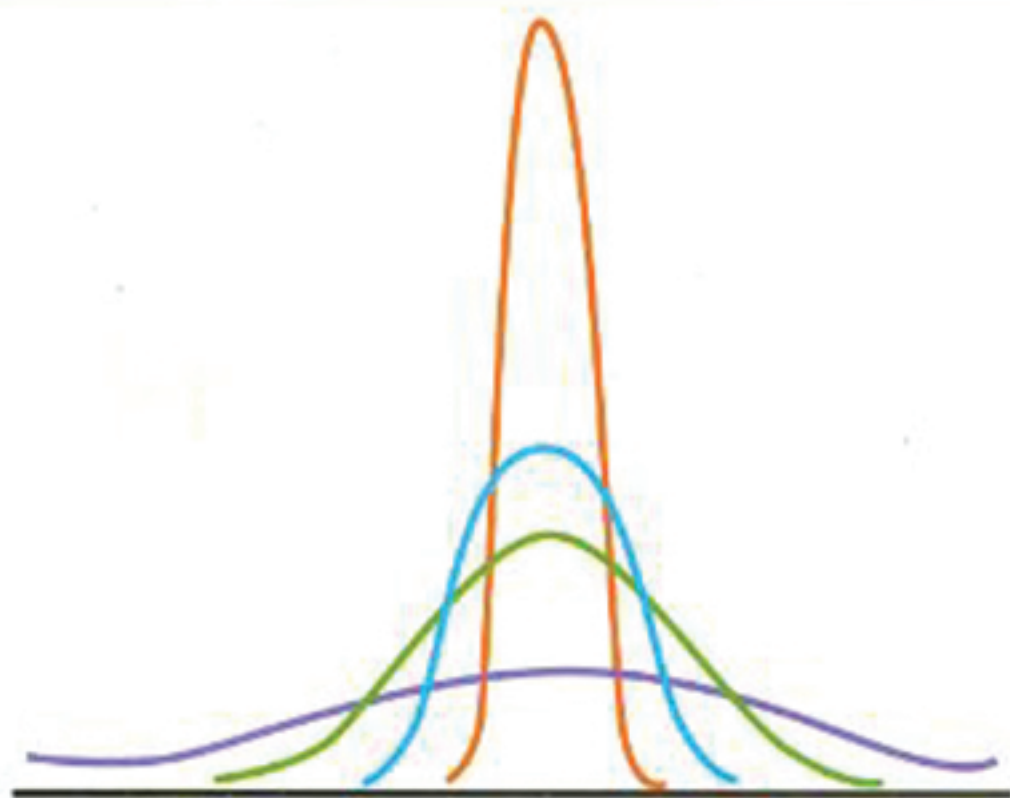


K. BADDARI  
A. ABBASSOV

# EQUATIONS DE LA PHYSIQUE MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES



OFFICE DES PUBLICATIONS UNIVERSITAIRES

# Table des matières

Introduction	03
<b>Chapitre I</b>	
<b>Equations de la physique mathématique</b>	
I.1 Classification des équations	05
I.1.1 Notions générales	05
I.1.2 Equation linéaire homogène de premier ordre	05
I.1.3 Types d'équations du second ordre	07
I.2 Transformations des équations de deuxième ordre	08
I.2.1 Invariance du type d'équation	08
I.2.2 Forme canonique	10
I.2.3 Solution générale	17
I.3 Equations principales de la physique mathématique	19
I.4 Position des problèmes de la physique mathématique	32
I.5 Problèmes pour les équations hyperboliques	34
I.6 Problèmes pour les équations paraboliques	37
I.7 Problèmes pour les équations elliptiques	38
I.8 Problème correct	39
I.9 Problèmes non homogènes	40
I.10 Fonction delta de Dirac	43
I.11 Exercices	45
<b>Chapitre II</b>	
<b>Equations hyperboliques</b>	
II.1 Equation de vibrations d'une corde. Solution de d'Alembert	65
II.2 Equation hyperbolique à deux variables indépendantes	71
II.3 Equation d'onde	74
II.3.1 Formule de Poisson	74
II.3.2 Ondes cylindriques	77
II.3.3 Equation d'onde non homogène	79
II.3.4 Source ponctuelle	82
II.4 Problème de Cauchy pour la propagation du son et des petites vibrations de gaz	83
II.5 Formule de Kirchoff	89
II.6 Exercices	94
<b>Chapitre III</b>	
<b>Méthode de Fourier</b>	
III.1 Problème de Sturm – Liouville	101
III.1.1 Position du problème. Notions générales	101
III.1.2 Propriétés des valeurs propres	103
III.2 Schéma général de la méthode de Fourier	106
III.2.1 Equation hyperbolique	108

III.2.2	Equation parabolique	111
III.3	Vibrations propres d'une corde finie	112
III.4	Notions sur la solution généralisée	116
III.5	Convenance du problème mixte	117
III.5.1	Intégrale de l'énergie	117
III.5.2	Convenance du problème	119
III.6	Intégrale de Fourier	119
III.7	Transformée de Fourier	121
III.8	Problème non homogène	123
III.8.1	Oscillations forcées d'une tige aux extrémités fixées	123
III.8.2	Oscillations forcées d'une tige aux extrémités mobiles	126
III.9	Exercices	128
	<b>Chapitre IV</b>	
	<b>Equations paraboliques</b>	
IV.1	Premier problème aux limites. Théorème du maximum et du minimum	161
IV.1.1	Position du problème	161
IV.1.2	Solution du premier problème aux limites de l'équation de la chaleur	162
IV.2	Problème de Cauchy	167
IV.3	Exercices	174
	<b>Chapitre V</b>	
	<b>Equations elliptiques</b>	
V.1	Equation de Laplace	191
V.2	Formule de Green. Représentation intégrale d'une fonction arbitraire	192
V.3	Propriétés principales des fonctions harmoniques	195
V.4	Problèmes principaux de l'équation de Laplace	197
V.4.1	Problème intérieur de Dirichlet	198
V.4.2	Problème intérieur de Neumann	198
V.4.3	Troisième problème aux limites	198
V.5	Fonction de Green de l'opérateur de Laplace	199
V.5.1	Fonction de Green du problème de Dirichlet	199
V.5.2	Propriétés de la fonction de Green	201
V.6	Solution du problème de Dirichlet pour une sphère	201
V.7	Problème extérieur de Dirichlet pour une boule	207
V.8	Comportement des dérivées des fonctions harmoniques à l'infini	208
V.9	Théorème d'unicité du problème de Neumann	210
V.10	Exercices	212
	<b>Chapitre VI</b>	
	<b>Théorie du potentiel</b>	
VI.1	Potentiel de volume et des couches simples et doubles	233
VI.2	Intégrales impropres dépendant d'un paramètre	235
VI.3	Potentiel de volume	237
VI.4	Surface de Liapounov	244
VI.5	Potentiel d'une couche double	247

VI.6 Potentiel d'une couche simple	256
VI.7 Force d'attraction gravitationnelle et son potentiel	256
VI.7.1 Force d'attraction et son potentiel	256
VI.7.2 Dérivées du potentiel gravitationnel	261
VI.7.3 Expressions intégrales générales des dérivées du potentiel gravitationnel	267
VI.7.4 Equations de Laplace et de Poisson	273
VI.7.5 Formule de Green	274
VI.7.6 Formule de Green pour les fonctions harmoniques	280
VI.7.7 Problèmes de Dirichlet et de Neumann	282
VI.7.8 Potentiel d'attraction d'une couche sphérique et d'une sphère	287
VI.8 Problèmes de la prospection électrique	295
VI.9 Ondes élastiques et ondes électromagnétiques	300
VI.9.1 Ondes élastiques dans un milieu homogène	300
VI.9.2 Ondes électromagnétiques dans un milieu conducteur	302
VI.10 Exercices	306
<b>Chapitre VII</b>	
Quelques fonctions spéciales	
VII.1 Fonctions de Bessel	311
VII.1.1 Matérialisation physiques de l'équation de Bessel	311
VII.1.2 Oscillations d'un fil pesant	312
VII.1.3 Oscillations d'une membrane circulaire	313
VII.1.4 Equation de diffusivité	314
VII.1.5 Détermination de la fonction de Bessel de première espèce	315
VII.1.6 Fonction de Bessel de deuxième espèce	320
VII.1.7 Equation différentielle conduisant à l'équation de Bessel. Fonction de Bessel de troisième espèce	321
VII.1.8 Fonction génératrice de la fonction Bessel	324
VII.1.9 Propriétés de la fonction de Bessel de première et troisième espèces	325
VII.1.10 Formules intégrales de la fonction de Bessel de première et troisième espèces	329
VII.1.11 Intégrale de Weber-Lipchitz	331
VII.1.12 Orthogonalité de la fonction de Bessel	333
VII.1.13 Application de la fonction de Bessel à la solution des problèmes de physique mathématique	336
VII.1.14 Fonctions de Hankel	344
VII.1.15 Intégrale de Fourier-Bessel	350
VII.1.16 Exercices	355
VII.2 Polynômes de Legendre	367
VII.2.1 Fonction génératrice et polynôme de Legendre	367
VII.2.2 Formule de récurrence	369
VII.2.3 Equation de Legendre	370
VII.2.4 Orthogonalité des polynômes de Legendre	371
VII.2.5 Norme des polynômes de Legendre	371
VII.2.6 Zéros des polynômes de Legendre	372

VII.2.7	Limites des polynômes de Legendre	372
VII.2.8	Exercices	373
VII.3	Polynômes de Chebychev-Hermite	375
VII.3.1	Formule différentielle	375
VII.3.2	Formules de récurrence	376
VII.3.3	Equation de Chebychev-Hermite	376
VII.3.4	Norme des polynômes $H_n(x)$	377
VII.3.5	Fonction de Chebychev-Hermite	378
VII.4	Polynômes de Laguerre	378
VII.4.1	Equation différentielle de Laguerre. Polynômes de Laguerre	378
VII.4.2	Propriétés des polynômes de Laguerre	379
VII.4.3	Polynômes orthogonaux et leurs propriétés	379
VII.5	Exercices	380
VII.6	Fonctions sphériques	382
VII.6.1	Exemple d'application des fonctions sphériques	389
VII.6.2	Analyse sphérique des données géophysiques	393
VII.7	Exercices	396
	<b>Bibliographie</b>	401
	<b>Table des matières</b>	403

## INTRODUCTION

L'objectif du cours des équations de la physique mathématique appliquées est de fournir à l'étudiant les outils mathématiques utilisés dans les cours de physique, géophysique, mécanique, électronique et des autres sciences techniques. L'enseignement de ces disciplines repose sur la modélisation des phénomènes complexes aux moyens d'équations mathématiques. Il s'agit alors, de formuler mathématiquement des lois sur des processus physiques et exploiter l'interprétation de ces équations pour illustrer des phénomènes physiques observés et mesurés.

Le phénomène physique est un ensemble de variations liées par des rapports de causalité que subissent des corps déterminés dans le temps et dans l'espace. La physique mathématique apprécie, dans ce cas, toutes les variations quantitatives se manifestant dans des phénomènes physiques. Elles établissent des liaisons régulières et des rapports de cause à effet déterminés dans la variation des grandeurs observées. Elle permet de construire un schéma conventionnel à l'aide d'équations mathématiques traduisant les caractéristiques du processus et permettant de dégager des lois fondamentales, ainsi que les détails complémentaires du phénomène étudié. La mise en œuvre des équations de la physique mathématique a un objectif pratique et a à fournir des méthodes d'analyse des lois de la nature. Ces dernières qui gouvernent les phénomènes magnétiques, électriques, électromagnétiques, mécaniques, électromécaniques, hydrodynamiques et autres sont soumises à une analyse mathématique suivie d'une vérification expérimentale. Les problèmes mathématiques posés, à cet effet, contiennent beaucoup d'éléments communs et constituent l'objet de la physique mathématique.

Les disciplines caractérisant ce domaine de la science sont les mathématiques. Cependant, la problématique est fortement liée aux problèmes de la physique, ayant une certaine spécificité.

Les équations relatives à la physique mathématique sont très nombreuses. L'objet de cet ouvrage considère les équations de la physique mathématique appliquées et basées surtout sur les équations différentielles ordinaires. L'étude de chaque équation commence par la formulation d'un problème physique simple conduisant à une équation d'un type donné. Une attention particulière est donnée à la problématique mathématique et sa relation avec l'interprétation physique du phénomène étudié.

Chaque chapitre est limité au strict niveau nécessaire à la compréhension des définitions des principes et des théorèmes accompagnés d'exercices d'application. Ces derniers ont pour but essentiel l'apprentissage effectif des éléments introduits dans la théorie.

Cet ouvrage contient l'outil qui permet à l'étudiant des sciences et technologies et des sciences physiques d'assimiler les concepts fondamentaux de l'application des équations de la physique mathématique devenues un élément essentiel dans la formation des licenciés, des masters et doctorants. Les étudiants tireront de cet ouvrage les démarches à suivre pour la compréhension des équations de la physique mathématique et la façon d'assimiler la physique sous-jacente.

Nous tenons à remercier le Dr. M. Hedibel pour ses conseils appréciés.