur le fonctionnement et la gestion de la compagnie d'assurance ainsi que sur l'ensemble de ses risques.

iii. La diffusion de l'information

Le troisième pilier a pour objectif de définir l'ensemble des informations détaillées que les autorités de contrôle jugeront nécessaires pour exercer le pouvoir de surveillance.

2.3. Nouvelle approche d'évaluation des provisions techniques sous « Solvabilité II »

Le référentiel Solvabilité II a fait l'objet de nombreux débats entre les entreprises d'assurance, les organismes de contrôle et les instances européennes. La question des provisions techniques est celle qui a généré le plus de discordes.

L'objectif de cette section est d'aborder l'évaluation des provisions techniques sous « Solvabilité II ».

2.3.1. Juste valeur et risque de provisionnement

a. Juste valeur

La directive « Solvabilité II » constitue un changement considérable dans la façon d'établir un bilan : elle imposera aux assureurs d'évaluer leurs actifs ainsi que leurs passifs de manière cohérente avec le marché, c'est le principe de la « *fair value* » (juste valeur) qui est au centre du nouveau dispositif « Solvabilité II ». Cette juste valeur est définie comme *le montant auquel un actif ou un passif peut être échangé entre les parties bien informées dans le cadre d'une transaction équilibrée*⁸.

⁸ Mathieu Gatamel et Guillaume Gorge, -Valorisation du risque IARD et nouvelles norme comptables-, contribution sur le thème relatif au rôle des actuaires vis-à-vis des nouvelles normes comptables.

Dans ce cadre, les provisions, qui représentent l'essentiel du passif des assureurs, devront être évaluées sur la base de leur valeur de sortie actuelle (valeur pour laquelle les engagements pourraient être cédés à une autre partie prenante). Leur calcul devra également être cohérent avec les informations fournies par les marchés financiers, et utiliser les données disponibles sur les risques techniques d'assurance et de réassurance.

La réglementation « Solvabilité II » indique que les provisions techniques devront être calculées d'une manière prudente, fiable et objective. Techniquement, le calcul des provisions techniques se décompose en un calcul de « *Best Estimate* » auquel s'ajoute une « *marge de risque* ».

✓ *La meilleure estimation*

Le plus souvent utilisée dans sa forme anglaise « *Best Estimate* » correspond à « la valeur actuelle probable des flux futurs de trésorerie, c'est-à-dire la moyenne des paiements futurs actualisés ».

Les flux de trésorerie en question sont essentiellement constitués par les paiements de sinistres et des frais afférents à leur gestion.

Plusieurs notions méritent d'être soulignées dans cette définition :

- **Moyenne** : le *Best estimate* est défini comme l'estimation au plus juste du montant des provisions, sans marge de prudence, contrairement au montant des provisions établi dans le référentiel Solvabilité I ;
- **Valeur probable**: la définition tient compte du fait que les flux futurs sont stochastiques et que par conséquent, une incertitude existe lors de leur évaluation ;
- **Valeur temps** : contrairement à Solvabilité I, les flux futurs sont actualisés (à l'aide d'une courbe de taux sans risque).

✓ *La marge de risque*

Elle est considérée comme étant une composante des provisions techniques destinée à garantir que leur valeur est équivalente au montant dont les entreprises d'assurance et de réassurance auraient besoin pour honorer les engagements d'assurance et de réassurance. Cette marge de risque est justifiée. En effet, un passif n'arriverait pas à trouver preneur au prix du *Best Estimate*. Un montant supplémentaire doit être ajouté afin de pouvoir qualifier l'ensemble de « valeur de marché » des engagements. C'est donc une protection des assurés en cas d'insolvabilité de l'assureur puisqu'elle permet à un tiers d'être en mesure de reprendre l'activité. Elle provient du fait que dès aujourd'hui la compagnie sait qu'elle devra immobiliser du capital les années

suivantes pour les engagements qu'elle a actuellement en portefeuille et ce jusqu'à leur extinction. La marge de risque correspond alors au coût du capital qui est nécessaire pour couvrir les risques liés à ces engagements.

b. Risque de provisionnement

L'incertitude liée à l'estimation des provisions est à l'origine du risque de provisionnement. On peut associer les facteurs d'incertitude à trois risques : le risque de volatilité, le risque d'incertitude et les événements extrêmes.

- **Risque de volatilité** : c'est un risque associé aux fluctuations aléatoires en termes de fréquence (nombre de sinistre) ou de gravité d'un événement (valeur des dommages occasionnés par le sinistre). Ce risque peut être réduit grâce à une bonne diversification du portefeuille (la loi des grands nombres assure la baisse de la volatilité du montant moyen de sinistres lorsque le nombre de risques assurés identiques et indépendants augmente).
- **Risque d'incertitude** : il correspond au risque d'une mauvaise spécification de la modélisation de la sinistralité ou d'une estimation erronée des paramètres (le modèle retenu ne décrit pas convenablement le comportement de la sinistralité). Contrairement à celui de volatilité, le risque d'incertitude n'est pas diversifiable, car il ne peut être réduit par l'augmentation de la taille du portefeuille. Ce risque peut être subdivisé en deux risques :
 - **Risque de paramétrages** : L'estimation des provisions passe par l'extrapolation des prestations futures à partir des observations passées (données historiques). Classiquement, les modèles de projection sont ajustés à partir des prestations observées. Ces modèles sont exposés à un risque d'échantillon, au sens où les historiques de prestations disponibles souvent courts contraignent à estimer leurs paramètres à partir d'un faible nombre d'observations. De façon générale, les branches sont d'autant plus exposées au risque qu'elles sont volatiles en nombre et en montant de prestations.
 - **Risque de modèle** : La capacité du modèle à estimer les prestations futures repose en fait sur le respect de deux hypothèses implicites. Tout d'abord, nous supposons que le passé est correctement modélisé : les variables explicatives de la dynamique des prestations sont pertinentes et exhaustives et la structure du modèle bien spécifiée. Après, nous considérons que les caractéristiques des prestations futures de sinistres resteront conformes au modèle. Aussi, nous postulons l'absence de changements fondamentaux ou changements de régime dans la formation des

prestations. Ces changements de régime sont imputables à de nombreux facteurs. Par exemple, des décisions réglementaires ou judiciaires influant sur le niveau moyen des prestations, des changements dans la procédure interne de gestion des sinistres ou dans la nomenclature des produits, la révision de contrats de réassurance sont autant de causes susceptibles de rendre caduque la cadence des paiements utilisée dans la projection des prestations futures.

Ces facteurs d'incertitude peuvent conduire à des changements gradués ou brutaux des paramètres réels du modèle de provisionnement. Barnett et Zehnwirth⁹ fournissent un exemple intéressant d'analyse des résidus définis par la différence entre les prestations payées et celles estimées par le modèle. Si les résidus présentent une hausse soudaine ou suivent une tendance régulière, il y a alors lieu de suspecter l'existence d'un changement de régime.

- **Evènements extrêmes** : Ils sont caractérisés par une faible fréquence et un impact désastreux (cas d'un incendie ravageant une raffinerie). Du fait de leur rareté, leur occurrence ne peut être prédite à partir de l'extrapolation d'événements plus communs. Il est difficile de leur attribuer un montant de perte probable et par extension de capital requis.

2.3.2. Evolution des provisions techniques entre « Solvabilité I » et « Solvabilité II »

En assurance dommages, l'évolution des provisions techniques entre « Solvabilité I » et « Solvabilité II » peut être décrite par les points suivants :

- ✓ Actualisation des provisions techniques (le passage des provisions techniques comptables à une valorisation *Best estimate* inclut la prise en compte de l'actualisation des *cash-flows* futurs);
- ✓ Utilisation de la meilleure estimation des flux futurs à laquelle s'ajoute la marge de risque, au lieu d'une estimation prudente (tant pour les provisions de primes que les provisions de sinistres) ;
- ✓ Transformation de la provision d'égalisation ¹⁰ en réserve (hors de la classe des provisions techniques).

Toutefois, l'analyse de l'évolution des provisions techniques entre « Solvabilité I » et « Solvabilité II » ne s'intéresse qu'au passif de l'assureur et non à l'impact global sur le bilan.

⁹ Barnett G, Zehnwirth B. (2000), -Best Estimate for reserves-, Proceedings of the Casualty Actuarial Society 87.

¹⁰ Il s'agit des montant provisionnés conformément aux dispositions légales et réglementaires permettant d'égaliser les fluctuations des taux de sinistres pour les années à venir ou de couvrir des risques spéciaux. Elle est constituée pour faire face aux évolutions de la sinistralité. Elle sert pour les risques de nature catastrophique ou pour les contrats décès groupe.

Pour une analyse prudente, la prise en compte de la réassurance est indispensable.

De plus, comme la marge de risque représente le coût du SCR jusqu'à l'extinction des passifs, elle dépend également fortement du niveau de réassurance de l'organisme. En conséquence, plus l'organisme est réassuré, moins son SCR sera élevé et moins sa marge de risque sera importante. Il est donc important de prendre en compte l'impact de la réassurance.

L'estimation des provisions techniques était depuis toujours une préoccupation aux autorités publiques et aux assureurs. Les premiers par souci de préserver les intérêts des assurés et les derniers par motif de rentabiliser leurs fonds (éviter l'immobilisation exagérée des fonds ; le surprovisionnement).

Au fil du temps, cette situation a conduit à des réformes et changements dans les modes d'évaluation de ces réserves techniques (des changements dictés par des environnements économiques et financiers particuliers).

La dernière réforme, Solvabilité II, entrera en vigueur au début de l'année prochaine. Elle se caractérise par une harmonisation du mode de calcul des provisions techniques. Cette dernière génère plus d'homogénéité dans l'appréciation des dettes techniques.

Dans Solvabilité II, les provisions techniques doivent permettre la transférabilité des engagements en cas de défaillance de l'assureur, d'où le recours à des méthodes destinées à *prendre en compte les sources d'incertitudes liées à leur estimation*.

Les méthodes que nous allons aborder sont censées capables produire des résultats répondant aux exigences réglementaires de « Solvabilité II ».

L'estimation des provisions dans le cadre de l'approche « *Best Estimate* », fait référence en premier lieu aux méthodes de calcul déterministes, basées sur l'estimation du déroulement futur des triangles de paiements, permettant de mieux appréhender les données et le déroulement temporel des règlements.

Ces méthodes reposent sur l'hypothèse de stabilité du délai s'écoulant entre la survenance d'un sinistre et le (s) règlement (s), quel que soit l'exercice de survenance, en absence d'inflation, de changement de structure de portefeuille, des garanties de contrats, et plus généralement la gestion des sinistres¹¹.

Dans ce chapitre, structuré en quatre sections, nous consacrerons la première à la formalisation du problème de provisionnement. Au cours des trois dernières sections, nous

¹¹ Michel Denuit, Arthur Charpentier (2005), -Mathématiques de l'assurance non vie Tome 2 : Tarification et provisionnement-, Edition Economica, paris, page 344.

présenterons trois méthodes déterministes : « *Chain Ladder* », « *London Chain* » et « *Grossing-up* ».

2.4. Évaluation déterministe des provisions techniques

2.4.1. Formulation du problème du provisionnement

Le décalage entre les dates de survenance et du règlement de sinistre, fait que la réglementation impose aux compagnies d'assurance de détenir des fonds (représentant les paiements futurs) afin de faire face à leurs engagements. Le provisionnement est donc un problème d'évaluation et de prédiction des montants à la charge de la compagnie d'assurance. Cette situation est liée à la nature même de l'assurance à savoir l'inversion du cycle de production.

Dans cette section, nous allons donner une présentation du triangle de liquidation qui servira de base pour toutes les méthodes utilisées dans l'estimation des provisions techniques (déterministes ou stochastiques). A partir de ce triangle, il sera possible de prévoir les paiements futurs et par conséquent les réserves techniques à constituer.

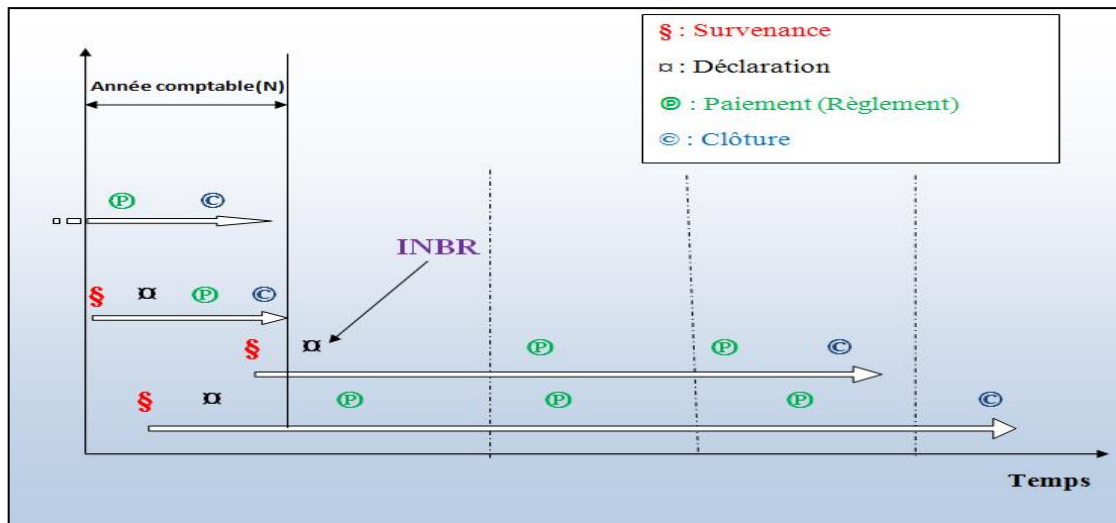
a. La dynamique de la vie d'un sinistre

Un sinistre est rarement réglé en totalité l'année même de sa survenance, d'où la nécessité, et même l'obligation, pour les compagnies d'assurance d'estimer son coût définitif.

Pour chaque type de risque, la procédure est la même : les sinistres sont d'abord constatés, puis réglés. La seule différence réside dans le délai de constatation (avec plus ou moins de retard) ; ainsi que dans le délai de paiement (plus ou moins long).

La vie d'un sinistre peut être plus ou moins simple, mais on peut schématiquement la décrire sous la forme présentée sur la figure suivante :

Fig 2.4- Les différentes étapes de la vie d'un sinistre



Source : Elaboré par nos soins.

D'après la figure ci-dessus, on constate que pour un exercice comptable donné, il y a :

- Survenances et règlements des sinistres du même exercice ;
- Règlements effectués au profit des sinistres des années antérieures ;
- Survenances des sinistres mais les déclarations se rapportent à l'exercice suivant (IBNR);
- Survenances des sinistres sans qu'il y ait paiements effectués au cours du même exercice.

L'exercice de rattachement de la sinistralité (pour étudier la rentabilité d'une branche) va dépendre de la nature du contrat :

- L'exercice de survenance : pour la grande majorité des contrats (notamment ceux des risques de masse : automobile, habitation, santé,...etc.), les primes acquises au titre d'un exercice sont mises en face des sinistres survenus au cours de la même période ;
- Les sinistres dans certains cas peuvent être analysés par exercice de souscription ou être rattachés à la date de déclaration (par exemple en transport, ou en construction)¹².

Pour certains types de risques (surtout en responsabilité civile), la notion même d'année de survenance peut être relativement difficile à définir. Par exemple, en responsabilité civile médicale, un très grand nombre de dates interviennent dans la vie d'un sinistre : le fait générateur (une intervention médicale), puis le sinistre survient (un effet secondaire de l'intervention

¹² Michel Denuit, Op.Cit, Tome2, page 340

apparaît au bout de quelques mois), puis le sinistre est déclaré à l'assureur, évalué, expertisé, indemnisé,...etc. La date de survenance est alors difficile à définir de façon précise : devons-nous considérer comme date celle de l'intervention, ou la date où le sinistre se déclare ? De la même façon pour un dégât des eaux : devons-nous considérer la date à laquelle une tuyauterie a commencé à fuiter ou la date à laquelle les dégâts ont été constatés à l'étage inférieur ?

Il s'écoule souvent plusieurs années entre la date de survenance et la date à laquelle le sinistre est réglé définitivement. Par exemple, le règlement définitif d'un dommage corporel lors d'un accident de la circulation ne pourra pas intervenir en tout état de cause, avant que toutes les conséquences en terme de santé ne soient connues, c'est-à-dire l'état de santé de l'assuré ne soit stabilisé (c'est la phase dite consolidation)¹³.

b. Présentation de triangle de liquidation

Les triangles de liquidation, encore appelés triangles de « *Run Off* » reflètent la dynamique des sinistres. Ils permettent de suivre la vie d'un sinistre en analysant par exemple, année par année, le niveau des règlements, qui ont été effectués ou encore le niveau de la charge. Les sinistres sont rapportés à des périodes : année, semestre, trimestre, mois.

Il s'agit des triangles où :

- ✓ les lignes représentent les années de survenances des sinistres ;
- ✓ les colonnes (années de développement) permettent de prendre en compte le fait que les risques ont une cadence de règlement plus ou moins lente ;
- ✓ les diagonales indiquent l'ensemble des paiements effectués (pour les sinistres des différentes années de survenance) durant un exercice donné.

c. Format des données et notations

Les quantités analysées sont des paiements (règlements) de sinistres survenus. Les sinistres sont rapportés à des périodes généralement annuelles. L'année récurrente n se déroule du 01/01/ n au 31/12/ n .

Le 31/12 étant la date d'inventaire ou date de fin d'exercice.

En considérant une branche d'activité dont les sinistres se déroulent sur $n + 1$ années, et notons par :

i : Année d'origine (de survenance) où $i \in [0, \dots, n]$;

¹³Définition de la consolidation donnée par la commission de réflexion sur la doctrine et la méthodologie de l'évaluation du dommage corporel : « c'est le moment où les lésions se fixent et prennent tel qu'un traitement n'est plus nécessaire si ce n'est pour éviter une aggravation, et qu'il est possible d'apprécier un certain degré d'incapacité permanente réalisent un préjudice définitif ».

j : Délai de développement où $j \in [0, \dots, n - i]$ (la $j^{\text{ème}}$ année après la survenance des sinistres) :

$c_{i,j}$: Correspond aux paiements des sinistres non cumulés survenus durant l'année i , et réglés au délai de développement j ;

$C_{i,j}$: Correspond aux paiements cumulés des sinistres survenus l'année i , et au délai de développement j ;

N.B : les notations $c_{i,j}$ peuvent représenter d'autres variables comme le nombre des sinistres, les coûts moyens, les honoraires d'expertise, ...etc.

d. Technique de triangulation

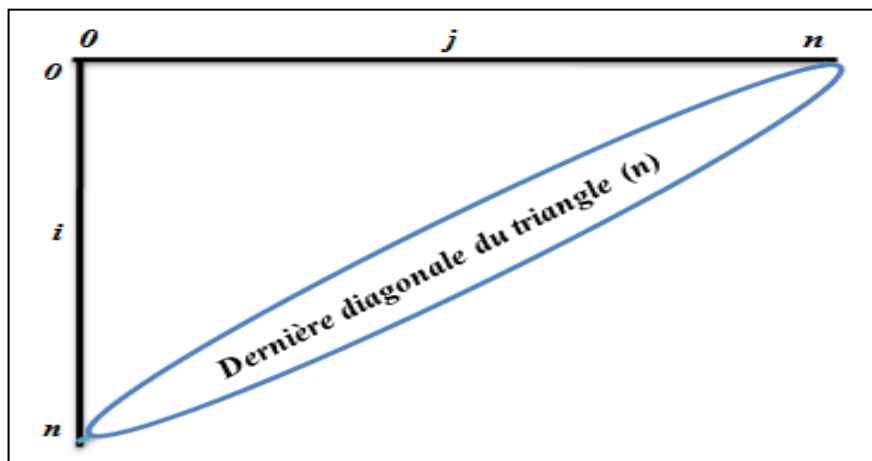
Le but recherché par la technique de triangulation est de mettre en lumière les sommes versées par une compagnie d'assurance au profit de ses assurés ayant subi des dommages. Aussi, elle sert à modéliser la manière avec laquelle le cumul des sinistres évolue dans le temps et avoir un aperçu sur la sinistralité passée pour estimer la sinistralité future par exercice de survenance.

La technique de la triangulation étant la base de calcul des provisions techniques, au 31/12/ n , les paiements de sinistres réglés antérieurement à cette date sont classiquement mis en forme d'un triangle.

Chaque cellule du triangle correspond à des paiements (cumulés ou non cumulés) effectués dans l'année civile $i + j < n$;

La dernière diagonale du triangle indique les derniers paiements effectués. Cette diagonale peut être représentée comme suit :

Fig 2.5- La dernière diagonale d'un triangle de liquidation



Source : Elaboré par nos soins.

Chapitre N°2 : L'actuariat de l'assurance non-vie

Voici donc, le triangle des paiements non cumulés présenté dans le tableau ci-dessous :

Tab.2.3- Triangle des incréments (non cumulés)

Année de survenance	Année de développement					
	<i>0</i>	<i>1</i>	<i>j</i>	<i>n</i>
<i>1</i>	$c_{1,0}$	$c_{1,1}$	$c_{1,j}$	$c_{1,n}$
<i>2</i>	$c_{2,0}$	$c_{2,1}$	$c_{2,j}$	
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮		
<i>i</i>	$c_{i,0}$	$c_{i,1}$			
⋮	⋮	⋮				
<i>n</i>	$c_{n,0}$					

Source : Elaboré par nos soins.

En procédant à une opération de sommation des règlements effectués par année de survenance ($C_{ij} = \sum_{j=0}^n c_{i,j}$), on obtient les paiements cumulés des sinistres. Ils sont présentés sous la forme suivante :

Tab.2.4- Triangle des paiements cumulés

Année de Survenance	Année de développement					
	<i>0</i>	<i>1</i>	<i>j</i>	<i>n</i>
<i>1</i>	$C_{1,0}$	$C_{1,2}$	$C_{1,j}$	$C_{1,n}$
<i>2</i>	$C_{2,0}$	$C_{2,2}$	$C_{2,J}$	
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮		
<i>I</i>	$C_{i,0}$	$C_{i,2}$			
⋮	⋮	⋮				
<i>n</i>	$C_{n,0}$					

Source : Elaboré par nos soins.

Le calcul des réserves consiste à prévoir le montant final des sinistres (charge ultime), afin de provisionner les paiements non encore effectués. Pratiquement, il s'agit donc de prédire la partie inférieure du triangle, contenant des paiements futurs estimés (\hat{C}_{ij} ou $\hat{c}_{i,j}$)¹⁴.

Ayant estimé ces paiements futurs, le montant des provisions pour l'année de survenance *i* est alors donné par¹⁵ :

¹⁴ Prédire les montants (\hat{C}_{ij} ou $\hat{c}_{i,j}$) dépend du modèle d'estimation choisi.

$$\hat{R}_i = \hat{C}_{i,n} - C_{i,n-i+1} \quad i \geq 2$$

Où : $\hat{C}_{i,n}$: Charge finale estimée de l'année i ;

$C_{i,n-i+1}$: Cumul des derniers règlements effectués.

Soit un montant total de provision nécessaire à la date d'inventaire:

$$\hat{R} = \sum_{i=1}^n \hat{R}_i$$

Le tableau ci-dessous nous donne la complétion du triangle de paiement et l'estimation des provisions à constituer :

Tab 2.5- Rectangle complété des paiements cumulés

Année de survenance	Année de développement						Provisions
	0	1	...	j	...	n	
1	$C_{1,0}$	$C_{1,1}$	$C_{2,j}$	$C_{n,1}$	$R_1=0$
2	$C_{2,0}$	$C_{2,1}$	$C_{2,j}$	$\hat{C}_{2,n}$	R_2
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮		⋮	⋮
i	$C_{i,0}$	$C_{i,1}$	$\hat{C}_{i,j}$	$\hat{C}_{i,n}$	R_i
⋮	⋮	⋮	⋮			⋮	⋮
n	$C_{n,0}$	$\hat{C}_{n,1}$	$\hat{C}_{n,j}$	$\hat{C}_{n,n}$	R_n

Source : Elaboré par nos soins.

On cherche par la suite, à **quantifier l'incertitude** associée à cette prédiction. Comme on le verra dans le prochain chapitre, ce paramètre, de nature aléatoire, fera objet des modélisations stochastiques.

L'objectif de toutes les méthodes de triangulation, est de remplir la partie inférieure du triangle.

Après avoir formalisé le problème de provisionnement, trois méthodes déterministes seront abordées dans ce qui suit.

¹⁵ Pour certains modèles (Poissonien, Christophides), la provision s'obtient en additionnant les paiements prévus.

2.4.2. Présentation de la méthode *Chain-Ladder*

La méthode déterministe « *Chain Ladder* » est l'une des méthodes les plus utilisées dans le milieu professionnel, en raison de sa simplicité de compréhension, et de mise en œuvre. Elle repose sur le principe de reproduction du passé dans le futur, et permet ainsi, d'extrapoler la charge de sinistres (règlements et provisions) présentés sous forme de tableau triangulaire de liquidation. C'est la méthode de calcul des provisions la plus classique. Elle servira donc de référence tout au long de notre étude.

a. Hypothèses sous-jacentes de la méthode

La méthode de « *Chain Ladder* » est fondée sur deux hypothèses essentielles ¹⁶:

- **H1** : $\{ C_{i,1}, \dots, C_{i,n} \}, \{ C_{t,1}, \dots, C_{t,n} \} ; i \neq t$

La première hypothèse suppose qu'il y ait une indépendance entre les années de survenance. Cela signifie que les sinistres survenus au cours d'une année de survenance donnée, n'ont aucune influence sur les sinistres pouvant survenir l'année suivante. Cette hypothèse est en général vérifiée dans la plupart des domaines d'assurance.

- **H2** : $E \{ C_{i,j+1} / C_{i,1}, \dots, C_{i,k} \} = \lambda_j C_{i,j}$

Les années de développement, sont les variables explicatives du comportement des sinistres futurs. Cette hypothèse signifie, que la seule explication de l'évolution du montant des sinistres au cours des années de développement, est la durée de ce développement.

b. Vérification graphique des hypothèses :

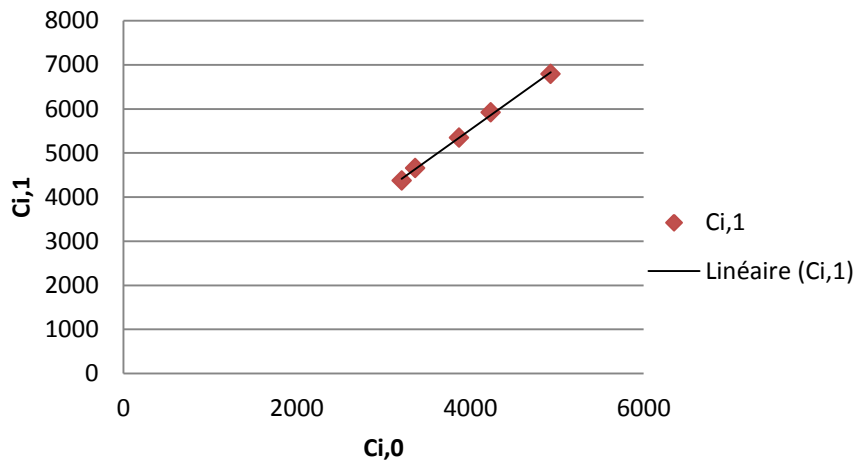
La validation des résultats obtenus de la méthode de « *Chain Ladder* » repose sur la vérification des hypothèses sous-jacentes.

A ce titre et malgré la simplicité de son utilisation, il est important, d'effectuer certaines vérifications pour valider cette méthode.

Le graphe des couples $(C_{i,j}, C_{i,j+1})$ permet d'affirmer ou d'infirmer l'hypothèse (H2) . Les graphiques suivants sont les représentations des $(C_{i,0}, C_{i,1})$ et $(C_{i,1}, C_{i,2})$.

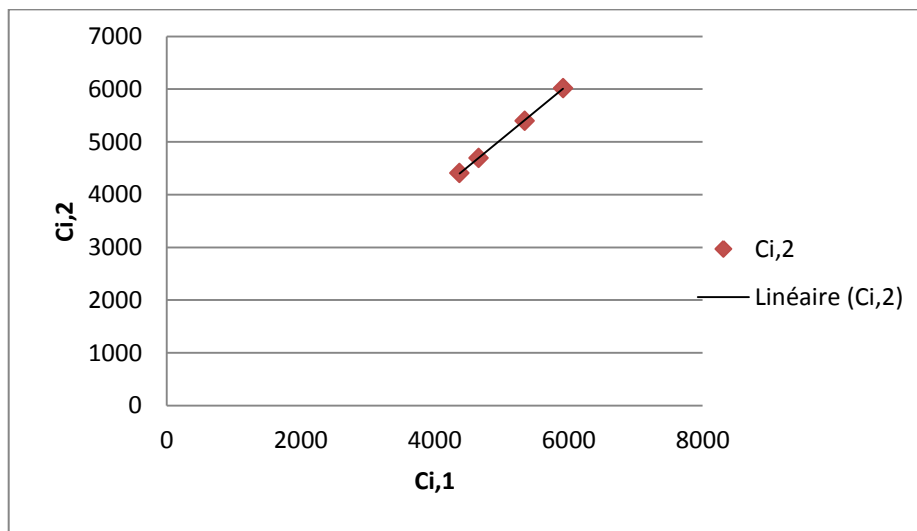
¹⁶ Michel Denuit, Arthur Charpentier 2005, op-cit, page 345

Fig 2.6 - Alignement du couple $(C_{i,0}, C_{i,1})$



Source : Elaboré par nos soins.

Fig 2.7- Alignement du couple $(C_{i,1}, C_{i,2})$



Source : idem.

D'après ces graphiques, nous remarquons que les couples sont sensiblement alignés sur une droite, ce qui nous amène à accepter la validité de l'hypothèse « H_2 ».

c. Procédure d'estimation de la méthode « Chain Ladder »

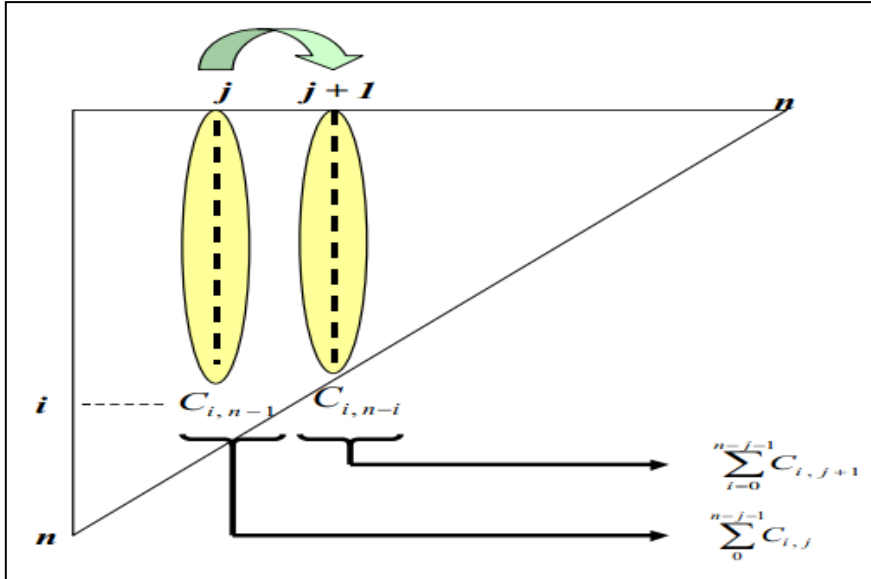
La méthode « Chain Ladder » est fondée sur l'utilisation des facteurs de développement, encore appelés coefficients de passage. Ces derniers représentent le taux de croissance des montants cumulés d'une année à la suivante, donnant donc des montants totaux payés dans le futur.

Elle consiste à supposer que les paiements cumulés $(C_{i,j})$ $j = 0, \dots, n - 1$ sont liés entre eux selon une forme de type :

$$\hat{C}_{i,j+1} = \lambda_j * C_{i,j} \text{ Pour tout } i = 0, \dots, n - j - 1$$

Où : n représente le nombre des exercices du triangle.

Fig 2.8- Schéma illustratif du passage -méthode CL-



Les coefficients λ_j appelés Link-ratios (appelés aussi les facteurs de développement), peuvent être estimés, à l'aide des observations, par le rapport des totaux relatifs aux éléments communs de deux colonnes successives, c'est-à-dire par :

$$\hat{\lambda}_j = \frac{\sum_{i=0}^{n-j-1} C_{i,j+1}}{\sum_{i=0}^{n-j-1} C_{i,j}} \quad 0 \leq j \leq n - 1$$

On note qu'il est possible de voir l'estimateur « Chain Ladder » comme une moyenne pondérée des facteurs de transition individuelle. Cette pondération accorde plus ou moins d'importance aux exercices passés¹⁷.

Parmi les types de pondérations utilisées, on pourra considérer :

- ✓ Des pondérations accordant plus de poids aux années récentes et moins aux années éloignées ;
- ✓ Des pondérations tenant compte de l'exposition réelle au risque de chacune des années ; C'est-à-dire que les pondérations sont liées au nombre de contrats, ou à la prime acquise associée à l'année en vigueur i .

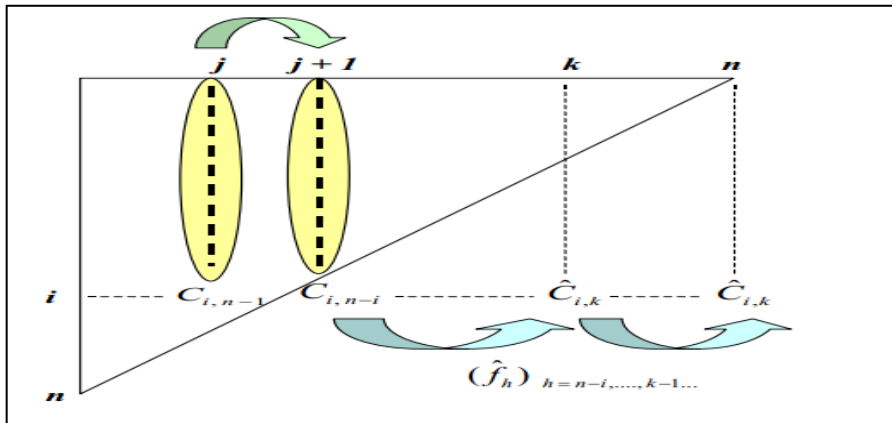
¹⁷ Sadek Hami, -Les modèles DFA : présentation, utilité et application-, ISFA, université Claude Bernard Lyon, page 73.

Dans les deux cas, on considère des Link ratios de la forme suivante :

$$\hat{\lambda}_j = \sum_{i=1}^{n-j} w_{i,j} \lambda_{i,j} \quad w_{i,j} = \frac{C_{i,j}}{\sum_{i=1}^{n-j} C_{i,j}} \quad \text{et} \quad \lambda_{i,j} = \frac{C_{i,j+1}}{C_{i,j}}$$

Les facteurs estimés seront utilisés pour évaluer les paiements cumulés selon le schéma ci-dessous.

Fig 2.9- Estimation des charges $C_{i,j}$ par la méthode -CL-



➤ **Exemple d'application de la méthode « Chain Ladder »**

Considérons le triangle de paiements cumulés suivant:

Tab 2.6-Triangle des incréments cumulés

Exercice		Délai					
		0	1	2	3	4	5
1988	0	3209	4372	4411	4428	4435	4456
1989	1	3367	4659	4696	4720	4730	
1990	2	3871	5345	5398	5420		
1991	3	4239	5917	6020			
1992	4	4929	6794				
1993	5	5217					

Source : Christian PARTRAT « Provisionnement en assurance non-vie », page 15

Chapitre N°2 : L'actuariat de l'assurance non-vie

Les facteurs de développement calculés se présentent comme suit :

Tab.2.7- Détermination des facteurs de développement

<i>j</i>	1	2	3	4	5
<i>λ_j</i>	1,3809	1,0114	1,0043	1,0018	1,0047

Source : Elaboré par nos soins.

Exemple : Calculons le facteur de développement λ_2 .

$$\lambda_2 = \frac{\text{Colonne grisée}}{\text{Colonne jaunée}} = \frac{\sum_{i=1988}^{1991} C_{i,2}}{\sum_{i=1988}^{1991} C_{i,1}} = 1,0114$$

- **Facteurs de développement individuels, cadences de règlement**

Dans la plupart des méthodes de cadences, les calculs sont conduits à l'aide des facteurs de développement, mais les résultats sont interprétés en cadences cumulées.

Tab 2.8- Triangle des link-ratios individuels

<i>j</i>	0	1	2	3	4
1988	1,3624	1,0089	1,0038	1,0015	1,0047
1989	1,3837	1,0079	1,0051	1,0021	
1990	1,3807	1,0099	1,0040		
1991	1,3958	1,0174			
1992	1,3783				

Source : Elaboré par nos soins.

Nous rappelons qu'il existe une correspondance entre les coefficients de passage et les cadences de règlements des sinistres :

$$\text{Cadence } j = \frac{1}{\lambda_j \times \dots \times \lambda_{n-1}}$$

Tab 2.9- Cadence de développement en pourcentage (%)

<i>j</i>	0	1	2	3	4	5
<i>p_j</i>	70,82	97,80	98,91	99,34	99,53	100,00

Source : Elaboré par nos soins.

On constate que 71% des sinistres sont réglés dès la première année, et 99% au bout de la troisième année. Ceci est dû aux caractéristiques des branches. C'est-à-dire qu'il y a certaines

Chapitre N°2 : L'actuariat de l'assurance non-vie

branches, qui ont une cadence de règlement plus courte que les autres. Une fois les facteurs de développement λ_j déterminés, il est possible de compléter le triangle inférieur selon la formule suivante :

$$\forall (i,j)/i + j > n \quad \hat{C}_{i,j} = \prod_{j=n-i+1}^{j-1} \hat{\lambda}_j \times C_{i,n-i+1}$$

Exemple : $\hat{C}_{1993,5} = (\hat{\lambda}_1 \times \hat{\lambda}_2 \times \dots \times \hat{\lambda}_5) \times C_{1993,0}$

Le tableau ci-dessous, montre les paiements qui ont été calculés par la méthode de « Chain Ladder ».

Tab2.10- Complétion du triangle de paiements

		<i>Délai</i>					
		<i>0</i>	<i>1</i>	<i>2</i>	<i>3</i>	<i>4</i>	<i>5</i>
<i>Exercice</i>		3209	4372	4411	4428	4435	4456
1988	0	3209	4372	4411	4428	4435	4456
1989	1	3367	4659	4696	4720	4730	4752
1990	2	3871	5345	5398	5420	5430	5456
1991	3	4239	5917	6020	6046	6057	6086
1992	4	4929	6794	6872	6902	6914	6947
1993	5	5217	7204	7287	7318	7332	7367
<i>Facteur de développement</i>			1,3809	1,0114	1,0043	1,0018	1,0047



Source : Elaboré par nos soins.

Une fois le rectangle est complété, nous passons à l'estimation des charges futures et les réserves à constituer.

Tab2.11- charges finales et réserves

Année de survenance	Paiements cumulés	Charge ultime	Provision
1988	4456	4456	0
1989	4730	4752	22
1990	5420	5456	36
1991	6020	6086	66
1992	6794	6947	153
1993	5217	7367	2150
Total	32637	35064	2427

Source : Elaboré par nos soins.

Exemple : $\hat{R}_{1993} = 7367 - 5217 = 2150$

Il résulte donc que le montant global de la réserve à constituer à la fin de l'exercice 1993 est de **2427**.

d. Limites de la méthode « Chain Ladder » :

La méthode de « Chain Ladder » se distingue par sa simplicité en matière d'application et d'interprétation. Cependant, cette méthode présente quelques limites qu'il est nécessaire de citer ¹⁸:

- Méthode fondée sur des hypothèses très contraignantes : les points $C_{i,j}$ et $C_{i,j+1}$ doivent être proportionnels ;
- Calcul des provisions fortement lié au dernier montant de charge connu (Possibilité de biaiser le montant de provisions calculé).
- Elle ne détecte pas les irrégularités potentielles du triangle (ne fonctionne que pour des triangles réguliers et stables) ;
- Elle n'offre pas la possibilité d'obtenir une estimation de la loi de probabilité de la provision totale et en particulier de la variabilité de la provision (elle ne fait aucune hypothèse quant à la loi que peuvent suivre les coûts des sinistres ou les fréquences). ;
- Elle ne construit pas de modèle probabiliste, permettant de mesurer l'incertitude associée à la prédiction du montant des provisions.

¹⁸ Daniel Davidov (2009), - Modélisation de la variance dans l'analyse stochastique du passif des polices-, université du Québec, Montréal, page 33.

Toutefois, la méthode de « *Chain Ladder* » reste indéniablement une méthode de référence pour les assureurs, car elle a souvent donné des résultats assez proches de la réalité surtout lorsque ses hypothèses sont respectées.

2.4.3. La méthode de « *London Chain* »

a. Présentation de la méthode

La méthode dite « *London Chain* » a été introduite par « Benjamin et Eagles » pour le calcul des provisions au Loyd's Market (1986). Cette méthode suppose l'existence, pour j fixé, de deux paramètres b_j et a_j tels que ¹⁹:

$$C_{i,j+1} = b_j C_{i,j} + a_j \text{ pour } j = 0, \dots, n - j - 1$$

Comme nous l'avons vu, la méthode « *Chain Ladder* » ne peut être appliquée que quand le couple $(C_{i,j+1}, C_{i,j})$ est sensiblement aligné sur une droite qui passe par l'origine. La méthode de « *London Chain* » suppose l'alignement mais n'impose pas le passage par l'origine.

Il s'agit donc d'estimer $2n$ paramètres, à savoir b_j et a_j pour $j = 0, \dots, n - 1$. Le couple $(b_j \text{ et } a_j)$ est estimé par la méthode des Moindres Carrés Ordinaires (MCO), en minimisant la quantité suivante :

$$(b_j, a_j) = \arg \min \left(\sum_{i=0}^{n-j-1} (C_{i,j+1} - a_j - b_j C_{i,j})^2 \right)$$

L'estimation des deux paramètres est donnée par :

$$\hat{b}_j = \frac{\frac{1}{n-j} \sum_{i=0}^{n-j-1} (C_{i,j} C_{i,j+1} - \bar{C}_j \bar{C}_{j+1})}{\frac{1}{n-j} \sum_{i=0}^{n-j-1} (C_{i,j}^2 - \bar{C}_j^2)} = \frac{\text{cov}(\text{colonne } j; \text{colonne } j + 1)}{\text{var}(\text{colonne } j)}$$

$$\hat{a}_j = \bar{C}_{j+1} - \hat{b}_j \bar{C}_j$$

b. Exemple pratique de la méthode « *London Chain* »

Considérons le même triangle présenté dans la section précédente, et calculons les paramètres et provisions de *London Chain* :

¹⁹ Christian Partrat (2007), -Provisionnement technique en Assurance no vie-, perspectives actuarielles modernes, édition Economica, Paris, page 49.

Tab 2.12- Estimation des paramètres de la méthode «LC »

<i>j</i>	1	2	3	4	5
\hat{b}_j	1,404	1,0405	1,0036	1,10103	1,0047
\hat{a}_j	-90,311	-147,27	3,742	-38,493	0

Source : Elaboré par nos soins.

Après avoir estimé les paramètres b_j et a_j , nous procédons au calcul des charges finales ainsi que les provisions à constituer.

Tab 2.13- Estimation de la provision par la méthode « London Chain »

<i>Exercice</i>		<i>Délai</i>						Provisions
		<i>0</i>	<i>1</i>	<i>2</i>	<i>3</i>	<i>4</i>	<i>5</i>	
1988	0	3209	4372	4411	4428	4435	4456	-
1989	1	3367	4659	4696	4720	4730	4752	22
1990	2	3871	5345	5398	5420	5437	5463	43
1991	3	4239	5917	6020	6045	6069	6098	78
1992	4	4929	6794	6922	6951	6983	7016	222
1993	5	5217	7234	7380	7410	7447	7483	2 266
								2 631

Source : Elaboré par nos soins.

D'après le tableau, le montant de la provision s'élève à 2 631.

c. Limites de la méthode « London Chain »

Etant une régression linéaire simple, la méthode « London Chain » ne présente aucune difficulté de mise en œuvre. Cependant la retenir *a priori* pour l'ensemble des délais de règlement conduit à estimer $2n$ paramètres à partir de $\frac{(n+1)*(n+2)}{2}$ données, soit un risque de « sur-paramétrisation » rendant les estimations moins robustes.

Il est recommandé de n'utiliser cette méthode que pour les colonnes où l'hypothèse sous-jacente à la méthode « Chain Ladder » n'est manifestement pas vérifiée²⁰ (passage par l'origine).

²⁰ Christian Partrat (2007) op-cit page 51 à 52

2.4.4. La méthode de « *Grossing-Up* »

a. Présentation de la méthode

Il s'agit d'une méthode basée sur les taux de « *grossing up* ». Ces taux servent aussi à l'estimation de la charge finale par année de survenance. Elle fonctionne comme suit :

- Pour tout $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ et $j \in \{1, 2, \dots, n\}$, on a :

$$h_1, h_2, \dots, h_n \in [0, 1] \text{ avec } h_1 < h_2 < \dots < h_n = 1$$

Tel que :
$$E(C_{i,j}) = E(C_{i,n}) h_j$$

- Pour tout, $j \in \{1, \dots, n\}$, on a : $\sum_{j=1}^{n-j} C_{j,t-1} > 0$.

b. L'estimation des paramètres de la méthode

La méthode « *grossing-up* » est définie par une procédure récursive, pour chaque année de survenance $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, on définit le taux de « *grossing-up* » suivant :

A partir de ces taux, on procède à l'estimation des charges ultimes (paiements futurs cumulés) :

$$\hat{C}_{i,n} = \frac{C_{i,n-i}}{\hat{h}_{n-i+1}}$$

La quantité $\hat{C}_{i,n}$ est appelée « *estimateur de grossing-up* ».

c. La provision « *Grossing-up* »

Pour chaque année de survenance $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, on calcule la quantité suivante :

$$\hat{R}_i^{GU} = \hat{C}_{i,n} - C_{i,n-i+1}$$

$$\hat{R}_i^{GU} = (1 - \hat{h}_{n-i+1}) \times \hat{C}_{i,n}$$

Cette quantité est appelée provision de « *Grossing-up* » pour l'année d'origine i (elle est nulle pour la première année de survenance). La sommation de ces différentes quantités donne la provision totale de *grossing-up*.

$$\hat{R} = \sum_{i=1}^n \hat{R}_i$$

✓ **Exemple :** Pour mieux illustrer le principe de cette méthode, on présente l'exemple simple suivant :

- Prenons un triangle de liquidation pour quatre années de survenance :

<i>Année</i> <i>Survenance</i>	<i>Développement</i>			
	<i>1</i>	<i>2</i>	<i>3</i>	<i>4</i>
<i>1</i>	35	45	15	5
<i>2</i>	42	55	14	
<i>3</i>	50	60		
<i>4</i>	46			

- Le triangle des paiements cumulés est le suivant :

<i>Année</i> <i>Survenance</i>	<i>Développement</i>			
	<i>1</i>	<i>2</i>	<i>3</i>	<i>4</i>
<i>1</i>	35	80	95	100
<i>2</i>	42	97	111	
<i>3</i>	50	110		
<i>4</i>	46			

- Calculons les taux et les estimateurs de *grossing-up* :

$$\hat{h}_4 = 1 \quad \text{Donc: } \hat{C}_{1,4} \frac{100}{1} = 100;$$

$$\hat{h}_3 = \frac{95}{100} = 0,95 \quad \text{Donc : } \hat{C}_{2,4} = \frac{111}{0,95} = 117;$$

$$\hat{h}_2 = \frac{80+97}{95+111} = 0,86 \quad \text{Donc : } \hat{C}_{3,4} = \frac{110}{0,86} = 128;$$

$$\hat{h}_1 = \frac{35+42+50}{80+97+110} = 0,44 \quad \text{Donc: } \hat{C}_{4,4} = \frac{46}{0,44} = 104.$$

- Complétons la partie inférieure du rectangle :

<i>Année</i> <i>Survenance</i>	<i>Développement</i>				<i>Provisions</i>
	<i>1</i>	<i>2</i>	<i>3</i>	<i>4</i>	
<i>1</i>	35	80	95	100	-
<i>2</i>	42	97	111	117	6
<i>3</i>	50	110	-	128	18
<i>4</i>	46	-	-	104	58
\hat{h}_{n-i+1}	0,44	0,86	0,95	1	82

Donc : la provision totale est égale à 82.

Certes que les méthodes déterministes avaient eu un apport considérable en provisionnement et notamment la méthode de *Chain Ladder*. En effet, chacune des méthodes développées dans ce chapitre propose une provision prévue particulière. Mais aucune d'entre elles n'a fourni une mesure de risque. Ces méthodes ne permettent donc pas de répondre aux exigences de « *Solvabilité II* ».

Le recours à des méthodes, qui permettent de modéliser la distribution des règlements des sinistres et d'estimer le risque sur l'évaluation des provisions, est devenu une nécessité ; d'où l'urgence de passer à des méthodes stochastiques.

A ce titre, les assureurs sont tenus lors de l'évaluation de leurs engagements de prendre en compte les effets aléatoires de la sinistralité.

Le « *Best Estimate* » doit prendre en considération la variabilité des flux afin de garantir qu'il représente la moyenne des distributions des flux. En principe tous les scénarios possibles sont intégrés dans le calcul du « *Best Estimate* ».

Dans le chapitre suivant, nous allons aborder une autre famille de méthodes, censées répondre aux attentes des assureurs.

Le recours aux modèles stochastiques est justifié par le besoin de mesurer l'incertitude présente dans les triangles et les résultats issus des méthodes déterministes.

Ces modèles se basent sur des hypothèses explicites concernant le processus de liquidation et sur la variabilité de l'espérance des valeurs des paiements futurs.

Le présent chapitre est composé de trois sections. Nous allons présenter dans une première section le modèle de Mack, une méthode stochastique dite récursive bien connue des professionnels du provisionnement depuis son apparition en 1993. Puis, dans une deuxième section, nous détaillerons les modèles factoriels stochastiques, pour lesquels une hypothèse forte d'indépendance des règlements non cumulés doit être émise et sur la base de laquelle toutes les caractéristiques de la loi de probabilité régissant la provision totale peuvent être estimées. Dans une dernière section, nous présenterons l'approche non paramétrique « *Bootstrap* » qui permet d'avoir des indicateurs sur la distribution de la charge ultime et une représentation de la distribution du montant des provisions.

Aussi, nous allons aborder un indicateur de risque connu sous le nom de « *Value-at-Risk* ». Cette dernière a été exigée par *Solvency II* comme mesure de risque.

2.5. Provisionnement et mesure de l'incertitude via des modèles stochastiques

2.5.1. Le modèle de « Mack »

a. Présentation du modèle

Le modèle stochastique de Mack se réfère à la méthode de « *Chain Ladder* ». Il est conditionnel (par rapport à l'information disponible) et s'applique sur le triangle des montants cumulés²¹. Il permet de dégager une estimation *de la volatilité de l'estimateur des provisions techniques* (les erreurs de prédiction). Il détermine les espérances connaissant les réalisations du triangle supérieur (données historiques). Il s'agit d'un modèle non-paramétrique dans la mesure où aucune hypothèse de distribution n'est émise sur les composantes du triangle²².

b. Hypothèses du modèle

Ce modèle non paramétrique repose sur trois hypothèses :

- **H1** : L'indépendance entre les années d'origine (survenance):
 $(C_{i,1}, C_{i,2}, \dots, C_{i,n})$ et $(C_{h,1}, C_{h,2}, \dots, C_{h,n})$ sont indépendants pour tout $i \neq h$. Cette hypothèse signifie que les montants cumulés réglés, pour chaque année de survenance, sont indépendants (en pratique, cette hypothèse est considérée toujours valide) ;

- **H2** : L'espérance conditionnelle est sans biais :

$$E(C_{i,j+1}/C_{i,1}, \dots, C_{i,n}) = \lambda_j C_{i,j}$$

- **H3** : La variance conditionnelle de $C_{i,j}$ est donnée par :

$$V(C_{i,j+1}/C_{i,1}, \dots, C_{i,n}) = \sigma_j^2 C_{i,j}$$

La deuxième et la troisième hypothèse peuvent se comprendre comme le fait que chaque facteur de développement individuel est une variable aléatoire se caractérisant par les deux moments suivants :

- Espérance conditionnelle $E\left(\frac{C_{i,j+1}}{C_{i,j}}/c_{i,1}, \dots, c_{i,n}\right) = \lambda_j$;
- variance conditionnelle $V\left(\frac{C_{i,j+1}}{C_{i,j}}/c_{i,1}, \dots, c_{i,n}\right) = \sigma_j^2$

²¹ Thomas Mack (1993), - Distribution free calculation of the standard error of chain ladder reserves estimates-, ASTIN Bulletin, vol 23.

²² Arnaud Lacoune (2008), - Mesure du risque de réserve sur un horizon de un an-, université Claude Bern rd Lyon 1, ISFA. page 12.

Remarque :

L'hypothèse (H3) est une hypothèse analogue à l'hypothèse (H2), mais renseigne sur la variabilité du triangle. En fait, c'est une forme de variance qui permet de calculer l'erreur de prédiction.

- Graphiquement, (H2) s'interprète, pour j fixé, en l'alignement des couples

$$(C_{ij}, C_{i,j+1}) \quad i = 0, \dots, i + j$$

- Quant à (H3), cela signifie que, pour j fixé, le graphique des résidus ne doit faire apparaître aucune structure non aléatoire.

$$\varepsilon_{i,j} = \frac{C_{i,j+1} - \hat{\lambda}_j C_{i,j}}{\sigma_j \sqrt{C_{i,j}}} \quad \text{avec } i=0, \dots, i+j$$

Où : $\hat{\lambda}_j$ est un estimateur du facteur de développement λ_j .

Théorème 1 :

Sous les hypothèses (H1) et (H2), les estimateurs de *Chain Ladder* $\hat{\lambda}_j$ de λ_j sont non biaisés et non corrélés.

c. Estimation du montant de la provision :

Le théorème suivant montre que l'estimation des paiements finaux ($\hat{C}_{i,n}$) d'après le modèle de Mack se présente sous la même forme que celle donnée par la méthode déterministe de Chain Ladder.

Théorème 2 :

Soit $\mathcal{F} = \{C_{i,j} / i + j \leq n + 1\}$ l'information apportée par le triangle supérieur. Sous les hypothèses (H1) et (H2), on a :

$$E(C_{i,n} / \mathcal{F}) = \lambda_{n+1-i} \times \dots \times \lambda_{n-1} \times C_{i,n+1-i}$$

Démonstration : Comme les années de survenance sont indépendantes entre elles, les informations du triangle qui serviront dans l'évaluation de $E(C_{i,n} / \mathcal{F})$ seront celles relatives à l'année de survenance i .

Posons : $E_i(X) = E(X / C_{i,1}, \dots, C_{n+1-i})$

$$\begin{aligned}
 E_i(C_{i,n}/\mathcal{F}) &= E_i(C_{i,n}) \\
 &= E_i(E(C_{i,n}/C_{i,n}, \dots, C_{i,n-1})) \\
 &= E_i(C_{i,n-1} \times \lambda_{n-1}) \\
 &= \lambda_{n-1} \times E_i(C_{i,n-1}) \\
 &= \dots \\
 &= \lambda_{n-1} \times \dots \times \lambda_{n-i+1} \times E_i(C_{i,n-i+1}) \\
 &= \lambda_{n-1} \times \dots \times \lambda_{n-i+1} \times C_{i,n-i+1}
 \end{aligned}$$

Sous les hypothèses du modèle, les estimateurs $\hat{\lambda}_{n-1}, \dots, \hat{\lambda}_{n-i+1}$, données par la version déterministe sont non biaisés et non corrélés.

La provision constituée pour l'année de survénance i , pour les paiements restant à effectuer à la date n , est : $\hat{R}_i = \tilde{C}_{i,n} - C_{i,n-i}$ où : $\tilde{C}_{i,n}$: charge ultime, inconnue à la date n .

En conditionnant cette variable par rapport à l'information disponible (règlements effectués), on obtient une estimation du montant de la provision pour l'année de survénance i :

$$\begin{aligned}
 \hat{R}_i &= E(R_i|\mathcal{F}) = E(C_{i,n}|\mathcal{F}) - C_{i,n-i} \\
 \hat{R}_i &= \hat{C}_{i,n} - C_{i,n}
 \end{aligned}$$

Le montant global de la réserve s'obtient en additionnant les provisions estimées par année de survénance :

$$E(R) = \hat{R} = \sum_{i=1}^n \hat{R}_i$$

d. Mesures de l'incertitude sur l'estimation des provisions

Estimation de la variance des provisions

Il existe plusieurs mesures de risque, la plus connue étant la variance. Comme mesure de dispersion, elle a l'avantage d'être facile à calculer et prend en considération l'ensemble des données.

Nous appelons **variance de la réserve**, une mesure de la fluctuation de la réserve qui peut être causée par un ensemble d'erreurs.

Le paramètre de la variance est exprimé par :

$$\hat{\sigma}_j^2 = \frac{1}{n-j-1} \sum_{j=1}^{n-j} C_{ij} \left(\frac{C_{i,j+1}}{C_{i,j}} - \hat{\lambda}_j \right)^2 \quad 1 \leq j \leq n-2$$

Pour : $j = 1, \dots, n - 2$ est un estimateur sans biais de σ_j^2 (cet estimateur représente la variabilité du triangle des paiements par année de développement j).

Pour : $1 \leq j \leq n - 2$ avec une unique observation pour σ_{n-1}^2 , il est nécessaire d'extrapoler la série $\hat{\sigma}_0, \dots, \hat{\sigma}_{n-2}$ en imposant la condition que :

$$\frac{\hat{\sigma}_{n-3}^2}{\hat{\sigma}_{n-2}^2} = \frac{\hat{\sigma}_{n-2}^2}{\hat{\sigma}_{n-1}^2}$$

soit réalisée pour autant que $\hat{\sigma}_{n-3}^2 > \hat{\sigma}_{n-2}^2$ cela mène à prendre :

$$\hat{\sigma}_j^2 = \min \left(\frac{\hat{\sigma}_{n-2}^4}{\hat{\sigma}_{n-3}^2}, \hat{\sigma}_{n-3}^2, \hat{\sigma}_{n-2}^2 \right)$$

Sous les hypothèses de Mack, ces derniers estimateurs sont également sans biais.

Quant aux estimateurs des $C_{i,j}$ inconnus, on prend les mêmes estimés par la méthode « *Chain Ladder* » :

$$\hat{C}_{i,j} = C_{i,n+1-i} \times \hat{\lambda}_{j-1} \times \hat{\lambda}_{j-2} \times \dots \times \hat{\lambda}_{n+1-i}$$

Où : $C_{i,n+1-i}$ est le dernier montant cumulé connu pour l'année de survenance i .

Il convient maintenant de calculer la variance des provisions pour chaque année :

$$Var(R_i) = Var(\hat{C}_{i,n} - C_{i,n+1-i}) = V(\hat{C}_{i,n}).$$

L'indicateur du MSE : Une mesure de risque à l'ultime

Dans une vision à l'ultime, on est intéressé par **la variabilité de l'estimateur de la charge ultime par rapport à sa valeur à l'ultime**.

Pour quantifier l'incertitude qui réside dans l'estimation de la provision \hat{R} , nous devons étudier celle de la variable aléatoire $C_{i,n}$, c'est-à-dire la qualité du prédicteur $\hat{C}_{i,n}$. Nous avons recours à l'erreur quadratique moyenne (*Mean Square Error of Prediction* « MSE »). Celle-ci se définit de la façon suivante :

$$\begin{aligned} mse(\hat{C}_{i,n}) &= E[(C_{i,n} - \hat{C}_{i,n})^2 / \mathcal{F}] \\ &= E[((C_{i,n} - E(C_{i,n})) + (E(C_{i,n}) - \hat{C}_{i,n}))^2 / \mathcal{F}] \\ &= Var(C_{i,n} / \mathcal{F}) + E((\hat{C}_{i,n} - E(C_{i,n}))^2 / \mathcal{F}) \end{aligned}$$

$$\underbrace{mse(\hat{C}_{i,n})}_{\text{Variance de prédition}} = \underbrace{Var(C_{i,n} / \mathcal{F})}_{\text{Variance du processus}} + \underbrace{E((\hat{C}_{i,n} - E(C_{i,n}))^2 / \mathcal{F})}_{\text{Variance d'estimation}}$$

Il résulte que l'incertitude présente dans la prévision de la charge ultime se compose de deux termes :

- Le premier terme de la somme est la variance du processus, c'est-à-dire la variabilité autour de la moyenne, due au processus stochastique. Cette erreur ne peut donc pas être supprimée ;
- Le second terme de la somme est l'erreur d'estimation. Elle provient de l'incertitude de l'estimation que l'on fait des paramètres servant à déterminer $\hat{C}_{i,n}$. En général, celle-ci devrait diminuer avec l'augmentation de l'information disponible.

Erreur quadratique moyenne

L'incertitude présente dans la prévision du montant ultime des provisions est mesurée par l'erreur quadratique moyenne (*Means Square Error* "MSE"). Elle représente la distance moyenne entre l'estimateur et la vraie valeur de R_i .

Proposition 1 :

L'erreur quadratique moyenne du montant de provision pour l'année i : $\hat{R}_i = \hat{C}_{i,n} - C_{i,j}$ définie par : $mse(\hat{R}_i) = E [(\hat{R}_i - R_i)^2 / \mathcal{F}]$;
 Où : $\mathcal{F} = \{ C_{i,j} / i+j < n \}$ représente l'ensemble des données observables.

Théorème 3 :

Sous les hypothèses (H1), (H2) et (H3), $mse(\hat{R}_i)$ peut être estimée par :

$$\widehat{mse}(\hat{R}_i) = \hat{C}_{i,n}^2 \sum_{j=n+1-i}^{n-1} \frac{\hat{\sigma}_j^2}{\hat{\lambda}_j^2} \left[\frac{1}{\hat{C}_{i,j}} + \frac{1}{\sum_{k=1}^{n-j} C_{k,j}} \right]$$

Avec : $\hat{C}_{i,n-i+1} = C_{i,n-i+1}$ et $\hat{C}_{i,k}$ les valeurs estimées du triangle inférieur.

Corollaire 1 :

Avec les notions du théorème 3.4, un estimateur de mse agrégé sur les années d'accident, et relatif à l'ensemble des provisions est donné par :

$$\widehat{mse}(\hat{R}) = \sum_{i=2}^n \left\{ \left(\widehat{mse}(\hat{R}_i) \right) + \hat{C}_{i,n} \left(\sum_{j=i+1}^n \hat{C}_{j,n} \right) \sum_{k=n+1-i}^{n-1} \frac{\frac{2\hat{\sigma}_k^2}{\hat{\lambda}_k^2}}{\sum_{j=1}^{n-j} C_{j,k}} \right\}$$

On peut aussi donner l'erreur standard relative, l'écart-type rapporté au montant de la charge ultime par $\frac{\sqrt{mse(\hat{R}_i)}}{\hat{R}_i}$.

e. Construction d'un intervalle de confiance : Hypothèse d'une distribution Log-normale des provisions.

Le modèle de Mack que nous venons de voir, ne permet de connaître que les moments d'ordre 1 et 2. Il ne présuppose pas de distribution probabiliste a priori pour les montants des provisions \hat{R}_i . Afin d'obtenir des quantiles (et donc une *value-at-Risk*) et construire des intervalles de confiance autour des provisions estimées, il s'avère nécessaire de faire une hypothèse paramétrique sur la distribution des \hat{R}_i .

Pour ce faire, la loi la plus utilisée est la loi *Normale*, de moyenne la valeur estimée \hat{R}_i et d'écart type $se(\hat{R}_i)$.

L'intervalle de confiance à 95% est alors donné par : $[\hat{R}_i - 2 se(\hat{R}_i) ; \hat{R}_i + 2 se(\hat{R}_i)]$.

Cependant, il est possible de remettre en cause l'utilisation de la loi normale, étant donnée la symétrie de sa distribution qui ne semble pas être vérifiée en pratique et la possibilité d'obtenir une borne inférieure négative en dépit du fait que le montant de provisions ne peut être négatif²³.

Dans cette optique, il est préférable de considérer une modélisation *log-normale* qui présente une distribution asymétrique, positive, avec un coefficient d'asymétrie « *Skewness* » strictement positif et des queues de distribution plus épaisses (probabilité d'avoir des valeurs extrêmes). Nous émettrons donc l'hypothèse que la distribution des provisions peut être modélisée par une loi log-normale de paramètres μ_i et σ_i^2 tels que:

$$R_i \rightarrow \text{LogN}(\mu_i, \sigma_i^2)$$

Les moments d'ordre 1 et 2 sont donnés par :

- Espérance : $E(R_i) = \hat{R}_i = \exp\left(\mu_i + \frac{\sigma_i^2}{2}\right)$;
- Variance : $\text{Var}(R_i) = (se(\hat{R}_i))^2 = \exp(2 \cdot \mu_i + \sigma_i^2) \cdot (\exp(\sigma_i^2) - 1)$

A partir de ces deux formules nous déduisons la valeur de μ_i et σ_i^2 :

$$\mu_i = \ln(\hat{R}_i) - \frac{\sigma_i^2}{2} \quad ; \quad \sigma_i^2 = \ln\left(1 + \left(\frac{se(\hat{R}_i)}{\hat{R}_i}\right)^2\right)$$

Les bornes d'un intervalle de confiance à 95% sont alors données par :

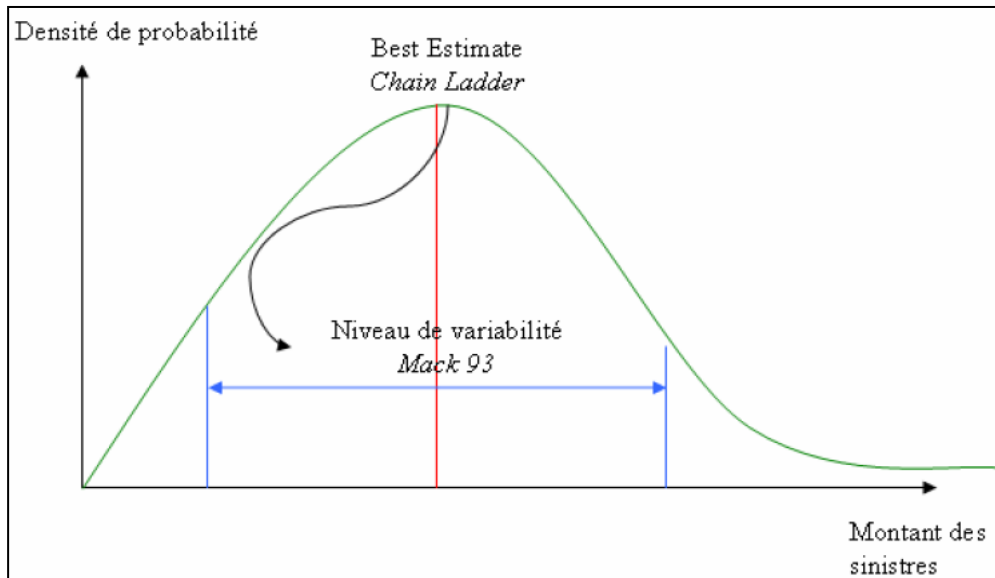
²³ Claire Guillaumin (2008), -Détermination d'une méthode de provisionnement pour les créances douteuses-, Université Paris Dauphine page 56.

$$IC_{0,95} = [\exp(\mu_i - 2\sigma_i) ; \exp(\mu_i + 2\sigma_i)]$$

$$= [\hat{R}_i \exp\left(\frac{-\sigma_i^2}{2} - 2\sigma_i\right) ; \hat{R}_i \exp\left(\frac{-\sigma_i^2}{2} + 2\sigma_i\right)]$$

Enfin, la variabilité selon le modèle de Mack peut être schématisée comme suit :

Fig 2.11- Représentation de la variabilité estimée par le modèle de Mack



Source : les méthodes stochastiques de provisionnement, Nathalie BALSON, page 31.

L'obtention des quantiles nous permettra d'aborder une autre mesure de risque, appelée « Value-at-Risk ».

f. La « VaR » : Une mesure de risque exigée par « Solvabilité II »

Le référentiel « Solvabilité II » a privilégié la Value-at-Risk (VaR) comme mesure de risque. En effet, cette dernière (VaR) repose sur le concept de la volatilité²⁴.

La transposition de la VaR aux problématiques liées à l'assurance est récente et impose une approche radicalement différente de l'approche bancaire. En effet, la situation de référence du monde bancaire consiste à estimer la VaR sur un échantillon important de gains / pertes sur un portefeuille. Les données sont disponibles en quantité, avec une fréquence importante. L'application de cette technique au portefeuille d'actifs d'un assureur passe par un certain nombre d'aménagements, essentiellement pour tenir compte de la durée de détention plus importante. Dans le cadre de la détermination du capital de solvabilité, de nouvelles difficultés apparaissent ; la nature des données disponibles rendant invalide l'approche historique (nombre

²⁴ Racicot Francoit- Eric, Raymond Théorét (2006), -La Value-at-Risk models de la VaR, simulation en Visual Basic et autres mesures récentes du risque de marché-, ESG Montréal, page 487.

insuffisant de données). Il convient ici de revenir sur les situations d'assurance dans lesquelles on est amené à évaluer des VaR . En pratique nous pouvons en distinguer principalement deux (ces situations imposent des approches différentes) :

- le calcul d'une provision via un quantile de la distribution des sinistres ;
- la détermination du niveau du capital de solvabilité (SCR) pour contrôler une probabilité de ruine en imposant que celle-ci soit inférieure à 0,5 % à horizon un an.

Dans ce cours, nous allons nous intéresser uniquement à la VaR appliquée à la problématique de provisionnement.

Définition de la Value-at-Risk

Elle correspond au montant de la perte maximale que peut subir un gestionnaire de portefeuille pour un niveau de risque et un horizon temporel donnés²⁵. Elle est considérée aussi comme la valeur estimée du dépassement potentiel de provision.

Cette définition peut être reformulée comme suit :

Etant donné un risque X et un niveau de probabilité τ compris entre 0 et 1, la VaR correspondante, notée $VaR[X; \tau]$ est le quantile d'ordre $1 - \tau$ de X . Il est le plus petit nombre x tel que la probabilité que X excède x ne dépasse pas $1 - \tau$.

Formellement : $VaR[X; \tau] = F_x^{-1}(1 - \tau)$: ***est le montant des réserves qui ne sera dépassé que dans τ des cas.***

La technique de la *Value at-Risk* appliquée à la détermination des provisions techniques d'un portefeuille de sinistres dépend de trois paramètres :

- ✓ *La distribution* de la charge ultime, le paramètre le plus difficile à préciser, que nous approchons, dans le cadre de cette étude, via une distribution *normale* ;
- ✓ *L'horizon temporel choisi* : Ce paramètre est très important car plus l'horizon est long plus les pertes peuvent être importantes (les pertes sont une fonction croissante du temps) ;
- ✓ *Le niveau de confiance*, ce niveau est égal à 1 moins la probabilité des événements défavorables. Ce niveau dépend du degré de prudence et d'aversion au risque.

Calcul de la « VaR » dans le cas du modèle de Mack

Nous disposons maintenant des estimations pour la moyenne de la variable R_i soit \hat{R}_i , et de l'erreur quadratique moyenne de cette variable $mse(\hat{R}_i)$. Il nous reste à faire une hypothèse sur

²⁵ Idem page 488

la distribution de R_i , pour pouvoir appliquer la mesure de risque VaR dans le cas du modèle de Mack.

Si nous supposons que la distribution choisie est *Normale*, l'estimation du quantile d'ordre $1 - \tau$ de R est donnée par la formule suivante :

$$\widehat{VaR}_\tau(R) = \hat{R} + \widehat{se}(\hat{R}) \times q_{1-\tau}.$$

Où : \hat{R} ; $\widehat{se}(\hat{R})$: la moyenne et l'écart type de la provision globale;

$q_{1-\tau}$: le quantile d'ordre $1-\tau$ de la loi normale standard.

2.5.2. Les Modèles Factoriels Stochastiques

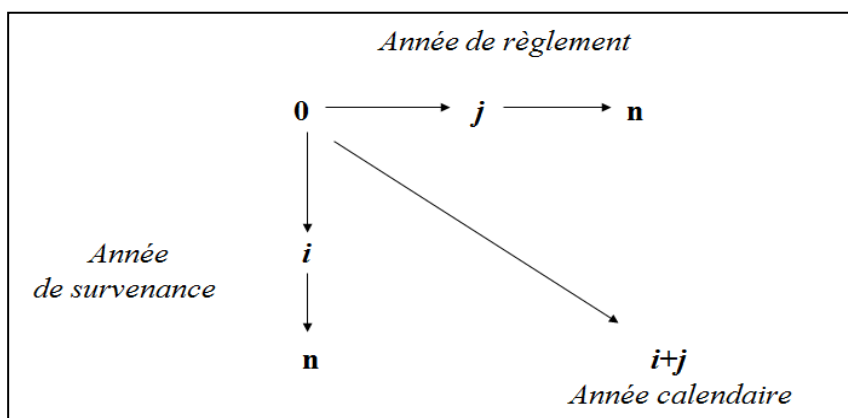
Dans cette section, nous nous éloignons des modèles récurrents inspirés de la méthode « *Chain Ladder* », et nous reviendrons sur des classes de modèles très utilisés dans les années 70, appelés « Modèles à Facteurs », proposant une lecture économétrique de ces modèles²⁶.

Dans le cadre de ces modèles, nous utilisons les triangles de paiements décumulés ($c_{i,j}$).

Nous cherchons à expliquer les paiements observés ($c_{i,j}$) d'un triangle en fonction de trois types de variables explicatives (cela revient à quantifier la relation entre une variable réponse "endogène" et des variables explicatives "exogènes") :

- ✓ La variable année de survenance : (α_i) , $i=0 \dots n$ avec $\alpha_0=0$;
- ✓ La variable année de développement : (β_j) ; $j=0 \dots n$ avec $\beta_0=0$;
- ✓ La variable année calendaire : elle sera représentée par un unique paramètre μ (facteur global du modèle).

Fig 2.12- Schéma illustratif des variables explicatives-modèle linéaire-



Source : Elaboré par nos soins.

²⁶ Arthur Charpentier (2011), -Risque et assurance-, Université Rennes 1, journée d'études statistique, page 57.

Dans ce cours, deux modèles vont être abordés: le modèle de Christophides (la régression Log Normale) et les modèles linéaires généralisés (Modèle de Poisson sur-dispersé).

a. Le modèle de « Christophides »

Ce modèle appartient à la famille des modèles log-linéaires, c'est-à-dire linéaire sur les log incréments et reformule de manière globale le modèle de *Chain-Ladder* présenté plus haut. Il permet de prendre en compte les tendances présentes sur les années de survenance et de développement.

Présentation du modèle

Avant de présenter ce modèle, nous estimons utile de rappeler au lecteur les hypothèses et la définition d'un modèle linéaire.

✓ **Hypothèses** : le modèle log-normal est fondé sur des hypothèses très fortes, listées ci-dessous :

- Les variables aléatoires c_{ij} sont indépendantes ;
- Chaque c_{ij} suit une loi *log-normale* ($f(c; \mu, \sigma)$) d'espérance $\mu_{i,j}$ et de variance σ^2 .

La fonction de distribution du paiement $c_{i,j}$ s'écrit :

$$f(c_{i,j}; \mu_{i,j}, \sigma) = \frac{1}{c_{i,j} \sigma \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(\ln c_{i,j} - \mu_{i,j})^2}{\sigma^2}\right)$$

$$c_{i,j} \sim LN(\mu_{i,j}, \sigma^2) \quad \text{où : } \mu_{i,j} = \omega + \alpha_i + \beta_j$$

Définition: Un modèle linéaire s'écrit comme suit (Forme Matricielle) :

$$c = M \psi + \epsilon \quad \text{où: } \epsilon \sim N(0, \sigma^2)$$

c : le vecteur des paiements ;

ψ : le vecteur des paramètres de la régression ;

$M = (M_{i,j})$: la matrice de régression ;

ϵ : les termes d'erreur supposés *i. i. d.*, gaussiens, de moyenne nulle et de variance σ^2 .

$$c = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_{N-1} \\ c_N \end{pmatrix}; M = \begin{pmatrix} 1 & m_{1,1} & \dots & m_{1,p} \\ 1 & m_{2,1} & & m_{2,p} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & m_{N-1,1} & & m_{N-1,p} \\ 1 & m_{N,1} & \dots & m_{N,p} \end{pmatrix}; \psi = \begin{pmatrix} \omega \\ \alpha_1 \\ \vdots \\ \beta_{n-1} \\ \beta_n \end{pmatrix}; \epsilon = \begin{pmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \vdots \\ \epsilon_{N-1} \\ \epsilon_N \end{pmatrix}$$

Soit la variable $S_{i,j} = \text{Ln}(c_{i,j})$ « appelée log-paiement ou log-incrément ». Cette variable suit donc par définition une loi normale : $S_{i,j} \sim N(m_{i,j}, \sigma^2)$

Avec: $E(S_{i,j}) = m_{i,j}$ et $\text{var}(S_{i,j}) = \sigma^2$

Ainsi : $E(c_{i,j}) = \mu_{i,j} = e^{S_{i,j}} = e^{m_{i,j} + \frac{\sigma^2}{2}}$;

$$\text{Var}(c_{i,j}) = e^{m_{i,j} + \sigma^2} (e^{\sigma^2} - 1)$$

La régression log-normale est donc un modèle linéaire normal, appliquée au log-incréments du triangle :

$$S = M \psi + \epsilon$$

Où :

- S : est le vecteur des log-incréments du triangle pris ligne par ligne ;
- M : est la matrice de régression, elle correspond à la matrice *Jacobienne* de la transformation $m : \psi \rightarrow m(\psi) = m_{i,j}$ définie par :

$$\frac{\delta m_{i,j}}{\delta \omega} = 1 ; \quad \frac{\delta m_{i,j}}{\delta \alpha_k} = 1 \text{ si } k = i, 0 \text{ sinon} ; \quad \frac{\delta m_{i,j}}{\delta \beta_l} = 1 \text{ si } l = j, 0 \text{ sinon}$$

- $\psi = (\omega, \alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta_1, \dots, \beta_n)$: est le vecteur des paramètres de régression (de taille $= (2n + 1)$) ;
 - ϵ : est le vecteur des erreurs, distribué selon la loi $N(0, \sigma^2 I)$.
- ✓ **Exemple** : A titre illustratif, on va constituer la matrice des variables explicatives pour un triangle de liquidation de dix (10) paiements observés :

<i>Année</i>		<i>développement</i>			
		0	1	2	3
<i>Survenance</i>		β_0	β_1	β_2	β_3
96	α_0	$c_{96,0}$	$c_{96,1}$	$c_{96,2}$	$c_{96,3}$
97	α_1	$c_{97,0}$	$c_{97,1}$	$c_{97,2}$	
98	α_2	$c_{98,0}$	$c_{98,1}$		
99	α_3	$c_{99,1}$			

- Le vecteur des variables réponses se présente comme suit :

$$C = \begin{pmatrix} C_{96,0} \\ C_{96,1} \\ C_{96,2} \\ C_{96,3} \\ C_{97,0} \\ C_{97,1} \\ C_{97,2} \\ C_{98,0} \\ C_{98,1} \\ C_{99,0} \end{pmatrix}$$

- Le vecteur ligne des paramètres du modèle ainsi que la matrice des variables explicatives sont les suivants :

$$\psi = (\omega, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3) ; \quad \alpha_0 = \beta_0 = 0$$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Estimation des paramètres du modèle

L'estimation du vecteur ψ se fait en cherchant à minimiser la somme des carrés des erreurs, soit :

$$\text{Min} \sum_{l=1}^N \epsilon_l^2 = \text{Min} \epsilon^t \epsilon = \text{Min} (S - M\psi)^t (S - M\psi)$$

$$= \text{Min } S^t S - 2\psi^t M^t S + \psi^t M^t M \psi = \text{Min } Q$$

Pour minimiser cette fonction par rapport à ψ , nous différencions Q par rapport à ψ :

$$\frac{\partial Q}{\partial \psi} = -2M^t S + 2M^t M \hat{\psi} = 0 \quad \Rightarrow \quad \hat{\psi} = (M^t M)^{-1} M^t S$$

Ces estimateurs sont des estimateurs sans biais et de variance égale à :

$$\text{Var}(\psi) = \sigma^2 (M^t M)^{-1}$$

L'estimateur sans biais de la variance est obtenue par $\hat{\sigma}^2$. Notons par (e_{ij}) : le résidu théorique représentant l'estimation de l'erreur (ϵ_{ij}) : $e_{ij} = S_{ij} - \hat{S}_{ij}$

Où : \hat{S}_{ij} : valeur prévue par le modèle.

$$\text{L'estimation sans biais de } \sigma^2 \text{ est : } \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{N-p} (S - M\hat{\psi})^t (S - M\hat{\psi}) = \frac{1}{N-p} \sum_{i=1}^n e_i^2$$

Evaluation du montant de la provision

L'estimation des incréments est donnée par : $\hat{\mu}_{i,j} = e^{\omega + \hat{\alpha}_i + \hat{\beta}_j + \frac{\hat{\sigma}^2}{2}}$ (les paiements futurs).

Ces estimations conduisent à la construction du triangle des valeurs prévues des $c_{i,j}$, et au calcul des « Best estimates » : $\hat{E}(R_i), i = 1, \dots, n$ (provisions par année d'origine) et $\hat{E}(R)$ (provision totale $\hat{R} = \sum_{i+j > n} \hat{u}_{i,j}$).

Estimation du risque de prédiction

✓ L'expression de la variance des provisions estimées par exercice de survenance s'écrit :

$$\text{Var}[\hat{E}(R_i)] = \sum_{j=n-i+2}^n V(\hat{\mu}_{ij}) + 2 \sum_{j_1=n-i+2}^n \sum_{j_2=n-i+2}^n \text{cov}(\hat{\mu}_{ij_1}, \hat{\mu}_{ij_2}) \quad \text{avec: } j_1 \neq j_2$$

✓ Et celle des provisions estimées totales :

$$\text{Var}[\hat{E}(R)] = \sum_{i=1}^n \sum_{j=n-i+2}^n V(\hat{\mu}_{ij}) + 2 \sum_{i_1=1}^n \sum_{i_2=2}^n \sum_{j_1=n_1-i_1+2}^n \sum_{j_2=n_2-i_2+2}^n \text{cov}(\hat{\mu}_{ij_1}, \hat{\mu}_{ij_2})$$

$$\text{Avec: } i_1 \neq i_2$$

N.B. Le calcul de la matrice Variance-Covariance des log-incréments $\hat{\Sigma}_{R_i}$ (les $V(\hat{\mu}_{ij})$ et $\text{cov}(\hat{\mu}_{ij_1}, \hat{\mu}_{ij_2})$) est difficile à obtenir. Deux méthodes peuvent être retenues à cet effet : la méthode dite « Delta » ou la technique de ré-échantillonnage « Bootstrap ». Ces deux méthodes seront exposées en détail dans les prochaines sections.

Nous passons maintenant à une autre modélisation stochastique en vue de supprimer le montant des provisions techniques ainsi que l'erreur de prédiction, connue sous le nom « modèles linéaires généralisés (GLM) ».

b. La modélisation GLM

Description du modèle GLM dans le cadre du provisionnement

L'objectif du modèle GLM, dans le cadre du provisionnement, est d'exprimer les règlements de sinistres ($c_{i,j}$), qui sont aléatoires, en fonction des variables explicatives : « année de survenance α_i » et « délai de règlement β_j ».

D'après Renshaw et Verral 2005, il est possible de formuler la plupart des méthodes stochastiques de provisionnement en utilisant une famille particulière de modèles linéaires généralisés.

➤ **Les composantes du modèle :** La description de ces modèles mobilise trois composantes :

- ✓ **La composante aléatoire :** On suppose que les variables aléatoire $\{c_{i,j}; i, j = 0, \dots, n\}$ sont indépendantes, toutes admettent une distribution issue d'une structure exponentielle : $c_{i,j} \sim f(c, \zeta, \phi)$. La forme générale de la fonction de « densité » de c s'écrit :

$$f(c, \zeta, \phi) = \exp \left\{ \frac{c\zeta - b(\zeta)}{\phi} + d(c, \phi) \right\}$$

Où:

- ζ : un paramètre réel, appelé naturel de la famille exponentielle ;
 - ϕ : un paramètre strictement positif, appelé paramètre de dispersion ;
 - b et d sont des fonctions régulières spécifiques à la distribution.
- ✓ **La composante systématique :** il s'agit d'une composante déterministe, utilisée comme « Prédicteur », car la plupart des modèles de provisionnement sont basés sur un prédicteur linéaire η avec :

$$\eta_{i,j} = \omega + \alpha_i + \beta_j \quad i, j = 0, \dots, n \text{ avec } \alpha_0 = \beta_0 = 0$$

- ω : facteur global du modèle. Dans certains modèles, ce paramètre est nul ;
- α_i : paramètre dépendant de l'année de survenance ;

- β_j : paramètre relatif au délai de règlement semblable aux facteurs de développement du modèle « Chain Ladder ».

✓ **La fonction de lien** : elle décrit la relation fonctionnelle entre les composantes aléatoire et systématique : $\eta_{ij} = g(\mu_{ij}) \quad i, j = 0, \dots, n$

Où : g : appelé fonction de lien et est supposée monotone et différentiable. Les liens suivants sont les plus utilisés :

- Lien identité (unité) : $\eta_{ij} = \mu_{ij}$ pour lequel les effets des facteurs sont additifs ($\mu_{ij} = \omega + \alpha_i + \beta_j$) ;
- Lien logarithmique: $\eta_{ij} = \ln(\mu_{ij}) \Rightarrow \mu_{ij} = e^{\eta_{ij}}$.

Le deuxième lien (logarithmique) a l'avantage d'introduire une relation multiplicative entre les différents paramètres (le nombre de sinistres et les montants sont toujours positifs). En revanche, le modèle additif peut donner des valeurs négatives pour la fréquence et les montants des sinistres ce qui est de toute évidence ne correspond pas à la réalité.

N.B : Il est commun en matière de provisionnement de considérer deux types de distributions pour la variable $c_{i,j}$: « Poisson sur-dispersé » et « Gamma ». La fonction de lien pour ces distributions est de type «log» et l'estimateur de $\mu_{ij} = E(c_{i,j})$ est donné par :

$$\hat{\mu}_{i,j} = \exp\{\hat{\omega} + \hat{\alpha}_i + \hat{\beta}_j\}$$

Dans ce cours, nous n'allons nous intéresser qu'au modèle de « Poisson sur-dispersé ».

c. Le modèle de « Poisson Sur-dispersé »

Etant donné que la variable c_{ij} suit la loi de Poisson sur-dispersé de paramètres (μ_{ij}, ϕ) , sa fonction de densité de probabilité s'écrit comme suit : $c_{i,j} \sim P^{sd}(\mu_{i,j}, \phi)$ ssi $\frac{c_{i,j}}{\phi} \sim P\left(\frac{\mu_{i,j}}{\phi}\right)$

$$f(c_{i,j}; \zeta; \phi) = \exp\left(-\frac{c_{i,j}}{\phi}\right) \frac{\left(\frac{\mu_{i,j}}{\phi}\right)^{\left(\frac{c_{i,j}}{\phi}\right)}}{\left(\frac{c_{i,j}}{\phi}\right)!} = \exp\left(-\frac{\mu_{i,j}}{\phi} + \frac{c_{i,j}}{\phi} \ln\left(\frac{\mu_{i,j}}{\phi}\right) - \ln\left(\frac{c_{i,j}}{\phi}\right)!\right)$$

Où : c_{ij} : paiement (i, j) ;

μ_{ij} : espérance de c_{ij} ;

ϕ : coefficient de dispersion.

Le modèle de Poisson sur-dispersé permet de se débarrasser de l'hypothèse d'égalité entre l'espérance et la variance induite par le modèle de Poisson simple à travers le paramètre de dispersion ϕ , qui est constant et implique une relation de proportionnalité entre l'espérance et la variance des montants de règlements quels que soient les délais de règlements et les années de survenance.

✓ L'espérance et la variance sont les suivantes : $E(c) = \mu$; $V(c) = \phi E(c) = \phi \mu$

Estimation des paramètres du modèle

A l'inverse de la méthode de *Chain Ladder*, qui se base sur les montants cumulés $C_{i,j}$, le modèle de Poisson sur-dispersé se base sur les paiements décumulés $c_{i,j}$ (avec $0 \leq i, j \leq n$). L'application de la méthode du maximum de vraisemblance aux données du triangle supérieur nous permet d'estimer les paramètres du modèle (le vecteur $\hat{\zeta} = [\hat{\omega}, (\hat{\alpha}_i)_{i=1,\dots,n}, (\hat{\beta}_j)_{j=1,\dots,n}]$) ainsi que celui de dispersion ϕ .

Sous la condition d'indépendance des paiements, la fonction de vraisemblance s'écrit :

$$l_N(c_1, \dots, c_N/\zeta) = \prod f(c; \phi; \zeta) = \exp\left(-\sum \frac{\mu_{i,j}}{\phi} + \sum \frac{c_{i,j}}{\phi} \ln\left(\frac{\mu_{i,j}}{\phi}\right) - \sum \ln\left(\frac{c_{i,j}}{\phi}!\right)\right)$$

En y introduisant le logarithme, on obtient :

$$\begin{aligned} L(c_1, \dots, c_N/\zeta) &= \log l_N(c_1, \dots, c_N/\zeta) = -\sum \frac{\mu_{i,j}}{\phi} + \sum \frac{c_{i,j}}{\phi} \ln\left(\frac{\mu_{i,j}}{\phi}\right) - \sum \ln\left(\frac{c_{i,j}}{\phi}!\right) \\ &= \frac{1}{\phi} \sum (\exp(\omega + \alpha_i + \beta_j) + c_{i,j}(\omega + \alpha_i + \beta_j)) + u(c_{i,j}; \phi) \end{aligned}$$

Où $u(c_{i,j}; \phi)$: regroupe tous les termes qui n'affectent pas la maximisation de la vraisemblance par rapport au vecteur ζ .

Pour estimer le vecteur des paramètres (ζ), nous dérivons $L(c_1, \dots, c_N/\zeta)$ par rapport à chaque composante dudit vecteur (conditions de premier ordre). La solution de ces conditions

$$\begin{aligned} \frac{\partial L(c_1, \dots, c_N/\zeta)}{\partial \omega} &= \sum c_{i,j} - \sum \exp(\omega + \alpha_i + \beta_j) = 0 \\ \frac{\partial L(c_1, \dots, c_N/\zeta)}{\partial \alpha_i} &= \sum c_{i,j} - \sum \exp(\omega + \alpha_i + \beta_j) = 0 \\ \frac{\partial L(c_1, \dots, c_N/\zeta)}{\partial \beta_i} &= \sum c_{i,j} - \sum \exp(\omega + \alpha_i + \beta_j) = 0 \end{aligned}$$

sera l'estimateur de maximum de vraisemblance. Ce système d'équations est assez complexe pour être résolu analytiquement. Nous allons recourir à une méthode dite : Newton-Raphson²⁷

Une fois avoir obtenu l'estimateur $\hat{\zeta}$ de ζ , nous procédons à remplir les cases manquantes, c'est-à-dire les cases (i, j) où: $n + 1 \leq i + j \leq 2n$ par leurs valeurs espérées estimées $\hat{E}(C_{ij}) = \hat{\mu}_{ij} = \hat{\mu}_{i,j} = e^{\hat{\omega} + \hat{\alpha}_i + \hat{\beta}_j}$

Cette estimation représente la valeur du règlement (i, j) prévue par le modèle. Sa variance est $V(c_{ij}) = \phi V(\mu_{ij}) = \hat{\phi} \hat{\mu}_{ij}$.

Estimation de la moyenne des provisions

Comme la provision est la somme des paiements futurs, son montant est calculé en additionnant les valeurs estimées des incréments:

$\hat{E}(R_i) = \sum_{j=n-i+1}^n \hat{\mu}_{i,j}$ de $E(R_i)$, pour $i=1, \dots, n$. Puis le « *best estimate* » de la provision totale R : $\hat{E}(R) = \sum_{i=1}^n \hat{E}(R_i) = \sum_i \sum_j \hat{\mu}_{i,j}$

Remarque :

On rappelle le résultat fondamental de Renshaw et Verrall 2002²⁸ :

« Dans un triangle de liquidation à incréments positifs, les valeurs prévues par un modèle de Poisson (simple ou sur dispersé) dans le triangle inférieur, les provisions par année d'origine et totale coïncident avec les éléments correspondants calculés à l'aide de la méthode « *Chain Ladder standard* » ».

Enfin, le triangle supérieur des valeurs rétrospectives calculées à l'aide des facteurs de développement « *Chain Ladder* » appliqués aux éléments de la diagonale principale du triangle, coïncide avec le triangle supérieur des valeurs prévues par le modèle²⁹.

Estimation du risque de prédiction

L'incertitude relative à l'estimation de $E(R_i)$ (provision de l'année de survenance i) et $E(R)$ (provision globale) est quantifiée par $V(\hat{E}(R_i))$ avec $i = 1, \dots, n$ et $V[\hat{E}(R)]$, dont l'évaluation nécessite la connaissance des variances et covariances des $\hat{\mu}_{i,j}$:

²⁷ Pour plus de détails, voir : Mesure de provisions cohérentes et méthodes ligne à ligne, Gilles Chau, ENSAE, Page 28.

²⁸ R.VERRAL (2002), -Stochastic claims reserving in general insurance-, Journal of the Institute of Actuaries.

²⁹ Christian PARTRAT, Projection Dynamique Stochastique d'un triangle de Liquidation, ISFA, Université Claude Bernard 1, Lyon1 France, page 12.

$$V(\hat{E}(R_i)) = \sum_{j=n-i+1}^n V(\hat{\mu}_{i,j}) + \sum_{j_1=n-i+1}^n \sum_{j_2=n-i+1}^n cov(\hat{\mu}_{i,j_1}, \hat{\mu}_{i,j_2}) \text{ pour } j_1 \neq j_2$$

Et celle des provisions estimées totales : pour $i_1 \neq i_2$

$$V[\hat{E}(R)] = \sum_{i=1}^n \sum_{j=n-i+1}^n V(\hat{\mu}_{i,j}) + \sum_{i_1=1}^n \sum_{i_2=1}^n \sum_{j_1=n-i_1+1}^n \sum_{j_2=n-i_2+1}^n cov(\hat{\mu}_{i_1,j_1}, \hat{\mu}_{i_2,j_2})$$

Le calcul de $V(\hat{\mu}_{i,j})$ ainsi que des covariances $cov(\hat{\mu}_{i,j_1}, \hat{\mu}_{i,j_2})$ n'est pas facile à obtenir.

Par le biais de la méthode « Delta », nous pouvons par contre obtenir des expressions asymptotiques. En effet, cette méthode permet de calculer la matrice variance-covariance des paramètres du modèle, notée $\Sigma_{asy}(\hat{\zeta})$ (ζ : vecteur des paramètres). Sur la diagonale de cette matrice on trouve les variances asymptotiques : $\sigma_{asy}^2(\hat{\omega})$, $\sigma_{asy}^2(\hat{\alpha}_i)$, $\sigma_{asy}^2(\hat{\beta}_i)$ et de part et d'autre, les covariances $cov_{asy}(\hat{\omega}, \hat{\alpha}_i)$, $cov_{asy}(\hat{\omega}, \hat{\beta}_j)$, $cov_{asy}(\hat{\alpha}_i, \hat{\beta}_j)$.

La matrice variance-covariance du vecteur des paramètres se présente comme suit :

$$\Sigma_{asy} = \begin{pmatrix} v(\omega) & cov(\omega, \alpha_1) & \dots & cov(\omega, \beta_n) \\ cov(\alpha_1, \omega) & v(\alpha_1) & \vdots & cov(\alpha_1, \beta_n) \\ \dots & \dots & \ddots & \vdots \\ cov(\beta_n, \omega) & cov(\beta_n, \alpha_1) & \dots & v(\beta_n) \end{pmatrix}$$

Sous des conditions standards sur le maximum de vraisemblance, $\hat{\zeta}$ est *asymptotiquement normal* $\zeta \sim NA(\hat{\zeta}, \Sigma_{asy}(\hat{\zeta}))$. Il en ressort que la provision estimée est aussi asymptotique normale :

$$\hat{E}(R) \sim NA(E(R), \sigma_{asy}^2[\hat{E}(R)])$$

$$\sigma_{asy}^2[\hat{E}(R)] = \sum_i \sigma_{asy}^2[\hat{E}(R_i)] + 2 \sum_{i \neq j} cov_{asy}[\hat{E}(R_i), \hat{E}(R_j)]$$

$$\sigma_{asy}^2[\hat{E}(R)] = J_n \Sigma_{asy} J_n^t$$

Où : J_n : Matrice *Jacobienne* relative à la transformation $\eta : R^{2n+1} \rightarrow R^{(n+1)^2} : \zeta \rightarrow \eta(\zeta) = (\eta_{ij}) = \omega + \alpha_i + \beta_j$ définie pour chaque (i, j) par :

$$\frac{\partial \eta_{i,j}}{\partial \omega} = 1 ; \quad \frac{\partial \eta_{i,j}}{\partial \alpha_t} = \begin{cases} 1 & \text{si } t = i \\ 0 & \text{si } t \neq i \end{cases} ; \quad \frac{\partial \eta_{i,j}}{\partial \beta_t} = \begin{cases} 1 & \text{si } t = j \\ 0 & \text{si } t \neq j \end{cases}$$

A cette étape, il est nécessaire de mettre à zéro les lignes pour lesquelles la contrainte a été appliquée.

Estimation du paramètre de dispersion

Le paramètre de dispersion \emptyset intervient dans le calcul de la variance. Il est estimé sur la base des résidus de Pearson. Pour chaque cellule $(i + j \leq n)$ du triangle de liquidation, on calcule le résidu de Pearson qui est la différence entre la valeur observé (paiement décumulé

« $c_{i,j}$ ») et la valeur estimée du paiement ($\hat{c}_{i,j} = \hat{\mu}_{i,j}$) puis on estime la valeur du paramètre \emptyset comme suit :

$$\hat{\emptyset} = \frac{1}{N - p} \sum_{i+j \leq n} (r_{i,j}^p)^2$$

Avec :

$$r_{i,j}^p : \text{Résidu de Pearson. Il est égal à : } r_{i,j}^p = \frac{c_{i,j} - \hat{\mu}_{i,j}}{\sqrt{\hat{\mu}_{i,j}}}$$

Où : $\left\{ \begin{array}{l} c_{i,j} : \text{ Paiement décumulé ;} \\ \hat{\mu}_{i,j} : \text{ Paiement estimé ;} \\ N = \frac{(n+1)(n+2)}{2} \text{ représente le nombre de paiements décumulés } (c_{i,j}); \\ p = 2n + 1 \text{ représente le nombre des paramètres du modèle.} \end{array} \right.$

Construction d'intervalle de confiance asymptotique

Etant donnée la normalité asymptotique de la provision (voir ci-haut), nous pouvons construire un intervalle de confiance à $(1 - \tau)$ autour de sa moyenne.

$$IC = \{ \hat{E}(R) - q_{1-\tau} \times \hat{\sigma}_{asy}[\hat{E}(R)], \hat{E}(R) + q_{1-\tau} \times \hat{\sigma}_{asy}[\hat{E}(R)], \}$$

Où : $q_{1-\tau}$: quantile d'ordre $1 - \tau$ de la loi normale standard

Calcul de la VaR dans le cas du modèle Poissonien

La VaR ou la probabilité de ruine ne peuvent pas être calculées uniquement sur la base des moments de la provision R . Il est nécessaire donc de déterminer sa distribution. Cette dernière peut être obtenue directement par additivité de la loi générique des incréments $c_{i,j}$.

En effet, si les paiements $c_{i,j}$ suivent des lois de Poisson sur dispersé : $c_{i,j} \rightarrow P_{surd}(\mu_{i,j}, \phi)$, la provision totale R suit aussi la même distribution : $R \rightarrow P_{surd}(\mu_R, \phi)$

$$\text{Où: } \mu_R = \sum_{i=1}^n \sum_{i+j > n} \mu_{i,j}$$

Dans le cas où : $\frac{\mu_R}{\phi} \geq 50$, la fonction de répartition de la loi de Poisson peut être approximée par celle d'une loi Normale standard : $P(R \leq r) = \Phi\left(\frac{r - \mu_R}{\sqrt{\phi \mu_R}}\right)$.

Le quantile d'ordre $(1 - \tau)$ de la provision R :

$$\widehat{VaR}_{1-\tau}(R) = \widehat{q}_{1-\tau}(R) = \hat{\mu}_R + q_{1-\tau} \sqrt{\widehat{\phi \mu_R}}$$

Il est fréquent que la loi du montant de la provision R ne puisse être directement accessible par additivité. De ce fait, nous allons utiliser la loi *Normal Power* qui conduit à l'approximation de la fonction de répartition.

Comme la provision globale R est la somme des incréments futurs : $R = \sum_{i=1}^n \sum_{j=n-i+1}^n c_{i,j}$ et sur la base de l'hypothèse d'indépendance des paiements, les moments de R s'expriment en fonction des $\mu_{i,j}$.

Il en résulte :
$$\mu = E(R) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=n-i+1}^n \mu_{i,j}$$

$$\sigma^2 = V(R) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=n-i+1}^n V(\mu_{i,j}) = \phi \sum_{i=1}^n \sum_{j=n-i+1}^n V(\mu_{i,j})$$

$$\mu_3 = \mu_3(R) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=n-i+1}^n \mu_3(c_{i,j}) = \phi^2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=n-i+1}^n V(\mu_{i,j})V'(\mu_{i,j})$$

Le coefficient d'asymétrie de la provision:
$$\gamma_1 = \frac{\mu_3}{\sigma^3} = \sqrt{\phi} \frac{\sum_i \sum_j V(\mu_{i,j})V'(\mu_{i,j})}{[\sum_i \sum_j V(\mu_{i,j})]^{3/2}}$$

L'approximation *Normal Power* de la fonction de répartition est donnée par :

$$F_R(r) \approx F^{NP}(R) = \Phi \left[\frac{-3}{\gamma_1} + \sqrt{\frac{9}{\gamma_1^2} + 1 + \frac{6}{\gamma_1} \left(\frac{r - \mu}{\sigma} \right)} \right]; \quad r \geq \mu - \sigma \left(\frac{\gamma_1}{6} + \frac{3}{2\gamma_1} \right)$$

La valeur approchée du quantile d'ordre $1 - \tau$ de la provision s'obtient en inversant la fonction de répartition $F^{NP}(R)$:

$$\widehat{VaR}_\tau(R) = \widehat{q}_{1-\tau}^{NP}(R) = \hat{\mu} + \hat{\sigma} \left[\frac{\hat{\gamma}_1}{6} q_{1-\tau}^2 + q_{1-\tau} - 1 \right]$$

Où : $q_{1-\tau}$: Quantile d'ordre $1-\tau$ de la loi normale standard ;

μ : Espérance de la provision totale ;

σ : Écart type;

γ_1 : Coefficient d'asymétrie.

d. Approche non paramétrique : Le « *Bootstrapping* »

Nous proposons dans cette section, une nouvelle approche non paramétrique, permettant d'obtenir plus d'information sur le niveau des provisions, afin de pouvoir générer **la distribution des provisions**. En effet, pour estimer la distribution des réserves, nous pourrions par exemple paramétriser la loi des paiements. Cependant, utiliser une procédure « *Bootstrap* » permet d'estimer la distribution de la réserve, sans avoir à faire d'hypothèse supplémentaire.

Présentation de la méthode Bootstrap

La méthode de *Bootstrap* est une méthode alternative dite « ré-échantillonnage »³⁰. Elle a été initialement développée par Efron en 1979 dans le but d'estimer et simuler la variabilité d'un estimateur dans un cadre non paramétrique. Elle est généralement associée à un modèle GLM où la distribution des-incréments peut être log-normale, gamma ou Poisson sur-dispersée. Ce dernier est plus intéressant que les autres puisque, les provisions estimées par ce modèle sont identiques à celles obtenues par la méthode de *Chain-Ladder*. Nous supposerons donc dans la suite être dans le cadre d'un modèle Poissonien.

Le principe de cette technique consiste à simuler un grand nombre d'échantillons de taille N , en tirant aléatoirement avec remise N observations à partir d'un échantillon initial de N variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées (*iid*).

Hypothèses

L'application du *Bootstrap* repose sur deux hypothèses :

- L'indépendance des observations (d'où le tirage avec remise) ;
- L'unicité de la loi de distribution de chaque élément qui compose l'échantillon initial.

Application du Bootstrap au provisionnement

L'application du *Bootstrap* au provisionnement nécessite un échantillon pour effectuer le tirage avec remise. Pour cela, nous utilisons les données du triangle de règlements incrémentaux (non-cumulés) comme échantillon.

Etant donné que les variables $(c_{i,j})$ ne sont en général pas identiquement distribuées. Il est donc préférable d'avoir recours aux résidus du modèle, en particulier les résidus de *Pearson* car plus simples à calculer.

La procédure de l'approche « Bootstrap »

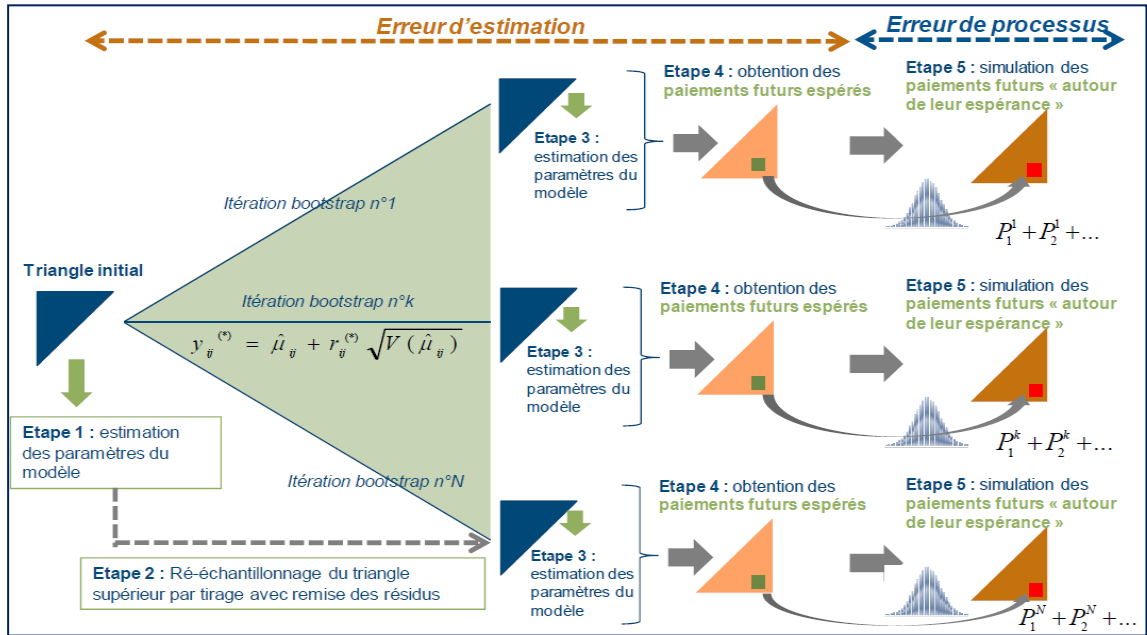
La procédure consiste à trouver les résidus des observations par rapport à un modèle choisi, créer une pseudo-réalité en échantillonnant avec remise ces résidus, et calculer la provision de cette pseudo-réalité.

En répétant ce processus un grand nombre de fois, on obtient une distribution empirique des provisions constituées.

³⁰ *Resampling* en anglais.

Les différentes étapes de la technique du « *Bootstrapping* » peuvent être synthétisées dans le schéma ci-dessous :

Fig 2.13- La procédure du « *Bootstrap* ».



Source : Solvabilité 2 et mesure de volatilité dans les PSAP, Jean BOISSEAU, page 85.

D'après la figure, la procédure du ré-échantillonnage peut être illustrée suivant l'algorithme ci-dessous :

✓ **Etapes préliminaires :**

- i. Estimation du vecteur des paramétrées ($\hat{\zeta} = [\hat{\omega}, (\hat{\alpha}_i)_{i=1,\dots,n}, (\hat{\beta}_j)_{j=1,\dots,n}]$) du modèle de Poisson sur-dispersé ;
- ii. Détermination des valeurs prévues par le modèle pour le triangle supérieur $\hat{\mu}_{i,j}$ pour $i + j \leq n$;
- iii. Calcul des résidus de Pearson : $r_{i,j}^p = \frac{c_{i,j} - \hat{\mu}_{i,j}}{\sqrt{\hat{\mu}_{i,j}}}$ pour $(i + j \leq n)$;

Où: $\hat{\mu}_{i,j}$: le montant non cumulé du triangle prédit ;

$c_{i,j}$: Le montant non cumulé du triangle initial.

- iv. Ajustement des résidus de Pearson pour réduire le biais de l'estimation :

$$r_{i,j}^{(ajust)} = \sqrt{\frac{N}{N-p}} \frac{c_{i,j} - \hat{\mu}_{i,j}}{\sqrt{\hat{\mu}_{i,j}}} \text{ pour } (i + j \leq n)$$

Où : N : taille des données ;

P : nombre des paramètres à estimer.

✓ **Etapes à répéter B fois :**

- i. Ré-échantillonnage des résidus ajustés $r_{ij}^{(ajust)}$ par tirage avec remise, permettant d'obtenir un nouveau triangle supérieur de résidus (r_{ij}^*);
- ii. Utilisation du nouveau triangle de résidus (r_{ij}^*) pour construire un pseudo triangle initial d'incrément (c_{ij}^* tenant compte la relation $c_{i,j}^* = r_{i,j}^* * \sqrt{\hat{\mu}_{i,j}} + \hat{\mu}_{i,j}$) et par la suite un pseudo triangle de données décumulées;
- iii. Estimation du nouveau vecteur des paramètres du modèle ($\hat{\zeta}^* = [\hat{\omega}^*, (\hat{\alpha}_i^*)_{i=1,\dots,n}, (\hat{\beta}_j^*)_{j=1,\dots,n}]$) pour prévoir les nouvelles valeurs du triangle inférieur μ_{ij}^* (ou bien calculer les facteurs de développement de la méthode de *Chain-Ladder* étant donné que les deux méthodes donnent les mêmes résultats);
- iv. Calculer la réserve R_i par année de survenance ainsi que la réserve globale $R = \sum_i R_i$ par l'application.
- v. Stocker les résultats et répéter le processus.

a. Estimation des paramètres *Bootstrap* :

A partir du B échantillons des provisions ((\hat{R}^b)), nous pouvons alors estimer la moyenne, la variance et l'erreur de prédiction du montant des provisions :

- ✓ Moyenne de la provision : $E^B(\hat{R}) = \frac{1}{B} \sum_{b=1}^B \hat{R}_b$
- ✓ Variance de la provision : $V^B(\hat{R}) = \frac{1}{B-1} \sum_{b=1}^B (\hat{R}_b - E^B(\hat{R}))^2$
- ✓ Erreur de prédiction : $\widehat{MSEP}_{boot}^B(\hat{R}) = \hat{V}(R) + V_{boot}^B$ avec : $\hat{V}(R) = \varphi \hat{R}_b$

On en déduit :

- ✓ $sep_{boot}^B = \sqrt{\hat{V}(R) + V_{boot}^B}$
- ✓ Erreur standard Bootstrap : $se_{boot}^B = \sqrt{V_{boot}^B}$
- ✓ Erreur relative d'estimation : $\frac{se_{boot}^B(\hat{R})}{\hat{R}}$

Construction d'intervalle de confiance asymptotique

Le théorème central limite permet de prouver que la distribution asymptotique du montant de la provision est de type *Normale*. Ce résultat nous permet de construire des intervalles de confiance de la forme suivante:

$$IC_{1-\tau} = \left[E^b(\hat{R}) - \frac{se_{boot}^B}{\sqrt{B}} \times q_{1-\tau} ; E^b(\hat{R}) + \frac{se_{boot}^B}{\sqrt{B}} \times q_{1-\tau} \right]$$

Où : $E^b(\hat{R})$: moyenne de la provision 'bootstrap' ;

se_{boot}^B : erreur standard 'bootstrap' ;

B : nombre de simulations ;

$q_{1-\tau}$: quantile d'ordre $1 - \tau$ de la loi normale centrée réduite.

Toutes les méthodes stochastiques que nous venons de présenter permettent d'apporter plus d'informations sur les estimations des provisions résultant des méthodes déterministes, et ce à travers la possibilité de capter le risque lié à ces estimations.

Les modèles stochastiques se basent sur des hypothèses explicites concernant le processus de liquidation et sur la variabilité de l'espérance des valeurs des paiements futurs. En faisant de telles hypothèses sur les composantes aléatoires du modèle, l'approche stochastique permet de tester de manière statistique leur validité et nous permet d'obtenir non seulement l'espérance des paiements futurs mais aussi leur variation.

Parmi les avantages cités en faveur des modèles stochastiques nous pouvons mentionner :

- Ils permettent de vérifier la validité des hypothèses avec une grande variété de techniques ;
- Ils donnent la valeur de l'espérance des paiements futurs ainsi que la variabilité d'où un intervalle de confiance et une estimation de l'erreur. En revanche, les méthodes déterministes ne donnent pas un indicateur sur la différence entre l'estimation effectuée et la valeur réelle théorique ;
- Certains de ces modèles offrent la possibilité de calculer des quantiles (*VaR*) ;
- La méthode de *Bootstrap* permet de déterminer la distribution empirique de la provision d'où son apport comparativement aux autres modèles.

Parmi les inconvénients de la modélisation stochastique nous pouvons citer :

- Les hypothèses sont souvent loin d'être simples et donc irréalistes ;
 - L'implémentation informatique est plus complexe à mettre en place que celle des méthodes déterministes.

Chapitre N°3: L'actuariat de l'assurance vie

Ce chapitre sera consacré à la compréhension des concepts d'antisélection et d'aléa morale, à la présentation des différents produits de l'assurance vie, notamment leurs mécanismes de fonctionnement, et la démarche à suivre pour leurs tarifications.

3.1. Antisélection et hasard moral

Dans cette section nous nous intéressons successivement à deux questions :

- 1) Reste-t'il des phénomènes d'antisélection une fois prises en compte les classes de risque a priori des assureurs ?
- 2) Comment introduire la variable d'effort individuel sous-jacente et analyser sa dynamique ?

3.1.1. Analyse de l'antisélection

Les prévisions des risques par les compagnies d'assurance reposent sur des évaluations des sinistres futurs à partir d'un certain nombre de caractéristiques exogènes des assurés, et, comme nous l'avons vu, elles sont ensuite utilisées pour construire des sous-populations homogènes d'assurés. Dans un contexte d'information asymétrique, où l'assuré aurait une meilleure connaissance de son risque futur que l'assureur, on peut cependant espérer améliorer la prévision du risque en observant aussi ses comportements endogènes de choix de contrats.

Ceci nous conduit dans la suite à introduire trois types de variables :

- Des variables Y relatives aux sinistres futurs, comme des occurrences, des nombres, des coûts de sinistre,...
- Des variables X de classification a priori, comme l'âge, le type de véhicule,...
- Des variables Z liées aux contrats retenus, par exemple au niveau de franchise.

Pour un assureur, l'intérêt de prendre ou non en compte les effets d'antisélection pour améliorer ses prévisions doit évidemment être étudié classe de risque par classe de risque. Il s'agit de ce fait d'une notion d'antisélection résiduelle, c'est-à-dire conditionnée à l'information X déjà retenue et utilisée par l'assureur.

a. Antisélection résiduelle et indépendance conditionnelle

L'absence d'antisélection résiduelle est caractérisée par une condition d'indépendance conditionnelle. En effet, elle est satisfaite si la prévision du risque Y sachant la seule information exogène X coïncide avec cette prévision sachant à la fois l'information exogène X et celle indirecte Z révélée par les choix de contrats de l'assuré. En terme de lois conditionnelles, cette condition s'écrit :

$$l(Y|X, Z) = l(Y|X)$$

Il est connu que cette condition admet diverses formes équivalentes :

$$I(Z|X, Y) = I(Z|X)$$

Et

$$I(Z, Y|X) = I(Z|X)I(Y|X)$$

La deuxième condition correspond à l'interprétation liée à l'information asymétrique. Un assuré ayant connaissance parfaite de son risque futur Y et de ses caractéristiques exogènes X , choisit son contrat à partir de la loi $I(Z|X, Y)$. Il n'a aucun avantage informationnel par rapport à l'assureur, si la connaissance de Y se révèle inutile.

La troisième condition est, elle, l'écriture usuelle de l'indépendance entre sinistres et choix de contrats, classe par classe.

La notion d'indépendance conditionnelle, et donc celle d'antisélection résiduelle, sont contingentes aux classes de risque à priori. Pour le mettre en évidence considérons, comme mesure d'absence de liaison conditionnelle, l'écart à zéro de la covariance conditionnelle, $Cov(Z, Y|X)$, et introduisons deux décompositions en classes de risque : l'une fondée sur des caractéristiques X_1 , l'autre plus précise fondée sur des caractéristiques $X = (X_1, X_2)$. L'équation d'analyse de la covariance s'écrit :

$$Cov[Z, Y|X_1] = Cov[E(Z|X), E(Y|X)|X_1] + E[Cov(Z, Y|X)|X_1]$$

Cette relation peut être satisfaite avec :

$$Cov(Z, Y|X) = 0 \text{ et } Cov(Z, Y|X_1) \neq 0$$

Ou avec

$$Cov(Z, Y|X) \neq 0 \text{ et } Cov(Z, Y|X_1) = 0$$

Ainsi l'absence d'antisélection résiduelle pour certaines classes de risque n'entraîne pas nécessairement cette absence pour un découpage moins fin. On s'attend cependant en pratique, si les classes sont bien choisies par les assureurs, à ce que l'antisélection résiduelle diminue, lorsque la segmentation a priori est affinée.

b. Dépendance conditionnelle et erreur de spécification

Il résulte des diverses caractéristiques de l'indépendance conditionnelle, que le test d'absence d'antisélection résiduelle peut être mené de façon équivalente selon trois optiques :

- Y-a-t'il indépendance entre Y et Z à l'intérieur de chaque classe de risque ?
- Le type de contrat retenu apporte-il une information complémentaire utile pour prévoir le risque ?
- Le type de contrat retenu est-il mieux prévu en tenant compte du risque futur ?

Les procédures de tests doivent cependant être menées avec prudence, car il est difficile de séparer l'existence d'une antisélection résiduelle et l'oubli d'effets croisés des variables

explicatives. Cette question peut être décrite à partir de l'optique de prévision des sinistres. Supposons que Y suit une variable qualitative correspondant à la survenance de sinistre. Les formulations paramétriques standards pour la loi conditionnelle de Y sachant X, Z sont du type :

$$P[Y = 1|X, Z] = F[g(X; b) + cZ]$$

Où F et g sont des fonctions données, b et c des paramètres. Dans ce contexte l'indépendance conditionnelle correspond à la contrainte $c = 0$.

Sous cette hypothèse, nous avons :

$$P[Y = 1|X, Z] = P[Y = 1|X] = F[g(X, b_0)]$$

Où b_0 est la vraie valeur du paramètre. L'hypothèse nulle est rejetée si :

$$P[Y = 1|X, Z] \neq F[g(X, b_0)]$$

Or ceci peut se produire lorsque :

$$P[Y = 1|X, Z] \neq P[Y = 1|X]$$

Cas qui nous intéresse, ou lorsque :

$$P[Y = 1|X] \neq F[g(X, b_0)]$$

C'est-à-dire lorsque la spécification de $P[Y = 1|X]$ est inappropriée. Il faut pour éviter cette seconde possibilité choisir une fonction score $g(X, b)$, suffisamment souple pour s'appliquer à la fois à la modélisation de la probabilité conditionnelle $P[Y = 1|X, Z]$ et à celle de $P[Y = 1|X]$.

Regardons alors les liens entre ces deux lois conditionnelles, lorsque le paramètre c est petit, la fonction score initiale en X : $g(X, b) = b'X$, et Z une variable dichotomique telle que :

$$P[Z = 1|X] = F(a'X)$$

Nous avons :

$$P[Y = 1|X] = E[P[Y = 1|X, Z]|X]$$

$$P[Y = 1|X] = \sum_{z=0}^1 F(a'X)^z [1 - F(a'X)]^{1-z} F[b'X + cz]$$

$$P[Y = 1|X] \cong F(b'X) + \dot{F}(b'X)cF(a'X)$$

$$P[Y = 1|X] \cong F(b'X + cF(a'X))$$

$$P[Y = 1|X] \cong F(b'X + cE(Z|X))$$

Nous observons, que si le score initial introduit dans la probabilité $P[Y = 1|X, Z]$ est linéaire en X , celui apparaissant dans la probabilité $P[Y = 1|X]$ n'est pas de la même forme, mais fait intervenir un terme correctif correspondant à l'anticipation de la variable de choix Z .

Afin d'éviter la confusion entre antisélection résiduelle et mauvaise spécification du score, il faut tenir compte dans la procédure de ce correctif.

Une démarche envisageable est la suivante :

- i) Un score, par exemple linéaire, a été estimé pour le modèle :

$$P[Y = 1|X] = F(b'X)$$

- ii) Par ailleurs, on peut estimer un modèle pour la variable Z, par exemple :

$$P[Z = 1|X] = F(a'X)$$

Et en déduire une prévision $\hat{Z}(X) = F(a'X)$ de Z fondée sur les variables exogènes.

- iii) Pour vérifier si Z apporte une information additionnelle utile pour prévoir Y, on introduit alors le modèle :

$$P[Y = 1|X, Z] = F[b'X + d\hat{Z}(X) + cZ]$$

Où figurent à la fois la variable de choix et sa prévision, et on teste l'hypothèse $c = 0$.

L'estimation de ce dernier modèle peut conduire à diverses conclusions.

Si c est significatif, il y a antisélection résiduelle.

Si d est significatif, il y a oubli d'effets joints des variables explicatives X. Dans ce dernier cas, la détermination et l'analyse de $\hat{Z}(X)$ donne une idée des effets joints oubliés.

3.1.2. Modèles avec hasard moral

a. Dynamique de la variable d'effort

Le point de départ est évidemment le modèle classique contenant deux variables mesurant les sinistres : Z_{it} le nombre annuel de sinistres et Y_{it} leur coût global annuel. Leurs lois sont définies en fonction des valeurs des caractéristiques observables x_{it} et des facteurs d'hétérogénéité strictement individuels μ_i et α_i .

On suppose que :

- Les couples (Z_{it}, Y_{it}) sont indépendants conditionnellement aux valeurs présentes, et passées des divers facteurs ;
- La loi de Z_{it} sachant x_{it}, μ_i, α_i est une loi de Poisson $P(\mu_i \exp x_{it}b)$;
- La loi de Y_{it} sachant $Z_{it}, x_{it}, \mu_i, \alpha_i$ est une loi gamma $\gamma(v Z_{it}, \alpha_i \exp -x_{it}d)$.

Par ailleurs, nous avons introduit des lois des facteurs d'hétérogénéité facilitant le calcul explicite des primes, nous avons supposé :

- μ_i et α_i indépendants conditionnellement aux caractéristiques observables :
- $\mu_i / x_{it} \sim \gamma(A, A)$;
- $\alpha_i / x_{it} \sim \gamma(C+1, C)$

Ce modèle est naturellement étendu en permettant aux facteurs non observables, d'évoluer avec le temps, c'est-à-dire en remplaçant μ_i par μ_{it} , et α_i par α_{it} . La difficulté est de spécifier une dynamique jointe pour la série bivariée $(\mu_{it}, \alpha_{it}, t \text{ variant})$, qui soit maniable et compatible avec le modèle de base précédent.

Une modélisation possible consiste à transformer préalablement les facteurs d'hétérogénéité, afin de les rendre gaussiens, puis à introduire une dynamique autorégressive-moyenne mobile sur ces facteurs transformés.

De façon plus précise, introduisons $H(\cdot; A, C)$ la fonction de répartition de la loi gamma de paramètres A et C, et φ la fonction de répartition de la loi standard. Le modèle avec facteurs individuels $\mu_i \sim \gamma(A, A)$, $\alpha_i \sim \gamma(C + 1, C)$ aurait aussi pu être écrit en fonction des facteurs transformés :

$$\begin{aligned}\mu_i^* &= \varphi^{-1}[H(\mu_i; A, A)], \\ \alpha_i^* &= \varphi^{-1}[H(\alpha_i; C + 1, C)]\end{aligned}$$

Qui seraient alors indépendants, de même loi normale centrée réduite.

Le modèle avec variables d'effort dynamiques est alors supposé tel que :

- Les couples (Z_{it}, Y_{it}) sont indépendants conditionnellement aux valeurs présentes et passées des divers facteurs ;
- La loi de Z_{it} sachant x_{it}, μ_i, α_i est une loi de Poisson $P(\mu_i \exp x_{it}b)$;
- La loi de Y_{it} sachant $Z_{it}, x_{it}, \mu_i, \alpha_i$ est une loi gamma $\gamma(v Z_{it}, \alpha_i \exp -x_{it}d)$.
- Les facteurs non observables satisfont à une dynamique ARMA gaussienne après transformation adéquate :

$$\psi(L) \begin{pmatrix} \mu_{it}^* \\ \alpha_{it}^* \end{pmatrix} = \Theta(L)u_{it}$$

Où

$$\mu_{it}^* = \varphi^{-1}[H(\mu_{it}; A, A)]$$

Et

$$\alpha_{it}^* = \varphi^{-1}[H(\alpha_{it}; C + 1, C)]$$

u_{it} est une suite de vecteurs gaussiens bidimensionnels de loi $N(0, \Sigma)$ et $\psi(L), \Theta(L)$ deux polynômes matriciels dans l'opérateur retard :

$$\begin{aligned}\psi(L) &= Id - \psi_1(L) \dots \psi_p L^p \\ \Theta(L) &= Id - \theta_1(L) \dots \theta_q L^q\end{aligned}$$

Il est plus intéressant de contraindre la matrice Σ du bruit pour que la matrice de variance-covariance marginale de $\begin{pmatrix} \mu_{it}^* \\ \alpha_{it}^* \end{pmatrix}$ soit l'identité. En effet, dans ce cas la loi marginale de $\begin{pmatrix} \mu_{it}^* \\ \alpha_{it}^* \end{pmatrix}$

est gaussienne centrée réduite, et elle de $\begin{pmatrix} \mu_{it} \\ \alpha_{it} \end{pmatrix}$ correspond à celle du modèle avec facteur strictement individuel. La distribution marginale des variables observables (Z_{it}, Y_{it}) coïncide alors avec celle de ce modèle de base et en particulier admet une forme explicite, qui ne dépend que des paramètres v, b, d, A, C mais pas de ceux ψ et Θ définissant la dynamique.

b. Estimation par simulation des modèles à facteurs et reconstitution de l'effort

Estimation

Le modèle précédent est d'une forme complexe, qui empêche le calcul explicite de la log-vraisemblance. Il existe cependant des méthodes d'estimation simples à mettre en œuvre. Nous présentons l'une d'entre elles, qui sépare l'estimation des paramètres v, b, d, A, C , qui apparaissent déjà dans le modèle de base, de ceux ψ et Θ , qui caractérisent la dynamique.

Nous avons vu que le modèle conduit à des formes explicites des lois marginales des (Z_{it}, Y_{it}) , disons $f(z_{it}, y_{it} | x_{it}; v, b, d, A, C)$. Les paramètres correspondants peuvent alors être estimés de façon convergente en appliquant une méthode du maximum de vraisemblance marginale, c'est-à-dire en optimisant :

$$\max \sum_i \sum_t \log f(z_{it}, y_{it} | x_{it}; v, b, d, A, C)$$

Par rapport à v, b, d, A, C .

Il faut noter que cette optimisation est exactement celle effectuée pour un modèle à effets strictement individuels. Les estimateurs sont désignés par $(\hat{v}_T, \hat{b}_T, \hat{d}_T, \hat{A}_T, \hat{C}_T) = \hat{\theta}_T$.

Plus précisément, fixons des valeurs des paramètres ψ_{ij} et prenons les autres paramètres égaux à leurs valeurs estimées de première étape. Soit v_{it}^s des tirages indépendants dans la loi normale $N(0, Id)$; on en déduit des valeurs simulées des facteurs gaussiens par :

$$\begin{bmatrix} \mu_{it}^{*s}(\psi) \\ \alpha_{it}^{*s}(\psi) \end{bmatrix} = \psi \begin{bmatrix} \mu_{it-1}^{*s}(\psi) \\ \alpha_{it-1}^{*s}(\psi) \end{bmatrix} + \Sigma(\psi)^{1/2} v_{it}^2$$

Puis des facteurs eux-mêmes :

$$\begin{cases} \mu_{it}^s(\psi) = H^{-1}[\varphi[\mu_{it}^{*s}(\psi)], \hat{A}_T, \hat{A}_T] \\ \alpha_{it}^s(\psi) = H^{-1}[\varphi[\alpha_{it}^{*s}(\psi)], \hat{C}_T + \mathbf{1}, \hat{C}_T] \end{cases}$$

Finalement, des valeurs simulées des variables de sinistres $Z_{it}^s(\psi)$ et $Y_{it}^s(\psi)$ sont déduites en effectuant indépendamment des tirages dans les lois $P[\mu_{it}^s(\psi) \exp x_{it} \hat{b}_T]$ et $\gamma[\hat{v}_T Z_{it}^s(\psi), \alpha_{it}^s(\psi) \exp - x_{it} \hat{d}_T]$ respectivement.

On dispose alors de deux séries de données de sinistres : celle $(Z_{it}, Y_{it}, i, t \text{ variants})$ correspondant aux observations, celle $(Z_{it}^s(\psi), Y_{it}^s(\psi), i, t)$ correspondant aux données simulées. On peut alors chercher la valeur $\hat{\psi}_T$ des paramètres ψ , qui fait se rapprocher le plus

certaines moments calculés sur les deux types des séries. Cette méthode, dite des moments simulées, peut par exemple être appliquée avec comme moment les autocorrélations d'ordre 1 calculées sur les deux types de séries.

Les composants $\hat{\psi}_{11,T}, \hat{\psi}_{12,T}, \hat{\psi}_{21,T}, \hat{\psi}_{22,T}$ sont alors solutions du système :

$$\begin{cases} \frac{1}{T} \sum_{t=2}^T Z_{it}^S(\psi) Z_{i,t-1}^S(\psi) = \frac{1}{T} \sum_{t=2}^T Z_{it} Z_{i,t-1} \\ \frac{1}{T} \sum_{t=2}^T Z_{it}^S(\psi) Y_{i,t-1}^S(\psi) = \frac{1}{T} \sum_{t=2}^T Z_{it} Y_{i,t-1} \\ \frac{1}{T} \sum_{t=2}^T Y_{it}^S(\psi) Z_{i,t-1}^S(\psi) = \frac{1}{T} \sum_{t=2}^T Y_{it} Z_{i,t-1} \\ \frac{1}{T} \sum_{t=2}^T Y_{it}^S(\psi) Y_{i,t-1}^S(\psi) = \frac{1}{T} \sum_{t=2}^T Y_{it} Y_{i,t-1} \end{cases}$$

Reconstitution de l'effort

Une fois estimés les paramètres du modèle, il est utile d'approcher les valeurs sous-jacentes des facteurs non observables. Du point de vue théorique, on peut soit déterminer leurs meilleures prévisions :

$$\hat{\mu}_{it} = E(\mu_{it} | x_{iT}, Z_{iT}, Y_{iT}), \quad \hat{\alpha}_{it} = E(\alpha_{it} | x_{iT}, Z_{iT}, Y_{iT})$$

Prenant en compte toutes les informations disponibles, soit rechercher leurs lois conditionnelles jointes :

$$l(\mu_{it}, \alpha_{it} | x_{iT}, Z_{iT}, Y_{iT})$$

Ces calculs de moments et lois conditionnels peuvent être utilisées de diverses façons. Ils servent d'abord au calcul des primes pures¹.

3.2. Les produits d'assurance vie

Dans un contrat d'assurance vie, la garantie de l'assureur peut consister en une prestation en cas de vie de l'assuré à une date prévue, ou bien une prestation en cas de décès de l'assuré pendant la période de garantie. La prestation peut prendre la forme d'un capital ou d'une rente.

3.2.1. Garanties en cas de décès

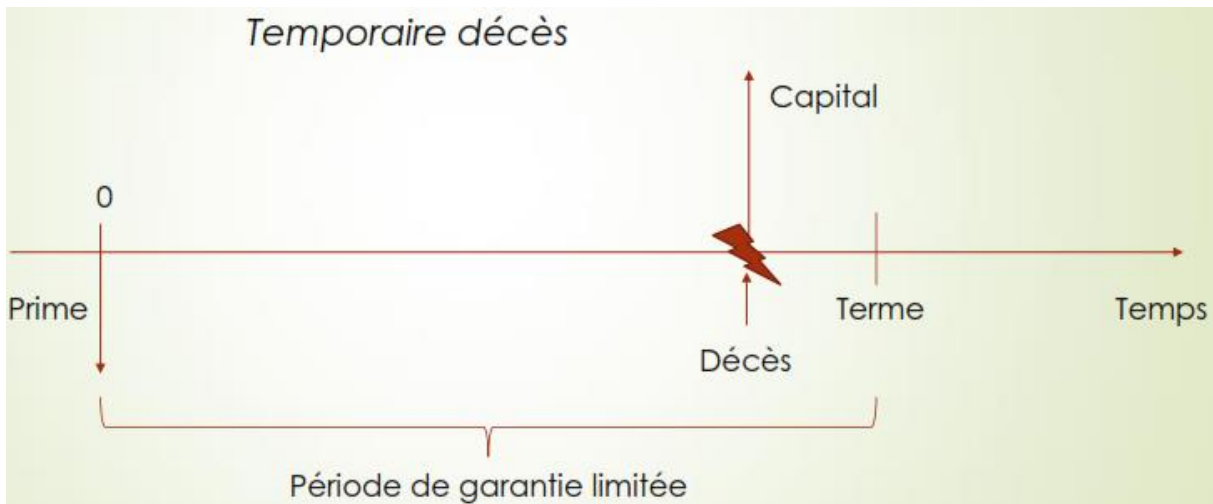
Il s'agit des garanties pour lesquelles la prestation de l'assureur est versée au bénéficiaire en cas de décès de l'assuré.

La temporaire décès garantit le versement d'un capital à un bénéficiaire si l'assuré décède au cours d'une période de temps dont le terme est connu à la souscription, comme l'indique le schéma suivant.

Ce produit peut être représenté par la figure suivante :

¹ Gourieroux Christian (1999), - Statistique de l'assurance -, Édition Economica, France, Page N° 269.

Figure 3.1 : Schéma de fonctionnement d'une assurance temporaire décès



Source : Élaboré par nous-mêmes.

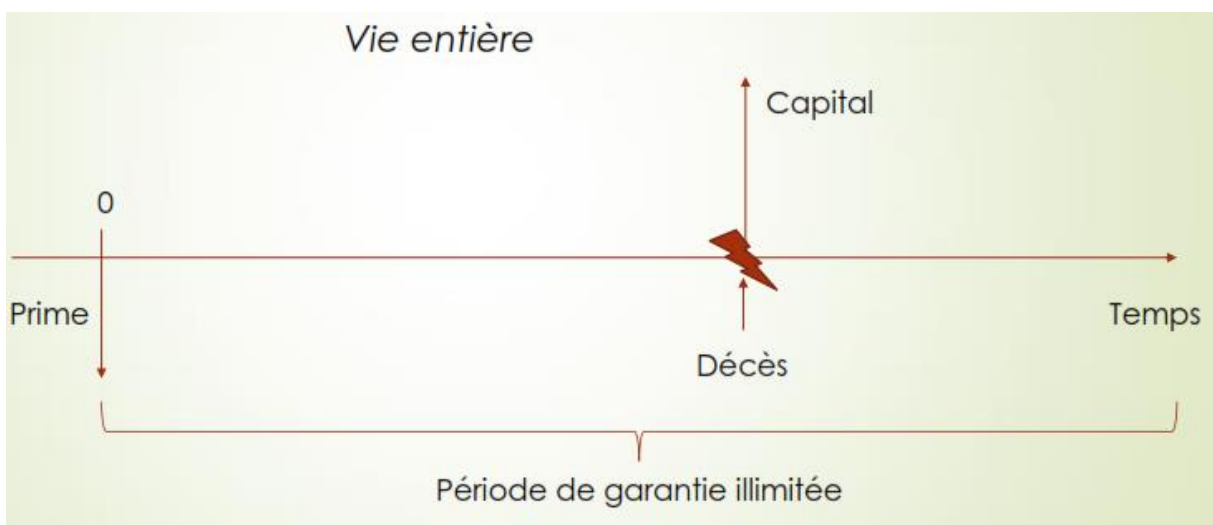
Exemple 1: Certains contrats garantissent, en cas de décès du chef de famille, le versement d'un capital à la veuve ou aux enfants. Il s'agit en l'occurrence d'une temporaire décès.

Exemple 2: Ce type de garantie se rencontre également dans les contrats d'assurance emprunteur. Ceux-ci prévoient, en cas de décès de l'assuré-emprunteur avant la fin du prêt, le versement au prêteur (le banquier) du capital restant dû.

3.2.2. Garantie vie entière

La vie entière garantit le versement d'un capital à un bénéficiaire au décès de l'assuré, quelle que soit la date du décès. Par conséquent, la prestation est toujours versée. L'aléa porte sur la date du décès et sur la date de règlement du capital. Ceci est représenté dans la figure ci-dessous :

Figure 3.2 : Schéma de fonctionnement d'une assurance vie entière



Source : Élaboré par nous-mêmes.

Exemple1: Ce type de garantie se rencontre dans les contrats dont l'objet est de faciliter le paiement des droits de succession ou des frais générés par le décès (frais d'obsèques).

Exemple2: Cette garantie sert également lorsqu'il s'agit de transmettre un capital à un bénéficiaire quel qu'il soit (et donc pas forcément un héritier naturel).

3.2.3. Garanties en cas de vie

Il s'agit des garanties pour lesquelles la prestation de l'assureur est versée au bénéficiaire en cas de vie de l'assuré.

Le capital différé est un produit qui garantit à un bénéficiaire (en général l'assuré lui-même) le versement d'un capital au terme d'une période définie, si l'assuré est toujours en vie à cette date. Ceci est relaté dans la figure suivante :

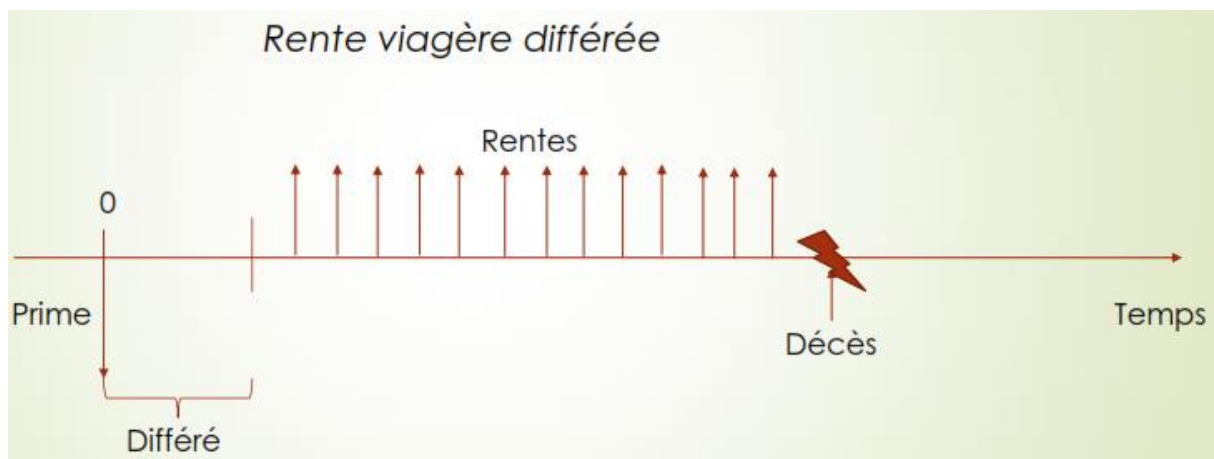
Figure 3.3 : Schéma de fonctionnement d'une assurance d'un capital différé



Source : Élaboré par nous-mêmes.

La rente viagère, quant à elle, garantit le versement de flux financiers périodiques à l'assuré jusqu'à son décès. La garantie peut prendre effet soit immédiatement après la souscription soit à l'issue d'une période de temps (le *différé*). La rente peut être à durée temporaire ou à durée illimitée. Ceci est expliqué dans la figure suivante :

Figure 3.3 : Schéma de fonctionnement d'une assurance d'une rente viagère différée



Source : Élaboré par nous-mêmes.

3.2.4. Combinaison de garanties

Plusieurs garanties élémentaires telles que celles qui viennent d'être présentées peuvent être associées dans le cadre d'un contrat d'assurance vie.

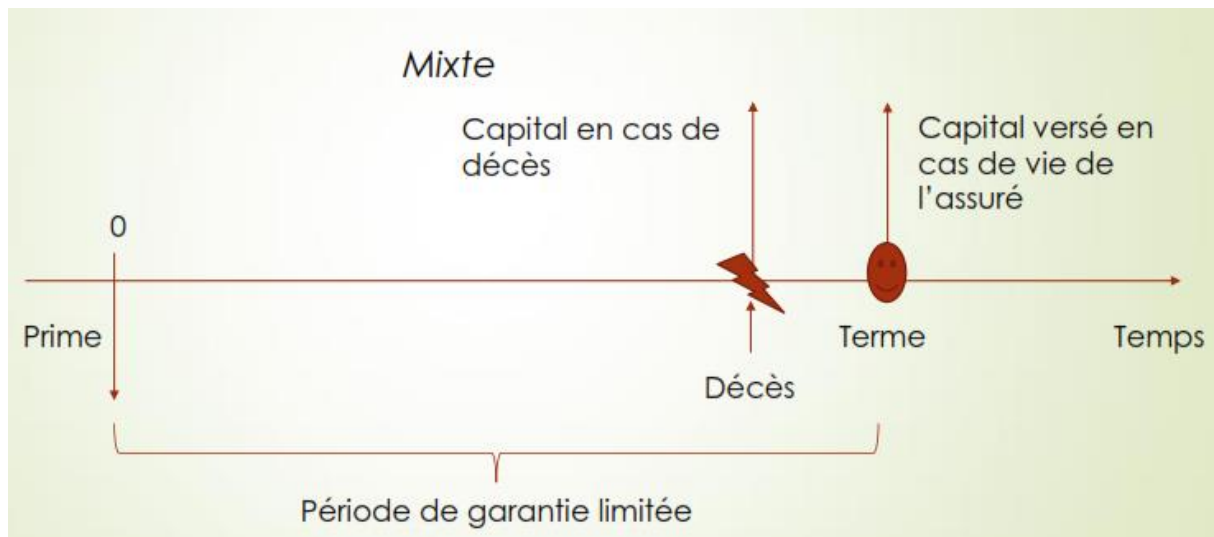
Exemple 1: Une rente est une combinaison de garanties puisqu'il s'agit d'une série de capitaux différés.

Exemple 2: Une mixte est un contrat d'assurance au titre duquel l'assureur s'engage:

- A verser un capital, en général à l'assuré lui-même, au terme du contrat s'il est toujours en vie à cette date (capital différé);
- Et à verser le même capital à un bénéficiaire (qui n'est pas l'assuré) au moment du décès de l'assuré si celui-ci survient avant le terme du contrat (temporaire décès).

Une mixte est donc la combinaison d'une garantie de capital différé et d'une garantie de temporaire décès. Ceci peut être résumé dans la figure ci-dessous :

Figure 3.4 : Schéma de fonctionnement d'une assurance vie mixte



Source : Élaboré par nous-mêmes.

3.3. Calcul de base en assurance vie et décès

L'assurance-vie repose essentiellement sur des calculs de valeurs actuelles probables, c'est-à-dire des calculs d'expressions de la forme

$$c'p = \sum_j c_j p_j$$

Où

c est un vecteur de flux futurs actualisés, de la forme $(1+i)^{-j}$

i est le taux d'actualisation² (en retenant les notations usuelles)

c_j un flux de paiements qui peut survenir à la date j

² Taux utilisé dans une opération d'actualisation pour calculer la valeur actuelle d'une somme future.

p_j est la probabilité que le $j^{\text{ème}}$ paiement soit effectué (généralement une probabilité qu'une personne soit en vie pour le calcul de rentes, ou la probabilité qu'une personne décède à cette date pour l'assurance décès).

R est un langage idéal pour les calculs de ces valeurs actuelles probables compte tenu de la forme vectorielle de la plupart des expressions.

3.3.1. Quelques notations

Si l'assurance non-vie repose essentiellement sur des modélisations stochastiques (aléatoires) des sinistres à venir, l'assurance-vie consiste fondamentalement à actualiser des flux futurs, incluant généralement une part d'incertitude (associée au décès ou à la survie d'un assuré). De la même manière que nous nous étions attachés à calculer des primes à l'aide de flux en assurance non-vie, nous allons ici calculer des grandeurs de la forme :

$$\mathbb{E} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{C_k}{(1+i)^{T_k}} \times \mathbf{1}(\text{paiement à la date } T_k) \right)$$

Où l'assureur s'est engagé à verser un capital C_k à des dates T_k (connues), à condition qu'une hypothèse soit vérifiée à la date T_k . Compte-tenu de la linéarité de l'espérance, si l'on suppose le taux d'actualisation non aléatoire, on peut réécrire cette dernière expression sous la forme :

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{C_k}{(1+i)^{T_k}} \times \mathbb{P}(\text{paiement à la date } T_k) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k \times v^{T_k} \times \mathbb{P}(\text{paiement à la date } T_k)$$

Où le facteur d'actualisation $v = (1+i)^{-1}$ permettra d'éviter – autant que possible – la notation i , réservée aux taux d'actualisation en assurance-vie, mais désignant un indice de ligne dans les algorithmes.

4.1.1 Les probabilités de décès, ou de survie

Comme le montre la formule précédente, un des points essentiels lors de la valorisation est de disposer de ces probabilités p , liées souvent à la survie – ou au décès – d'un assuré (en particulier les taux d'actualisation sont supposés ici connus, et constants).

Considérons un individu d'âge x à la souscription d'un contrat d'assurance (correspondant à la variable x sous R), et notons classiquement T_x sa durée de vie résiduelle (qui est aléatoire).

On pose ${}_kq_x = \mathbb{P}(T_x \leq k)$ la probabilité de ne plus être en vie à l'âge $x+k$ (c'est-à-dire k années après la souscription), et ${}_kp_x = \mathbb{P}(T_x > k)$ la probabilité d'être encore en vie à l'âge $x+k$. A x donné, $k \rightarrow {}_kp_x = \mathbb{P}(T_x > k)$ est alors la fonction de survie de la variable T_x . On peut alors considérer des vecteurs px et qx . Parmi les autres notations, la probabilité de décéder pendant une période particulière, disons entre les âges $x+k$ et $x+k+h$ sera notée

$${}_{k|h}q_x = \mathbb{P}(k < T_x \leq k + h) = {}_k p_x - {}_{k+h} p_x$$

Par abus de notation, on notera parfois p_x la quantité ${}_1 p_x$ et q_x la quantité ${}_1 q_x$. Et on notera ${}_k d_x = {}_{k|1} q_x$ la probabilité qu'une personne d'âge x décède à l'âge $x+k$ (ce qui n'a toutefois rien d'officiel, mais permettra des simplifications sous R par la suite).

Ces grandeurs sont obtenues numériquement à l'aide des tables de mortalité, c'est-à-dire un vecteur L et L_x pour tous les âges x , correspondant au nombre de survivants ayant atteint l'âge x au sein d'une cohorte de taille L_0 initialement (à la naissance, avec souvent $L_0 = 100000$, par convention). La première valeur du vecteur L , i.e. $L[1]$ correspondra alors à L_0 . Afin d'illustrer ces calculs, nous utiliserons les anciennes tables françaises (qui présentent l'avantage d'être simples d'utilisation) dites TV88-90 (TV, en cas de vie) et TD88-90 (TD, en cas de décès).

Les tables étant un comptage de survivants, on en déduit aisément un estimateur des probabilités de survie (et donc aussi de décès). La probabilité pour un individu d'âge $x = 40$ ans d'être encore en vie $k = 10$ ans plus tard (et donc d'atteindre les 50 ans) s'écrit

$${}_k p_x = \frac{L_{x+k}}{L_x} \text{ avec ici } x = 40 \text{ et } k = 10$$

Méthode 1 :

```
TD=read.table("http://perso.univ-rennes1.fr/arthur.charpentier/TD8890.csv",
sep=";",header=TRUE)
```

```
TV=read.table("http://perso.univ-rennes1.fr/arthur.charpentier/TV8890.csv",
sep=";",header=TRUE)
```

Méthode 2 :

```
données = "C:\\Users\\user\\Desktop"
```

```
setwd(données)
```

```
TD <- read.table('TD.txt', header = TRUE, sep = '')
```

```
TV <- read.table('TV.txt', header = TRUE, sep = '')
```

```
TD
```

```
TV
```

```
TD[39:52,]
```

```
Age Lx
```

```
39 3895237
```

```
40 3994997
```

```
41 4094746
```

```
42 4194476
```

43 4294182
 44 4393868
 45 4493515
 46 4593133
 47 4692727
 48 4792295
 49 48 91833
 50 4991332
 51 5090778
 52 5190171

TD\$Lx[TD\$Age==50]

[1] 90778

x <- 40

h <- 10

Calcul de la probabilité à partir de la colonne "age"

TD\$Lx[TD\$Age==x+h]/TD\$Lx[TD\$Age==x]

[1] 0.9581196

Calcul de la probabilité à partir des indices

>TD\$Lx[x+h+1]/TD\$Lx[x+1]

[1] 0.9581196

Sous cette forme, on retrouve des formules classiques de probabilités conditionnelles (car on conditionne toujours par le fait que l'individu est en vie à l'âge x) par exemple

$${}_{k+h}p_x = \frac{L_{x+k+h}}{L_x} = \frac{L_{x+k+h}}{L_{x+k}} \times \frac{L_{x+k}}{L_x} = {}_h p_{x+k} * {}_k p_x$$

Soit

$$\mathbb{P}(T_x > k + h) = \mathbb{P}(T > x + k + h | T > x) = \mathbb{P}(T > x + k + h | T > x + k) \times \mathbb{P}(T > x + k | T > x)$$

Nous verrons par la suite l'intérêt de toutes ces formules itératives, mais on peut déjà noter que comme il semble intéressant de parfois changer l'âge de l'individu (ici en regardant par exemple un individu d'âge $x+k$), on peut voir ${}_k p_x$ comme le terme générique d'une matrice \mathbf{p} , dépendant des paramètres x et k (avec toujours $x = 0, 1, 2, 3, \dots$ ce qui posera des problèmes d'indexation, et $k = 1, 2, 3, \dots$). Avec cette écriture, nous aurons des soucis pour travailler avec les âges $x = 0$. Toutefois, les produits d'assurance-vie étant souvent destinés à des personnes d'âge plus avancé, nous garderons cette simplification dans la première partie de ce chapitre.

Lx <- TD\$Lx

```

m <- length(Lx)
p <- matrix(0,m,m); d <- p
for(i in 1:(m-1)) {
p[1:(m-i),i] <- Lx[1+(i+1):m]/Lx[i+1]
# Exemple avec (i=1) : p[1:107,1] <- Lx[3:108]/Lx[2]
d[1:(m-i),i] <- (Lx[(1+i):(m)]-Lx[(1+i):(m)+1])/Lx[i+1]
# Exemple avec (i=1) : d[1:107,1] <- (Lx[2:108]-Lx[3:109])/Lx[2]
}
diag(d[(m-1):1,]) <- 0
diag(p[(m-1):1,]) <- 0
q <- 1-p

```

La matrice p contient les ${}_j p_i$, la matrice q contient les ${}_j q_i$, alors que la matrice d contient les ${}_j d_i$.
On vérifiera sans trop de difficultés que la somme des éléments de d par colonne (donc à âge fixé) vaut 1,

```
apply(d, 2, sum)[1:10]
```

```
[1] 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1
```

apply(x, marge, fonction) : renvoient un vecteur ou la liste de valeurs obtenues en appliquant une fonction aux marges d'un tableau.

x : base de données

marge : Si « 1 », la fonction est appliquée sur la ligne, si c'est « 2 », la fonction est appliqué sur la colonne.

fonction : La fonction que l'on souhaiterait appliquée.

Aussi, p[10,40] correspondra à ${}_{10}p_{40}$:

```
p[10,40]
```

```
[1] 0.9581196
```

On peut ainsi représenter les fonctions de survie résiduelle, et calculer une espérance de vie résiduelle, en notant que

$$e_x = E(T_x) = \sum_{k=1}^{\infty} k \times {}_k|_1 q_x = \sum_{k=1}^{\infty} k p_x$$

```
x <- 45
```

```
S <- p[,45]/p[1,45]
```

```
sum(S)
```

```
[1] 30.46237
```

Interprétation : L'individu d'âge 45 ans vivra encore 30 ans de plus, c'est-à-dire jusqu'à l'âge de 75 ans.

4.1.2 Calculs de valeurs actuelles probables

La valeur actuelle probable s'écrit, de manière très générale,

$$\sum_{j=1}^k \frac{C_j \times p_j}{(1+i)^j} = \sum_{j=1}^k v^j \times C_j \times p_j$$

Où $C = (C_1, \dots, C_k)$ est l'ensemble des montants à verser (correspondant à un vecteur C), i est le taux d'actualisation, et $p = (p_1, \dots, p_k)$ est le vecteur des probabilités de verser le capital aux différentes dates $\{1, 2, \dots, k\}$ (correspondant à un vecteur P).

```
k <- 20; x <- 40; i <- 0.03
```

```
C <- rep(100,k)
```

```
# Versement d'un montant de "100" sur 20 ans.
```

```
P <- p[1:k,x]
```

```
# Méthode 1 :
```

```
sum((1/(1+i)^(1:k))*P*C)
```

```
[1] 1417.045
```

```
# La valeur actuelle probable est de 1417.045
```

```
# Méthode 2 :
```

```
sum(cumprod(rep(1/(1+i),k))*P*C)
```

```
[1] 1417.045
```

Rappelons que ce calcul peut se faire au sein d'une fonction générique,

```
LxTD <- TD$Lx
```

```
VAP <- fonction(capital=1, m=1, n, Lx=TD$Lx, age, taux=.03)
```

```
{
```

```
  proba <- Lx[age+1+m:n]/Lx[age+1]
```

```
  vap <- sum((1/(1+taux)^(m:n))*proba*capital)
```

```
  return(vap)
```

```
}
```

```
VAP(capital=100, n = 20, age = 40)
```

```
[1] 1417.045
```

On peut ainsi rapidement changer la table,

```
VAP(capital=100, n = 20, age = 40, L = TV$Lx)
```

```
[1] 1457.646
```


Ou les taux d'actualisation

```
VAP(capital=100, n = 20, age = 40, taux = .04)
```

```
[1] 1297.245
```

Il est aussi possible de visualiser la sensibilité de ces valeurs actuelles probables en fonction des taux d'actualisation, ou de l'âge de l'assuré, comme sur la figure ci-dessous.

```
VAPtaux<- fonction(T) {VAP(capital = 100, n = 20, age = 40, taux = T)}
```

```
vVAPtaux<- Vectorize(VAPtaux)
```

```
# Vectorize : Renvoie une nouvelle fonction qui se comporte comme si mapply avait été appelée.
```

```
# mapply : Version multi variée de sapply, mapply applique FUN aux premiers élément de chaque paramètre,...aux seconds éléments, aux troisième, etc....
```

```
# sapply : Version plus simple de lapply par défaut, renvoyant un vecteur ou une matrice si nécessaire.
```

```
# lapply : Va agir sur une liste : la syntaxe est similaire à celle d'apply et le résultat retourné est une liste.
```

```
TAUX <- seq(.01, .07, by = .002)
```

```
VAPage<- fonction(A) {VAP(capital = 100, n = 20, age = A, taux = .035)}
```

```
vVAPage<- Vectorize(VAPage)
```

```
AGE <- seq(20,60)
```

```
par(mfrow = c(1, 2))
```

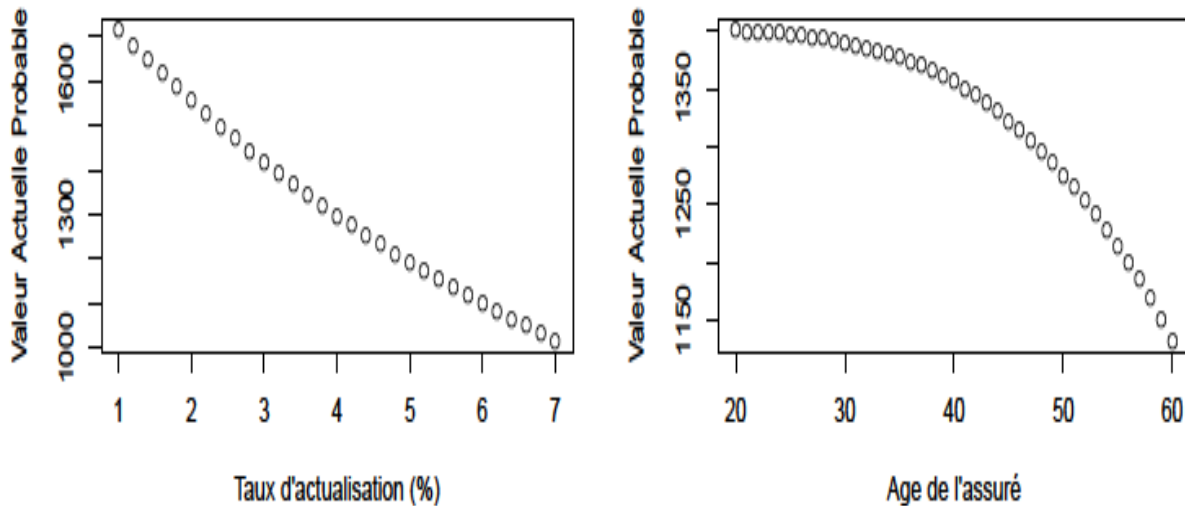
```
# par(mfrow=c(a,b)) : où a et b sont des entiers créera une matrice de graphiques sur une page, avec a lignes et b colonnes, remplie par ligne(s). mfc() remplit la page par colonne.
```

```
plot(100*TAUX, vVAPtaux(TAUX), xlab = "Taux d'actualisation (%)", ylab = "Valeur Actuelle Probable")
```

```
plot(AGE, vVAPage(AGE), xlab = "Age de l'assuré", ylab = "Valeur Actuelle Probable")
```

```
par(mfrow = c(1, 1))
```

Figure 3.5 : Evolution de la valeur actuelle probable de 20 versements de 100 conditionnels à la survie de l'assuré d'âge x au premier versement, en fonction du taux d'actualisation (à gauche), et de l'âge de l'assuré (à droite).



Source : Élaboré par nous-mêmes.

3.3.2. Calculs d'annuités

A partir du moment où nous disposons de toutes les probabilités ${}_k p_x$, il est possible de faire tous les calculs imaginables d'actualisation de flux futurs probables. Nous allons reprendre ici les produits les plus classiques, et notant que tous les produits complexes d'assurance-vie peuvent être vue comme des combinaisons linéaires de ces produits simples. Par linéarité de l'espérance, la valorisation pourra être faire en faisant la même combinaison linéaire de ces valeurs actuelles probables.

Valeurs actuelles probables de capital différé

Le plus simple est probablement la valeur actuelle probable d'un capital différé (*pure endowment*) ${}_k E_x$, correspondant à la valeur actuelle probable d'un capital de 1 dans le cas où une personne actuellement d'âge x soit encore en vie au bout de k années, i.e.

$${}_k E_x = \frac{1}{(1+i)^k} \times \mathbb{P}(T > x+k | T > x) = \frac{1}{(1+i)^k} \times {}_k P_x$$

Là encore, ${}_k E_x$ peut être vu comme le terme générique d'une matrice que l'on notera E .

```
> E <- matrix(0,m,m)
> i <- .035
> for(j in 1:m) {
+ E[,j] <- (1/(1+i)^(1:m))*p[,j]
```

```
+ }
> E[10,45]
[1] 0.663491
> p[10,45]/(1+i)^10
[1] 0.663491
```

Exemples d'assurance en cas de vie

Considérons le cas du versement d'une unité monétaire, commençant dès aujourd'hui, et continuant tant que l'assuré sera vivant. On parlera d'annuité « vie entière ». On supposera l'annuité payable d'avance. On peut noter que

$$\ddot{a}_x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(1+i)^k} \times kPx = \sum_{k=0}^{\infty} kEx$$

Plus généralement, on veut considérer non pas des assurances « vie entière », mais dites « temporaire », d'une durée de n années (avec n versements), i.e.

$${}_n\ddot{a}_x = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(1+i)^k} \times kPx = \sum_{k=0}^{n-1} kEx$$

Le code est alors le suivant :

```
> adot <- matrix(0,m,m)
> for(j in 1:(m-1)){
+ adot[,j] <- cumsum(1/(1+i)^(0:(m-1))*c(1,p[1:(m-1),j]))
+ }
> adot[nrow(adot),1:5]
[1] 26.63507 26.55159 26.45845 26.35828 26.25351
```

Notons que l'on peut également différer de h années,

$${}_{h|n}\ddot{a}_x = \sum_{k=h}^{h+n-1} \frac{1}{(1+i)^k} \times kPx = \sum_{k=h}^{h+n-1} kEx$$

A h fixé, on peut construire la matrice `adot`, contenant les $[_{h|n}\ddot{a}_x]$ (indicé en n et x),

```
> h <- 1
> adoth <- matrix(0,m,m-h)
> for(j in 1:(m-1-h)){
+ adoth[,j] <- cumsum(1/(1+i)^(h+0:(m-1))*p[h+0:(m-1),j])
+ }
> adoth[nrow(adoth),1:5]
[1] 25.63507 25.55159 25.45845 25.35828 25.25351
```

Dans cet exemple numérique, on décale d'un an, autrement dit, au lieu de considérer des versements payables d'avance, on considère des versements à terme échu. Classiquement, ces ${}_{1|\infty}\ddot{a}_x$ sont notés a_x ,

$$a_x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(1+i)^k} \times {}_kP_x = \sum_{k=1}^{\infty} {}_kE_x$$

```
> a <- matrix(0,m,m)
> for(j in 1:(m-1)){
+ a[,j] <- cumsum(1/(1+i)^(1:(m))*p[1:m,j])
+ }
> a[nrow(a),1:5]
[1] 25.63507 25.55159 25.45845 25.35828 25.25351
```

La dernière ligne de la matrice (présentée ci-dessus) donne les valeurs des annuités « vie entière » en fonction de l'âge de l'assuré. On retrouve ce qu'aurait donné un calcul direct à l'aide des ${}_kE_x$

```
> apply(E,2,sum)[1:5]
[1] 25.63507 25.55159 25.45845 25.35828 25.25351
```

Exemples d'assurance en cas de décès

Comme précédemment, le cas le plus simple est probablement l'assurance décès vie entière, dont la valeur actuelle probable s'écrit, pour un assuré d'âge x qui souhaite le versement d'une unité à la fin de l'année de son décès,

$$\begin{aligned} A_x &= \mathbb{E} \left(\left(\frac{1}{1+i} \right)^{T_x+1} \right) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E} \left(\left(\frac{1}{1+i} \right)^{T_x+1} \mid T_x = k \right) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(1+i)^k} \times (k-1)P_x \times {}_1Q(x+k-1) \end{aligned}$$

Plus généralement, on peut définir une assurance « temporaire décès », où le versement du capital n 'a lieu que si le décès survient les n années qui suivent la signature du contrat,

$$nAx = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(1+i)^k} \times (k-1)P_x \times {}_1Q(x+k-1)$$

En utilisant la matrice d définie auparavant, et $v = (1+i)^{-1}$ le facteur d'actualisation, on a alors

```
> A <- matrix(NA,m,m-1)
```

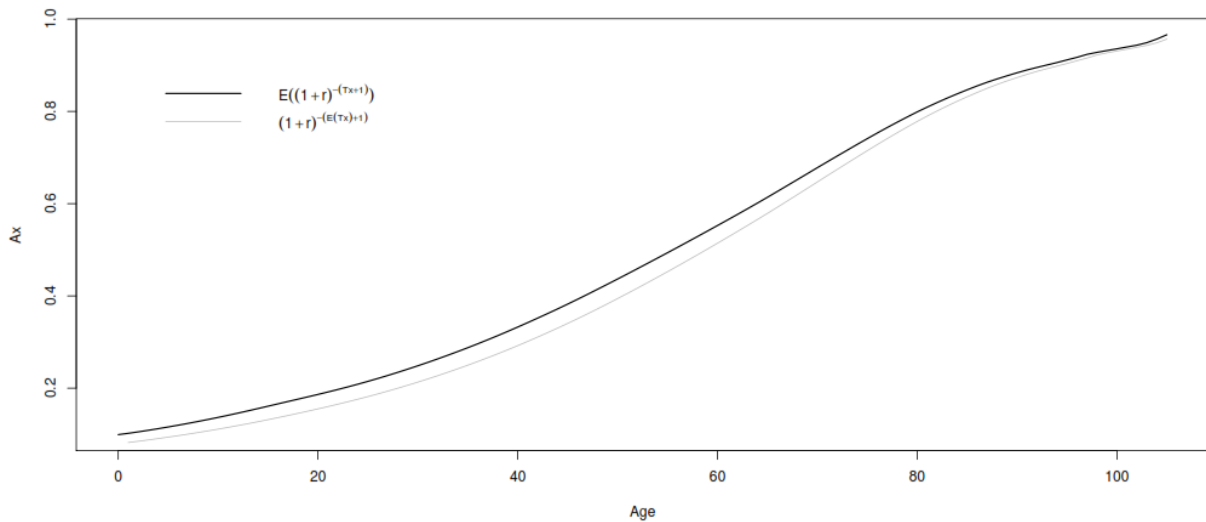
```
> for(j in 1:(m-1)){
+ A[,j] <- cumsum(1/(1+i)^(1:m)*d[,j])
+ }
> Ax <- A[nrow(A),1:(m-2)]
```

On peut alors visualiser ces fonctions, et aussi comparer (v^{I+Tx}) avec $(v^{I+\mathbb{E}(Tx)})$ si on considère des versements à terme échu (qui pourraient être vu comme des approximations de ce montant). Afin de faciliter les calculs, on peut utiliser une version vectorisée de la fonction esp.vie,

```
> v <- 1/(1+i)
> EV <- Vectorize(esp.vie)
> plot(0:105, Ax, type = "l", xlab = "Age", lwd = 1.5)
> lines(1:105, v^(1+EV(1:105)), col = "grey")
> legend(1,.9,c(expression(E((1+r)^-(Tx+1))),expression((1+r)^-
(E(Tx)+1))),lty=1,col=c("black","grey"),lwd=c(1.5,1),bty="n")
```

A partir de ces contrats de base, il est possible de calculer toutes les valeurs actuelles probables de flux futurs aléatoires³.

Figure 3.6 : Comparaison de $x \rightarrow A_x = \mathbb{E}(v^{I+Tx})$ et $(v^{I+\mathbb{E}(Tx)})$



Source : Élaboré par nous-mêmes.

³ Charpentier Arthur, Christophe Dutang (2012), - R et l'actuariat -, Cours d'actuariat en version numérique. France, Page N° 133.

Chapitre N°4 : L'actuariat des marchés des capitaux

Étant donné que le résultat d'une compagnie d'assurance est aussi constitué des produits des placements au sein des marchés des capitaux, l'analyse des risques propres à ces marchés, et à la compréhension des produits de couverture, font partie du domaine de compétence de l'actuaire.

4.1. L'actuariat des marchés financiers

Le marché financier est un marché où les transactions sont à moyen long terme, et où se négocie des valeurs plus ou moins risquées.

4.1.1. Les actions

Les actions constituent la classe d'actifs financiers la plus importante pour au moins deux raisons : elles sont la source primordiale du financement des entreprises et elles représentent la part la plus grande dans les portefeuilles des investisseurs. Il est donc important de connaître les caractéristiques financières et juridiques des actions, leurs différentes catégories, leurs marchés de négociation et modalités de cotation.

Les émetteurs d'actions et le marché primaire

Le marché primaire est le lieu et le temps d'émission d'une action. Il réunit les acteurs de l'émission d'un capital nouveau sous forme de titres financiers et de leur diffusion dans le public ou auprès d'investisseurs privés.

a. Les émetteurs

Les émetteurs d'actions sont les entreprises, mais toute entreprise n'a pas un capital formé d'actions. En effet, il existe différents types de sociétés et différents statuts qui définissent la nature des titres formant le capital social. Chaque droit national dispose de règles précises et parfois différentes d'un pays à l'autre.

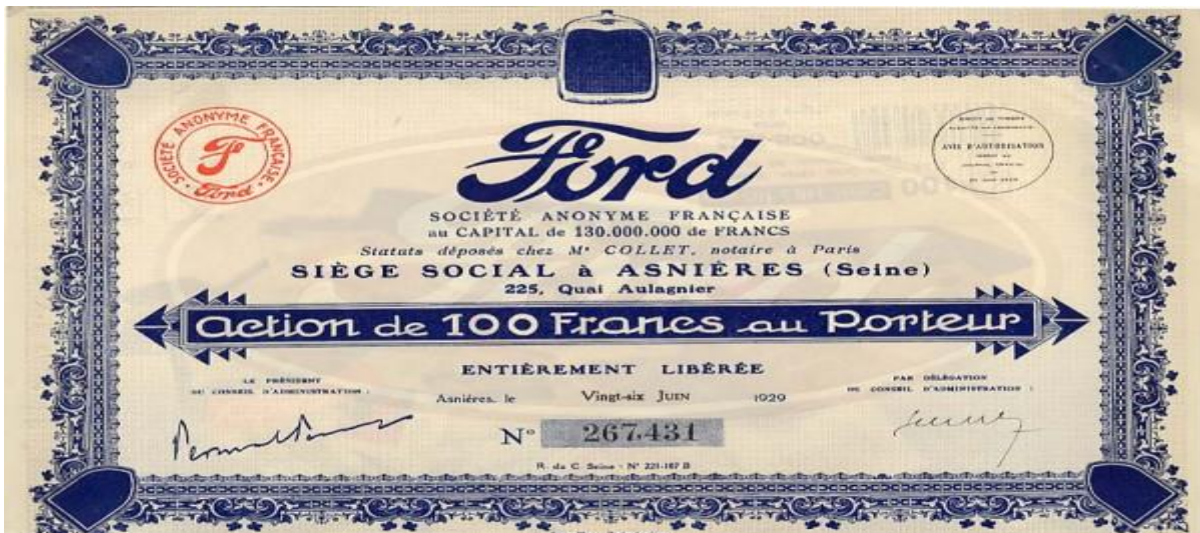
On distingue les sociétés de personnes et les sociétés de capitaux : le capital d'une société de capitaux est divisé en actions, alors que celui d'une société de personnes est divisé en parts d'intérêt ou en parts sociales. Seules les actions et autres titres représentatifs des fonds propres d'une société de capitaux peuvent être négociés en Bourse : les émetteurs des titres cotés, sont donc de grandes ou de moyennes entreprises le plus souvent, parfois des petites. Leur capital social est généralement représenté par des actions ordinaires, et parfois par des actions de préférence ou par des titres financiers hybrides.

b. L'action ordinaire ou *ordinary share*

L'action ordinaire est la part représentative d'une fraction unitaire du capital social d'une société. Son détenteur possède quatre droits :

- Etre informé de la santé économique et financière de l'entreprise, en accédant librement au rapport annuel et en ayant la possibilité d'interroger un dirigeant par écrit ;
- Voter à l'assemblée générale des actionnaires, selon le principe 1 action = 1 voix, la majorité pour adopter une résolution étant fixée à 50 % des voix + 1 voix en assemblée générale ordinaire (AGO) et aux deux tiers des voix en assemblée générale extraordinaire (AGE) ;
- Recevoir le dividende, quote-part du résultat net de la société, sur décision de l'assemblée générale ordinaire ;
- Etre créancier résiduel, c'est-à-dire recevoir le produit de la cession des actifs de la société en cas de cessation ou de vente de l'activité, une fois les autres parties prenantes désintéressées (salariés, fisc, prêteurs et fournisseurs).

Figure 4.1 : Exemple d'action matérialisée



c. Les actions de préférence ou *preferred shares*

Une société peut créer, en plus des actions ordinaires, des actions de préférence, avec ou sans droit de vote, assorties de droits particuliers de toute nature, à titre temporaire ou permanent. Ces droits sont définis par les statuts de la société, dans le respect des dispositions légales du pays d'accueil. Parmi les actions de préférence usuelles, on trouve :

- L'action à droit de vote double, dont le détenteur bénéficie de deux voix à l'assemblée générale, au lieu d'une seule voix pour l'action ordinaire ;
- L'action sans droit de vote qui bénéficie des mêmes droits que l'action ordinaire, sauf celui de voter lors de l'assemblée générale ;
- L'action à dividende augmenté : le dividende qu'elle reçoit est plus élevé que celui revenant à l'action ordinaire du même émetteur ;

- L'action de priorité : elle bénéficie d'un rang chirographaire¹ plus élevé que celui de l'action ordinaire en cas de liquidation de la société.

d. Les titres financiers hybrides

Les obligations remboursables en actions, les obligations convertibles en actions et les obligations échangeables en actions donnent à leurs propriétaires un accès au capital social de l'entreprise émettrice. Ces titres financiers hybrides (« mélanges » d'obligations et d'actions), comme certains titres financiers complexes (obligations à bons de souscription d'actions, obligations subordonnées à durée indéterminée...etc), constituent une représentation d'un capital social futur ou potentiel. Sans être directement des actions, ils leur sont souvent associés via la notion de quasi-fonds propres.

La transaction au comptant

a. Définition

L'achat au comptant ou *spot buying* consiste à acquérir un titre financier en payant immédiatement l'intégralité de son prix, la propriété du titre étant transférée à l'acheteur dans le délai réglementaire en vigueur (généralement 3 jours).

La vente au comptant ou *spot selling* consiste à céder un titre financier en le livrant immédiatement contre un prix donné, le produit de la cession étant transféré au vendeur dans le délai réglementaire en vigueur (généralement 3 jours).

b. Rentabilité et risque

Le résultat brut de l'opération ci-dessus est un gain égal à $(55 - 50) \times 100 = 500$ Dinars ; en supposant les frais de courtage égaux à 1 % du montant de chaque transaction, le résultat net est égal à $500 - (500 * 1 \%) - (550 * 1 \%) = 500 - 50 - 55 = 395$ Dinars.

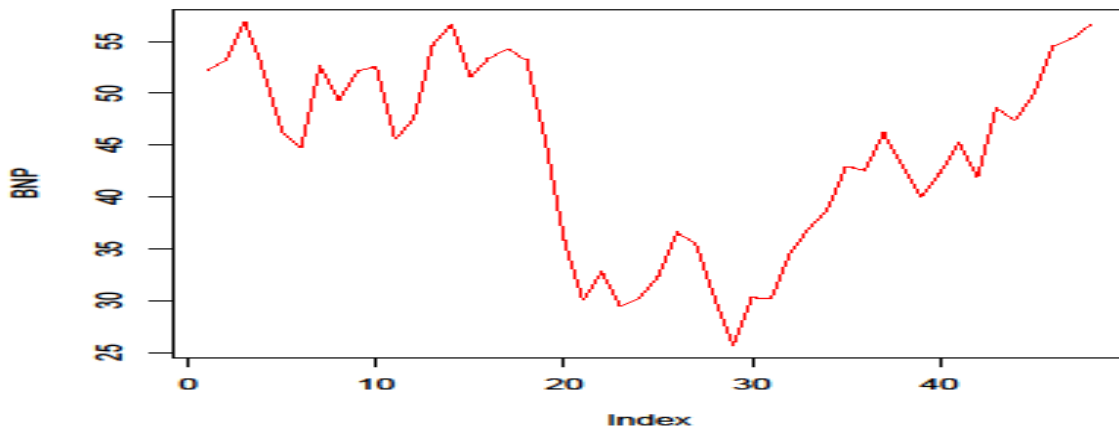
Le taux brut de rentabilité est égal à $500 / 5\,000 = 10 \%$ en quinze jours. Le taux net de rentabilité est égal à $395 / 5\,000 = 7,90 \%$ en quinze jours.

Le risque de l'opération est lié au taux de la volatilité du prix du titre, au cours de sa période de détention. De façon simple, la volatilité peut être représentée par l'écart-type du taux de rentabilité. Dont la formule est la suivante :

$$\text{Taux de rentabilité}_t = \frac{\text{Cours}_t - \text{Cours}_{t-1}}{\text{Cours}_{t-1}}$$

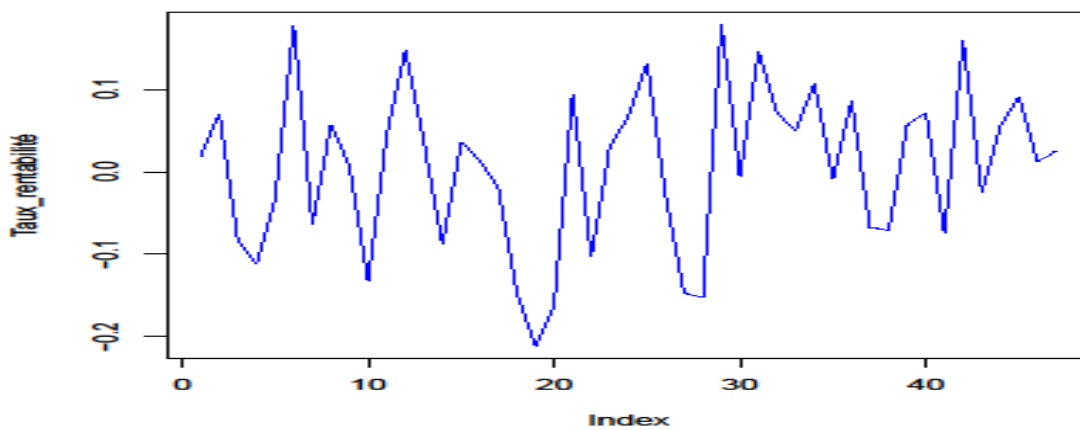
¹ Se dit d'une créance qui n'est garantie par aucun privilège.

Graphique 4.1 : Evolution du cours de l'action BNP de Janvier 2010 à Décembre 2013.



Source : Élaboré par nous-mêmes.

Graphique 4.2 : Evolution du taux de rentabilité du cours de l'action BNP de Janvier 2010 à Décembre 2013.



Source : Élaboré par nous-mêmes.

c. Valorisation des actions

La réponse à cette question est simple : il n'y en a pas. La valeur d'un titre financier dépend en effet d'une demande, c'est-à-dire du prix que les acheteurs sont prêts à payer pour acquérir ce titre, et d'une offre, c'est-à-dire du prix que les vendeurs acceptent pour le céder. Ces prix de réservation sont fonction des flux de revenu futurs (et donc risqués) attachés au titre et du degré d'aversion pour le risque des acheteurs et vendeurs.

Une façon simple de conceptualiser la valeur théorique d'une action à l'instant $t = 0$ est de considérer que son détenteur reçoit une série de dividendes annuellement distribués, de montants successifs $D_1, D_2 \dots$ jusqu'à un horizon infini :

$$V_0 = \frac{D_1}{1+k} + \frac{D_2}{(1+k)^2} + \dots + \frac{D_\infty}{(1+k)^\infty}$$

Où k représente le taux de rentabilité anticipé par les investisseurs : ce taux de rentabilité est généralement vu comme l'addition du taux d'intérêt sans risque de l'économie (approximé par le taux de rendement des emprunts d'Etat) et d'une prime de risque, cette dernière étant liée au degré de sensibilité de l'action (coefficient bêta) et au degré d'aversion pour le risque des investisseurs (prix du risque). Dans le cas d'une simplification extrême de la réalité, on peut considérer que les dividendes sont en croissance perpétuelle au taux annuel g (modèle de Gordon et Shapiro, 1956), l'équation précédente devenant alors :

$$V_0 = \frac{D_0 \times (1 + g)}{k - g}$$

Ainsi, une action venant juste de distribuer un dividende de $D_0 = 2$ Dinars et dont les analystes estiment la croissance annuelle à $g = 4\%$, est supposée valoir $V_0 = 26$ Dinars pour un investisseur anticipant une rentabilité annuelle égale à $k = 8\%$. Mais tous les investisseurs ne se satisfont pas au même instant du même taux de rentabilité et tous les analystes ne s'accordent pas forcément sur une valeur consensuelle du taux de croissance : il existe donc de nombreux prix de réservation pour les acheteurs et pour les vendeurs du titres, que le marché permet de confronter.

Il existe naturellement des modèles d'évaluation plus sophistiqués, mais aussi plus compliqués. L'évaluation par les dividendes n'est pas la seule approche, l'évaluation par le *free cash flow* de l'entreprise est conceptuellement plus riche, les deux approches donnant des valeurs en principe convergentes.

En général, lorsque les perspectives de croissance économique sont bonnes, le prix de marché d'une action est supérieur à la valeur comptable des actifs de la société, parce que ce prix inclut un *goodwill* qui traduit un savoir-faire d'exploitation ; mais parfois, en période de crise comme ce fut le cas fin 2008, le cours coté d'une action peut être inférieur à la valeur comptable des actifs de l'entreprise, reflétant un *badwill*.

Il est fondamental de comprendre que le prix d'une action reflète à la fois les résultats futurs de l'entreprise et le degré de rationalité des acheteurs et des vendeurs. Après tout, rien n'interdit à un individu d'acheter l'action d'une entreprise dont il apprécie l'esthétique du logo, même si les perspectives de résultats sont médiocres, ou à un vendeur de céder l'action d'une entreprise rentable mais dont la tête du dirigeant lui déplaît... Ces traits comportementaux des individus expliquent efficacement l'engouement pour certains thèmes d'investissements en actions.

4.1.2. Les obligations

Une obligation est un titre financier représentatif d'une dette. Ce titre matérialise l'engagement d'un emprunteur de rembourser, selon des conditions préétablies, un montant de capital mis à disposition par un prêteur, et de payer des intérêts sur ce montant emprunté. Il s'agit donc d'un titre de dette pour l'emprunteur et d'un titre de créance pour le prêteur. Ce titre fait partie d'un emprunt dit obligataire qui se compose d'un grand nombre d'obligations toutes identiques détenues pas de multiples prêteurs. En cela, les emprunts obligataires s'opposent aux emprunts bancaires, dits indivis, car caractérisés par un prêteur unique. L'ensemble des intérêts et des remboursements de capital à payer au créancier obligataire constitue un échéancier de flux financiers représentant l'engagement de l'emprunteur et justifiant la valeur de marché de l'obligation considérée. En effet, les obligations sont des titres de créance négociables sur les marchés financiers, contrairement aux emprunts bancaires.

La rémunération du prêteur obligataire, c'est-à-dire le montant d'intérêts qu'il perçoit, se fonde sur un taux d'intérêt fixe pendant la durée de vie de l'obligation, ou bien sur un taux d'intérêt variable en fonction d'une référence ou d'un indice. Dans les deux cas, l'obligation est un titre dit à revenus fixes, car les références ou indices servant à déterminer les intérêts d'une obligation sont des références de taux d'intérêt indépendantes des résultats économiques de l'émetteur. A l'inverse, les actions sont des titres à revenus variables car les dividendes qu'elles versent sont directement fonction de la performance économique de la société émettrice.

Les caractéristiques des titres obligataires sont exposées dans la première partie de cette section. La deuxième partie présente les principaux produits et marchés obligataires. Les principes traditionnels d'évaluation des obligations sont expliqués dans la troisième partie. Les principaux risques liés à l'investissement obligataire et leur mesure font l'objet de la quatrième partie. Enfin, une cinquième partie est consacrée à la structure par terme des taux d'intérêt et à ses théories explicatives.

Les caractéristiques d'une obligation

Un emprunt obligataire se divise en un grand nombre de coupures. Ces coupures sont des obligations conférant toutes les mêmes droits à leur détenteur. Ces droits sont définis par un certain nombre de caractéristiques.

a. La valeur nominale ou valeur faciale

Il s'agit de la fraction d'emprunt correspondant à chaque obligation. Elle représente donc le capital prêté par le détenteur de l'obligation et sert de base de calcul des intérêts versés. Sa valeur est en réalité relativement formelle.

b. Le prix d'émission

C'est le prix auquel l'obligation est émise, c'est-à-dire le prix payé par le souscripteur pour acquérir le titre lors de sa première mise en circulation sur le marché. Si ce prix est égal à la valeur nominale, on dit que l'obligation est émise au pair. Si ce prix est inférieur (supérieur) à la valeur faciale, l'obligation est émise au-dessous (au-dessus) du pair. Un prix d'émission inférieur au pair est une rémunération supplémentaire offerte au souscripteur sous forme de plus-value. Cette rémunération égale à la différence entre la valeur faciale et le prix d'émission est dite prime d'émission.

c. La valeur de remboursement

En théorie, le capital à rembourser au prêteur obligataire est la valeur faciale. En pratique, le montant remboursé sur une obligation peut différer de cette valeur faciale, et dans ce cas, il lui est généralement supérieur. Le supplément de capital remboursé, appelé prime de remboursement, est une rémunération offerte sous forme de plus-value, tout comme une prime d'émission. On dit alors que l'obligation est remboursée au-dessus du pair. A l'inverse, un remboursement au pair signifie que la valeur de remboursement est égale à la valeur nominale.

d. Le mode d'amortissement

On appelle amortissement d'un emprunt le remboursement du capital emprunté. En théorie, on distingue trois modalités de remboursement des emprunts obligataires : le remboursement *in fine*, le remboursement par tranches ou séries égales et le remboursement par annuités constantes. En pratique, c'est le premier mode qui est le plus fréquent, les deux derniers n'étant quasiment plus utilisés. Le remboursement *in fine*, comme son nom l'indique, consiste à rembourser la totalité du capital à la date d'échéance de l'emprunt. Le remboursement par séries égales consiste à rembourser une fraction de capital constante chaque année. Cela revient à rembourser, à hauteur de la totalité de leur valeur de remboursement, un nombre identique d'obligations chaque année. Dans le cas d'un amortissement par annuités constantes, l'émetteur rembourse annuellement une fraction de capital telle que la somme de l'amortissement et des intérêts payés chaque année soit constante. L'émetteur rembourse donc à chaque période d'amortissement, un nombre croissant d'obligations. Le rythme de croissance est celui d'une suite géométrique dont la raison est 1 plus le taux facial. Que ce soit

pour l'amortissement par séries égales ou par annuités constantes, les obligations remboursées à chaque période sont généralement déterminées par tirage au sort. Les prêteurs supportent alors une incertitude quant à la durée de vie effective de leur investissement. Cette incertitude réduit l'intérêt des investisseurs pour ce type de titres, ce qui explique que ces modalités d'amortissement soient progressivement abandonnées.

e. Le taux nominal ou facial et la périodicité

Le taux nominal ou facial est le taux d'intérêt utilisé pour calculer le montant d'intérêts payé par l'obligation sur chaque période d'intérêt. L'intérêt dû sur une période est appelé coupon. Pour cette raison, le taux facial est également dit taux de coupon. La longueur des périodes d'intérêt est fonction de la fréquence de versement des intérêts. Cette fréquence ou périodicité est annuelle le plus souvent, notamment dans les pays de la zone euro, mais elle peut également être semestrielle comme sur les marchés britanniques et nord-américains, ou encore trimestrielle ou mensuelle dans le cas d'obligations à taux variable.

f. Date de règlement et date de jouissance

La date de règlement est la date à laquelle les souscripteurs à l'émission doivent verser les fonds et sont livrés des titres en échange. La date de jouissance est la date à partir de laquelle le premier coupon commence à courir. Le plus souvent, elle coïncide avec la date de règlement. Elle peut être fixée antérieurement à la date de règlement pour accroître volontairement le montant du premier coupon et donner au souscripteur un surcroît de revenu. Au contraire, elle peut être choisie postérieurement à la date de règlement afin de réduire le premier coupon et donc le coût de la dette pour l'émetteur.

g. Date d'échéance, durée de vie et maturité

La date de remboursement est la date à laquelle se fait le dernier remboursement en capital. La maturité ou durée de vie résiduelle de l'obligation est la durée, généralement exprimée en nombre d'années, qui sépare la date actuelle de la date de remboursement. La durée de vie d'un emprunt obligataire est sa maturité à l'émission, c'est-à-dire le temps séparant la date de règlement à l'émission de la date de remboursement.

L'évaluation traditionnelle des obligations et les risques associés à l'investissement obligataire

La valeur d'une obligation est la valeur actuelle (*present value*) de ses paiements jusqu'à l'échéance. La valeur actuelle d'un flux financier F_t payé dans t années est le montant $VA(F_t)$ tel qu'un investisseur est indifférent entre recevoir $VA(F_t)$ immédiatement ou recevoir F_t dans t années. $VA(F_t)$ est obtenue par actualisation de F_t à un taux r :

$$VA(F_t) = \frac{F_t}{(1+r)^t}$$

a. Le taux d'actualisation

Le taux d'actualisation r est la rémunération annuelle qui rend l'investisseur indifférent entre gagner un dinar aujourd'hui ou $(1+r)^t$ dinars dans t années. Autrement dit, r est tel que l'investisseur est prêt à se priver d'un dinar de revenu aujourd'hui pour percevoir $(1+r)^t$ dinars de revenu supplémentaires dans t années. Le taux de rémunération r doit donc compenser les coûts engendrés par le report du revenu dans le temps. Le premier coût subi est le report de la consommation à t années. Le taux d'intérêt R exigé pour compenser l'indisponibilité des fonds à la consommation ou à un investissement alternatif est le taux d'intérêt réel (*real interest rate*). En outre, dans t années, les prix à la consommation auront très vraisemblablement augmenté. Notons π le taux d'inflation annuel anticipé moyen sur les t années à venir. $(1+r)^t$ doit être au moins égal à $(1+R)^t(1+\pi)^t$ pour compenser la perte de pouvoir d'achat liée à l'inflation. Le taux d'intérêt qui en résulte, soit :

$$r = \sqrt[t]{(1+R)^t(1+\pi)^t} - 1$$

Est un taux d'intérêt dit nominal (*nominal interest rate*) car il inclut une prime d'inflation, contrairement au taux d'intérêt réel. C'est aussi un taux sans risque car il suffit à rémunérer un paiement futur perçu en toute certitude. En revanche, si le paiement futur F_t est risqué – et c'est notamment le cas si le débiteur peut faire défaut, ou s'il existe une option au gré de l'émetteur – le taux d'actualisation doit en plus intégrer une prime de risque s en compensation :

$$r = \left[\sqrt[t]{(1+R)^t(1+\pi)^t} - 1 \right] + s$$

Les emprunts d'Etat considérés sans risque de défaut s'évaluent par actualisation au taux sans risque r_f , tandis que le taux d'actualisation utilisé pour évaluer un titre du secteur privé intègre toujours une prime de risque s . La part de s qui compense le risque de défaut est appelée marge de crédit ou *spread* de défaut (*default spread*).

b. L'évaluation traditionnelle

L'évaluation traditionnelle consiste à utiliser le même taux d'actualisation pour tous les paiements du titre évalué. Notons $\{F_t\}_{t=1}^T$ les flux annuels payés par une obligation de maturité T années, le premier flux F_1 étant payé dans un an. Si r est le taux de rendement exigé par les investisseurs sur le titre compte tenu de son risque, la valeur fondamentale du titre est :

$$V = \sum_{t=1}^T \frac{F_t}{(1+r)^t}$$

Pour une obligation à taux fixe de valeur nominale C , de taux facial i , remboursée dans T années au pair, le calcul devient :

$$V = \sum_{t=1}^T \frac{C_i}{(1+r)^t} + \frac{C}{(1+r)^T}$$

Soit, après application de la formule des termes d'une suite géométrique :

$$V = C_i \frac{1 - (1+r)^{-T}}{r} + \frac{C}{(1+r)^T}$$

Où $C_i \frac{1 - (1+r)^{-T}}{r}$ est la valeur actuelle des coupons et $\frac{C}{(1+r)^T}$ la valeur actuelle de la valeur de remboursement.

Les formules précédentes supposent que le titre est évalué à une date anniversaire, un an avant la prochaine date de coupon. En pratique, il est plus fréquent de se trouver entre deux dates de versement de coupon. Les maturités des paiements de l'obligation sont alors des nombres non entiers d'années. Ces maturités se calculent à partir de la date de règlement, et non de la date de négociation.

Notons m le nombre de jours séparant la date de règlement de la prochaine date de coupon, et N le nombre total de jours entre la dernière et la prochaine date de coupon. La maturité du prochain coupon en nombre d'années ou de périodes d'intérêt est $w = m / N$, et celle du t -ième coupon est $t - 1 + w$ années. La formule d'actualisation devient donc :

$$V = \frac{C_i}{(1+r)^w} + \frac{C_i}{(1+r)^{1+w}} + \dots + \frac{C_i}{(1+r)^{t-1+w}} + \dots + \frac{C}{(1+r)^{T-1+w}}$$

Soit, en mettant $1 / (1+r)^w$ en facteur :

$$V = \left(\frac{1}{1+r} \right)^w \left[C_i (1+r) \frac{1 - (1+r)^{-T}}{r} + \frac{C}{(1+r)^{T-1}} \right]$$

La valeur V obtenue ci-dessus est la valeur plein coupon. Pour établir la cotation pied de coupon, il faut lui retrancher le coupon couru qui s'élève à $C_i(I - w)$.

L'investissement en obligations se caractérise par deux risques principaux : le risque de taux d'intérêt (*interest rate risk*) et le risque de crédit (*credit risk*). Le risque de taux peut engendrer des pertes en capital et des pertes en revenu. La troisième partie a montré que le prix d'une obligation était fonction du niveau des taux d'intérêt. Toute fluctuation des taux engendre donc des moins-values ou des plus-values sur les portefeuilles obligataires. En outre, les variations des taux d'intérêt modifient le taux auquel les flux intermédiaires payés

par une obligation à coupons peuvent être réinvestis. En cas de baisse des taux, les revenus tirés du réinvestissement des coupons sont plus faibles que prévu, ce qui diminue le rendement total du portefeuille. Enfin, un porteur d'obligations peut faire des pertes si la solvabilité de l'émetteur se détériore : il s'agit du risque de crédit.

Les risques liés à la détention d'une obligation

Il existe principalement trois types de risques :

a. Le risque de taux d'intérêt en capital

Le risque de taux d'intérêt en capital grevant un portefeuille obligataire est le risque de dévalorisation de ce portefeuille liée aux fluctuations non anticipées des taux d'intérêt.

Le prix d'une obligation à taux fixe est une fonction décroissante des taux d'intérêt. Toute augmentation des taux d'intérêt dans l'économie engendre donc des pertes en capital pour les porteurs de titres à taux fixe. Plusieurs méthodes existent pour mesurer ce risque. L'indicateur synthétique le plus communément utilisé sur les marchés obligataires est la *duration de Macaulay (Macaulay duration)*. L'efficacité de cet indicateur peut être améliorée en recourant à une deuxième mesure : la *convexité (convexity)*.

Macaulay (1938) proposa de mesurer la durée de vie effective des obligations à coupons par une moyenne pondérée des maturités de leurs paiements. Cette mesure, appelée « *duration* » (*duration*), fut reliée à l'élasticité des prix aux taux d'intérêt par *Hicks* (1939) et fut donc utilisée par la suite comme une mesure du risque de taux.

La *duration* d'un titre financier des flux fixes est la durée de vie moyenne de ces flux pondérée par le poids de chaque flux dans le prix du titre. Considérons à nouveau un titre versant des flux F_t de l'année 1 à l'année T . Soit r le taux du marché pour ce titre. La valeur de ce titre étant égale à la somme des flux F_t actualisés au taux r , le poids du flux F_t de cette valeur est :

$$w_t = \frac{\frac{F_t}{(1+r)^t}}{V} = \frac{\frac{F_t}{(1+r)^t}}{\sum_{t=1}^T \frac{F_t}{(1+r)^t}}$$

La *duration de Macaulay*, notée D , est la moyenne des maturités des paiements F_t pondérée par les poids w_t :

$$D = \sum_{t=1}^T w_t \times t = \frac{\sum_{t=1}^T t \times \frac{F_t}{(1+r)^t}}{\sum_{t=1}^T \frac{F_t}{(1+r)^t}} = \frac{\sum_{t=1}^T t \times \frac{F_t}{(1+r)^t}}{V}$$

D étant une moyenne de durées, elle s'exprime en nombre d'années ou en nombre de périodes d'intérêt.

La duration est une mesure de risque de taux car elle est directement liée à la sensibilité (*sensibility*) des prix de l'obligation au taux d'actualisation. Notons S la sensibilité du prix V au taux r :

$$S = \frac{1}{V} \frac{dV}{dr} = \frac{1}{V} \sum_{t=1}^T -t \times \frac{F_t}{(1+r)^{t+1}}$$

En factorisant par $1/(1+r)$

$$S = -\left(\frac{1}{1+r}\right) \left(\frac{1}{V} \sum_{t=1}^T t \times \frac{F_t}{(1+r)^t}\right) = -\frac{D}{1+r} \Leftrightarrow D = -S(1+r)$$

La duration est donc égale à la valeur absolue de la sensibilité du prix V par rapport au taux d'actualisation r , multipliée par le facteur d'actualisation $(1+r)$. Plus la duration d'une obligation est élevée, plus son prix est sensible aux variations de taux d'intérêt : la duration est donc bien une mesure du risque de taux en capital. On peut également montrer que la duration est la valeur absolue de l'élasticité du prix de l'obligation par rapport au facteur $(1+r)$. Notons E cette élasticité :

$$E = \frac{\frac{dV}{d(1+r)}}{\frac{V}{(1+r)}}$$

Sachant que $dV/d(1+r)$ est identique à dV/dr et que $S = -D/(1+r)$, il vient que :

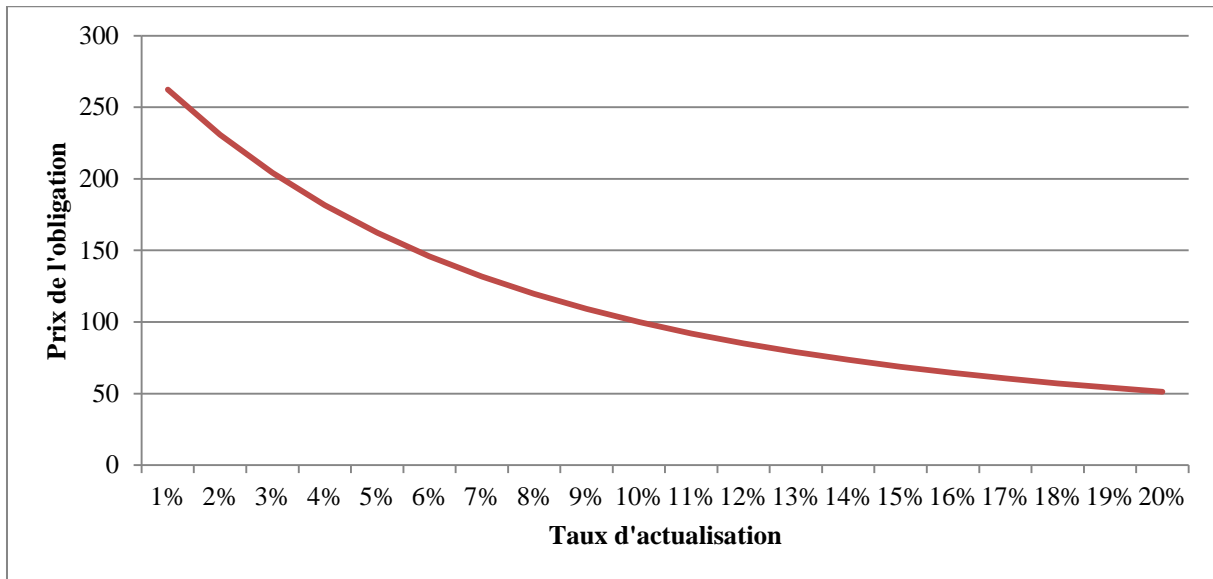
$$E = (1+r) \left(\frac{1}{V} \frac{dV}{dr}\right) = -D$$

D'après les relations ci-dessus, la valeur d'une obligation de duration D et de taux de rendement r varie de $\delta x (-D)/(1+r) \%$, si le taux r subit une variation $\Delta r = \delta \%$.

La duration d'un titre à taux fixe est croissante avec sa maturité, décroissante avec son taux de coupon et décroissante avec son TRA initial. Ainsi, les obligations longues et les obligations à faibles coupons sont plus risquées, et l'investissement obligataire est plus risqué en période de taux faibles qu'en période de taux élevés.

Enfin, la sensibilité et la duration sont des opérateurs distributifs. En raison de cette propriété, la duration d'un portefeuille d'obligations est la moyenne pondérée en valeur des durations des titres qui le composent. Il est important de préciser qu'il s'agit d'une pondération en valeur de marché et non en valeurs nominales.

Graphique 4.3 : Relation entre le prix d'une obligation et le taux d'actualisation.



Source : Élaboré par nous-mêmes.

Si les estimations de variation de prix faites à partir de la duration sont exactes pour de faibles variations de taux, elles ne le sont pas pour des changements de taux de grande ampleur ; Contrairement à ce que laissent présager les estimations fondées sur la duration, les variations de valeur ne sont pas symétriques à la hausse et à la baisse des taux. La duration conduit à surestimer la dépréciation à la hausse des taux et à sous-estimer l'appréciation à la baisse des taux.

Ces deux limites résultent de la convexité de la fonction de prix $V(r)$. En effet, estimer les variations de prix potentielles à partir de la duration uniquement revient à supposer implicitement que la fonction de prix $V(r)$ est linéaire. En réalité, la valeur d'une taux fixe est une fonction convexe du taux d'actualisation, comme le montre le graphique 4.3. Pour améliorer les estimations de changement de prix faites à partir de la duration, il convient de tenir compte de cette convexité.

La notion de convexité a été développée par *Klotz* (1985) afin d'appréhender la vitesse de variation de l'exposition au risque de taux. La convexité d'un actif à taux fixe, notée Cv , est la dérivée seconde du prix de cet actif en fonction de son taux de rendement actuariel en valeur relative de son prix initial. Elle est donc égale à la variation de la variation de prix induite par une variation infinitésimale du taux de rendement exigé et mesurée en pourcentage du prix initial :

$$Cv = \frac{1}{V} \frac{d^2V}{dr^2}$$

Cette grandeur est strictement positive :

$$Cv = \frac{1}{V} \sum_{t=1}^T t(t+1) \frac{F_t}{(1+r)^{t+2}} > 0$$

En la développant, on peut écrire la convexité en fonction de la duration de *Macaulay* :

$$Cv = \frac{1}{(1+r)^2} \left[\frac{1}{V} \sum_{t=1}^T \frac{t^2 F_t}{(1+r)^t} + D \right]$$

Mathématiquement, la convexité est une moyenne de maturités au carrée. En pratique, on l'exprime parfois en nombre d'années ou de périodes d'intérêt.

La variation relative de valeur consécutive à une variation de taux $\Delta r = \delta \%$ est estimée à $\delta \times (-D)/(1+r) \%$ si l'on suppose la fonction de prix linéaire. Pour tenir compte de sa convexité, il faut ajouter à cette estimation le terme $(1/2) Cv \times (\delta \%)^2$. La variation de prix estimée s'élève alors à

$$\frac{\Delta V}{V} = \delta \% \frac{(-D)}{(1+r)} + \frac{1}{2} Cv (\delta \%)^2$$

b. Le risque de réinvestissement

Le TRA mesuré à l'achat d'une obligation est le taux de rentabilité effectivement obtenu à l'échéance de cette obligation à condition que les coupons intermédiaires puissent être réinvestis à ce TRA. Si les coupons sont réinvestis à un taux inférieur, le taux de rendement effectif de l'obligation sera inférieur à son TRA de départ. Le risque de devoir réinvestir les coupons à un taux plus faible que prévu est appelé risque de réinvestissement (*reinvestment risk*). Ce risque se réalise en cas de baisse des taux. Une baisse des taux a donc deux effets opposés pour l'investisseur obligataire : un effet positif sur la valeur des titres détenus (gain en capital) mais un effet négatif sur les revenus tirés du réinvestissement des coupons (perte de revenu).

c. Le risque de crédit

Le risque de crédit est le risque de perte lié à l'impossibilité d'un débiteur de faire face à tout ou partie de ses engagements de paiement dans les délais prévus. Ce risque affecte surtout les emprunts émis par le secteur privé. Les Etats dont les économies sont saines sont considérés comme des émetteurs sans risque de crédit. Cependant, certains Etats surendettés présentent un risque de crédit non nul, appelé risque souverain. Le risque souverain désigne le risque d'incapacité ou de refus de la part d'un gouvernement d'honorer sa dette externe parce que l'économie nationale ne génère pas la richesse nécessaire à son remboursement.

On distingue deux dimensions du risque de crédit : le risque de défaut et le risque de signature. Le risque de défaut (*default risk*) est le risque de réalisation d'un défaut de paiement sur le service d'une dette. La réalisation du défaut entraîne une perte en capital immédiate. Dans le cas d'une faillite commerciale, la perte subie par le créancier dépend du taux de recouvrement obtenu au cours de la procédure judiciaire. Le risque de signature (*creditworthiness risk*) est le risque de détérioration de la qualité de signature d'un émetteur. Cette détérioration découle d'une augmentation de la probabilité de défaut de l'émetteur et se traduit par une baisse de valeur de l'obligation concernée. En effet, la valeur d'une obligation est égale à la somme de ses flux actualisés au taux sans risque augmenté d'une prime de compensation du risque de crédit. Cette prime, appelée marge de crédit, est une fonction croissante de la probabilité de défaut, de sorte que la valeur d'une obligation diminue avec cette probabilité.

Le risque de crédit affectant les titres obligataires s'évalue grâce à la notation (*rating*). La notation consiste à attribuer des notes à des emprunts, à des titres représentatifs de dette ou à des signatures, afin de mesurer le risque de non-remboursement qui leur est attaché. Elle est pratiquée par des agences spécialisées indépendantes qui attribuent des notes aux dettes émises par toutes sortes de débiteurs : des sociétés industrielles ou commerciales, des institutions financières, des compagnies d'assurance, mais aussi des collectivités locales, des Etats ou des organismes internationaux.

Trois agences dominent le marché : *Fitch*, *Moody's* et *Standard & Poor's*. Elles utilisent des grilles de notes différenciées pour les dettes à long terme et pour les dettes à court terme. Le tableau ci-dessous récapitule les notes spécifiques aux dettes à long terme et donne leur signification. *Moody's* utilise un panel de notes qui lui est propre tandis que *Standard & Poor's* et *Fitch* utilisent la même échelle de note pour les dettes à long terme. Les notes se répartissent en deux catégories : une première catégorie, du AAA (Aaa) au BB (Baa) inclus, dite d'investissement (*investment grade*), qui indique un risque de crédit acceptable pour investir, et une catégorie dite spéculative (*speculative grade*), du CCC (Caa) au D, signalant un risque de défaut substantiel.

Plus la note obtenue sur un emprunt obligataire est défavorable et plus élevée est la marge de crédit exigée par le marché car plus forte est la probabilité de défaut. Une dégradation de note au cours de la durée de vie du titre entraîne une moins-value immédiate liée à l'augmentation de la marge de crédit.

Chapitre N°4 : L'actuariat des marchés des capitaux

Tableau 4.1 : Grille des notes spécifiques pour les dettes à long terme des agences de notations.

	<i>Fitch Standard & Poor's</i>	<i>Moody's</i>	Signification financière
Investissement	AAA	Aaa	Meilleure qualité de signature possible. Capacité de remboursement extrêmement élevée non susceptible d'être affectée par les événements extérieurs.
	AA+	Aa1	Excellente qualité de signature. Capacité de remboursement très élevée, non significativement vulnérable.
	AA	Aa2	
	AA-	Aa3	
	A+	A1	Très bonne qualité de signature. Capacité de remboursement élevée, mais éventuellement vulnérable aux changements de conjoncture économique.
	A	A2	
	A-	A3	
	BBB+	Baa1	Bonne qualité de signature. Capacité de remboursement satisfaisante mais pouvant être affectée par des changements de conjoncture défavorable.
	BBB	Baa2	
BBB-	Baa3		
Spéculatif	BB+	Ba1	Risque de défaut non négligeable, particulièrement en cas de conjoncture défavorable.
	BB	Ba2	
	BB-	Ba3	
	B+	B1	Hautement spéculatif. Risque de crédit significatif, mais avec une marge de sécurité rémanente. Engagements financiers encore tenus. Possibilité de redressement.
	B	B2	
	B-	B3	
	CCC	Caa	Risque de défaut élevé. Capacité de remboursement conditionnelle à des restructurations. CC indique un défaut probable. C indique un défaut de paiement imminent.
	CC	Ca	
	C	C	
D	D	Défaut.	

Source : Élaboré par nous-mêmes.

4.1.3. Les options

Les options sont échangées sur le marché *OTC* (marché de gré à gré) et sur les marchés organisés. Il en existe de deux types :

-Une option d'achat (appelée *call*) donne le droit à son détenteur d'acheter une certaine quantité d'un actif sous-jacent à une date future donnée et à un prix convenu.

-Une option de vente (*put*) donne le droit à son détenteur de vendre une certaine quantité d'un actif sous-jacent à une date future et à un prix convenu, ce prix est appelé **prix d'exercice** (*strike price*), la date maximale à laquelle le droit peut être exercé est la **date d'échéance**.

Si l'exercice peut survenir à tout moment jusqu'à la date d'échéance, l'option est dite **américaine**, par contre, si l'option ne peut être exercée qu'à la date d'échéance, elle est dite **européenne**.

Les options européennes sont plus faciles à analyser et, dans un certain nombre de cas, les propriétés des options américaines sont déduites de celles des options européennes. Un point essentiel est que l'achat d'une option donne le droit mais pas l'obligation de faire quelque chose.

Remarque : Les options sont aussi appelées produits dérivés, par ce qu'elles tirent leurs valeurs de l'actif sous-jacent, et leurs calculs se base sur la dérivé du modèle de prix du titre leurs servant de support.

La valeur de l'option et les positions de base

Appelée aussi prime, elle peut se décomposer en deux éléments : valeur intrinsèque et valeur temps.

a. La valeur intrinsèque de l'option

C'est la valeur qu'en retirerait son propriétaire s'il exerçait immédiatement. Cette valeur est soit nulle et son détenteur n'a pas intérêt à l'exercer, soit positive. La valeur intrinsèque d'une option évolue avec la valeur du titre support (noté S_t). Pour les *calls*, elle diminue avec l'augmentation du prix d'exercice (K), et inversement pour les *puts*.

- Pour un *call*

Si $S_t > K \Rightarrow VI = S_t - K > 0$, l'option est dite « en dedans » (ou ITM : *In the money*).

Si $S_t = K \Rightarrow VI = 0$, l'option est dite « à parité » (ou ATM : *At the money*).

Si $S_t < K \Rightarrow VI = 0$, l'option est dite « en dehors » (ou OTM : *On the money*).

-Pour un *put*

Si $S_t > K \Rightarrow VI = 0$, l'option est dite « en dehors » (ou OTM).

Si $S_t = K \Rightarrow VI = 0$, l'option est dite « à parité » (ou ATM).

Si $S_t < K \Rightarrow VI = K - S_t > 0$, l'option est dite « en dedans » (ou ITM).

b. La valeur temps de l'option

Les opérateurs évaluent les options avec une surcote par rapport au revenu qu'il pourrait obtenir immédiatement en l'exerçant, dans la mesure où ils considèrent qu'il y a une chance que l'option soit encore plus profitable ultérieurement.

L'option a généralement une valeur positive pour deux raisons :

- L'avantage de trésorerie ; un *call* donne le droit à un achat différé du support, on économise donc le financement de la position ;

Chapitre N°4 : L'actuariat des marchés des capitaux

- L'aspect conditionnel ; si le cours du sous-jacent monte ultérieurement, le *call* permet de bénéficier de cette hausse, alors que la perte est limitée au montant de la prime, en cas de baisse.

Pour un *put*, seul le deuxième aspect joue puisqu'il est préférable, en termes de trésorerie, de recevoir immédiatement le produit de la vente du support plutôt que d'attendre l'exercice ultérieur du *put*, cela explique pourquoi la valeur temps d'un *put* est parfois nulle.

Pour les transactions d'options, il existe quatre positions possibles qui sont :

c. L'achat de *call*

Elle correspond à une anticipation de hausse du marché. L'acheteur du *call* espère qu'avant l'échéance, le cours du support aura monté et dépassé le prix d'exercice. Le gain potentiel est illimité, par contre la perte maximale est connue ; elle est égale au prix de l'option achetée.

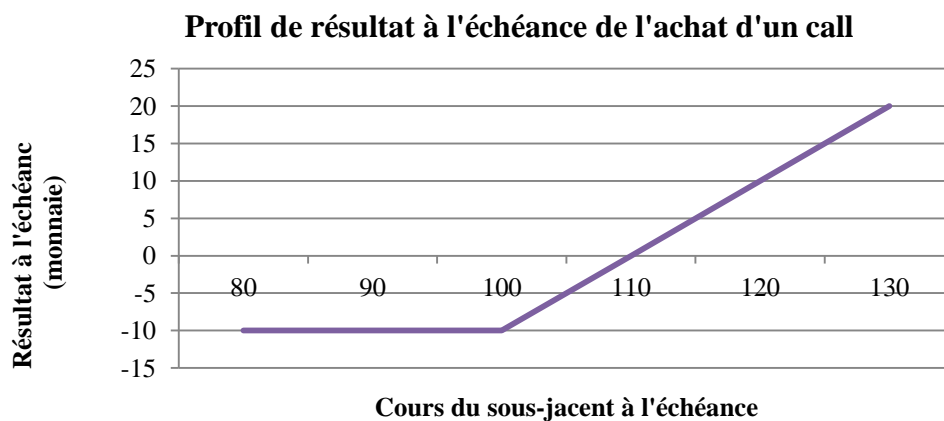
Montant en monnaie

Prime 10

Prix d'exercice 100

Cours à l'échéance	80	90	100	110	120	130
Prime payée	-10	-10	-10	-10	-10	-10
Valeur intrinsèque	0	0	0	10	20	30
Résultat à l'échéance	-10	-10	-10	0	10	20

Tableau 4.2 : Simulation du résultat à l'échéance de l'acheteur du *call*.



Graphique 4.4 : Evolution du gain d'une option *call* quand le sous-jacent augmente.

Les perspectives de pertes sont limitées au montant de la prime payée alors que les perspectives de gain sont d'autant plus importantes que le cours du sous-jacent progresse. Il s'agit donc d'une stratégie de spéculation à la hausse.

d. L'achat de *put*

L'acheteur du *put* anticipe une forte baisse du support. Comme pour les *calls*, le gain potentiel est illimité, par contre la perte maximale est connue ; elle est égale au prix de l'option achetée.

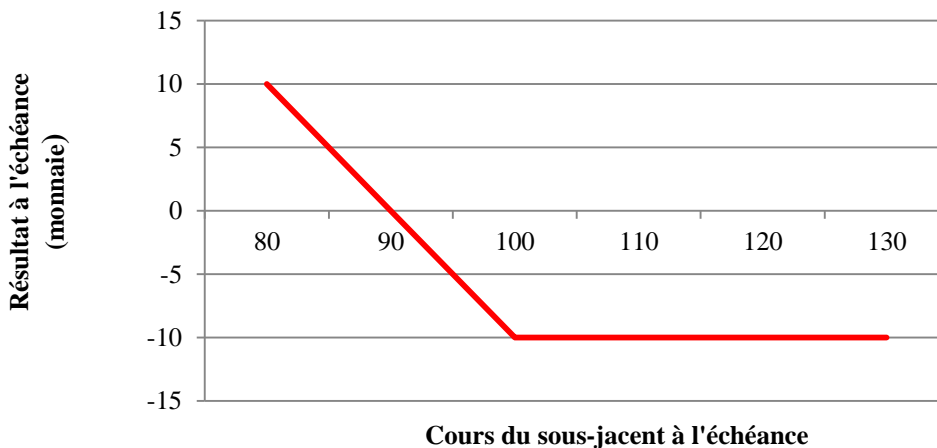
Montant en monnaie

Prime 10
 Prix d'exercice 100

Cours à l'échéance	80	90	100	110	120	130
Prime payée	-10	-10	-10	-10	-10	-10
Valeur intrinsèque	20	10	0	0	0	0
Résultat à l'échéance	10	0	-10	-10	-10	-10

Tableau 4.3 : Simulation de résultat à l'échéance de l'acheteur du *put*.

Profil de résultat à l'échéance de l'achat d'un put



Graphique 4.5 : Evolution du gain d'une option *put* quand le sous-jacent augmente.

Les perspectives de perte sont limitées au montant de la prime payée tandis que les perspectives de gain sont d'autant plus importantes que le cours du sous-jacent baisse. Il s'agit donc d'une stratégie de spéculation à la baisse.

e. La vente de *call*

La vente de *call* est une stratégie d'anticipation de stabilité, ou de faible variation du sous-jacent. Le gain maximal est connu, c'est le montant de l'option vendue. En revanche, la perte potentielle est illimitée.

Le marché des options étant un jeu à somme nulle, le gain (ou la perte) de l'acheteur est égale (aux frais près), à la perte (ou le gain) du vendeur de ce même *call*. D'autre part, alors que l'acheteur du *call* a le droit d'acheter le support, le vendeur a l'obligation de le livrer (contrepartie).

Si le cours du titre monte rapidement, il est préférable de limiter la perte, en rachetant son option plutôt que de subir un déficit plus important en attendant l'échéance. Cependant, le temps joue en faveur du vendeur d'option, et le rachat avant l'échéance revient alors à se priver d'une partie de cette valeur, par conséquent, le rachat d'options vendues est moins fréquent que la revente d'options achetées.

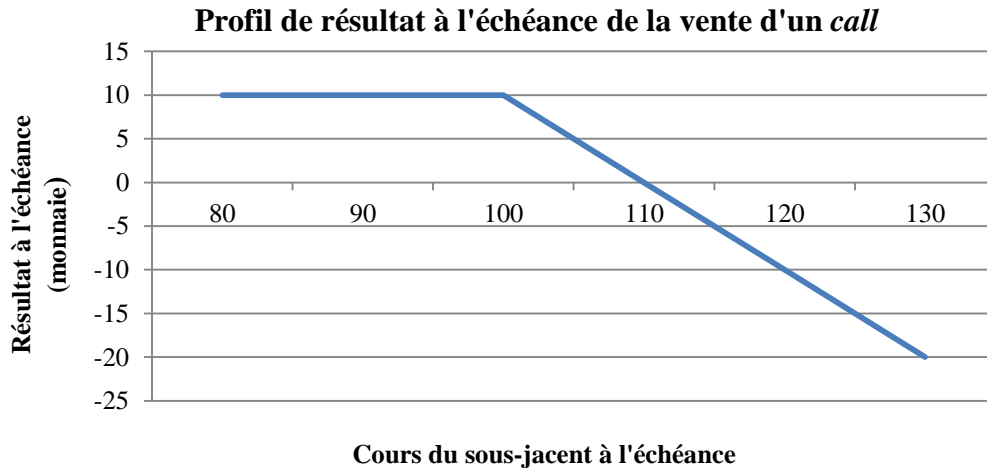
Montant en monnaie

Prime 10

Prix d'exercice 100

S à l'échéance	80	90	100	110	120	130
Prime payée	10	10	10	10	10	10
Valeur intrinsèque	0	0	0	-10	-20	-30
Résultat à l'échéance	10	10	10	0	-10	-20

Tableau 4.4: Simulation du résultat à l'échéance du vendeur de *call*.



Graphique 4.6: Evolution du gain du vendeur du *call*.

Remarque :

La vente d'options seules (sans posséder les titres sous-jacents), appelée « vente nue », est une stratégie particulièrement risquée, car les pertes peuvent être illimitées. De surcroît, cette opération nécessite l'immobilisation de sommes importantes dans le cadre de couverture nécessaire à la sécurité du marché. Par contre, la vente d'options peut être très intéressante si l'investisseur détient des actifs en portefeuille, on parle alors de « vente couverte ».

f. Vente de *put*

L'opérateur anticipe une stagnation des cours, voir une légère hausse, et empoche ainsi la valeur temps. Dès le début, le gain maximal est connu, il s'agit du montant de la prime encaissée. Comme la « vente nue » de *call*, la « vente nue » de *put* est une stratégie dangereuse. Cependant, la vente de *put* constitue un bon moyen de pratiquer des achats à des cours en baisse².

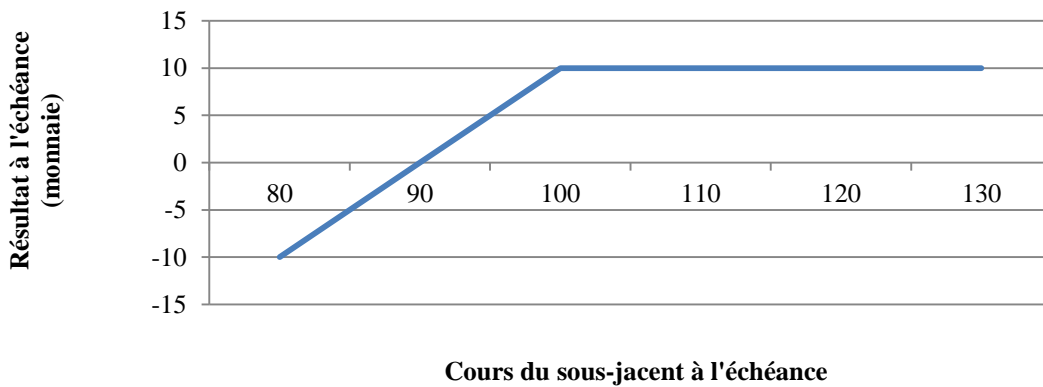
² Levyne .O, Sahut .J-M (2009). - Options réelles, intégrer risque et flexibilité dans les choix d'investissement -. Edition DUNOD. France. Page 28.

Montant en monnaie

Prime **10**
Prix d'exercice **100**

Cours à l'échéance	80	90	100	110	120	130
Prime payée	10	10	10	10	10	10
Valeur intrinsèque	-20	-10	0	0	0	0
Résultat à l'échéance	-10	0	10	10	10	10

Tableau 4.5: Simulation du résultat à l'échéance du vendeur de *put*.



Graphique 4.7: Evolution du gain du vendeur de *put*.

Le modèle d'évaluations des options de Black & Scholes

Le modèle de *Black & Scholes* représente le modèle d'évaluation d'option le plus utilisé par les professionnelles de la bourse, pour des raisons d'ordres pragmatiques, du fait notamment de la précision d'estimation qu'offre ce modèle sous certaines hypocoours néanmois.

a. Méthode de calcul d'un *call* européen

La formule de *Black* et *Scholes* permettant de calculer, à la date zéro, la valeur d'un *call* européen sur un actif sous-jacent de la manière suivante :

$$c = S_0 N(d_1) - Ke^{-\mu T} N(d_2)$$

Avec :

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + (\mu + \sigma^2/2)}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$d_2 = \frac{\ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + (\mu - \sigma^2/2)}{\sigma\sqrt{T}} = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

La fonction $N(x)$ désigne la fonction de répartition d'une loi Normale centrée-réduite. En d'autres termes, c'est la probabilité qu'une variable suivant une loi Normale, $\Phi(0,1)$, soit inférieure à x .

Chapitre N°4 : L'actuariat des marchés des capitaux

$N(d_2)$ est la probabilité que l'option soit exercée. $K N(d_2)$ est donc l'espérance du décaissement à l'échéance. L'expression $S_0 N(d_1)$ est l'espérance d'une variable valant S_T , si $S_T > K$, et zéro sinon, c'est donc l'encaissement espéré à l'échéance.

Le prix de l'option peut donc être vu comme la valeur actuelle nette espérée du projet d'investissement « achat de l'option ».

Dans la pratique, la formule de *Black & Scholes* est appliquée avec un taux sans risque égal au taux actuariel d'un zéro-coupon sans risque de maturité T , cette pratique se révèle exacte d'un point de vue théorique quand μ est une fonction connue du temps. Elle est aussi exacte quand le taux d'intérêt est stochastique, tant que le cours de l'actif sous-jacent à la date T suit une loi log-normal et que le paramètre de volatilité est choisi de façon appropriée.

b. Méthode de calcul du *call* américain

Pour le calcul de la valeur d'un *call* américain (dont la date d'échéance est inconnue) nous utiliserons la simulation de *Monte Carlo*. Le tableau ci-dessous montre comment cela peut être utilisé dans une feuille Excel. Les cellules C2, D2, E2, F2 et G2 contiennent S_0 , K , μ , σ et T . Les cellules D4 et E4 contiennent les valeurs calculées de d_1 et d_2 alors que F4 donne la valeur de l'option calculée par la formule de *Black & Scholes*.

	A	B	C	D	E	F	G
1	45,95	0	S_0	K	μ	σ	T
2	54,49	4,38	50	50	0,05	0,3	0,5
3	50,09	0,09	d_1	d_2	Prix BS		
4	47,46	0	0,2239	0,0118	4,817		
5	44,93	0					
...					
...					
1000	68,27	17,82					
1001							
1002	Moyenne :	4,98					
1003	EC :	7,68					

Tableau 4.6: Simulation de *Monte Carlo* pour estimer la valeur d'un *call* américain.

Dans Excel, la fonction `LOI.NORMALE.STANDARD.INVERSE()` est la fonction réciproque de la fonction de répartition de la loi normale centrée-réduite.

Par conséquent, la formule :

= `LOI.NORMALE.STANDARD.INVERSE(ALEA())`

Simule un tirage aléatoire de cette loi. On saisit alors dans la cellule A1 :

=`=C2*EXP(((E2-F2*F2)*G2+F2*`

`LOI.NORMALE.STANDARD.INVERSE(ALEA())*RACINE(G2))`

Cette formule simule un prix terminal de l'action. Dans la cellule B1, on écrit :

=EXP(-\$E\$2*\$G\$2)*MAX(A1-\$D\$2 ; 0)

Il s'agit de la valeur actuelle du paiement terminale engendré par un *call*. On recopie vers le bas ces formules jusqu'à la ligne 1000. Dans la cellule B1002, on calcul la moyenne des résultats obtenus par la formule =MOYENNE(B1:B1000), qui vaut 4,98 dans ce cas, et en B1003, on fait apparaître une estimation de l'écart-type de cette série à l'aide de la formule =ECARTYPE(B1:B1000). Le résultat obtenu par cette méthode ne doit pas être très éloigné de celui donné par la formule de *Black & Scholes*.

4.1.4. Les swaps

La structure extrêmement souple des swaps trouve son origine dans un instrument très peu flexible ; les prêts parallèles. Celui-ci est apparu pour contourner les tentatives de régulation des années 1970. Les différentes qualités du nouveau-né lui ont permis de supplanter rapidement son aîné et d'exploser littéralement sous les formes les plus diverses pour atteindre un encours de plus de 7 000 milliards de dollars à la fin 1993³.

Les premiers swaps furent négociés au début des années quatre-vingts. Depuis, ces marchés ont connu une croissance considérable. Un swap est accord entre deux entreprises pour échanger les flux des trésoreries dans le futur. Cet accord définit les dates auxquels ces cash flows seront échangés et la façon dont ils seront calculés. Généralement, ils dépendent d'une ou plusieurs variables économiques comme un taux d'intérêt ou un taux de change.

Un contrat forward peut être vu comme un swap, si, le 1^{er} mars 2006, une entreprise prend une position longue sur un contrat forward pour acheter 100 euros d'or à 400 USD l'once dans un an, elle pourra vendre l'or dès qu'elle l'aura reçu. Le contrat forward est alors équivalent à un swap dont lequel l'entreprise s'engage à payer 40000 USD le 1^{er} mars 2007 et à recevoir 100 S, où S est le prix de l'once l'or à cette date.

Alors qu'un contrat forward correspond à un échange de flux à une date unique, les swaps comportent des échanges à plusieurs dates. Dans cette section, nous analysons ces contrats, la façon dont ils sont construits et leur évaluation. Cette section est centré sur les swaps de taux standard (ou vanille) et sur les swaps des devises.

Le fonctionnement des swaps de taux

Le swap le plus courant est swap de taux (vanille) (plain vanilla). Dans un tel contrat, une entreprise s'engage à payer des cash-flows égaux aux intérêts à taux fixe sur un principal

³ Chazot Christophe, Claude Patrick (1999). – Les swaps, concepts et applications -, Édition Economica, France, Page N° 13.

donné, pendant un certain nombre d'années, et en retour, elle reçoit des intérêts à un taux variable sur le même principal pendant la même durée.

Le taux variable le plus courant dans les contrats de swap est le LIBOR. C'est le taux offert dans différentes devises (Euribor pour l'euro) dans les échanges interbancaires pour différentes échéances de court terme (un mois, trois mois, etc..). C'est la référence pour les prêts sur les marchés financiers internationaux.

Pour comprendre son utilisation, considérons une obligation à 5 ans avec un taux spécifié comme le LIBOR 6 mois plus 50 points de base. La durée de vie de cette obligation est divisée en 10 périodes de 6 mois. Au début de chaque période, le coupon (qui sera payé en fin de période) est calculé à partir du taux LIBOR 6 mois prévalant à cette date, auquel on ajoute 0.5%.

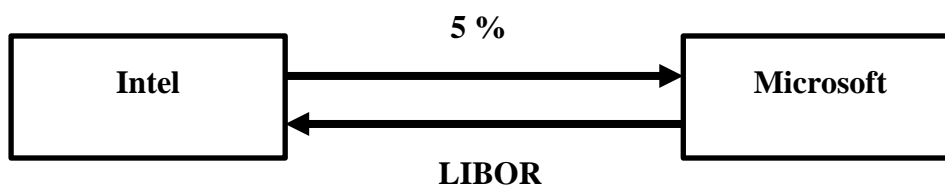
Illustration

Considérons un swap hypothétique à 3 ans entre deux entreprises, Microsoft et Intel par exemple, initié le 5 mars 2007.

Microsoft s'engage à payer un taux d'intérêt de 5 % à Intel sur un principal de 100 millions de dollars ; en retour Intel s'engage à payer des intérêts à Microsoft au taux LIBOR 6 mois.

Les flux seront échangés tous les six mois et le taux fixe de 5 % est en composition semestrielle. Le diagramme du swap est représenté dans le graphique ci-dessous.

Graphique 4.8 : Swap de taux entre Microsoft et Intel.



Source : Élaboré par nous-mêmes.

Le premier échange de flux du swap interviendra le 5 septembre 2007, six mois après la conclusion du contrat. Microsoft doit payer 2,5 millions de dollars à Intel, qui représentent l'intérêt pendant la période de six mois sur le principal de 100 millions.

Mais Intel doit payer à Microsoft l'intérêt au taux LIBOR 6 mois qui prévalait le mars, sur le même principal. Si, par exemple, ce taux était 4,2% Intel doit payer à Microsoft 2,1 millions. On peut voir qu'il n'y a aucune incertitude sur ce premier échange puisque le LIBOR était observable le 5 mars.

Chapitre N°4 : L'actuariat des marchés des capitaux

Le deuxième échange sera réalisé le 4 mars 2008. Microsoft doit payer à nouveau 2,5 millions alors qu'Intel paie l'intérêt au LIBOR 6 mois constaté le septembre 2007. Si ce taux est par exemple 4,8%, Intel paie 2,4 millions.

Au total il y aura six échanges de flux sur ce swap de 3 ans. Les paiements de Microsoft seront systématiquement de 2,5 millions, alors que ceux d'Intel changeront avec l'évolution du LIBOR 6 mois. Le swap est généralement conçu pour que seule la différence d'intérêts soit réglée par la partie qui doit payer le montant le plus élevé.

Dans notre exemple, Microsoft paierait, le 5 septembre 2007, $2,5 - 2,1 = 0,4$ million à Intel et $2,5 - 2,4 = 0,1$ million le 5 mars 2008.

Le tableau ci-dessous fournit l'ensemble des paiements du swap, du point de vue de Microsoft on peut noter que le principal de 100 millions ne sert qu'à calculer des intérêts, il n'est pas échangé. S'il l'était à la fin de la durée de vie du swap. Cela ne changerait pas les flux nets, comme le montre le tableau. Cependant, cette présentation permet de voir le swap sous un autre angle. Les cash flows de la 3 ième colonne sont ceux d'une position longue sur une obligation à taux variable, alors que ceux de la quatrième colonne sont ceux d'une position courte sur une obligation à taux fixe.

Le swap peut donc être appréhendé comme l'échange d'une obligation à taux fixe contre une obligation à taux variable.

Date	LIBOR 6 mois (en %)	Flux variable	Flux fixe	Flux net
05-mars-07	4,2			
05-sept-07	4,8	2,1	-2,5	-0,4
05-mars-08	5,3	2,4	-2,5	-0,1
05-sept-08	5,5	2,65	-2,5	0,15
05-mars-09	5,6	2,75	-2,5	0,25
05-sept-09	5,9	2,8	-2,5	0,3
05-mars-10	6,4	2,95	-2,5	0,45

Tableau N° 4.7 : Cash-flows de Microsoft pour un swap à 3 ans de principal 100 millions quand le taux fixe est 5 % et le taux variable est le LIBOR 6 mois.

4.1.5. Les futures

Les contrats futures sont aujourd'hui échangés sur nombreux marchés à travers le monde. Les deux marchés les plus importants au Etats-Unis sont *chicago Board of Trade* (CBOT, www.cbot.com) et le *Chicago Mercantile Exchange* (CME, www.cme.com). En Europe, les deux plus grands marchés sont *London International Financial Futures and Options Exchange* (www.liffe.com) racheté en 2001 par Euronext et Eurex (www.eurecechange.com), résultat de l'association de Bourses allemande et suisse. Les autres marchés importants sont le *Bolsa de Mercadorias y Futuros de Sao Paulo* (www.bmf.com.br), le *Tokyo International Financial*

Futures Exchange (www.tiffe.or.jp), le *Singapore International Monetary Exchange* (www.simex.sg) et le *Sydney Futures Exchange* (www.sfe.com.au).

Nous allons concentrer notre attention sur un exemple, afin de décrire précisément comment opèrent ces marchés. Supposons que le 5 mars un investisseur localisé dans la ville V appelle son prestataire de services d'investissement, pour lui demander d'acheter 5 000 boisseaux de maïs, livraison en juillet de la même année. Le broker transmet immédiatement cet ordre à un membre de marché ou trader sur le parquet du marché adéquat (le CBOT par exemple). Il s'agit donc de prendre une position longue sur un contrat de maïs portant sur 5 000 boisseaux. Au même moment, un investisseur, situé dans la ville W, passe l'ordre de vente d'un contrat du même type sur le même marché. Les deux ordres de sens opposé sont confrontés sur le marché et un prix d'équilibre, pour la livraison du maïs en juillet, résulte de la confrontation de l'offre et de la demande. L'investisseur de V a donc pris une position longue sur le contrat futures, et l'investisseur de W une position courte.

Le prix (coté le 5 mars) auquel les deux investisseurs conviennent d'échanger à l'échéance est appelé « prix futures ». Supposons que ce soit 170 cents le boisseau. Ce prix, comme n'importe quel autre, est déterminé par la confrontation de l'offre et de la demande. Si, à une date quelconque, il existe un plus grand nombre d'investisseurs souhaitant vendre en juillet plutôt qu'acheter à cette date, le prix futures baissera. Cela poussera de nouveaux acheteurs à acheter sur le marché, de sorte qu'un équilibre sera finalement trouvé entre acheteurs et vendeurs. Un raisonnement symétrique s'applique si le nombre d'acheteurs est plus important que le nombre de vendeurs à un moment donné.

Le dénouement d'une position

La grande majorité des contrats futures est dénouée avant la livraison du produit sous-jacent, car les traders préfèrent souvent fermer leur position sur le marché avant la date de livraison. Pour fermer une position, il suffit de prendre la position inverse sur le marché. Par exemple, l'investisseur V qui avait acheté un contrat le 5 mars peut vendre ce même contrat le 20 avril. L'investisseur W qui avait vendu un contrat pour en acheter un pour fermer sa position. Dans les deux cas, le gain ou la perte sont déterminés par la différence entre les prix futures aux deux dates (5 mars et 20 avril).

La livraison physique est très rare, si bien que certains traders en oublient les modalités. Néanmoins, nous détaillerons les modalités de livraison car c'est la possibilité de ce dénouement du contrat qui induit un lien entre le prix futures et le prix au comptant, ou prix spot.

Les spécifications d'un contrat

Les autorités de marché doivent, quand elles mettent en œuvre un nouveau contrat, spécifier les obligations des parties (acheteur et vendeur). Cela suppose de préciser la taille du contrat (quantité d'actif sous-jacent échangée à l'échéance), le lieu et la période de livraison, etc. dans certains cas, plusieurs qualités de produit peuvent être livrées, avec des ajustements de prix convenus à l'avance. Le choix du produit livré est alors du ressort de celui qui effectue la livraison, c'est-à-dire le vendeur du contrat. Celui-ci envoie aux autorités de marché une notice d'intention de livraison qui précise les éléments que nous venons d'évoquer (lieu de livraison, date précise, qualité).

L'actif sous-jacent

Quand il s'agit d'une matière première, la qualité peut être variable selon les disponibilités sur le marché physique. Par conséquent, les autorités spécifient dans les contrats les qualités acceptables pour la livraison.

Dans certain cas, un ajustement de prix est réalisé pour tenir compte des différences de qualité. Par exemple, sur le contrat de maïs certaines distributions sont autorisées avec des variations de prix.

Lorsque le sous-jacent du contrat est un actif financier, ce problème ne se pose pas ou du moins pas de la même façon. En effet, s'il s'agit d'un contrat sur le yen japonais, point n'est besoin de spécifier le type de yen ! Par contre, lorsque le sous-jacent est une obligation, celle-ci est souvent « notionnelle », c'est-à-dire fictive, avec des caractéristiques bien précises (en termes de durée de vie, de taux de coupon, etc).

Les obligations, bien réelles, livrables dans ce contrat, ne vérifient jamais exactement les conditions. Par conséquent, les autorités de marché donnent une liste d'obligations livrables, ayant par exemple une durée de vie résiduelle entre 8,5 et 10,5 ans au moment de la livraison. Dans ce cas, des correspondances sont établis entre les différents titres livrables pour ajuster les prix selon le titre choisi par le vendeur.

La taille du contrat

Elle précise la qualité d'actifs sous-jacents livrables pour un contrat. Le choix de la taille de contrat est une décision commerciale importante. Si la qualité à livrer est trop élevée, de nombreux investisseurs, qui supportent une faible exposition au risque, ne pourront se couvrir sur le marché, ou encore les « petits » spéculateurs ne pourront intervenir si la taille du contrat est trop conséquente. A l'inverse, si le contrat porte sur une quantité très faible, le coût d'intervention devient prohibitif dans la mesure où un coût fixe est supporté (indépendant de la taille du contrat).

Certains marchés comme le CME ont néanmoins introduit des « mini » contrats comme le Mini Nasdaq100 dont la taille est cinq fois inférieure à celle d'un contrat normal ; il s'agit ici d'attirer les « petits » investisseurs.

La livraison

Les autorités de marché spécifient le ou les lieux de livraison lorsque c'est nécessaire. Ce point est crucial pour les marchandises ou matières premières dont le coût de transport est élevé. Quand plusieurs lieux de livraison sont possibles, des variations de prix peuvent être imposées. Pour le contrat de maïs du CBOT, la livraison peut se faire à Chicago, Burns Harbor, Toledo ou Saint Louis, mais le prix par boisseau est inférieur de 4 cents quand la livraison a lieu dans les deux dernières villes.

Les mois de livraison

Un contrat futures est aussi identifié par son mois de livraison. LA période du mois pendant laquelle la livraison est possible est prévue par le contrat, mais cette période peut être le mois entier. Les mois de livraison varient d'un contrat à l'autre ; ils sont fixés en fonction des besoins des opérateurs du marché. Un contrat sur devises peut proposer des échéances mars, juin, septembre, décembre, alors qu'un contrat Sur matières premières pourra être coté sur des échéances janvier, mars, mai, juillet, septembre et novembre.

Cependant, à toute date se négocient sur le marché l'échéance la plus proche et une ou plusieurs échéances ultérieures. Les règles fonctionnement précisent aussi la date à laquelle une échéance commence à être cotée et la date à laquelle la cotation cesse.

Cette dernière se situe en général quelques jours avant la fin de la période de livraison.

Les cotations

Le prix futures est, si possible d'une manière qui soit facile à comprendre. Par exemple, le contrat futures sur le pétrole de New York Mercantile Exchange est coté en USD par baril, et les contrats sur indices sont cotés en points d'indice avec un équivalent monétaire par point d'indice. Les variations minimales (ticks) dépendent elles aussi de l'unité de cotation. Dans les exemples ci-dessus, la variation minimale est de 0,01 USD pour le pétrole et 0,01 point pour l'indice, mais pour le contrat sur obligation de trésor américain, coté en dollars et en 1/32 de dollar, 1/32 USD constitue la variation minimale. En Europe, les contrats futures sur obligations (comme le contrat FGBl sur le Bund, négocié sur l'Eurex) sont cotés, comme les obligations en pourcentage du nominal avec deux chiffres après la virgule. Le tick correspond à 1 point de base ; le nominal du contrat étant de 100 000 EUR , la variation minimale est donc 10 EUR.

Les variations journalières maximales

Pour la plupart des contrats, des variations maximales journalières sont fixées par les autorités de marché. En principe les transactions cessent jusqu'au lendemain quand ces limites sont atteintes (limit up ou limit down), mais dans certains cas les autorités de marché peuvent décider de modifier la limite et de reprendre les cotations dans la même journée. L'existence de ces limites est justifiée par la volonté de freiner les mouvements de cours dus à une spéculation excessive. Mais ces freins peuvent aussi handicaper le fonctionnement du marché quand le prix du sous-jacent du contrat est très volatil. De ce fait, l'intérêt économique de l'existence de ces limites de variation est toujours une question controversée.

Les limites de position sont les quantités maximales de contrat que peut détenir un spéculateur. Ici encore, il s'agit de limiter l'influence que peut avoir les spéculateurs sur le marché et d'éviter les manipulations. Les opérations en couverture (qui détiennent le sous-jacent) ne sont pas concernés par ces limites.

4.2. L'actuariat du marché monétaire

La structure par terme des taux d'intérêt (*interest rate term structure*) résulte de la mise en relation des taux d'intérêt et des différentes échéances de placement ou d'emprunt. Sur les marchés de capitaux, ces échéances s'échelonnent de la journée jusqu'à plusieurs dizaines d'années, chaque échéance correspondant à un marché de l'argent différent. L'évaluation traditionnelle des obligations présentée ci-dessus suppose implicitement que la structure par terme des taux est plate puisque tous les paiements d'une obligation sont actualisés à un taux unique quelle que soit leur maturité. En réalité, il est fort probable qu'un investisseur n'exige pas le même taux de rendement sur tous les horizons de placement. Selon cette logique, il faudrait alors actualiser les premiers flux à des taux différents des taux utilisés pour les flux plus lointains. Cette méthode nécessite de construire la courbe des taux zéro-coupon (*spot rate curve*).

4.2.1. La courbe des taux zéro-coupon

Soit un flux F_t payé à l'échéance t . Soit $r(t)$ le taux d'intérêt exigé par un investisseur sur ce paiement futur. La valeur actuelle de F_t est donc $F_t/[1 + r(t)]^t$. L'ensemble des taux $r(t)$ définis sur $[0 ; T]$ constitue la structure à terme des taux d'intérêt. Ces taux sont les taux de rendement d'obligations à coupon zéro : ils sont donc dits taux zéro-coupon (*zero-coupon rate*) et seront notés z_t .

L'estimation de la courbe des taux zéro-coupon

La courbe des taux zéro-coupon n'est pas directement observable sur le marché. Seuls les taux actuariels des obligations à coupons sont généralement observables, excepté lorsqu'il existe des obligations du Trésor démembrées. En outre, même s'il existe des *strips* d'emprunts d'Etat sur le marché, leur liquidité est généralement inférieure à celle des obligations à coupons. Or il est conseillé de construire la gamme des taux à partir des cours des titres d'Etat les plus liquides. La détermination des taux zéro-coupon à partir de la gamme des taux actuariels des obligations à coupons repose sur le principe qu'une obligation à coupons est une combinaison d'obligations sans coupon, chaque flux versé par une obligation à coupons pouvant être considéré comme une obligation zéro-coupon. Les taux des obligations sans coupon sont alors calculés en postulant que le marché n'offre aucune opportunité d'arbitrage. Considérons T obligations, chacune de maturité s , $s = 1, \dots, T$. L'obligation de maturité s verse s flux annuels, F_t^s , de l'année $t = 1$ à l'année $t = s$. Son prix V_s est égal à :

$$\sum_{t=1}^s \frac{F_t^s}{(1 + z_t)^t}$$

Où y_s est le taux de rendement actuariel de cette obligation. Notons Z_t le prix de l'obligation zéro-coupon versant un flux unitaire à la date t :

$$Z_t = \frac{1}{(1 + z_t)^t}$$

L'obligation à coupons de maturité s peut être considérée comme un portefeuille d'obligations zéro-coupon unitaires de maturités 1 à s , détenues en quantités

$$(F_t^s)_{t=1}^s$$

En l'absence d'opportunité d'arbitrage entre les obligations à coupon zéro et les obligations à coupons, le prix de l'obligation à coupons de maturité s doit être tel que :

$$V_s = \sum_{t=1}^s F_t^s \times Z_t = \sum_{t=1}^s \frac{F_t^s}{(1 + z_t)^t}$$

L'équation peut être posée pour les T obligations à coupons :

$$\left\{ \begin{array}{l} V_1 = \frac{F_1^1}{1 + z_1} \\ V_2 = \frac{F_1^2}{1 + z_1} + \frac{F_1^2}{(1 + z_2)^2} \\ \vdots \\ V_s = \sum_{t=1}^s F_t^s \times Z_t = \sum_{t=1}^s \frac{F_t^s}{(1 + z_t)^t} \\ \vdots \\ V_T = \sum_{t=1}^T F_t^T \times Z_t = \sum_{t=1}^T \frac{F_t^T}{(1 + z_t)^t} \end{array} \right.$$

Le système ci-dessus se résout par calculs itératifs (*bootstrapping*). Connaissant V_1 et F_1^1 , il est aisé de déterminer z_1 . Une fois z_1 connu, sa valeur est introduite dans la deuxième équation du système, où la seule inconnue est z_2 , qui peut alors être calculé. Tous les taux z_t sont ensuite déterminés successivement en descendant dans le système d'équations. L'illustration ci-dessous est une application simple de cette méthode.

L'utilité de la courbe des taux zéro-coupon

Une fois les taux zéro-coupon déterminées, il est possible d'évaluer tout titre à taux fixe, quel que soit le montant de ses flux. Connaissant les taux zéro-coupon $\{z_t\}_{t=1}^T$, le prix d'une nouvelle obligation d'Etat de maturité N , de valeur nominale C et de taux facial i s'établit à :

$$V_N = \sum_{t=1}^N \frac{C_i}{(1 + z_t)^t} + \frac{C}{(1 + z_N)^N}$$

Et son taux de rendement actuariel y_N est solution de l'équation :

$$C_i \times \frac{1 - (1 + y_N)^{-N}}{y_N} + \frac{C}{(1 + y_N)^N} = \sum_{t=1}^N \frac{C_i}{(1 + z_t)^t} + \frac{C}{(1 + z_N)^N}$$

Pour un titre du secteur privé, l'évaluation par absence d'opportunité d'arbitrage consiste à actualiser les paiements du titre par les zéro-coupon augmentés de la marge de crédit correspondant au risque de l'émetteur. Soit K la maturité d'une obligation risquée versant des coupons annuels au taux facial i' et remboursée à sa valeur nominale C' . Notons s_K la marge de crédit correspondant au risque de signature de l'émetteur. Selon la théorie de l'absence d'opportunité d'arbitrage, la valeur fondamentale du titre est :

$$V_k = \sum_{t=1}^K \frac{C' i'}{(1 + z_t + s_K)^t} + \frac{C'}{(1 + z_N + s_K)^K}$$

Et son taux de rendement actuariel est y_k tel que :

$$C'i' \times \frac{1 - (1 + y_K)^{-K}}{y_K} + \frac{C'}{(1 + y_K)^K} = \sum_{t=1}^K \frac{C'i'}{(1 + z_t + s_K)^t} + \frac{C'}{(1 + z_K + s_K)^K}$$

Les théories explicatives de la structure à terme des taux d'intérêt

Depuis les années 1930, plusieurs théories ont été avancées pour expliquer la formation de la structure des taux et la relation entre taux d'intérêt à court terme et taux d'intérêt à long terme. Les théories traditionnelles s'articulent autour de trois paradigmes : les anticipations formées par les investisseurs sur les taux futurs, la préférence des investisseurs pour la liquidité, et le positionnement institutionnel des investisseurs.

4.2.2. La théorie des anticipations pures ou non biaisées

La théorie des anticipations peut être considérée comme la première explication complète de la structure par terme des taux d'intérêt. *Fisher* (1896) a été historiquement le premier à mettre en évidence le rôle des anticipations dans la formation des taux d'intérêt nominaux. L'effet *Fisher* se définit comme l'augmentation du taux d'intérêt nominale résultant des anticipations des agents sur l'inflation. Reprenant l'intuition donnée par *Fisher*, *Iltis* (1940) développe la théorie des anticipations pures ou *unbiased expectations hypothesis*, en avenir certain. Elle fut ensuite généralisée en avenir aléatoire par *Meiselman* (1962).

Selon cette théorie, les taux d'intérêt au comptant sont déterminés par les taux d'intérêt courts futurs anticipés par les investisseurs.

Il en résulte que, toute forme de courbe des taux est possible : une courbe plate indique que les agents anticipent la stabilité des taux courts futurs alors qu'une courbe croissante (décroissante) signale des anticipations de hausse (baisse) des taux courts.

La théorie de la préférence pour la liquidité

La théorie de la préférence pour la liquidité ou théorie de la prime de risque, que l'on doit à *Hicks* (1946), introduit la notion d'aversion au risque dans l'analyse de la structure des taux. Elle suppose que les taux longs résultent, certes, de la moyenne des taux court futurs anticipés mais ces taux sont majorés d'une prime de liquidité qui traduit l'aversion au risque des agents. D'après cette théorie, les investisseurs ont a priori une préférence pour les placements de courte durée car les prévisions à long terme sont plus incertaines. L'investisseur qui s'engage à long terme peut subir une perte en capital si des dépenses imprévues avant l'échéance de son placement l'obligent à le liquider avant l'échéance faute de disposer de liquidités suffisantes. Plus l'horizon d'investissement est long, plus le risque d'événements imprévisibles est important. Un investisseur adverse au risque n'accepte donc d'accroître la durée de son placement qu'en échange d'une prime de risque, croissante avec la maturité. Selon la théorie

de la préférence pour la liquidité, la forme la plus fréquente de la courbe des taux est une structure croissante et les titres d'échéances différentes ne sont plus parfaitement substituables.

Les théories institutionnalistes

Si les deux théories précédentes appartiennent à un même courant fondé sur les anticipations de taux futurs et sur l'idée que les investisseurs arbitrent entre les différentes échéances de placement en obligations sans risque, à l'inverse, les théories institutionnalistes considèrent que les investisseurs ont des préférences *a priori* pour certaines maturités et qu'ils ne modifient que très difficilement leur horizon de placement.

La théorie de la segmentation

Elaborée par *Culbertson* (1957), cette théorie considère que les agents sont totalement adverses au risque et que les préférences quant à la durée de leurs placements ou de leurs dettes sont très rigides. Ils cherchent à faire coïncider la durée de leur actif avec celle de leur passif, si bien que l'offre et la demande de capitaux pour chaque maturité déterminent un taux indépendamment du taux d'équilibre pour les autres maturités. Sous ces hypocoours cloisonnés. Les anticipations des agents et leurs préférences pour la liquidité ne jouent aucun rôle dans la formation de la courbe des taux. C'est l'importance relative de l'offre et de la demande pour chaque échéance qui détermine la structure des taux.

La théorie de l'habitat préféré

Modigliani et *Sutch* (1966) ont proposé d'amender l'hypocoours de segmentation et de la concilier avec la théorie des anticipations. Ils soutiennent l'idée que les investisseurs possèdent des habitats préférés, en fonction des caractéristiques de leurs ressources, ce qui crée indéniablement des rigidités. Cependant, ces investisseurs ont éventuellement disposés à quitter leur habitat préféré moyennant une prime d'habitat. La gamme des taux dépend alors des taux courts futurs anticipés et des primes d'habitat. Ces primes d'habitat résultent de l'attitude d'agents à l'égard du risque mais ne sont pas nécessairement positives ou croissantes avec l'échéance si bien que la courbe des taux peut être ascendante ou inversée, même si les agents anticipent que les taux courts resteront constants⁴.

⁴ Gresse .C (2010). - MBA Finance -. Edition Eyrolles. France. Page 523.

Bibliographie

Ouvrages

Chazot Christophe, Claude Patrick (1999). – Les swaps, concepts et applications -, Édition Economica, France.

Christian Partrat (2007), -Provisionnement technique en Assurance no vie-, perspectives actuarielles modernes, édition Economica, Paris.

Engle .F-R, Granger .C-W-J (1987) - Cointegration and error correction: representation, estimation and testing -. Economica. University of Oxford, Oxford. Grande Bretagne.

Engle .R (1982). – Autoregressive conditional heteroscedasticity with estimates of the variance of united kingdom inflations -. Enonometrica. University of Oxford, Oxford. Grande Bretagne.

G.Simonet (1998), -Comptabilité des entreprises d'assurances-, 5^{ème} édition édition, l'Argus de l'assurance, Paris.

Gourieroux Christian (1999), - Statistique de l'assurance -, Édition Economica, France.

Gresse .C (2010). - MBA Finance -. Edition Eyrolles. France.

Hull .J (2007). - Options, futures et autres actifs dérivés -. Edition Pearson Education. France. L. G, Godfrey (1978). – Testing General Autoregressive and Moving Average Error Models When the Regressor include Lagged Dependent Variables -. Econometrica, vol 46.

T.S, Breusch (1978). – Testing for Autocorrelation in Dynamic Linear Models -. Australian Economic Papers, vol 17. Australia.

Lardic .S, Mignon .V (2002). – Econométrie des séries temporelles macroéconomiques et financières -. Edition Economica. France.

Levyne .O, Sahut .J-M (2009). - Options réelles, intégrer risque et flexibilité dans les choix d'investissement -. Edition DUNOD. France.

Michel Denuit, mathématiques de l'assurance non-vie, Tome 1.

Michel Denuit, Arthur Charpentier (2005), -Mathématiques de l'assurance non vie Tome 2 : Tarification et provisionnement-, Edition Econimica, paris.

Planchet. F, Thérond. P, Jacquemin. J (2005). – Modèles financiers en assurance, analyse de risque dynamique -. Edition Economica. France.

Articles

Barnett G, Zehnirith B. (2000), -Best Estimate for reserves-, Proceedings of the Casualty Actuarial Society 87.

C. M, Jarque et A. K, Bera (1987). – A Test for Normality of Observations and Regression Residuals -. International Statistic Review. Vol 55.

Bibliographie

Desmond J.H (2001). – An Algorithmic Introduction to Numerical Simulation of Stochastic Differential Equations -. SIAM review (Society for Industrial and Applied Mathematics).

Pollard .M, Kou.S. G (2004). - A Jump Diffusion Model for Option Pricing -. Department of Statistics, University of California Berkeley. Stat 251 Paper Review. USA.

R.VERRAL (2002), -Stochastic claims reserving in general insurance-, Journal of the Institute of Actuaries.

Thomas Mack (1993), - Distribution free calculation of the standard error of chain ladder reserves estimates-, ASTIN Bulletin, vol 23.

Supports de cours

Arnaud Lacoue (2008), - Mesure du risque de réserve sur un horizon de un an-, université Claude Bernard Lyon 1, ISFA.

Arthur Charpentier (2011), -Risque et assurance-, Université Rennes 1, journée d'études statistique.

Charpentier Arthur, Christophe Dutang (2012), - R et l'actuariat -, Cours d'actuariat en version numérique. France.

Christian PARTRAT, Projection Dynamique Stochastique d'un triangle de Liquidation, ISFA, Université Claude Bernard 1, Lyon1 France.

Claire Guillaumin (2008), -Détermination d'une méthode de provisionnement pour les créances douteuses-, Université Paris Dauphine.

Daniel Davidov (2009), - Modélisation de la variance dans l'analyse stochastique du passif des polices-, université du Québec, Montréal.

Evra Benro (2008), - « Solvabilité II » : Calibrage des MCR/SCR dans le contexte QIS4 rapport de stage final -2007/2008.

Faye Mamadou, « Confection et analyse des Etas Cima IARD et Vie », Fanaf/IIA de formation des cadres d'assurances 06-10 Avril 2009.

MARKT/2095/99-FR « Révision de la position financière globale d'une entreprise d'assurance, exercice de Solvabilité II ».

Mathieu Gatumel et Guillaume Gorge, -Valorisation du risque IARD et nouvelles norme comptables-, contribution sur le thème relatif au rôle des actuaires vis-à-vis des nouvelles normes comptables.

Racicot Francois- Eric, Raymond Théorét (2006), -La Value-at-Risk models de la VaR, simulation en Visual Basic et autres mesures récentes du risque de marché-, ESG Montréal.

Bibliographie

Sadek Hami, -Les modèles DFA : présentation, utilité et application-, ISFA, université Claude Bernard Lyon.

Textes juridiques

Charre Serveau (M) et Landel (J), lexicque juridique et pratique des termes d'assurance.

Décret exécutif n° 13-114 du 16 Joumada El Oula 1434 correspondant au 28 mars 2013 relatif aux engagements réglementés des sociétés d'assurance et/ou de réassurance.

G. CORNU, Vocabulaire juridique, Edition PUF, 7ème Edition, Paris, 1999, V° Aléa.



مطبوعة بيداغوجية تحت عنوان:

محاضرات في تقنيات حساب المخاطر (الأكتواريا)

موجّهة لطلبة: - ماستر. تخصص: مالية وتأمينات

من إعداد الدكتور: حفار عدلان قسم: المالية والمحاسبة

السنة الجامعية: 2016/2017