الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

République Algérienne Démocratique et Populaire

وزارة التعليم العالي و البحث العلمي
جامعة أمحمد بوقرة بومرداس
كلية العلوم الاقتصادية، التجارية
و علوم التسيير

Ministère de l'enseignement supérieur
Et de la recherche scientifique
Université M'Hamed BOUGARA de Boumerdès
Faculté Des Sciences Economiques , Commerciales
Etdes Sciences De Gestion

مطبوعة بيداغوجية تحت عنوان:

محاضرات في الاقتصاد القياسي 1

-دروس وتمارين محلولة-

موجهة لطلبة : السنة الثالثة ليسانس تخصص اقتصاد كمي

إعداد الدكتور : شرعي الحسين

المقياس : الاقتصاد القياسي 1

قسم : العلوم الإقتصادية

السنة الجامعية : 2021/2020

الصفحة	فهرس المحتويات

تقديم:

هذه المطبوعة هي عبارة عن مجموعة من المحاضرات في الاقتصاد القياسي1 التي قدمت لطلبة السنة الثالثة ليسانس علوم اقتصادية تخصص اقتصاد كمي بجامعة أمحمد بوقرة ببومرداس منذ سنة 2016 إلى يومنا هذا وقد حرصنا على تنقيحها وإثراء بعض الحالات العملية التطبيقية عليها إذ تنوعت هذه الحالات التي تتلاءم ومحتوى مقاييس سابقة مدرجة في تكوين الطالب في مرحلة الليسانس.

وتتناول هذه المطبوعة تعريفا للاقتصاد القياسي، أهدافه أهميته وعلاقته بالعلوم الأخرى وكذا منهجية البحث في الاقتصاد القياسي. وفي الفصل الثاني تطرقنا إلى النموذج الانحداري الخطي البسيط ، وفي الفصل الثالث تناولنا بنفس الطريقة الفصل السابق إلى نموذج الانحدار الخطي المتعدد، وفي الفصل الأخير تم عرض مشكلة التعدد الخطي واختيار النموذج الأمثل.

إن دراسة هذه المحاضرات يتطلب تكوينا معرفيا مسبقا في الإحصاء والرياضيات وبعض من المعارف المتعلقة بالنظرية الاقتصادية...، ومن أهداف هذه المطبوعة هو تقديم أسلوب علمي مبسط لكيفية القيام بدراسة قياسية لنماذج الانحدار خاصة فيما تعلق بتقارير التربص.

الفصل الأول: ماهية الاقتصاد القياسي

1. مفهوم بالاقتصاد القياسي ومنهاج البحث فيه

1.1. تعريف الاقتصاد القياسي:

الاقتصاد القياسي هو مصطلح يوناني ومكون من قسمين: Econo وهو مختصر لعلم الاقتصاد وmetrics والتي تعني القياسات، أي القياس في الاقتصاد أو القياس الاقتصادي، وقد استخدم هذا المصطلح لأول مرة سنة 1926 من قبل الاقتصادي النرويجي فريشFrisch [1].

والاقتصاد القياسي فرع من فروع علم الاقتصاد الذي يختص بالقياس (التقدير) الكمي للعلاقة بين المتغيرات مستخدما النظرية الاقتصادية (الكلية والجزئية) والرياضيات والإحصاء، بهدف اختبار النظريات الاقتصادية المختلفة من ناحية ومساعدة رجال الأعمال والحكومات في اتخاذ القرارات ووضع السياسات من ناحية أخرى.

كما تعددت تعاريف الاقتصاد القياسي كونه فرع متميز من الفروع الحديثة للاقتصاد، حيث يمكن وضع التعاريفات التالية:

عرفه الباحث Maddala بأنه تطبيق طرق الإحصاء والرياضيات في تحليل المعطيات الاقتصادية، بهدف التأكد الميداني من النظريات الاقتصادية ومن ثم قبولها أو رفضها[2].

وحسب GC. Chow فإن القياس الاقتصادي هو فن وعلم استعمال الطرق الإحصائية لغرض قياس العلاقات الاقتصادية، حيث تستعمل طرق القياس الاقتصادي لتقدير معالم النموذج، اختبار الفرضيات الموضوعة حول النموذج وتعميم التنبؤات من هذا الأخير[3].

كما يرى العالم Maurice Allais الحائز على جائزة نوبل في علم الاقتصاد سنة 1988، بأن غاية القياس الاقتصادي هي دراسة الوسائل الاقتصادية على المستويين النظري والتطبيقي بنفس

---

[1] Humberto Barreto, Frank Howland, Introductory Econometrics: Using Monte Carlo Simulation with Microsoft Excel, Cambridge University press, New York,USA, 2006, P10.

[2] G. S. Maddala, Kajal Lahiri Introduction to Econometrics, 4th edition, Wiley, USA, 2009, P3.

[3] G.C .Chow, Econometrics, McGraw-Hill, USA, 1983,P 01.

المنطق البناء المطبق في العلوم الفيزيائية وباستعمال نفس الطرق الكمية من رياضيات وإحصاء سواء كان ذلك على المستوى النظري أو على المستوى التطبيقي.

إن الاقتصاد القياسي وفقا لتعريف عدد من الأعلام الرواد في هذا المجال Klien و Malinvaud وغيرهما فإن القياس الاقتصادي هو علم استعمال طرق الاستقراء والاستدلال الإحصائيين، كنظرية الاحتمالات، اختبار الفرضيات، نظريات التقدير والتنبؤ، وذلك بغرض التحقق من العلاقات التي تمكننا النظرية الاقتصادية من صياغتها على شكل فرضيات وتحديد فعلها تحديدا كميا[4].

1.2. أهداف الاقتصاد القياسي:

هناك ثلاثة أهداف يسعى الاقتصاد القياسي لتحقيقها نوجزها فيما يلي[5]:

- تحليل واختبار النظرية الاقتصادية: أي التأكد من مدى صحة ما هو مسلم به في النظرية الاقتصادية، وذلك عن طريق محاولة الحصول على دليل علمي لاختبار القدرة التفسيرية للنظريات الاقتصادية، ولتقرير مدى شرح هذه النظريات للسلوك الفعلي للوحدات الإنتاجية.
- رسم السياسات واتخاذ القرارات: في غالب الأحيان، عند دراسة ظاهرة اقتصادية ما نهتم بمعرفة ما هي العوامل المسببة لها. فالاقتصاد القياسي يمكننا من القيام بذلك عن طريق إدخال وإخراج المتغيرات المفسرة لتلك الظاهرة وبالاعتماد على بعض الاختبارات الإحصائية قد نحصر العوامل المسببة لها.
- التنبؤات بقيم المتغيرات الاقتصادية في المستقبل: ويقصد بذلك استخدام الاقتصاد القياسي للتقديرات المتحصل عليها لمعلمات العلاقات الاقتصادية، في التنبؤ بالقيم المستقبلية للمتغيرات الاقتصادية.

والتطبيقات الناجحة في الاقتصاد القياسي، هي تلك التي تسعى إلى تحقيق الأهداف الثلاثة، من خلال تحليل للنظرية وتقدير للمعالم والتنبؤ بقيم المستقبلية للمتغيرات الاقتصادية.

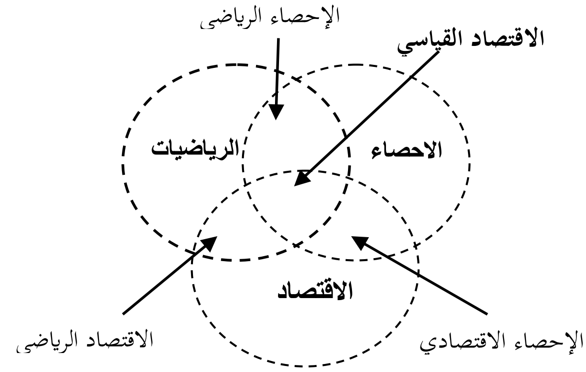
1.3. علاقة علم الاقتصاد القياسي بالعلوم الأخرى:

يمكن توضيح علاقة الاقتصاد القياسي بالعلوم الأخرى في الشكل الموالي:

---

[4] جعفر باقر الوائلي، الاقتصاد القياسي وبرنامج الكومبيوتر الاحصائي spss، ط1، جامعة واسط، كلية الادارة والاقتصاد، 2009، العراق، ص16.

[5] حسين بخيت، الاقتصاد القياسي، الدار اليازوري للنشر والتوزيع، الأردن، 2018، ص 3.



يرتبط الاقتصاد القياسي ارتباطا وثيقا بـ[6]:

- النظرية الاقتصادية:

يمكن القول أن العلاقة بين المتغيرات الاقتصادية المستوحاة من النظرية الاقتصادية تبقى مسألة مجردة ما لم يتم تقدير معالمها في ضوء البيانات الإحصائية والتي هي من مهمات الاقتصاد القياسي، فالاقتصاد القياسي هو الوجه الكمي للنظرية الاقتصادية، فهو لا يختلف عن النظرية الاقتصادية إلا في أسلوب وشكل تعبيره عن الظواهر الاقتصادية التي تظهر في شكل علاقات كمية يمكن قياسها باستخدام تقنيات رياضية وإحصائية.

- الاقتصاد الرياضي: والذي يهتم بإعادة صياغة العلاقة التي تم تحديدها بالاعتماد على النظرية الاقتصادية رياضيا على هيئة معادلات ورموز رياضية بدون قياس أو برهنة عددية لتلك الصياغات، فالقياسات والبرهنة العددية هي من مهمات الاقتصاد القياسي.
- الإحصاء: يقتصر دور الإحصاء على تجميع البيانات الإحصائية وجدولتها ووصفها خلال فترة زمنية معينة، واشتقاق بعض العلاقات بين المتغيرات الظاهرة المدروسة دون اللجوء إلى تقييم المتغيرات الاقتصادية[7].

ويتميز الاقتصاد القياسي عن الإحصاء بأن له معايير خاصة لاختبار قيمة التقديرات المتحصل عليها من خلال اختباره لمدى توفر الشروط الخاصة بكل طريقة تستخدم في التقدير[8].

---

[6] عمرو حامد، إدارة الأعمال الدولية، المكتبة الأكاديمية، القاهرة، مصر، 1999، ص 36.
[7] Damodar N. Gujarati, Econométrie, Edition De Boeck, Paris, 2004, P 2.
[8] حسام علي داود وخالد محمد السواعي، الاقتصاد القياسي بين النظرية والتطبيق، دار المسيرة، الأردن، 2013، ص 18.

كما تجدر الإشارة أن بداية الاقتصاد القياسي كانت كجزء من العلوم الاقتصادية لكنه الآن تخصص وأصبح له مجال منفصل ويضمن : الاقتصاد القياسي المالي، الاقتصاد القياسي الجزئي، الاقتصاد القياسي الكلي، الاقتصاد القياسي التطبيقي، الاقتصاد القياسي للسلاسل الزمنية.

1.4. منهجية البحث في الاقتصاد القياسي:

تعتمد منهجية الاقتصاد القياسي على الخطوات الخمس التالية:

I. توصيف النموذج:

عملية توصيف النموذج تعتمد على النظريات الاقتصادية والاقتصاد الرياضي وتشتمل على ما يلي[9]:

- تحديد المتغير التابع والمتغير أو المتغيرات المستقلة.
- معرفة التوقعات النظرية للعلاقة بين المتغيرات الاقتصادية في النموذج، أي تحديد إشارات معالم النموذج، والتي سيتم على أساسها تقييم التقديرات من خلال النموذج.
- تحديد الشكل الرياضي للنموذج من حيث شكل الدالة (خطية أو غير خطية) وكذلك عدد المعادلات.
- كتابة النموذج الرياضي المقترح في صورته الإحصائية، وذلك بإضافة المتغير العشوائي (e_i) والذي يمثل الجزء غير المفسر في تغير المتغير التابع.

II. تقدير النموذج القياسي:

يقصد بتقدير النموذج القياسي هو تقدير معاملات الانحدار أي تقدير $B_0.B_1\ B_2\ldots B_n$ وذلك باستخدام الطريقة المناسبة للتقدير، وتتطلب هذه المرحلة ما يلي:

أولا: جمع البيانات: ويتم جمع البيانات عن المتغيرات الداخلة في النموذج، وهناك أربعة أنواع من البيانات، وهي[10]:

[9] محمود عبد السميع عناني، التحليل القياسي والإحصائي للعلاقات الاقتصادية، الدار الجامعية، الإسكندرية، مصر، 2008، ص 19.

[10] سمير خالد صافي، مقدمة في تحليل نماذج الانحدار باستخدام برنامج Eviews، الجزء الأول، الجامعة الإسلامية غزة، فلسطين، 2015، ص 23-29.

– البيانات المقطعية:

يقصد بالبيانات المقطعية تلك البيانات التي تؤخذ عن متغير أو ظاهرة في نقطة زمنية معينة، وتتكون مجموعة البيانات المقطعية من عينة الأفراد، أو القطاع العائلي، أو الشركات، أو الدول، أو المناطق، أو المدن، أو أي نوع من الوحدات في نقطة محددة من الزمن، وفي بعض الحالات، لا تتماثل الفترة الزمنية للبيانات بالضبط، مثل مسح بيانات العائلات المختلفة خلال أيام مختلفة من الشهر، وفي هذه الحالة يتم إهمال فروق التوقيت في جمع البيانات وتسمى البيانات التي يتم جمعها بيانات مقطعية.

إن استخدام البيانات المقطعية واسع النطاق في الاقتصاد والعلوم الاجتماعية الأخرى. ويساهم تحليل البيانات المقطعية بالاقتصاد الجزئي التطبيقي في اقتصاديات العمل، المالية العامة للدولة، الاقتصاد الإداري، وغيرها من الاقتصاديات وكذا بعض الحقول من الاقتصاد الجزئي مثل بيانات الأفراد، العائلات، الشركات، المدن، والمناطق في نقطة الزمن، وتستخدم تلك الحالات لاختبار فرضيات الاقتصاد الجزئي، وتقييم السياسات الاقتصادية.

– بيانات السلاسل الزمنية:

يقصد بالسلسلة الزمنية بأنها متتابعة من القيم المشاهدة لظاهرة عشوائية مرتبة مع الزمن. أو هي البيانات التي يمكن الحصول عليها بصورة تكرارية منظمة مما يمكن من صياغتها على شكل سلسلة تتغير مع الزمن.

كما تتكون بيانات السلاسل الزمنية من مشاهدات متغير واحد أو أكثر خلال فترة من الزمن، منظمة بترتيب تسلسلي زمني، إما سنويا، سداسيا، فصليا، شهريا، أسبوعيا، يوميا، أو كل ساعة. ومن الأمثلة على بيانات السلاسل الزمنية أسعار الأسهم، والناتج المحلي الإجمالي، عرض النقد، وغيرها.

– البيانات المقطعية المجمعة:

تحتوي البيانات المقطعية المجمعة على مزيج من بيانات السلسلة الزمنية والبيانات المقطعية فهي تعطي بيانات عن مجموعات مختلقة من المفردات عبر السلسلة الزمنية.

ومن أهم ما يميز البيانات المقطعية المجمعة خلال فترة زمنية معينة أنها تعتبر طريقة فعالة لتحليل تأثيرات سياسة جديدة للحكومة على الوضع الاقتصادي خلال الفترة الزمنية التي تم إجراء المسح خلالها.

ومن أمثلة البيانات المقطعية المجمعة ما يلي:

- دراسة الدخل لمجموعات مختلفة من الأسر خلال العشر سنوات الماضية.
- دراسة الاستهلاك الشهري لمجموعات مختلفة من الأسر خلال الستة شهور الأولى من السنة الماضية.

– **البيانات الطولية المجمعة:**

تحتوي البيانات الطولية المجمعة على مزيج من بيانات السلسلة الزمنية والبيانات المقطعية فهي تعطي بيانات عن مجموعة من المفردات عبر سلسلة زمنية. أي أنها تحتوي على سلسلة زمنية لكل بيانات مقطعية عن كل مفردة في العينة موضع الدراسة.

ومن أهم ما يميز البيانات الطولية المجمعة عن البيانات المقطعية المجمعة أن نفس المفردة تم متابعتها خلال فترة زمنية مختلفة.

ومن أمثلة البيانات الطولية المجمعة ما يلي:

- دراسة الدخل لمجموعة من الأسر خلال العشر سنوات الماضية.
- دراسة الاستهلاك الشهري لمجموعة من الأسر خلال الستة شهور الأخيرة من السنة الماضية.

ثانيا: دراسة الشروط الخاصة بالتمييز للدالة تحت الدراسة

ويقصد بذلك أن يتحقق الباحث إذا ما كانت المعلمات التي يقدرها باستخدام بيانات معينة وأسلوب إحصائي معين هي معلمات العلاقة محل الاهتمام.

ثالثا: اختيار الطريقة المناسبة للتقدير:

ويقصد بذلك الطريقة أو الأسلوب المناسب لتقدير معالم النموذج، والفروض الخاصة بهذه الطريقة والمعنى الاقتصادي للتقديرات الخاصة بمعاملات النموذج. ويمكن تقدير معلمات العلاقة الاقتصادية بعدة طرق: طريقة المربعات الصغرى العادية، طريقة المربعات الصغرى على مرحلتين، طريقة المعقولية العظمى، طريقة المربعات الصغرى على ثلاث مراحل... وغيرها، ويتوقف اختيار الطريقة المناسبة للتقدير على عدة عوامل من أهمها:

- طبيعة العلاقة بين المتغيرات.
- خصائص التقديرات المتحصل عليها.
- بساطة الطريقة من حيث العمليات الحسابية اللازمة.
- الوقت والتكاليف اللازمين لتقدير معلمات النموذج.

III. تقييم النموذج:

بعد أن ينتهي الباحث من تقدير القيم الرقمية لمعلمات النموذج من خلال بيانات واقعية فإنه يشرع في تقييم المعلمات المقدرة، والمقصود بتقييم المعلمات المقدرة هو تحديد ما إذا كانت قيم هذه المعلمات لها مدلول أو معنى من الناحية الاقتصادية، وما إذا كان لها دلالة من الناحية الإحصائية، ويوجد هناك العديد من المعايير التي تمكننا من إتمام عملية التقييم أهمها[11]:

- **المعايير الاقتصادية:** تتحدد المعايير الاقتصادية التي تستخدم في تقييم المعلمات من خلال مبادئ النظرية الاقتصادية. وتتعلق هذه المعايير بحجم وإشارة المعلمات المقدرة، فالنظرية الاقتصادية قد تضع قيودا مسبقة على حجم وإشارة المعلمات وهي تعتمد في ذلك على منطق معين، فإذا ما جاءت المعلمات المقدرة على عكس ما تقرره النظرية الاقتصادية مسبقا فإن هذا يمكن أن يكون مبررا لرفض هذه المعلمات المقدرة ما لم يوجد هناك من المبررات المنطقية القوية ما يؤدي للتسليم بصحة التقديرات ورفض ما تقرره النظرية.

[11] عبد القادر محمد عبد القادر عطية، الاقتصاد القياسي بين النظرية والتطبيق، الدار الجامعية، ط2، مصر، 1998، ص 40.

- **المعايير الإحصائية:** وهذه المعايير تحددها النظرية الإحصائية وتهدف إلى تقييم التقديرات المتحصل عليها لمعلمات النموذج وكذا درجة الثقة في هذه التقديرات.

ومن أهم المقاييس الإحصائية المستخدمة معامل التحديد والانحراف المعياري للتقدير، اختيار فيشر، اختبار ستيودنت وغيرها من المعايير التي سنتطرق إليها بالتفصيل في الفصول القادمة.

ومما ينبغي ملاحظته أن المعايير الإحصائية تأتي في المرتبة الثانية بعد المعايير الاقتصادية، فإذا جاءت تقديرات بعض المعلمات بإشارات أو قيم مخالفة فإنه يجب رفضها تماما حتى وإن كان معامل التحديد كبيرا أو كانت المعلمات معنوية إحصائيا لأنها غير مقبولة اقتصاديا.

- **المعايير القياسية:** وهذه المعايير تحددها نظرية الاقتصاد القياسي وتهدف إلى إرشاد الباحث إلى ما ينبغي أن تكون عليه التقديرات المتحصل عليها كعدم التحيز أو الاتساق وغير ذلك من المعايير.

كما تهدف المعايير القياسية إلى البحث عن مدى مطابقة فروض الأساليب القياسية المستخدمة والتي تختلف باختلاف الطرق القياسية، أما إذا لم تتحقق هذه الافتراضات فإن هذا يؤدي إلى فقدان المعلمات المقدرة بعض الصفات السابقة، بل ويؤدي أصلا إلى عدم صلاحية المعايير الإحصائية نفسها لقياس مدى الثقة في المعلمات المقدرة، وهذا يعني أن المعايير القياسية تعتبر اختبارات الرتبة الثانية والتي تستخدم في اختبار المعايير الإحصائية (اختبارات الرتبة الأولى).

ومن بين المعايير القياسية نجد: اختبارات الارتباط الذاتي، اختبارات التعدد الخطي، اختبارات عدم ثبات تجانس التباين وغيرها من المعايير.

IV. استخدامات النموذج (التنبؤ):

نقوم في هذه المرحلة باستعمال النماذج القياسية المحصل عليها في إجراء مختلف أنواع التقديرات والتوقعات لتطور الظواهر المدروسة في المستقبل، أي حساب قيم المتغير التابع في المستقبل بإعطاء قيم ما للمتغيرات المستقلة.

لكن تجدر الإشارة أنه قبل استخدام النموذج المقدر في التنبؤ يجب التأكد من جودة الآداء العام للنموذج المقدر، وبعدئذ يتم تطبيق النتائج التي تم التوصل إليها على الواقع واستخدامها في عملية التنبؤ.

2. الانحدار

2.1. تعريف تحليل الانحدار:

الانحدار هو أسلوب رياضي يستخدمه الاقتصاديون لتقدير العلاقات الكمية بين المتغيرات الاقتصادية، ويمكن لهذا الأسلوب أن يساعدنا بشكل كمي من إيجاد معادلة رياضية تربط بين متغير تابع ومتغير أو متغيرات مستقلة.

حيث أنه باستخدام تحليل الانحدار يمكن دراسة العوامل التي تؤثر في زيادة الطلب مثلا على المنتج وتحديد نموذجا (معادلة) رياضيا لهذه العلاقة. هذا النموذج يجعلنا قادرين على فهم طبيعة العلاقة وتحديد العوامل المؤثرة فعلا كما أنه يجعلنا قادرين على توقع تأثير تغير أي متغير من هذه المتغيرات المستقلة على المتغير التابع.

تجدر الإشارة أن كلمة الانحدار استخدمت لأول مرة بصيغتها الحاضرة من قبل عالم الوراثة البريطاني السير فرانسيس كالتون، فهو درس العلاقة بين أطول الأبناء مقارنة بأطوال آبائهم، فالآباء قصار القامة يميلون لإنجاب أبناء متوسط أطوالهم أعلى. بينما العكس في حالة الآباء طوال القامة بشكل غير اعتيادي، لذلك توصل العالم كالتون أن أطوال الأبناء لآباء طوال أو القصار تبدو كأنها تنحدر نحو المتوسط[12].

2.2. أهداف تحليل الانحدار:

يستخدم تحليل الانحدار كأسلوب إحصائي كمي في النواحي التالية[13]:

- دراسة العلاقة بين متغيرين على شكل علاقة دالية: $Y= f(x)$ والتي عن طريقها يمكن معرفة التغيير في أحد المتغيرين على أساس تأثيره بالمتغير الآخر. أو بعبارة أخرى توقع وتنبؤ سلوك المتغير التابع في ضوء تأثيره بالمتغير أو المتغيرات المستقلة.
- قياس مدى الارتباط الكلي بين المتغير التابع والمتغير أو المتغيرات المستقلة.
- تقدير نسبة تفسير كل متغير مستقل للاختلاف في المتغير التابع.
- إجراء سلسلة من الاختبارات لتأكيد أو نفي الفرضيات.

[12] ثروت محمد عبد المنعم، الانحدار، مكتبة الأنجلو مصرية، مصر، 2005، ص 2.
[13] طه حسين الزبيدي، مبادئ الإحصاء، دار غيداء للنشر والتوزيع،الأردن، 2013، ص 187.

2.3. النماذج الاقتصادية والقياسية:

يعد إنشاء نموذج اقتصادي هو الخطوة الأولى في أي تحليل اقتصادي وفي الغالب يتم تخطي هذه الخطوة لأنها تتطلب الكثير من الجهد الذهني. ولبدء أي تحليل اقتصادي يحتاج المحللون إلى إنشاء نموذج لظاهرة ما، يمكن أن يكون هذا النموذج من الاقتصاد الجزئي أو الاقتصاد الكلي أو من بعض المجالات أخرى.

ومن الضروري أنه عند صياغة النظرية بناء على الحدس وحده لا تكون بشكل صحيح، ومن هنا نؤكد أنه من الجيد دائما عند القيام ببحث أو عمل أكاديمي أو إجراء بعض الأبحاث حول موضوع ما يجب تحديد جميع المتغيرات ذات الصلة بالموضوع قيد الدراسة بشكل صحيح وبعد هذه المرحلة فإن الخطوة الموالية هي صياغة نموذج اقتصادي قياسي.

يقصد بالنموذج القياسي هو مجموعة من العلاقات بين المتغيرات الاقتصادية لتمثيل ظاهرة معينة بصورة خالية من التفاصيل والتعقيدات ولكنها ممثلة للواقع بهدف تعليلها أو التنبؤ بها والسيطرة عليها. وقد تكون من معادلة واحدة مثل دوال الطلب أو دوال العرض ويسمى عندئذ النموذج ذات المعادلات المفردة، أو من مجموعة من المعادلات وتسمى بالمعادلات الآنية كنموذج السوق[14].

2.4. أنواع نماذج الانحدار:

تتمثل أنواع نماذج الانحدار في:

- **النماذج البسيطة والمتعددة:**

➢ **نموذج الانحدار البسيط**: وهو يستخدم لدراسة العلاقة بين متغيرين فقط، احدهما يدعى المتغير المستقل والآخر المتغير التابع، حيث أن العلاقة بينهما يمكن أن تكون خطية أو غير خطية.

➢ **نموذج الانحدار المتعدد**: وهو الذي يحدد مقدار العلاقة بين المتغير التابع وعدد من المتغيرات المستقلة، ويكون النموذج المتعدد بدوره إما خطيا أو غير خطي.

[14] حسين بخيت، مرجع سبق ذكره، ص 7.

- **النماذج الساكنة والمتحركة**[15]:

- **النموذج الساكن**: والذي يشمل على متغيرات لا تحتوي على عنصر الوقت بشكل واضح وصريح، كما تستخدم هذه النماذج لأغراض بناء وشرح الظواهر الاقتصادية الرياضية.
- **النموذج الحركي**: وهو الذي يلعب فيه الوقت عنصرا هاما ودورا حيويا.

ودرجة الاختلاف بين النموذجين تكمن في مدى البساطة أو التعقيد المتعلقة بمراحل توصيف المنهجية أو الإجراءات الخاصة بكل نموذج.

2.5. مكونات النموذج القياسي:

المعادلات:

يتكون النموذج من مجموعة من المعادلات، والتي هي عبارة عن صيغ رياضية تعبر عن علاقة متغير بمتغير آخر، كما تسمى هذه الصيغ بالمعادلات الهيكلية لأنها توضح الهيكل الأساس للنموذج المراد بناؤه على شكل جسم أو هيكل، وتنقسم المعادلات الهيكلية إلى[16]:

المعادلات السلوكية: تصنف المعادلة بأنها معادلة سلوكية إذا كانت توضح علاقة دالية بين متغيرين أو أكثر، وتكون هذه العلاقة ناشئة أساسا من سلوك معين من جانب الأفراد أو من جانب العناصر المختلفة التي تؤثر على الدالة وتظهر ردود فعلهم نتيجة للتغيرات التي تحدث في بعض المتغيرات، ومن أمثلة المعادلات السلوكية، معادلات العرض والطلب التي تصنف السلوك الاقتصادي للمنتجين والمستهلكين.

المعادلات التعريفية: هي تلك المعادلة التي تعرف متغيرات معينة من خلال متغيرات أخرى وبطريقة محددة وبصورة تامة وتكون في شكل علاقة مساواة.

المعادلات المؤسسية: وتسمى المعادلات التنظيمية لأن مصدرها ليس النظرية الاقتصادية ولكنها تصف سلوكا معينا لظاهرة معينة وفقا للقيم الأخلاقية أو العرف أو القانون مثل الضرائب أو الزكاة أو الأوقاف أو الرسوم الجمركية.

---

[15] فارس عياد شاكر و عزت قناوي، مبادئ الاقتصاد القياسي والرياضي، دار العلم للنشر والتوزيع بالفيوم، مصر، 2006، ص9.

[16] محمد أحمد الأفندي، النظرية الاقتصادية الكلية والسياسية الاقتصادية الجزء الأول، مركز الكتاب الأكاديمي، 2020، الأردن، ص 19.

المعادلات الفنية: هي لمعادلات التي تصف العلاقات التقييمية بين المخرجات والمدخلات أو بصورة محددة بين الإنتاج وعناصر الإنتاج ومن أشهر الأمثلة على هذا النوع من المعادلات هو دالة إنتاج كوب دوجلاس.

المعادلات التوازنية: هي المعادلات التي تصف حالة التوازن أو الاستقرار للمتغير الاقتصادي ولا تعتبر هذه المعادلات معادلات تطابقية ولكنها تشبه المعادلات التعريفية، ولكي تسمى بمعادلة التوازن فلابد من نحقق شروط هذا التوازن[17].

المتغيرات:

إن المتغيرات في النموذج تمثل عناصر الظاهرة الاقتصادية، والتي تنطوي تحت ما يسمى بالمتغيرات التابعة والمتغيرات المستقلة، وهذه جميعها تنظم تحت ما يسمى بالمتغيرات الداخلية والمتغيرات الخارجية على التعاقب، فالمتغيرات الداخلية هي المتغيرات التابعة التي تحدد قيمتها من داخل النموذج ويمكن السيطرة عليها ومثال ذلك: متغيرات الطلب، العرض، الدخل، الاستهلاك، الإنتاج، المنفعة وغيرها، أما المتغيرات الخارجية فهي المتغيرات التي تحدد قيمتها من خارج النموذج ولا يمكن السيطرة عليها ومثال ذلك: متغيرات الأسعار.

وتنقسم المتغيرات عند قياسها إلى أربعة أنواع رئيسية، وهي[18]:

- **المتغيرات الإسمية:**

إن القيم الخاصة بالمتغير الإسمي عن بعضها البعض في النوعية لا في الكمية، ومن الممكن أن تكون التصنيفات عبارة عن الأنواع المختلفة لظاهرة ما، ويسمى مستوى القياس هنا القياس التصنيفي أو الإسمي، لأنه يتم تصنيف الأشياء إلى فئات على أساس تجانسها في خاصية أو صفة معينة، ومن أمثلة عن هذه المتغيرات: الجنس، الحالة الاجتماعية، الجنسية ، فصيلة الدم ومن غيرها من المتغيرات ومن أجل استعمال هذه المتغيرات في تكوين النماذج يتم منح أوزان لها مثل 0 للإناث و 1 للذكور.

---

[17] علي مجيد الحمادي، التشابك الاقتصادي بين النظرية والتطبيق، دار اليازوري للنشر والتوزيع الأردن، 2017، ص 27.
[18] سمير خالد الصافي، مرجع سبق ذكره، ص 19.

- **المتغيرات الترتيبية:**

المتغيرات الترتيبية تقع في مستوى أعلى من المتغيرات في المستوى الاسمي، بالإضافة إلى خواص القياس الاسمي فإن القياس في هذا المستوى يسمح بالمفاضلة أي ترتيب القيم حسب سلم معين.

ومن أمثلة القياس الترتيبي نجد: المؤهل العلمي (ابتدائي، متوسط، ثانوي جامعي)، مستوى الدخل (متدن، متوسط، عال)، الرتبة العلمية (ليسانس، ماستر، دكتوراه).

- **المتغيرات الفترية:**

المتغيرات الفترية تقع في مستوى أعلى من المتغيرات في المستوى الرتبي، فبالإضافة إلى خواص القياس الإسمي والرتبي فإن القياس في هذا المستوى يتضمن خاصية تساوي المسافات بين الرتب، والمسافات المتساوية تدل على مقادير متساوية من الخاصية التي تم قياسها، ولذا يسمى في بعض الأحيان مقياس المسافة، والأرقام التي يتم استخدامها لفئات المتغير تدل على نوع المعدود ترتيبه، ومن أمثلة هذا النوع من القياس درجة الدرجة، ذكاء الطلبة...الخ.

- **المتغيرات النسبية:**

تأخذ المتغيرات النسبية مكانا أعلى من المتغيرات السابقة، فمستوى القياس النسبي يقع في أعلى مستويات القياس أو في قمتها، حيث يتضمن فضلا عن خصائص المستويات السابقة (تصنيف وترتيب ومسافات متساوية) خاصية النسبية وهي نسب الأرقام أو العناصر إلى بعضها إضافة إلى وجود الصفر الحقيقي المطلق، ومن أمثلة هذه المتغيرات السرعة، الوزن، الحجم، المسافة، الطول...إلخ.

الفصل الثاني : نموذج الانحدار البسيط

ذكرنا سابقا أن الخطوة الثانية بعد توصيف النموذج القياسي، هي تقدير معالم النموذج، وفي هذه الفصل سوف نتعرف على أبسط أنواع نماذج الانحدار وهو النموذج الخطي البسيط وتطبيق مختلف خطوات البحث في الاقتصاد القياسي عليه، كما أن دراسة هذا النموذج يشكل القاعدة الأساسية ونقطة الانطلاق نحو دراسة نماذج أكثر عمومية وواقعية.

1. تقديم وتقدير نموذج الانحدار الخطي البسيط

1.1. تعريف نموذج الانحدار الخطي البسيط:

يعد النموذج البسيط أبسط أشكال النماذج الرياضية، فهو يتضمن متغيرين فقط أحدهما متغير تفسيري ويرمز له بالرمز X_i والثاني متغير تابع يرمز له بالرمز Y_i، ويكون هذا النموذج خطيا إذا كانت العلاقة بين المتغيرين المذكورين معبر عنها في شكل معادلة خط مستقيم، ويعتبر نموذج الانحدار الخطي البسيط من الأساليب الإحصائية التي تستخدم في قياس العلاقة بين متغيرين على هيئة علاقة خطية دالية.

الصيغة الرياضية لنموذج الانحدار الخطي البسيط تكون على الشكل التالي:

$$Y_i = a + bx_i + e_i$$

والصيغة التقديرية للنموذج تكون على النحو التالي: $\widehat{Y_i} = \hat{a} + \hat{b}x_i$

حيث: Y_i : القيمة النظرية المتغير التابع.

$\widehat{Y_i}$: القيمة التنبؤية المحصل على بعد تقدير النموذج المقترح.

X_i : المتغير المستقل.

e_i : المتغير العشوائي والذي يمثل الفرق بين القيمة الحقيقة والتنبؤية: $e_i = Y_i - \widehat{Y_i}$، وتكون هذه القيمة ناجمة عن تأثير الأخطاء المرتكبة في إعداد نموذج الانحدار المقترح. ومن بين هذه الأخطاء يمكن أن نذكر ما يلي[1]:

- الخطأ في اختيار نوع معادلة التمثيل: إن مقدار الخطأ المرتكب في تقدير قيمة Y_i عن طريق $\widehat{Y_i}$ يتوقف كثيرا على صحة ودقة اختيار معادلة الانحدار المقترحة لتمثيل الظاهرة المدروسة.

[1] مكيد علي، الاقتصاد القياسي: دروس ومسائل محلولة، ط 2، ديوان المطبوعات الجامعية، الجزائر، 2011، ص 19.

- أخطاء القياس: وهي الأخطاء الممكن ارتكابها عند قياس قيم المؤشرات $(X_i . Y_i)$ التي تعبر عن تطور الظاهرة المدروسة والعوامل التي تتحكم فيها. هذه الأخطاء سوف تؤثر من خلال نموذج الانحدار المقترح، على قيم Y_i التقديرية.
- الأخطاء غير المفسرة: وهي أخطاء تنتج عن إهمال بعض العوامل (أساسية أو غير أساسية) المؤثرة في الظاهرة المدروسة وعند إبرازها في نموذج الانحدار المقترح. عدم تمثيل هذه العوامل في معادلة النموذج المقترح.

1.2. الفرضيات الأساسية لطريقة المربعات الصغرى:

وتتعلق تلك الفروض بتوزيع قيم المتغير العشوائي أو المعروف بحد الخطأ (e_i). وتعد تلك الفروض أمرا حيويا لتقديرات معلمات النموذج، وفيما يلي استعراض لتلك الفروض[2]:

1 –إن المتغير العشوائي (e_i) هو متغير تعتمد قيمته في أية فترة زمنية على عامل الصدفة، فقد تكون أكبر أو أصغر أو مساوية إلى الصفر، إلا أنها في المتوسط تساوي الصفر أي $E(ei) = 0$ ويمكن توضيح ذلك كما يلي[3]:

$$Y_i = \alpha + \beta X_i + e_i$$

$$e_i = Y_i - \widehat{Y_i}$$

حيث $\widehat{Y_i}$ هي المعادلة المقدرة وتساوي:

$$\widehat{Y_i} = \hat{a} + \widehat{B} X_i \qquad (2)$$

$$e_i = Y_i - \left(\hat{\alpha} + \hat{B} X_i\right) = Y_i - \hat{\alpha} - \hat{\beta} X_i$$

بإدخال رمز $\sum$ إلى الطرفين، نحصل على:

$$\sum e_i = \sum (Y_i - \hat{a} - \widehat{B} X_i) \qquad (3)$$

نعلم أن مقدر $\hat{a}$ هو $\hat{a} = \overline{Y} - \widehat{B}\overline{X}$

نعوض في المعادلة رقم (3) عن المقدر $\hat{a}$ نجد:

$$\sum e_i = \sum (Y_i - \left(\overline{Y} - \widehat{B}\overline{X}\right) - \widehat{B} X_i)$$

$$\sum e_i = \sum (Y_i - \overline{Y} + \widehat{B}\overline{X} - \widehat{B} X_i)$$

$$\sum e_i = \sum Y_i - n\overline{Y} + \widehat{B} n \overline{X} - \widehat{B} \sum X_i$$

---

[2] Badi H. Baltagi, Econometrics, Center for Policy Research Syracuse University Syracuse, USA, 2008, P50.

[3] محمد غرس الدين، ياسر محمد جاد الله، مدخل إلى الاقتصاد القياسي، القاهرة، 2005، ص 35.

بقسمة طرفي المعادلة على n، نجد:

$$\frac{\sum e_i}{n} = \frac{\sum Y_i}{n} - \overline{Y} + \widehat{B}\overline{X} - \widehat{B}\frac{\sum X_i}{n}$$

$$E(e_i) = \overline{Y} - \overline{Y} + \widehat{B}\overline{X} - \widehat{B}\overline{X}$$

2 -إن تباين المتغير العشوائي (حد الخطأ)، حول الوسط الحسابي مقدار ثابت عند كل قيمة من قيم (X_i) أي:

$$Var(e_i) = E\left[e_i - E(e_i)\right]^2 = \delta^2$$

3 -إن المتغير العشوائي (e_i) يتوزع توزيعا طبيعيا حول القيمة المتوقعة أو حول الوسط الحسابي المساوي للصفر عند كل قيمة من قيم المتغير المستقل x أي يشكل جرس، ويمكن التعبير عن ذلك:

$$e_i \rightarrow N(0, \delta^2)$$

4 -أن قيم (e_i) غير مرتبطة بأي من المتغيرات المستقلة، أي انعدام التباين المشترك بين (X_i)و(e_i)

$$\operatorname{cov}(e_i, X_i) = 0$$

5 -القيم المختلفة للمتغير العشوائي (e_i)تكون مستقلة عن بعضها البعض بعبارة أخرى التباين المشترك لـ (e_i)و(e_j) مساوية للصفر، وعليه فإن قيمة العنصر العشوائي في أي فترة لا تعتمد على قيمته في فترة أخرى أي:

$$COV(e_i, e_j) = E(e_i, e_j) = 0 \qquad i, j = 1, 2, 3, \ldots, n, (i \neq j)$$

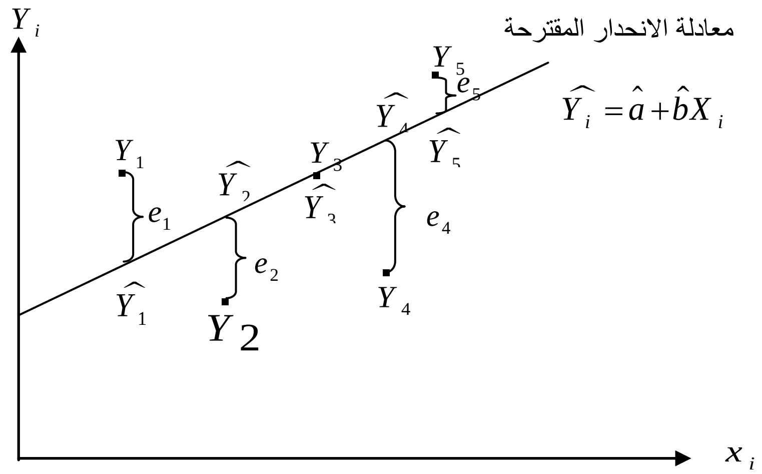
6 -انعدام العلاقة بين المتغيرات المستقلة وفي حالة وجود علاقة قوية بينهما تظهر مشكلة تسمى الارتباط الخطي المتعدد.

1.3. طرق تقدير معاملات النموذج:

إن العلاقة الخطية البسيطة بين المتغيرين X_i و Y_i هي العلاقة المستقيمة التي يعبر عنها بواسطة معادلة مستقيم من الشكل: $Y_i = \alpha + \beta X_i + e_i$

ومن أجل إمكانية تقدير هذه المعادلة يجب أولا تمثيل المعطيات الخاصة بتطور المؤشرين بيانيا، وهذا من أجل التعرف على طبيعة الاتجاه العام لتطور الظاهرة المدروسة.

إذا كان شكل الانتشار يشبه أو يقارب شكل خط مستقيم، عندها نقترح تمثيل تلك العلاقة بمعادلة مستقيم، أما إذا كان شكل الانتشار يختلف عن خط المستقيم فإننا نقترح في هذه الحالة معادلة أخرى غير مستقيمة لتمثيل تلك العلاقة.



تختلف عادة القيم التقديرية عن القيم الفعلية، مقدار هذا الاختلاف يرمز له بالرمز (e_i) ويسمى بالخطأ المرتكب في تقدير قيم Y، أي أن $e_i = Y_i - \widehat{Y_i}$ ، وتكون ناجمة عن تأثير الأخطاء المرتكبة في إعداد نموذج الانحدار المقترح.

تقدير النموذج الخطي البسيط بطريقة المربعات الصغرى:

إن الهدف الأساسي من تحليل الانحدار هو حساب قيم معاملات النموذج α وβ ، بحيث أن القوة التفسيرية للنموذج أكبر ما يمكن. حيث أن تعظيم القوة التفسيرية للنموذج إنما هي في نفس الوقت تصغير (تقليل) مجموع مربعات الأخطاء (المتغير العشوائي).

وبالرغم من وجود العديد من الطرق للحصول على تقديرات للمعلمتين α وβ ، إلا أن أفضل هذه الطرق هي طريقة المربعات الصغرى العادية والتي ترجع لعالم الرياضيات كارل فريدريكس[4].

إن طريقة المربعات الصغرى العادية تعتمد أن يكون مجموع مربعات الخطأ أصغر ما يمكن:

$$\sum e_i^{\,2} \rightarrow Min$$

[4] Humberto Barreto, Frank Howland, op.cit, P 91.

التعليل:

بما أن قيم (e_i) بعضها موجب وبعضها سالب أو يساوي الصفر، أي يمكن أن نحصل على نتائج خاطئة، لأن القيم الموجبة يمكن أن تلغي القيم السالبة، ومن أجل معالجة هذا الخطأ بفضل أخذ قيم (e_i) بقيمها الموجبة فقط $|e_i|$.

إن إيجاد النهاية الصغرى لمجموع القيم بالقيمة المطلقة يعقد الحساب نوعا ما، ومن الأفضل أن نأخذ مربعات الفروق $\sum e_i^{\,2}$ أي أن: $\sum e_i^{\,2} \to Min$

وإذا لم يتحقق هذا الشرط فإن المنحنى المقترح هو منحنى سيء التمثيل، والمنحنى الذي يتحقق عنده الشرط السابق الذي يصل عنده $\sum e_i^{\,2}$ إلى نهايته الصغرى يسمى بمنحنيات المربعات الصغرى.

ولتقليل الأخطاء إلى أدنى حد، نقوم بالاشتقاق الجزئي لمجموع مربعات البواقي $\sum e_i^{\,2}$ بالنسبة α وβ كما يلي[5]:

$$\frac{\partial \sum e_i^2}{\partial \hat{a}} = 0 \Rightarrow \frac{\partial \sum (Y_i - \hat{a} - \hat{\beta} X_i)^2}{\partial \hat{a}} 0 \Rightarrow -2\sum (Y_i - \hat{a} - \hat{\beta} X_i) = 0 \qquad (10)$$

$$\frac{\partial \sum e_i^2}{\partial \hat{\beta}} = 0 \Rightarrow \frac{\partial \sum (Y_i - \hat{a} - \hat{\beta} X_i)^2}{\partial \hat{\beta}} 0 \Rightarrow -2\sum X_i (Y_i - \hat{a} - \hat{\beta} X_i) = 0 \qquad (11)$$

من خلال المعادلة رقم (10) و المعادلة رقم (11)، يمكن الحصول على المعادلتين الطبيعيتين لخط الانحدار كما يلي:

بضرب المعادلتين (10) و (11) في 1/2 - وإدخال المجموع نحصل على:

$$\sum Y_i = n\hat{a} + \hat{\beta} \sum X_i \qquad (12)$$

المعادلة رقم: (12) تعبر عن ما يسمى بالمعادلة الطبيعية الأولى.

$$\sum X_i Y_i = \hat{a} \sum X_i + \hat{\beta} \sum X_i^{\,2} \qquad (13)$$

المعادلة رقم: (13) تعبر عن ما يسمى بالمعادلة الطبيعية الثانية.

كما تتميز طريقة المربعات الصغرى بالخصائص التالية:

- مجموع انحرافات قيم الأخطاء عن خط الانحدار يساوي الصفر، أي أن مجموع الانحرافات الموجبة (أعلى خط الانحدار) يساوي مجموع الانحرافات السالبة (أسفل خط الانحدار) .

[5] G. S. Maddala, Kajal Lahiri, op.cit, P 68.

ويترتب عن هذه الخاصية ما يلي:

$$\sum e_i = \sum Y_i - \sum \widehat{Y}_i = 0$$

- مجموع مربعات الانحرافات أقل ما يمكن. وهذا هو السبب لتسمية هذه الطريقة المربعات الصغرى أي أن:

$$\sum e_i^2 = \sum \left(Y_i - \widehat{Y}_i\right)^2$$

هناك ثلاثة طرق لتقدير النموذج وهي[6]:

➢ طريقة الحذف والتعويض:

بالاعتماد على المعادلتين الطبيعيتين للمربعات الصغرى يمكن الحصول على قيم $\widehat{\beta}$و$\hat{a}$ كالتالي:

يمكن استخراج قيمة $\hat{a}$ بقسمة المعادلة رقم (12) على n، فنجد[7]:

$$\sum Y_i = n\hat{a} + \widehat{\beta}\sum X_i \qquad \Rightarrow \hat{a} = \frac{\sum Y_i}{n} - \widehat{B}\frac{\sum X_i}{n} \qquad \Rightarrow \hat{a} = \overline{Y} - \widehat{B}\overline{X}$$

ولاستخراج قيمة $\hat{b}$ نقوم بضرب المعادلة (12) بـ $\sum X_i$ والمعادلة (13) بـ n فنحصل على:

$$\sum Y_i \sum X_i = n\hat{a}\sum X_i + \widehat{\beta}\left(\sum X_i\right)^2 \qquad (14)$$

$$n\sum X_i Y_i = n\hat{a}\sum X_i + n\widehat{\beta}\sum X_i^{\,2} \qquad (15)$$

بطرح المعادلة رقم (14) من المعادلة رقم (15) نجد:

$$n\sum X_i Y_i - \sum Y_i \sum X_i = n\hat{a}\sum X_i + n\widehat{\beta}\sum X_i^{\,2} - n\hat{a}\sum X_i - \widehat{\beta}\left(\sum X_i\right)^2$$

$$n\sum X_i Y_i - \sum Y_i \sum X_i = \widehat{\beta}(n\sum X_i{}^2{}_i - \left(\sum X_i\right)^2) \qquad (16)$$

ثم نستخرج قيمة $\widehat{\beta}$ كما يلي:

$$\widehat{\beta} = \frac{n\sum X_i Y_i - \sum Y_i \sum X_i}{n\sum X_i^{\,2} - \left(\sum X_i\right)^2}$$

➢ طريقة المحددات:

ويمكن الحصول على قيم $\hat{a}$ و $\widehat{\beta}$ باعتماد المحددات وذلك بإعادة كتابة المعادلتين الطبيعيتين في صيغة مصفوفة على النحو التالي:

[6] عدنان داود محمد العذاري، الاقتصاد القياسي نظرية وحلول –تطبيق باستخدام برنامج Minitab,Relase 14، دار الجرير للنشر والتوزيع، الأردن، 2010، ص 29.

[7] Christopher Doughert, Introduction to Econometrics, Oxford University Press, 5th Edition, USA, 2016, P 94.

$$\sum_i Y_i = na + \hat{\beta}\sum X_{1i}$$

$$\sum_i (Y_i X_{1i}) = a\sum_i X_{1i} + \hat{\beta}\sum_i X_{1i}^{\ 2}$$

$$\begin{bmatrix} \sum Y_i \\ \sum Y_i X_{1i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n & \sum X_{1i} \\ \sum X_{1i} & \sum X_{1i}^2 \end{bmatrix}$$

ولتقدير $\hat{a}$ و $\hat{\beta}$ ينبغي تكوين المحددات الآتية:

$$|D| = \begin{vmatrix} n & \sum X_{1i} \\ \sum X_{1i} & \sum X_{1i}^2 \end{vmatrix} = n.\sum X_{1i}^2 - (\sum X_{1i})^2$$

$$|D_a| = \begin{vmatrix} \sum Y_i & \sum X_{1i} \\ \sum X_{1i} Y_i & \sum X_{1i}^2 \end{vmatrix} = \sum Y_i.\sum X_{1i}^2 - \sum X_{1i}.\sum X_{1i} Y_i$$

$$|D_B| = \begin{vmatrix} n & \sum Y_1 \\ \sum X_{1i} & \sum X_{1i} Y_i \end{vmatrix} = n.\sum X_{1i} Y_i - \sum Y_1.\sum X_{1i}$$

$$\hat{a} = \frac{|D_a|}{|D|} = \frac{\begin{vmatrix} \sum Y_i & \sum X_{1i} \\ \sum X_{1i} Y_i & \sum X_{1i}^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} n & \sum X_{1i} \\ \sum X_{1i} & \sum X_{1i}^2 \end{vmatrix}} = \frac{\sum Y_i.\sum X_{1i}^2 - \sum X_{1i}.\sum X_{1i} Y_i}{n.\sum X_{1i}^2 - (\sum X_{1i})^2}$$

$$\hat{\beta} = \frac{|D_B|}{|D|} = \frac{\begin{vmatrix} n & \sum Y_1 \\ \sum X_{1i} & \sum X_{1i} Y_i \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} n & \sum X_{1i} \\ \sum X_{1i} & \sum X_{1i}^2 \end{vmatrix}} = \frac{n.\sum X_{1i} Y_i - \sum Y_1.\sum X_{1i}}{n.\sum X_{1i}^2 - (\sum X_{1i})^2}$$

- **طريقة التقدير حول نقطة المتوسط:**

كما يمكن تقدير $\hat{a}$ و $\hat{\beta}$ بواسطة انحرافات المتغيرين X_i و Y_i عن وسطهما الحسابي $\overline{X}$ و $\overline{Y}$ باستخدام فكرة البواقي (e_i)فبقسمة المعادلة (12) على n نحصل على:[8]

$$\sum Y_i = n\hat{a} + \hat{\beta}\sum X_i \qquad \Rightarrow \hat{a} = \frac{\sum Y_i}{n} - \hat{\beta}\frac{\sum X_i}{n} \qquad \Rightarrow \quad \hat{a} = \overline{Y} - \hat{\beta}\overline{X} \quad (20)$$

ولإيجاد $\hat{\beta}$ ، نعود إلى معادلة الخط المستقيم التقديرية حيث:

$$\widehat{Y_i} = \hat{a} + \hat{\beta}X_i \qquad (21)$$

[8] حسين علي بخيت، فتح الله سحر، مرجع سبق ذكره، ص: ص 45-47.

بطرح المعادلة (20) من المعادلة (21) نجد:

$$\widehat{Y_i} - \overline{Y} = \hat{a} + \widehat{\beta} X_i - \hat{a} - \widehat{\beta}\overline{X}$$
$$\widehat{Y_i} - \overline{Y} = \widehat{\beta} X_i - \widehat{\beta}\overline{X} = \widehat{\beta}\left(X_i - \overline{X}\right)$$

يمكن التعويض عن الانحرافات $\widehat{y_i} = (\widehat{Y_i} - \overline{Y})$ و $\widehat{x_i} = (X_i - \overline{X})$ كما يلي:

$$\widehat{y_i} = \widehat{\beta} x_i \quad (23)$$

ولدينا:

$$e_i = y_i - \widehat{y} = y_i - \widehat{\beta} x_i \quad (24)$$

بتربيع الطرفين وإدخال رمز $\sum$ إلى الطرفين، نحصل على:

$$\sum e_i^2 = \sum (y_i - \widehat{y})^2 = \sum (y_i - \widehat{\beta} x_i)^2 \quad (25)$$

بإيجاد المشتقة الجزئية لـ $\widehat{\beta}$ نجد:

$$\frac{\partial \sum e_i^2}{\partial \widehat{\beta}} = 0 \Rightarrow \frac{\partial \sum (y_i - \widehat{\beta} x_i)^2}{\partial \widehat{\beta}} 0 \Rightarrow -2\sum x_i (y_i - \widehat{\beta} x_i) = 0$$

بضرب طرفي المعادلة في 1/2 - وإدخال المجموع نحصل على[9]:

$$\sum x_i (y_i - \widehat{\beta} x_i) = 0$$
$$\sum x_i y_i - \widehat{\beta} \sum x_i^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \sum x_i y_i = \widehat{\beta} \sum x_i^2$$
$$\widehat{\beta} = \frac{\sum x_i y_i}{\sum x_i^2} \qquad (26)$$

مثـال 1:

يمثل الجدول التالي البيانات الإحصائية التي تم تجميعها عن الكميات المطلوبة (Y_i) من السلعة عند كل سعر (X_1).

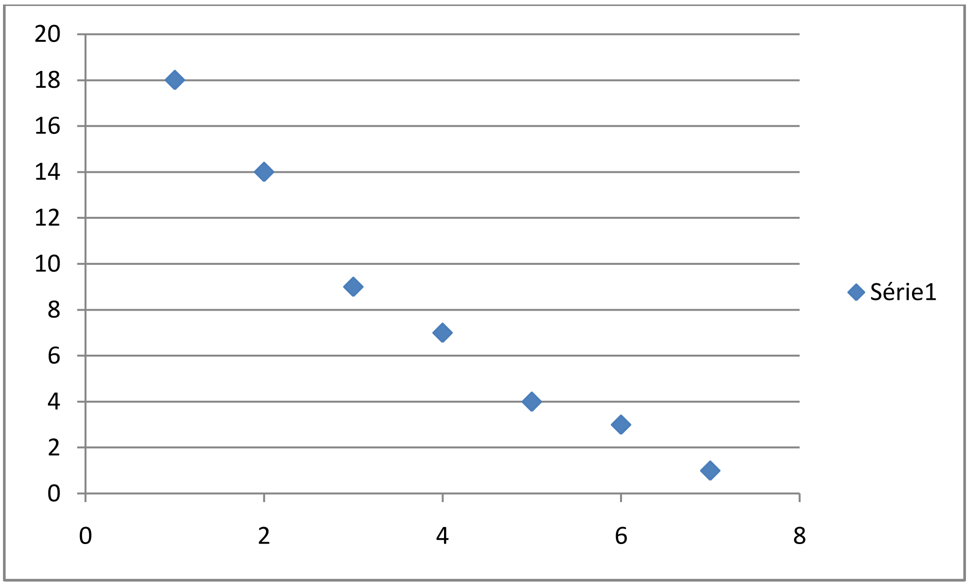
n	1	2	3	4	5	6	7
Y_i	18	14	9	7	4	3	1
X_1	1	2	3	4	5	6	7

المطلوب: قدر معادلة انحدار الكمية المطلوبة على السلعة باستخدام مختلف الطرق؟

[9] Humberto Barreto, Frank Howland, op.cit, P 93.

الحــل:

1- شكل الانتشار



من شكل انتشار أزواج القيم (X.Y) نلاحظ أن الاتجاه العام يمثل علاقة مستقيمة (خطية)، لذلك نعتمد في تمثيلها على المعادلة الخطية للمستقيم: $\widehat{Y_i} = \hat{a} + \hat{\beta} X_i$

N	X	Y	X^2	XY	$x=(X-\bar{X})$	$y=(Y-\bar{Y})$	$x^2=(X-\bar{X})^2$	Xy
1	1	18	1	18	-3	10	9	-30
2	2	14	4	28	-2	6	4	-12
3	3	9	9	27	-1	1	1	-1
4	4	7	16	28	0	-1	0	0
5	5	4	25	20	1	-4	1	-4
6	6	3	36	18	2	-5	4	-10
7	7	1	49	7	3	-7	9	-21
المجموع	28	56	140	146	0	0	28	-78
المتوسط	4	8	20	20,8571429	0	0	4	-11,1428571

- **طريقة الحذف والتعويض:**

$$\hat{\beta} = \frac{n\sum X_i Y_i - \sum Y_i \sum X_i}{n\sum X_i^2 - (\sum X_i)^2} = \frac{7*146 - 28*56}{7*140 - 28^2} = -2.7857$$

$$\hat{a} = \bar{Y} - \hat{B}\bar{X} = 8 - (-2.7851*4) = 19.1428$$

$$\widehat{Y_i} = 19.1428 - 2.7857 X_i$$

- **طريقة المحددات:**

$$\hat{a}=\frac{|D_a|}{|D|}=\frac{\begin{vmatrix}\sum Y_i & \sum X_{1i}\\ \sum X_{1i}Y_i & \sum X_{1i}^2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}n & \sum X_{1i}\\ \sum X_{1i} & \sum X_{1i}^2\end{vmatrix}}=\frac{\sum Y_i.\sum X_{1i}^2-\sum X_{1i}.\sum X_{1i}Y_i}{n.\sum X_{1i}^2-(\sum X_{1i})^2}=\frac{56*140-28*146}{7*140-(28)^2}=19.1428$$

$$\hat{\beta}=\frac{|D_B|}{|D|}=\frac{\begin{vmatrix}n & \sum Y_1\\ \sum X_{1i} & \sum X_{1i}Y_i\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}n & \sum X_{1i}\\ \sum X_{1i} & \sum X_{1i}^2\end{vmatrix}}=\frac{n.\sum X_{1i}Y_i-\sum Y_1.\sum X_{1i}}{n.\sum X_{1i}^2-(\sum X_{1i})^2}=\frac{7*146-56*28}{7*140-(28)^2}=-2.7857$$

$$\widehat{Y_i}=19.1428-2.7857X_i$$

- **طريقة التقدير حول نقطة المتوسط:**

$$\widehat{\beta}=\frac{\sum x_i y_i}{\sum x_i^2}=\frac{-78}{28}=-2.7857$$

$$\hat{a}=\overline{Y}-\widehat{B}\overline{X}=8-(-2.7851*4)=19.1428$$

$$\widehat{Y_i}=19.1428-2.7857X_i$$

1.4. خصائص مقدرات طريقة المربعات الصغرى:

إذا توافرت الفروض السابقة فإن المقدرات المتحصل عليها باستخدام طريقة المربعات الصغرى تتميز بالخواص التالية[10]:

➢ **الخاصية الخطية:**

يعتبر المقدران $\hat{a}$ و $\hat{\beta}$ خطيان وذلك لأنه يمكن وصف أو كتابة كل منهما كدالة خطية أو ترتيب خطي من قيم المتغير التابع Y_i.

بالنسبة للمعلمة $\hat{\beta}$:

$$\hat{\beta} = K_1Y_1 + K_2Y_2 + K_3Y_3 + \ldots\ldots + K_nY_n = \sum K_iY_i$$

لدينا:

$$y_i = \left(Y_i - \overline{Y}\right) \qquad \hat{\beta} = \frac{\sum x_i y_i}{\sum x_i^2}$$

بتعويض قيمة y_i في القيمة المقدرة لـ $\hat{\beta}$ نجد:

$$\hat{\beta} = \frac{\sum x_i y_i}{\sum x_i^2} = \frac{\sum x_i\left(Y_i - \overline{Y}\right)}{\sum x_i^2} = \frac{\sum x_i\left(Y_i\right)}{\sum x_i^2} - \frac{\sum x_i\left(\overline{Y}\right)}{\sum x_i^2}$$

بما أن $\sum x_i = \sum\left(X_i - \overline{X}\right) = 0$ فإن $\dfrac{\sum x_i\left(\overline{Y}\right)}{\sum x_i^2} = 0$

ومنه: $$\hat{\beta} = \frac{\sum x_i\left(Y_i\right)}{\sum x_i^2} = \sum\left(\frac{x}{\sum x_i^2}Y_i\right)$$

ولما كانت قيم x ثابتة نجد أن $\dfrac{x}{\sum x_i^2}$ هي مقادير ثابتة يمكن أن نرمز لها بالرمز K وهي ثابتة أي:

$$\hat{\beta} = \sum K_iY_i$$

الخصائص الفرعية:

- **مجموع الأوزان يساوي الصفر:** أي أن $\sum K_i = 0$

لدينا: $K = \dfrac{x_i}{\sum x_i^2}$

[10] تومي صالح، مدخل لنظرية القياس الاقتصادي: دراسة نظرية مدعمة بأمثلة وتمارين، ديوان المطبوعات الجامعية، الجزء الأول، ط 2، الجزائر، 2011، ص 39

وبإدخال المجموع نجد: $\sum K_i = \sum \frac{x}{\sum x_i^2}$

وبما أن $\sum x_i = \left(X_i - \overline{X}\right) = 0$ فإن $\sum K_i = 0$

- **مجموع حاصل الضرب للأوزان في المتغير المستقل يساوي الواحد:**

أي أن: $\sum K_i X_i = \sum K_i x_i = 1$

لدينا:

$$\sum K_i x_i = \sum K_i \left(X_i - \overline{X}\right) = \sum K_i X_i - \overline{X} \sum K_i$$

بما أن: $\sum K_i = 0$ فإن: $\sum K_i X_i = \sum K_i x_i$

نعلم أن: $K = \frac{x_i}{\sum x_i^2}$

وبالتعويض نجد: $\sum K_i x_i = \sum \frac{x_i}{\sum x_i^2} x_i = \frac{\sum x_i^2}{\sum x_i^2} = 1$

ومنه: $\sum K_i X_i = \sum K_i x_i = 1$

- **مجموع مربعات الأوزان يساوي معكوس مجموع مربعات انحرافات المتغير المستقل:**

أي أن : $\sum K_i^2 = \frac{1}{\sum x_i^2}$

$$\sum K_i^2 = \frac{1}{\sum x_i^2} = \frac{1}{\sum \left(X_i - \overline{X}\right)^2}$$

نعلم أن:

$$K = \frac{x_i}{\sum x_i^2} = \frac{\left(X_i - \overline{X}\right)}{\sum \left(X_i - \overline{X}\right)^2}$$

وعند إدخال التربيع والتجميع نجد:

$$\sum K_i^2 = \sum \left(\frac{x_i}{\sum x_i}\right)^2 = \frac{\sum \left(X_i - \overline{X}\right)^2}{(\sum \left(X_i - \overline{X}\right)^2)^2} = \frac{1}{\sum \left(X_i - \overline{X}\right)^2} = \frac{1}{\sum x_i^2}$$

ملاحظة: بنفس الطريقة يمكن إثبات أن المعلمة $\hat{a}$ هي دالة خطية من قيم المتغير Y.

➢ خاصية عدم التحيز[11]:

بالنسبة للمعلمة $\widehat{\beta}$:

يقصد بعدم التحيز هو أن يكون الفرق بين القيمة المتوقعة للمقدر $\widehat{\beta}$ والقيمة الحقيقية للمجتمع الإحصائي يساوي الصفر، أي: $E(\widehat{\beta})-\beta=0$

البرهان:

$$\widehat{\beta}=\sum K_i Y_i$$

لدينا معادلة الخط المستقيم: $Y_i=\alpha+\beta X_i+e_i$

وبتعويض قيمة $\widehat{\beta}$ في المعادلة نجد: $\widehat{\beta}=\sum K_i\left(\alpha+\beta X_i+e_i\right)$

وبالنشر والتبسيط نجد: $\widehat{\beta}=\sum(K_i\alpha+\beta K_i X_i+K_i e_i)$

$$\widehat{\beta}=\alpha\sum K_i+\beta\sum K_i X_i+\sum K_i e_i$$

وباستخدام شرط توزيع الأوزان نجد أن: $\sum K_i=0 \qquad \sum X_i X_i=1$

$$\widehat{\beta}=\beta+\sum K_i e_i$$

وبأخذ التوقع الرياضي لطرفي المعادلة نجد: $E(\widehat{\beta})=\beta+\sum K_i E(e_i)$

نعلم أن: $E(e_i)=0$ ومنه: $K_i E(e_i)=0$

ومنه: $E(\widehat{\beta})=\beta$

أي أن المعلمة $\widehat{\beta}$ هو تقدير غير متحيز للقيمة الأصلية β .

بالنسبة للمعلمة $\widehat{\alpha}$:

لدينا معادلة الخط المستقيم:

$$Y_i=\alpha+\beta X_i+e_i \Rightarrow \overline{Y}=\alpha+\beta\overline{X}+\overline{e} \qquad (30)$$

$$\widehat{Y_i}=\hat{a}+\widehat{\beta}X_i \qquad \Rightarrow \hat{a}=\overline{Y}-\widehat{\beta}\overline{X} \qquad (31)$$

بتعويض قيمة $\overline{Y}$ بقيمتها في المعادلة رقم (31) نجد:

$$\hat{a}=\left(\alpha+\beta\overline{X}+\overline{e}\right)-\widehat{\beta}\overline{X}$$

$$\hat{a}-\alpha=\overline{e}-(\widehat{\beta}-\beta)\overline{X}$$

---

[11] Jeffrey Wooldridge, Introduction à l'économétrie: Une approche moderne, 2 édition, deboeck supérieur, Bruxelles, 2018, P73.

نعلم أن: $\widehat{\beta} = \beta + \sum K_i e_i$

ومنه: $\widehat{\beta} - \beta = \sum K_i e_i$

وبالتعويض نجد: $\hat{a} - \alpha = \bar{e} - \sum K_i e_i \overline{X}$

$$\hat{a} - \alpha = \frac{\sum e_i}{n} - \sum K_i e_i \overline{X}$$

$$= \sum (\frac{e_i}{n} - K_i e_i \overline{X})$$

$$= \sum e_i (\frac{1}{n} - K_i \overline{X})$$

نضع: $W_i = \frac{1}{n} - K_i \overline{X}$

ومنه: $\hat{a} - \alpha = \sum W_i e_i$

بإدخال التوقع الرياضي نجد: $E\left(\hat{a}\right) - \alpha = 0$

لأن: $E(e_i) = 0$ و $E\left(W_i e_i\right) = 0$

➢ خاصية أفضل المقدرات (أفضل تباين):

تتميز مقدرات المربعات الصغرى بأن لها أقل تباين بالنسبة لجميع المقدرات الخطية وغير المتحيزة، وتكون تتميز بالكفاءة إذا تحقق الشرط التالي[12]:

$$\lim_{n \to \infty} \operatorname{var}\left(\widehat{\beta}\right) = 0$$

$$\lim_{n \to \infty} \operatorname{var}\left(\hat{a}\right) = 0$$

1.5. حساب التباينات[13]:

➢ تباين المعلمة $\widehat{\beta}$:

نذكر أن المقدار $(\widehat{\beta} - \beta)$ يكتب على التالي: $\widehat{\beta} - \beta = \sum K_i e_i$

حيث أن: $K = \frac{x_i}{\sum x_i^2}$

---

[12] PHILIPPE Casin, Econométrie Méthode et applications avec Eviews, Edition TECHNIP,Paris, 2009,P 76.

[13] Virginie Delsart, Arnaud Rys, Nicolas Vaneecloo, Méthodes Statistiques de L'économie Et de la Gestion: Économétrie, théorie et application, Septentrion Presses Universitaires, France, 2009 ; P 56.

وعليه بتربيع طرفي المعادلة نجد:

$$\left(\widehat{\beta}-\beta\right)^2=\left(\sum K_i e_i\right)^2=\sum K_i{}^2 e_i{}^2+2\sum e_i e_j{}' k_i k_j{}'$$

وبإدخال التوقع الرياضي على طرفي المعادلة نجد:

$$E\left(\widehat{\beta}-\beta\right)^2=\sum K_i{}^2 E(e_i{}^2)+2\sum E(e_i e_j{}')k_i k_j{}'$$

نعلم أن: $E(e_i)=0 \quad E(e_i e_j{}')=0 \qquad \mathrm{E}\left(\mathrm{e_i}\right)^2=\delta_{e_i}{}^2$

ومنه:

$$Var\left(\widehat{\beta}\right)=E\left(\widehat{\beta}-\beta\right)^2=\sum K_i{}^2\delta_{e_i}{}^2$$

نعلم أن: $\sum K_i{}^2=\dfrac{1}{\sum x_i{}^2}$

ومنه: $Var\left(\widehat{\beta}\right)=E\left(\widehat{\beta}-\beta\right)^2=\dfrac{\delta_{e_i}{}^2}{\sum x_i{}^2}$

- **تباين المعلمة** $\hat{a}$:

نذكر أن المقدار $\left(\hat{a}-\alpha\right)$ يكتب على التالي: $\hat{a}-\alpha=\sum W_i e_i$

حيث: $W_i=\dfrac{1}{n}-K_i\overline{X}$

بتربيع طرفي المعادلة نجد:

$$\left(\hat{a}-a\right)^2=\left(\sum w_i e_i\right)^2=\sum w_i{}^2 e_i{}^2+2\sum e_i e_j{}' w_i w_j{}'$$

وبإدخال التوقع الرياضي على طرفي المعادلة نجد:

$$E\left(\hat{a}-a\right)^2=\sum w_i{}^2 E(e_i{}^2)+2\sum E(e_i e_j{}')w_i w_j{}'$$

نعلم أن:

$$E(e_i)=0$$
$$E(e_i e_j{}')=0$$
$$\mathrm{E}\left(\mathrm{e_i}\right)^2=\delta_{e_i}{}^2$$

ومنه:

$$Var\left(\hat{a}\right)=E\left(\hat{a}-a\right)^2=\sum w_i{}^2\delta_{e_i}{}^2$$

لدينا: $W_i=\dfrac{1}{n}-K_i\overline{X}$

بتربيع طرفي المعادلة وإدخال المجموع نجد:

$$\sum W_i^{\,2} = \frac{1}{n} + \sum K_i^{\,2}\overline{X}^2$$

ومنه: $Var\left(\hat{a}\right) = E\left(\hat{a} - a\right)^2 = \left(\frac{1}{n} + \sum K_i^{\,2}\overline{X}^2\right)\delta_{e_i}^{\,2}$

وبالتبسيط نجد:

$$Var\left(\hat{a}\right) = \left(\frac{\delta_{e_i}^{\,2}}{n} + Var\left(\hat{\beta}\right)\overline{X}^2\right)$$

➢ **تباين الأخطاء** $\delta_{e_i}^{\,2}$:

والذي يحسب وفق العلاقة التالية[14]: $\delta_{e_i}^{\,2} = \frac{\sum e_i^{\,2}}{n-2}$

القيمة التي في البسط تعبر عن مجموع البواقي، حيث: $\sum e_i^{\,2} = \sum (Y_i - \widehat{Y})$

أما n-2 فهي درجة الحرية.

مثال2 : بالرجوع للمثال السابق سنقوم بحساب التباينات للمعلمات المقدرة.

لدينا: $\widehat{Y_i} = 19.1428 - 2.7857 X_i$

N	$\widehat{Y}$	$e = Y - \widehat{Y}$	$e^2 = (Y - \widehat{Y})^2$	$\widehat{Y} - \overline{Y}$	$(\widehat{Y} - \overline{Y})^2$
1	16,35714286	1,642857143	2,69898	8,357143	69,84184
2	13,57142857	0,428571429	0,183673	5,571429	31,04082
3	10,78571429	-1,78571429	3,188776	2,785714	7,760204
4	8	-1	1	0	0
5	5,214285714	-1,21428571	1,47449	-2,78571	7,760204
6	2,428571429	0,571428571	0,326531	-5,57143	31,04082
7	-0,357142857	1,357142857	1,841837	-8,35714	69,84184
المجموع	**56**	**1,77636E-15**	**10,71429**		**217,2857**

➢ **تباين الخطأ العشوائي**: $\delta_{e_i}^{\,2} = \frac{\sum e_i^{\,2}}{n-2} = \frac{10.7142}{5} = 2.1428$

➢ **تباين المعلمة** $\hat{\beta}$: $Var\left(\hat{\beta}\right) = E\left(\hat{\beta} - \beta\right)^2 = \frac{\delta_{e_i}^{\,2}}{\sum (X_i - \overline{X})^2} = \frac{2.1428}{28} = 0.0765$

➢ **تباين المعلمة** $\hat{a}$: $Var\left(\hat{a}\right) = \left(\frac{\delta_{e_i}^{\,2}}{n} + Var\left(\hat{\beta}\right)\overline{X}^2\right) = \left(\frac{2.1428}{7} + 0.0765(4)^2\right) = 1.5306$

[14] Jeffrey Wooldridge, Introductory Econometrics: a moderne approach, 5 th edition, south-western cengage learning, USA, 2013, P55.

2. تقييم نموذج الانحدار البسيط:

لقد تناولنا فيما سبق إلى كيفية استخدام طريقة المربعات الصغرى لتقدير معلمات النموذج، وهو ما يمثل الهدف الأساسي من الاقتصاد القياسي. ولكن لا يقتصر الأمر على هذا فحسب بل لابد من إجراء بعض الاختبارات الإحصائية للتأكد من جودة الأداء العام للنموذج المقدر، أي يجب تحليل معادلة التمثيل المقترحة وتقييم مدى الدقة التي تمثل فيها هذه المعادلة العلاقة المفروضة بين المؤشرين، لذلك يجب وضع عدة معايير للحكم على جودة التقديرات.

لكن قبل إجراء هذا التحليل والتقييم لنوعية تمثيل نموذج الانحدار للعلاقة التي تربط بين الظاهرة المدروسة والعوامل المسببة لها يجب أولا دراسة العلاقة الإرتباطية.[15]

2.1. دراسة العلاقة الارتباطية:

إن دراسة نوع ومتانة العلاقة الارتباطية بين $(X_i.Y_i)$ يتمثل فيما يلي:

- تحليل الظاهرة المدروسة والبحث عن الأسباب التي تؤدي إلى حدوثها وتغيرها باستمرار.
- تحديد العلاقة المتينة بين الظاهرة الناتجة والعوامل المسببة لها.
- قياس شكل تلك العلاقة والتأكد من متانتها.
- البحث عن العلاقة بين الظاهرة المدروسة وأسبابها، ويجب أن تتصف بالموضوعية التامة، ويكون الباحث مقتنع بأن هناك علاقة شرطية واضحة.
- الكشف عن هذه العلاقة الارتباطية وقياس درجة متانتها باستعمال طرق مختلفة من أهمها معامل الارتباط لبيرسون.

معامل الارتباط الخطي البسيط:

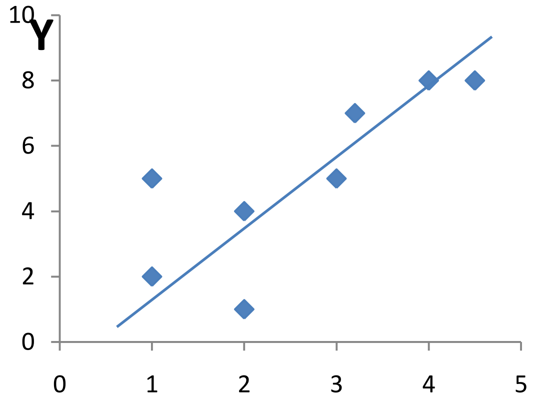
العلاقة بين $(X_i.Y_i)$ قد تكون قوية وقد تكون ضعيفة. ويمكن توضيح ذلك باستخدام الشكل الموالي والذي يوضح العلاقة بين (X_i)و(Y_i) في حالتين:

---

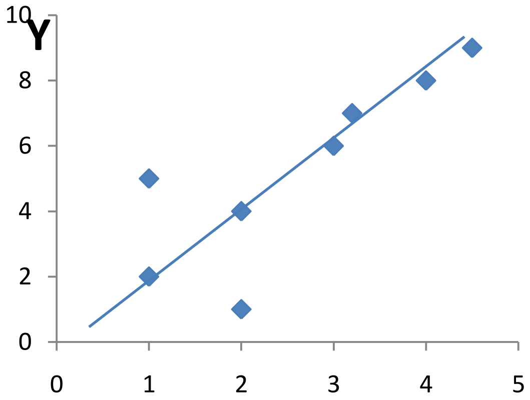
[15]- مكبد علي، مرجع سبق ذكره، ص 43- 89.

الشكل يوضح العلاقة بين (X_i)و(Y_i)

الشكل رقم 1



الشكل رقم2



من خلال الشكلين نلاحظ أن الشكل الأول يعطينا الشكل الانتشاري لمجموعة من البيانات التي نعتمد عليها في تقدير معادلة المستقيم التي تقيس لنا في المتوسط العلاقة بين (X_i)و(X_i)، أما الحالة الثانية تعطينا شكلا انتشاريا آخر يمكن الاعتماد عليه في تقدير معادلة المستقيم كذلك، والملاحظ من خلال الشكلين أن الحالة(2) أكثر التصاقا بخط معادلة المستقيم مقارنة بالحالة (1)، وهو ما يدل على قوة العلاقة بين (X_i) و(Y_i) .

وكما سبقت الإشارة فإن المتغيرات الاقتصادية والاجتماعية كثيرا ما تكون متأثرة ببعضها البعض، وبمعنى آخر مرتبطة، غير أن هذا الارتباط قد يكون قويا أو ضعيفا، كما قد يكون موجبا أو سالبا، ولكي نتمكن من قياس هذه العلاقة نستعمل معامل الارتباط الخطي البسيط (معامل بيرسون) والذي يحسب وفق العلاقة التالية:

$$r_{xy} = \frac{\sum\left(X_i - \overline{X}\right)\left(Y_i - \overline{Y}\right)}{n.\delta_x.\delta_y} = \frac{\left(\overline{XY} - \overline{X}\,\overline{Y}\right)}{\delta_x.\delta_y} = \frac{\operatorname{cov}(X\ Y)}{\delta_x.\delta_y} = \hat{\beta}\frac{\delta_x}{\delta_y}$$

حيث δ_Y و δ_X هي الانحراف المعياري لكل من X و Y.

r_{xy} يأخذ قيما في المجال بين $[-1,1]$.

عندما يكون[16]:

$r_{xy}=+1$ العلاقة بين $(X_i.Y_i)$ طردية قوية جدا.

$r_{xy}\geq 0.7$ العلاقة بين $(X_i.Y_i)$ طردية قوية.

$0.3\leq r_{xy}\leq 0.7$ العلاقة بين $(X_i.Y_i)$ طردية متوسطة.

$r_{xy}\leq 0.3$ العلاقة بين $(X_i.Y_i)$ ضعيفة.

$r_{xy}=0$ العلاقة بين $(X_i.Y_i)$ معدومة.

$r_{xy}=-1$ العلاقة بين $(X_i.Y_i)$ عكسية قوية جدا.

2.2. اختبار القوة التفسيرية للنموذج:

بعد تقدير قيم معلمات النموذج وتحديد خط الانحدار ينبغي التأكد من جودة النموذج ككل من خلال التعرف على انحراف خط الانحدار (المتغير التابع بعد تقديره) عن المشاهدات الفعلية للمتغير التابع. أو بمعنى آخر التعرف على انحراف أو تشتت قيم المشاهدات الفعلية للمتغير التابع حول خط الانحدار. ويعد هذا الإجراء مهم للغاية بحيث أنه كلما اقتربت المشاهدات الفعلية من خط الانحدار كان خط الانحدار أو النموذج المقدر أكثر جودة. وهذا يعني أن المتغير المستقل المختار يفسر أكبر قدر ممكن من التغيرات في المتغير التابع.

هناك مؤشر يتم استخدامه للتعرف على جودة النموذج ككل وهو معامل التحديد، وهو مؤشر يوضح النسبة المئوية للاختلافات أو التباينات الكلية للمتغير التابع التي يمكن تفسيرها بمعرفة المتغير المستقل.

كما يعرف التغير الكلي للمتغير التابع Y بأنه مجموع مربعات انحرافات قيم المتغير التابع Y عن وسطه الحسابي $\bar{Y}$، وإذا رمزنا لمجموع المربعات التغير الكلي بالرمز TSS فإن:

$$TSS=\sum\left(Y_i-\overline{Y}\right)=\sum y_i$$

ويمكن تقسيم مجموع المربعات التغير الكلي إلى جزأين، الجزء الأول ويعرف باسم مجموع مربعات الانحدار والجزء الثاني يسمى مجموع مربعات الخطأ، ويمكن تبيان ذلك على النحو التالي[17]:

لدينا:

[16] Corinne Hahn, Sandrine Macé, Méthodes statistiques appliquées au management, Pearson france, France, 2012, P93.

[17] G. S. Maddala, Kajal Lahiri, op. cit, P70.

$$e_i = Y_i - \widehat{Y}_i \Rightarrow Y_i = e_i + \widehat{Y}_i$$
$$(Y_i - \overline{Y}) = e_i + \left(\widehat{Y}_i - \overline{Y}\right)$$

بتربيع طرفي المعادلة أعلاه وجمعها بالنسبة لكل i نجد:

$$\sum\left(Y_i - \overline{Y}\right)^2 = \sum\left(\widehat{Y}_i - \overline{Y}\right)^2 + \sum e_i^2$$
$$TSS = ESS + RSS$$
$$ESS = \sum\left(\widehat{Y}_i - \overline{Y}\right)^2$$
$$RSS = \sum e_i^2 = \sum\left(Y_i - \widehat{Y}_i\right)^2$$

بقسمة طرفي المعادلة على $\sum\left(Y_i - \overline{Y}\right)^2$ نجد:

$$\frac{\sum\left(Y_i - \overline{Y}\right)^2}{\sum\left(Y_i - \overline{Y}\right)^2} = \frac{\sum\left(\widehat{Y}_i - \overline{Y}\right)^2}{\sum\left(Y_i - \overline{Y}\right)^2} + \frac{\sum e_i^2}{\sum\left(Y_i - \overline{Y}\right)^2}$$
$$1 = R^2 + \frac{\sum e_i^2}{\sum\left(Y_i - \overline{Y}\right)^2}$$

ومنه نعرف معامل التحديد:

$$R^2 = \left(r_{xy}\right)^2 = \frac{ESS}{TSS} = \frac{\sum\left(\widehat{Y}_i - \overline{Y}\right)^2}{\sum\left(Y_i - \overline{Y}\right)^2} = 1 - \frac{\sum e_i^2}{\sum\left(Y_i - \overline{Y}\right)^2}$$

R^2 يأخذ قيما في المجال بين $[0,+1]$.

العلاقة بين معامل التحديد R^2 ومعامل الانحدار الخطي $\widehat{\beta}$:

لدينا: $R^2 = (r_{XY})^2$

نعلم أن:

$$r_{xy} = \frac{\sum\left(X_i - \overline{X}\right)\left(Y_i - \overline{Y}\right)}{n.\delta_x.\delta_y}$$

ومنه:

$$R^2 = \left(\frac{\sum\left(X_i - \overline{X}\right)\left(Y_i - \overline{Y}\right)}{n.\delta_x.\delta_y}\right)^2$$

$$=\left(\frac{\left(\overline{XY}-\overline{Y}\,\overline{X}\right)}{\delta_x.\delta_y}\right)^2=\left(\frac{\operatorname{cov}(X\,Y)}{\delta_x.\delta_y}\right)^2$$

نعلم أن: $\widehat{\beta}=\dfrac{\operatorname{cov}(X\,Y)}{\delta_x^{\,2}}$

نضرب البسط والمقام في المقدار δ_x فنحصل على:

$$=\left(\frac{\operatorname{cov}(X\,Y)}{\delta_x.\delta_y}\frac{\delta_x}{\delta_x}\right)^2=\widehat{\beta}^2\,\frac{\delta_x^{\,2}}{\delta_y^{\,2}}$$

2.3. تقييم المعنوية الإحصائية للنموذج ككل –اختبار فيشر (F–test):

يستخدم هذا المقياس مثل المقاييس السابقة في تقييم ج ودة تمثل معادلة الانحدار المقترحة واختبار موضوعية معامل التحديد. يتمثل ذلك في اختبار الفرضيتين $H_0\,H_1$.

H_0 : فرضية العدم: النموذج غير معنوي إحصائيا تكوينه عشوائي.

H_1 : فرضية القبول: النموذج معنوي إحصائيا وتكوينه موضوعي.

حساب قيمة فيشر:

من أجل حساب واختبار الفرضيات السابقة نقوم بمقارنة القيمة الفعلية $F_{réel}$ والقيمة الحرجة أو الجدولية F_{tab} المستخرجة من جدول إحصائية فيشر.

تحسب القيمة المحسوبة لفيشر وفق العلاقة التالية[18]:

$$F_{réel}=\frac{\sum\left(\widehat{Y}_i-\overline{Y}\right)^2/m}{\sum\left(Y_i-\widehat{Y}_i\right)^2/n-m-1}=\frac{R_{xy}^2}{1-R_{xy}^{\;2}}.\frac{n-m-1}{m}$$

حيث أن:

m: عدد المتغيرات المستقلة.

n: عدد المشاهدات (عدد العناصر العينة المدروسة).

R_{xy}^2 : معامل التحديد.

[18] Peter Kennedy, A Guide to Econometrics, 5th edition, The mit press, Massachusetts, Cambridge, England, 2003, P 62.

يمكن الحصول على القيمة F_{tab} الجدولية بالبحث في جدول F المقابلة لدرجات حرية عددها $V_1 = m$ بالنسبة للبسط (أفقيا على الجدول) ودرجات الحرية مقدارها $V_2 = n - m - 1$.

إذا كانت:

- $F_{réel} > F_{tab}$ يتم رفض الفرضية H_0 ونقبل الفرضية H_1 .
- $F_{réel} < F_{tab}$ يتم رفض الفرضية H_1 ونقبل الفرضية H_0 .

2.4. تقييم المعنوية الإحصائية لمعاملات الانحدار المقدرة:

هناك العديد من الاختبارات الإحصائية والتي تتطلب مجموعة من الشروط الواجب توافرها لتطبيق تلك الاختبارات، ولمعرفة معنوية المعلمات المقدرة وكذا اختبار معنوية كل متغير مستقل على حدة في تفسير المتغير التابع نستخدم اختبار ستيودنت (T-test) والذي يحسب وفق الصيغة التالية:[19]

$$T_i = \frac{\hat{\beta}_i - \beta_i^*}{\sqrt{\delta \hat{\beta}_i^{\,2}}}$$

بالنسبة للمعلمة $\hat{\alpha}$:

H_0 : فرضية العدم: المعلمة غير معنوي إحصائيا تكوينها عشوائي (a=0).

H_1 : فرضية القبول: النموذج معنوي إحصائيا وتكوينه موضوعي(a≠0) .

$$T_a = \left| \frac{\hat{\alpha} - a^*}{\sqrt{\delta_{\hat{\alpha}}^{2}}} \right| = \frac{\hat{\alpha}}{\sqrt{Vor\left(\hat{\alpha}\right)}} = \left| \frac{\hat{\alpha}}{\sqrt{\left(\frac{\delta_{e_i}^{2}}{n} + Var\left(\hat{\beta}\right)\overline{X}^{2} \right)}} \right|$$

بالنسبة للمعلمة $\hat{\beta}$:

H_0 : فرضية العدم: المعلمة غير معنوي إحصائيا تكوينها عشوائي (β=0).

H_1 : فرضية القبول: النموذج معنوي إحصائيا وتكوينه موضوعي(β≠0) .

$$T_\beta = \left| \frac{\hat{\beta} - \beta^*}{\sqrt{\delta_{\hat{\beta}}^{2}}} \right| = \frac{\hat{\beta}}{\sqrt{Vor\left(\hat{\beta}\right)}} = \left| \frac{\hat{\beta}}{\sqrt{\frac{\delta_{e_i}^{2}}{\sum x_i^{2}}}} \right|$$

[19] وليد اسماعيل السفو، فيصل مفتاح شلوف، صائب جواد إبراهيم، أساسيات الإقتصاد القياسي التحليلي، الطبعة العربية الأولى، الأهلية للنشر والتوزيع، المملكة الأردنية، عمان، 2006، ص 177.

وبمقارنة القيمة الفعلية المحسوبة بالقيمة (الجدولية) لمقياس (t) بدرجات حرية n−m−1 يمكننا قبول أو رفض الفرضية H_0 .

حيث أن:

$\hat{\alpha}$ و $\hat{\beta}$ هي المعلمات المقدرة.

a^* و β^* هي القيم الافتراضية للمعلمتين α و β.

$Vor\left(\hat{\alpha}\right)$: تباين المعلمة α.

$Var\left(\hat{\beta}\right)$: تباين المعلمة β.

n: حجم العينة.

m: عدد المتغيرات المستقلة.

فإذا كانت:

$T_{réel} > T_{tab}$ يتم رفض الفرضية H_0 ونقبل الفرضية H_1 .

$T_{réel} < T_{tab}$ يتم رفض الفرضية H_1 ونقبل الفرضية H_0 .

وتنبغي الإشارة هنا أن قبول أو رفض فرض العدم إنما يحمل معنى اقتصادي محدد، فعلى سبيل المثال قبول الفرض القائل بأن (a=0) معناه أن خط الانحدار يمر بنقطة الأصل.

أما إذا كانت (β=0) معناه أن المتغير المفسر الذي يصاحب المعلمة β لا يؤثر في الحقيقة على المتغير التابع Y وبالتالي يجب ألا تتضمنه المعادلة حيث أن الاختبار قد زودنا بالدليل العلمي أن تغيرات X لا تؤثر على Y.

2.5. تقييم الأداء العام لنموذج الانحدار المقدر:

إن تقييم الأداء العام لنموذج الانحدار يعني اختبار قدرة هذا النموذج على إجراء التوقعات والاستطلاعات المختلفة، ويتم إجراء هذا التقييم باستعمال عدة اختبارات من أهمها معامل عدم التساوي (U) لـTheil ، والذي يحسب وفق الصيغة التالية[20]:

[20] Jean Louis Brillet; **Modélisation économétrique principe et technique**, économica 1994, p86-87.

$$\cup = \frac{\sqrt{\frac{\sum(Y_i - \widehat{Y_i})^2}{n}}}{\sqrt{\frac{\left(\sum \widehat{Y_i}\right)^2}{n}} + \sqrt{\frac{\left(\sum Y\right)^2}{n}}}$$

حيث أن:

n: عدد قيم المشاهدات.

$\widehat{Y_i}$: القيم التقديرية الظاهرة.

Y_i: القيم الفعلية الظاهرة.

مجال تغير (U) هو $[0,+1]$ كلما كانت قيم (U) قريبة من الصفر كلما كانت قدرة النموذج على التوقع جيدة والعكس عندما تقترب (U) من الواحد.

2.6. تقدير حدود الثقة أو فترات الثقة لمعاملات النموذج:

إن نتيجة اختبارات المعنوية السابقة يمكن أن تكون بقبول أو رفض فرض العدم H_0، وليس معنى رفضنا لفرض العدم أن $\widehat{\alpha}$ و $\widehat{\beta}$ هي التقديرات الصحيحة لمعالم النموذج، ولكنه يعني أن تقديراتنا التي حسبت من عينة محسوبة من مجتمع معالمه α و β تختلف عن الصفر.

ولتحديد مدى قرب التقدير من المعلمة الحقيقية لابد وأن تحدد فترات ثقة لهذه المعلمة، بمعنى أن تعين قيما حول التقدير كحدود نتوقع أن تقع المعلمة الحقيقية بينها بدرجة ثقة معينة وعندئذ يمكننا القول أنه باحتمال معين فإن معلمة المجتمع ستكون في حدود فترة الثقة، فإذا كانت فترة الثقة المختارة هي 95% فمعنى ذلك أنه بدرجة 95% في العينات المتكررة تقع معلمة المجتمع الحقيقية داخل حدود الثقة المحسوبة من العينة، وأنه في حدود 5% من الحالات تقع معلمة المجتمع خارج حدود الثقة.

حدود الثقة لمعامل الانحدار $\widehat{\alpha}$:

$$\widehat{\alpha} - T_{tab}\delta_{\widehat{\alpha}} \le a \le \widehat{\alpha} + T_{tab}\delta_{\widehat{\alpha}}$$

حدود الثقة لمعامل الانحدار $\widehat{\beta}$:

$$\widehat{\beta} - T_{tab}\delta_{\widehat{\beta}} \le \beta \le \widehat{\beta} + T_{tab}\delta_{\widehat{\beta}}$$

2.7. جدول تحليل التباين:

يهدف جدول تحليل التباين إلى توضيح تأثير المتغير المستقل في المتغير التابع، وتزداد أهمية هذا الجدول عند دراسة الانحدار المتعدد، حيث يستفاد منه في معرفة تأثير كل متغير من المتغيرات المستقلة في المتغير التابع.

لدينا:

$$\sum\left(Y_i-\overline{Y}\right)^2=\sum\left(\widehat{Y_i}-\overline{Y}\right)^2+\sum \mathrm{e_i}^2$$

$$TSS=ESS+RSS$$

ولدينا:

$$F_{réel}=\frac{\sum\left(\widehat{Y_i}-\overline{Y}\right)^2 / m}{\sum\left(Y_i-\widehat{Y_i}\right)^2 / n-m-1}=\frac{R_{xy}^2}{1-R_{xy}{}^2}\cdot\frac{n-m-1}{m}$$

ومن خلال هذه المعطيات يمكن إنشاء جدول تحليل التباين كما يلي:

جدول تحليل التباين

مصدر التباين	مجموع المربعات	درجة الحرية	متوسط مجموع المربعات	إحصائية F
البواقي	$ESS=\sum\left(\widehat{Y_i}-\overline{Y}\right)^2$	$m=1$	ESS/m	$F_{réel}=\frac{\sum\left(\widehat{Y_i}-\overline{Y}\right)^2 / m}{\sum\left(Y_i-\widehat{Y_i}\right)^2 / n-m-1}=\frac{R_{xy}^2}{1-R_{xy}{}^2}\cdot\frac{n-m-1}{m}$
الانحدار	$RSS=\sum \mathrm{e_i}^2$	$m-1=n-2$	$RSS/n-2$	
إجمالي مربعات الانحرافات الكلية	$TSS=\sum\left(Y_i-\overline{Y}\right)^2$	$n-1$	/	

مثال3 : بالرجوع للمثال السابق سنقوم بـ:

1. اختبار معنوية المقدرات من وجهة النظرية الاقتصادية ثم من الناحية الإحصائية؟
2. اختبار القوة التفسيرية للنموذج؟
3. دراسة العلاقة الارتباطية؟
4. تقدير حدود الثقة باحتمال 95%؟

5. إعداد جدول تحليل التباين؟

الحل:

1. اختبار معنوية المقدرات من وجهة النظرية الاقتصادية ثم من الناحية الإحصائية؟

من الجانب الاقتصادي:

- **تفسير المعلمة** $\hat{\alpha}$: تفسير الحد الثابت في دالة الطلب المقدرة إلى أن الكمية المطلوبة من هذه السلعة ستكون مساوية لـ 19.14 بافتراض أن سعر السلعة معدوم، والإشارة الموجبة لهذا المعامل تتفق مع توقعات المسبقة والمحددة طبقا للنظرية الاقتصادية.

- **تفسير المعلمة** $\hat{\beta}$: بلغت قيمة معامل الانحدار $\hat{\beta}$ (2.785−) وهذا يعني أن كل زيادة في سعر السلعة بوحدة نقدية واحدة يؤدي إلى انخفاض الكمية المطلوبة من السلعة بمقدار 2.785، وتتفق إشارة هذه المعلمة مع التوقعات المسبقة والمحددة طبقا للنظرية الاقتصادية بوجود علاقة عكسية بين السعر والكمية المطلوبة وهو ما يطلق عليه بقانون الطلب.

من الجانب الإحصائي :

➢ **اختبار سيودنت:**

- **بالنسبة للمعلمة** $\hat{\alpha}$:

H_0 : فرضية العدم: المعلمة غير معنوي إحصائيا تكوينه‌ا عشوائي (a=0).

H_1 : فرضية القبول: النموذج معنوي إحصائيا وتكوينه موضوعي(a≠0) .

$$T_a = \left|\frac{\hat{\alpha}-a^*}{\sqrt{\delta_{\hat{\alpha}}^{2}}}\right| = \left|\frac{\hat{\alpha}}{\sqrt{Vor\left(\hat{\alpha}\right)}}\right| = \left|\frac{\hat{\alpha}}{\sqrt{\left(\frac{\delta_{e_i}^{2}}{n}+Var\left(\hat{\beta}\right)\overline{X}^{2}\right)}}\right| = \left|\frac{19.143}{\sqrt{1.5306}}\right| = 15.4729$$

بما أن $T_{réel} > T_{tab}$ ($15.47 > 2.57$) يتم رفض الفرضية H_0 ونقبل الفرضية H_1 ، أي أن المعلمة a معنوية إحصائيا وتكوينها موضوعي.

- **بالنسبة للمعلمة** $\hat{\beta}$:

H_0 : فرضية العدم: المعلمة غير معنوي إحصائيا تكوينه‌ا عشوائي (β=0).

H_1 : فرضية القبول: النموذج معنوي إحصائيا وتكوينه موضوعي(β≠0) .

$$T_\beta = \left|\frac{\hat{\beta}-\beta^*}{\sqrt{\delta_{\hat{\beta}}^2}}\right| = \left|\frac{\hat{\beta}}{\sqrt{Vor\left(\hat{\beta}\right)}}\right| = \left|\frac{\hat{\beta}}{\sqrt{\frac{\delta_{e_i}^2}{\sum x_i^2}}}\right| = \left|\frac{-2.785}{\sqrt{0.0765}}\right| = 10.069$$

القيمة الفعلية المحسوبة بالقيمة (الجدولية) لمقياس (t) بدرجات حرية 1-1-7 هي: 2.57

بما أن $T_{réel} > T_{tab}$ ($10.069 > 2.57$) يتم رفض الفرضية H_0 ونقبل الفرضية H_1، أي أن المعلمة β معنوية إحصائيا وتكوينها موضوعي.

➢ **اختبار فيشر:**

H_0 : فرضية العدم: النموذج غير معنوي إحصائيا تكوينه عشوائي.

H_1 : فرضية القبول: النموذج معنوي إحصائيا وتكوينه موضوعي.

$$F_{réel} = \frac{\sum\left(\hat{Y}_i - \bar{Y}\right)^2 / m}{\sum\left(Y_i - \hat{Y}_i\right)^2 / n-m-1} = \frac{217.286/1}{10.714/5} = 101.4$$

القيمة F_{tab} الجدولية المقابلة لدرجات حرية عددها $V_1 = 1$ بالنسبة للبسط (أفقيا على الجدول) ودرجات الحرية مقدارها $V_2 = 7-1-1 = 5$ بمستوى 95 % تساوي: 6.61

بما أن $F_{réel} > F_{tab}$ $(101.4 > 6.61)$ يتم رفض الفرضية H_0 ونقبل الفرضية H_1، أي أن النموذج معنوي إحصائيا وتكوينه موضوعي.

2. اختبار القوة التفسيرية للنموذج (معامل التحديد):

$$R^2 = \frac{ESS}{TSS} = \frac{\sum\left(\hat{Y}_i - \bar{Y}\right)^2}{\sum\left(Y_i - \bar{Y}\right)^2} = \frac{217.172}{228} = 0.953$$

$$= 1 - \frac{\sum e_i^2}{\sum\left(Y_i - \bar{Y}\right)^2} = 1 - \frac{10.714}{228} = 0.953$$

التعليق: يعني أن 95% من التغيرات التي تحدث في الكمية المطلوبة سببها التغير في سعر السلعة، والباقي يمكن تفسيرها من طرف محددات أخرى (أذواق المستهلكين، الدخل، التوقعات ...إلخ).

3. دراسة العلاقة الارتباطية:

$$r_{xy}=\frac{\left(\overline{XY}-\overline{X}\,\overline{Y}\right)}{\delta_x.\delta_y}=\frac{\operatorname{cov}(X\,Y)}{\delta_x.\delta_y}=\hat{\beta}\frac{\delta_x}{\delta_y}$$

$$\delta_x=\sqrt{(X-\overline{X})^2/n}=\sqrt{(\overline{X^2}-\overline{X}^2)}=2$$

$$\delta_y=\sqrt{(Y-\overline{Y})^2/n}=\sqrt{(\overline{Y^2}-\overline{Y}^2)}=5.7$$

$$r_{xy}=\hat{\beta}\frac{\delta_x}{\delta_y}=-2.785\frac{2}{5.7}=-0.9762$$

التعليق: يعني أن هناك علاقة عكسية قوية جدا.

4. حدود الثقة

معامل الانحدار $\hat{\alpha}$:

$$\hat{\alpha}-T_{tab}\delta_{\hat{\alpha}}\leq a\leq\hat{\alpha}+T_{tab}\delta_{\hat{\alpha}}$$
$$19.14-2.571*1.237\leq a\leq 19.14+2.571*1.237$$
$$15.728\leq a\leq 22.551$$

هناك احتمال 95% أن تقع القيمة الحقيقية للمعامل الثابت بين 15.728كحد أدنى و 22.55 كحد أعلى، وهناك احتمال 5% أن تقع خارج هذين الحدين.

معامل الانحدار $\hat{\beta}$:

$$\hat{\beta}-T_{tab}\delta_{\hat{\beta}}\leq\beta\leq\hat{\beta}+T_{tab}\delta_{\hat{\beta}}$$
$$-2.785-2.571*0.256\leq\beta\leq-2.785+2.571*0.256$$
$$-3.443\leq\beta\leq-2.126$$

هناك احتمال 95% أن تقع القيمة الحقيقية للمعلمة $\hat{\beta}$ بين 3.443-كحد أدنى و 2.126-كحد أعلى، وهناك احتمال 5% أن تقع خارج هذين الحدين.

5. جدول تحليل التباين

مصدر التباين	مجموع المربعات	درجة الحرية	متوسط مجموع المربعات	إحصائية F
البواقي	$ESS=\sum\left(\widehat{Y_i}-\overline{Y}\right)^2$ $=217.28$	$m=1$	$ESS/m=217.285$	$F_{réel}=\dfrac{\sum\left(Y_i-\widehat{Y_i}\right)^2/m}{\sum\left(\widehat{Y_i}-\overline{Y}\right)^2/n-m-1}$ $=\dfrac{R_{xy}^2}{1-R_{xy}^2}\cdot\dfrac{n-m-1}{m}$ $=\dfrac{217.172}{2.142}=101.4$
الانحدار	$RSS=\sum e_i^2=10.71$	$=n-2=5$	$RSS/n-2=2.142$	
إجمالي مربعات الانحرافات الكلية	$TSS=\sum\left(Y_i-\overline{Y}\right)^2=228$	6	/	

3. التنبؤ:

إن القدرة على التنبؤ مهمة لاقتصاديي الأعمال والمحللين الماليين لتوقع مبيعات وإيرادات شركة ما، ومهم لصانعي السياسة الحكومية الذين يحاولون التنبؤ بمعدلات نمو الدخل الوطني، التضخم، الاستثمار والادخار، نفقات الضمان الاجتماعي، إيرادا ت الضرائب، وكذلك مهم لرجال المحليين للتنبؤ بنمو السكان والدخل من أجل توسيع أو تركيز خدماتهم، ويعتبر التنبؤ الدقيق أساسا لصناعة قرار أفضل، سنكتشف في هذه المحاضرة استخدام الانحدار الخطي كأداة للتنبؤ.

لذلك عقب تقييم نموذج الانحدار والتأكد من استيفائه للفرضيات والمعايير الإحصائية، يصبح بالإمكان استخدامه لأغراض التنبؤ، وذلك بإيجاد قيم المتغير التابع Y_i بتغير قيم المتغير المستقل X_i.

فإذا كانت لدينا قيمة ما للمتغير المستقل X_i ولتكن X_p غير واردة من بين قيم X_i الموجودة في سلسلة العينة التي اعتمدناها سابقا، فتصبح عملية البحث عن قيم Y_i التي نرمز لها بالرمز Y_p المقابلة لـ X_p هي عملية الاستطلاع (التنبؤ).

ومن أجل استخدام تحليل الانحدار كأساس للتنبؤ، يجب أن نفترض أن Y_p و X_p مرتبطان ببعضهما في نموذج الانحدار الذي يصف عينة البيانات.

إن عملية التنبؤ تصبح سهلة بعدما نكون قد حددنا الصيغة الرياضية لنموذج الانحدار الممثلة للعلاقة المدروسة، حيث أننا نعوض قيمة X_p في معادلة الانحدار المقترحة فنحصل على قيمة Y_i النظرية وهي $\widehat{Y_P}$ المقابلة لـ X_p.

لدينا: $Y_p = \alpha + \beta X_p + e_p$

حيث أن: e_p الخطأ العشوائي،

ونفترض أن:

$E(Y_p) = \alpha + \beta X_p$ و $E(e_p) = 0$ ، $\text{var}(e_p) = \delta_{e_p}^2$ ، e_p غير مرتبطة بالأخطاء العشوائية وبالتالي $\text{cov}(e_p, e_i) = 0$ حيث: i=1.2.3....N ، ونحصل على التنبؤ بالتعويض في المعادلة الانحدار المقدرة.

$$\widehat{Y_P} = \hat{\alpha} + \hat{\beta} X_p$$

إن معرفة القيم المقدرة $\widehat{Y_P}$ المقابلة لقيمة X_p في التطبيقات العملية يعد غير كافي بل يجب استعمال هذه القيمة النظرية من أجل الحصول على معلومة أخرى أكثر واقعية، وهي القيمة الفعلية لـ Y_p المقابلة لـ

X_p ، هذه القيمة الفعلية لا نستطيع أن نحددها بدقة تامة وإنما نستطيع حصرها في مجال معين، هذا المجال يسمى بمجال الاستطلاع الذي تقع بداخله القيمة الفعلية Y_p المقابلة للقيمة المقدرة لـ X_p .

وللتنبؤ أخطاء وقد ينشأ بسبب[21]:

- خطأ في التقدير: $Y_p - E(Y_p)$
- خطأ في المعاينة: $Y_p - E(Y_p)$

وعليه فإن الخطأ الحاصل في التنبؤ عن القيمة المفردة الواردة هو مجموع نوعين الانحراف أي:

$$Y_p - \widehat{Y_P} = Y_p - E(Y_p) + E(Y_p) - \widehat{Y_P}$$

لدينا:

المعادلة الحقيقية: $Y_i = \alpha + \beta X_i + e_i$

المعادلة التقديرية: $\widehat{Y_i} = \hat{\alpha} + \hat{\beta} X_i$

المعادلة التنبؤية الحقيقية: $Y_p = \alpha + \beta X_p + e_p$

المعادلة التنبؤية المتوقعة: $\widehat{Y_P} = \hat{\alpha} + \hat{\beta} X_p$

وعليه فخطأ التنبؤ يكون:

$$Y_p - \widehat{Y_P} = \alpha + \beta X_p + e_p - \hat{\alpha} - \hat{\beta} X_p$$

إن مقدرات طريقة المربعات الصغرى هي أفضل مقدرات خطية غير متحيزة، وأن خطأ التنبؤ يعتمد على عنصر الخطأ العشوائي (e_p)، كما نفترض أن قيمة الخطأ العشوائي (e_p) مستقلة عن القيم $e_1, e_2, e_3 \ldots, e_n$ ، وأنها تتوزع توزيعا طبيعيا، كذلك فإن خطأ التنبؤ يتوزع توزيعا طبيعيا بوسط حسابي يساوي الصفر وتباين ثابت، ويمكن إثبات ذلك كالآتي:

الوسط الحسابي المساوي للصفر:

$$E(Y_p - \widehat{Y_P}) = E(\alpha + \beta X_p + e_p) - E(\hat{\alpha} + \hat{\beta} X_p)$$
$$= \alpha + \beta X_p + E(e_p) - E(\hat{\alpha}) + E(\hat{\beta}) X_p$$

نعلم أن: $E(e_p) = 0, E(\hat{\alpha}) = \alpha, E(\hat{\beta}) = \beta$

ومنه:

$$E(Y_p - \widehat{Y_P}) = \alpha + \beta X_p + 0 - \alpha + \beta X_p = 0$$

[21] حسين بخيت، مرجع سبق ذكره، ص 100.

تباين الخطأ العشوائي:

$$\delta_{\widehat{Y_p}}^{\,2} = E\left[\left(Y_p - \widehat{Y_P}\right) - E\left(Y_p - \widehat{Y_P}\right)\right]^2$$

بما أن: $E\left(Y_p - \widehat{Y_P}\right) = 0$

ومنه: $\delta_{\widehat{Y_p}}^{\,2} = E\left(Y_p - \widehat{Y_P}\right)^2$

$$= E\left[\left(\alpha + \beta X_p + e_p\right) - \widehat{\alpha} - \widehat{\beta} X_p\right]^2$$

$$= E\left[\left(e_p\right) + \left(\alpha - \widehat{\alpha}\right) + X_p\left(\beta - \widehat{\beta}\right)\right]^2$$

$$= E[\left(e_p\right)^2 + \left[\left(\alpha - \widehat{\alpha}\right) + X_p\left(\beta - \hat{\beta}\right)\right]^2 + 2\left(e_p\right)\left(\left(\alpha - \widehat{\alpha}\right) + X_p\left(\beta - \widehat{\beta}\right)\right)]$$

$$= E\left(e_p\right)^2 + E\left[\left(\alpha - \widehat{\alpha}\right) + X_p\left(\beta - \widehat{\beta}\right)\right]^2 + 2E[\left(e_p\right)\left(\left(\alpha - \widehat{\alpha}\right) + X_p\left(\beta - \widehat{\beta}\right)\right)]$$

نعلم أن: $E\left(e_p\right) = 0$

ومنه:

$$\delta_{\widehat{Y_p}}^{\,2} = \delta_{e_i}^{\,2} + E\left[\left(\alpha - \widehat{\alpha}\right) + X_p\left(\beta - \widehat{\beta}\right)\right]^2$$

$$= \delta_{e_i}^{\,2} + E\left(\alpha - \widehat{\alpha}\right)^2 + X_p^{\,2} E\left(\beta - \widehat{\beta}\right)^2 + 2E\left(\alpha - \widehat{\alpha}\right)\left(\beta - \widehat{\beta}\right) X_p$$

$$= \delta_{e_i}^{\,2} + \operatorname{var}\left(\widehat{\alpha}\right) + X_p^{\,2} \operatorname{var}\left(\widehat{\beta}\right) + 2\operatorname{cov}(\alpha.\beta) X_p$$

$$= \delta_{e_i}^{\,2} + \left(\frac{\delta_{e_i}^{\,2}}{n} + \frac{\delta_{e_i}^{\,2}}{\sum x_i^{\,2}} \overline{X}^2\right) + X_p^{\,2}\left(\frac{\delta_{e_i}^{\,2}}{\sum x_i^{\,2}}\right) - 2X_p\left(\frac{\delta_{e_i}^{\,2}}{\sum x_i^{\,2}}\right)\overline{X}$$

$$= \delta_{e_i}^{\,2} + \left(\frac{\delta_{e_i}^{\,2} \sum x_i^{\,2}}{n\sum x_i^{\,2}} + \frac{\delta_{e_i}^{\,2}}{\sum x_i^{\,2}} \overline{X}^2\right) + X_p^{\,2}\left(\frac{\delta_{e_i}^{\,2}}{\sum x_i^{\,2}}\right) - 2X_p\left(\frac{\delta_{e_i}^{\,2}}{\sum x_i^{\,2}}\right)\overline{X}$$

$$= \delta_{e_i}^{\,2} + \frac{\delta_{e_i}^{\,2}}{\sum x_i^{\,2}}\left(\frac{\sum x_i^{\,2}}{n} + \overline{X}^2 + X_p^{\,2} - 2X_p\overline{X}\right)$$

نعلم أن:

$$(X_p - \overline{X})^2 = X_p^{\,2} + (\overline{X})^2 - 2X_p\overline{X}$$

ومنه: $\delta_{\widehat{Y_p}}^{\,2} = \delta_{e_i}^{\,2} + \dfrac{\delta_{e_i}^{\,2}}{\sum x_i^{\,2}}\left(\dfrac{\sum x_i^{\,2}}{n} + (X_p - \overline{X})^2\right)$

وبالتبسيط نجد: $\delta_{\widehat{Y_p}}^{\,2} = \delta_{e_i}^{\,2} + \delta_{e_i}^{\,2}\left(\dfrac{1}{n} + \dfrac{(X_p - \overline{X})^2}{\sum x_i^{\,2}}\right)$

ومنه: $\delta_{\widehat{Y_p}}^{\ 2} = \delta_{e_i}^{\ 2}\left(1+\frac{1}{n}+\frac{(X_p-\overline{X})^2}{\sum x_i^{\ 2}}\right)$

حيث أن: $\delta_{e_i}^{\ 2} = \frac{\sum e_i^{\ 2}}{n-2}$

وبالتالي: $\delta_{\widehat{Y_p}} = \sqrt{\delta_{e_i}^{\ 2}\left(1+\frac{1}{n}+\frac{(X_p-\overline{X})^2}{\sum x_i^{\ 2}}\right)}$

أما حدود الثقة: $Y_p = \widehat{Y_p} \pm \left(T_{tab}\delta_{\widehat{Y_p}}\right)$

حيث أن: $\widehat{Y_p} = \widehat{\alpha} + \widehat{\beta}X_p$

ومنه مجال الثقة: $\widehat{Y_p} - \left(T_{tab}\delta_{\widehat{Y_p}}\right) \le Y_p \le \widehat{Y_p} + \left(T_{tab}\delta_{\widehat{Y_p}}\right)$

تمارين محلولة:

التمرين 01: أراد قسم الدراسات الاقتصادية لإحدى الشركات لصناعة العلب المصبرة أن يقيس مدى تأثير الفعل الاشهاري على حجم المبيعات منتوج الشركة، فقام بإجراء تجربة على خمس مناطق جغرافية ذات خصائص متشابهة من الناحية الاقتصادية فيما يتعلق بالاستهلاك، فحصل على النتائج التالية:

المنطقة الجغرافية	1	2	3	4	5
حجم المبيعات بآلاف العلب	25	30	35	45	65
نفقات الإشهار بآلاف الدولارات	5	6	9	12	18

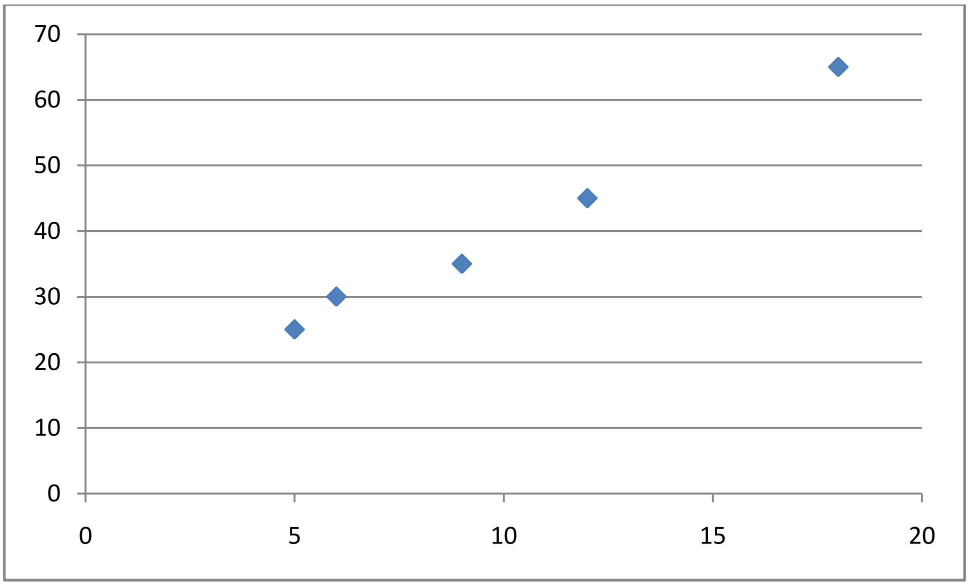
المطلوب: 1- ارسم شكل الانتشار، وما نوع العلاقة بين المؤشرين.

2- قدر معالم نموذج الانحدار المعبر عن العلاقة بين المؤشرين المذكورين باستخدام مختلف الطرق.

3- قدم تفسيرا اقتصاديا لمعالم النموذج.

الحــل:

1. شكل الانتشار



من شكل انتشار ازواج القيم (X.Y) نلاحظ أن الاتجاه العام يمثل علاقة مستقيمة (خطية)، لذلك نعتمد في تمثيلها على المعادلة الخطية للمستقيم: $\widehat{Y_i} = \hat{a} + \hat{\beta} X_i$.

2. تقدير معالم نموذج الانحدار:

N	X	Y	X^2	XY	$x=(X-\bar{X})$	$y=(Y-\bar{Y})$	$x^2=(X-\bar{X})^2$	Xy
1	5	25	25	125	-5	-15	25	75
2	6	30	36	180	-4	-10	16	40
3	9	35	81	315	-1	-5	1	5
4	12	45	144	540	2	5	4	10
5	12	65	324	1170	8	25	64	200
المجموع	50	200	610	2330	0	0	110	330
المتوسط	10	40	122	466				

- **طريقة الحذف والتعويض:**

$$\widehat{\beta}=\frac{n\sum X_iY_i-\sum Y_i\sum X_i}{n\sum X_i^2-\left(\sum X_i\right)^2}=\frac{5*2330-200*50}{5*610-50^2}=3$$

$$\hat{a}=\overline{Y}-\widehat{B}\overline{X}=40-(3*10)=10$$

$$\widehat{Y_i}=10+3X_i$$

- **طريقة المحددات:**

$$\hat{a}=\frac{|D_a|}{|D|}=\frac{\begin{vmatrix}\sum Y_i & \sum X_{1i}\\ \sum X_{1i}Y_i & \sum X_{1i}^2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}n & \sum X_{1i}\\ \sum X_{1i} & \sum X_{1i}^2\end{vmatrix}}=\frac{\sum Y_i.\sum X_{1i}^2-\sum X_{1i}.\sum X_{1i}Y_i}{n.\sum X_{1i}^2-(\sum X_{1i})^2}=\frac{200*610-50*2330}{5*610-(50)^2}=10$$

$$\hat{\beta}=\frac{|D_B|}{|D|}=\frac{\begin{vmatrix}n & \sum Y_1\\ \sum X_{1i} & \sum X_{1i}Y_i\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}n & \sum X_{1i}\\ \sum X_{1i} & \sum X_{1i}^2\end{vmatrix}}=\frac{n.\sum X_{1i}Y_i-\sum Y_1.\sum X_{1i}}{n.\sum X_{1i}^2-(\sum X_{1i})^2}=\frac{5*2330-200*50}{5*610-(50)^2}=3$$

$$\widehat{Y_i}=10+3X_i$$

- **طريقة التقدير حول نقطة المتوسط:**

$$\widehat{\beta}=\frac{\sum x_iy_i}{\sum x_i^2}=\frac{330}{110}=3$$

$$\hat{a}=\overline{Y}-\widehat{B}\overline{X}=40-(3*10)=10$$

$$\widehat{Y_i}=10+3X_i$$

3. التفسير الاقتصادي:

تفسير المعلمة $\hat{\alpha}$: تفسير الحد الثابت في دالة المبيعات المقدرة إلى أن حجم المبيعات من هذه السلع ستكون مساوية لـ 10000 وحدة عندما لا تنفق الشركة شيئا على الاشهار، والإشارة الموجبة لهذا المعامل تتفق مع توقعات المسبقة والمحددة طبقا للنظرية الاقتصادية.

تفسير المعلمة $\hat{\beta}$: بلغت قيمة معامل الانحدار $\hat{\beta}$ (3) وهذا يعني أن كل زيادة في نفقات الاشهار بوحدة نقدية واحدة يؤدي إلى زيادة حجم المبيعات من السلع بمقدار 3 وحدات، وتتفق إشارة هذه المعلمة مع التوقعات المسبقة والمحددة طبقا للنظرية الاقتصادية بوجود علاقة طردية بين حجم المبيعات والنفقات الإشهار.

التمرين 02: ليكن نموذج الانحدار الآتي: $Y_i=a+bx_i$ ، علما أن العمليات الحسابية الخاصة بمشاهدات المتغير x و y كانت كما يلي:

$$\sum y_i=30 \quad \sum x_i= 12 \quad \sum y_i^2=190 \quad \sum y_ix_i=74 \quad \sum x_i^2=36 \quad N=5$$

المطلوب: احسب معامل الارتباط بين المتغيرين، ثم قدر معالم النموذج.

الحـــل:

1. تقدير معالم نموذج الانحدار:

$$\hat{\beta}=\frac{n\sum X_iY_i-\sum Y_i\sum X_i}{n\sum X_i^2-\left(\sum X_i\right)^2}=\frac{5*74-30*12}{5*36-12^2}=0.27$$

$$\hat{a}=\overline{Y}-\widehat{B}\overline{X}=30/5-(0.27*2.4)=5.33$$

$$\widehat{Y_i}=5.33+0.27X_i$$

2. تقييم النموذج من الناحية الإحصائية؟

دراسة العلاقة الارتباطية:

$$r_{xy}=\frac{\left(\overline{XY}-\overline{X}\,\overline{Y}\right)}{\delta_x.\delta_y}=\frac{\operatorname{cov}(X\,Y)}{\delta_x.\delta_y}=\widehat{\beta}\frac{\delta_x}{\delta_y}$$

$$\delta_x=\sqrt{(X-\overline{X})^2/n}=\sqrt{(\overline{X^2}-\overline{X}^2)}=\sqrt{(36/5-(12/5)^2)}=1.2$$

$$\delta_y=\sqrt{(Y-\overline{Y})^2/n}=\sqrt{(\overline{Y^2}-\overline{Y}^2)}=\sqrt{(190/5-(30/5)^2)}=1.41$$

$$r_{xy}=\widehat{\beta}\frac{\delta_x}{\delta_y}=0.27\frac{1.2}{1.41}=0.2364$$

التعليق: يعني أن هناك ارتباط ضعيف جدا.

التمرين 03: عدد العمال في كل ورشة من ورشات صناعة البلاط ومتوسط الإنتاج اليومي كان على الشكل التالي:

رقم الورشة	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
عدد العمال	5	10	20	30	40	50	60	70	80	90
متوسط الانتاج اليومي	15	30	49	71	87	109	131	144	173	193

المطلوب:**1**– تكوين وتقدير نموذج الانحدار المعبر عن العلاقة بين المؤشرين المذكورين.

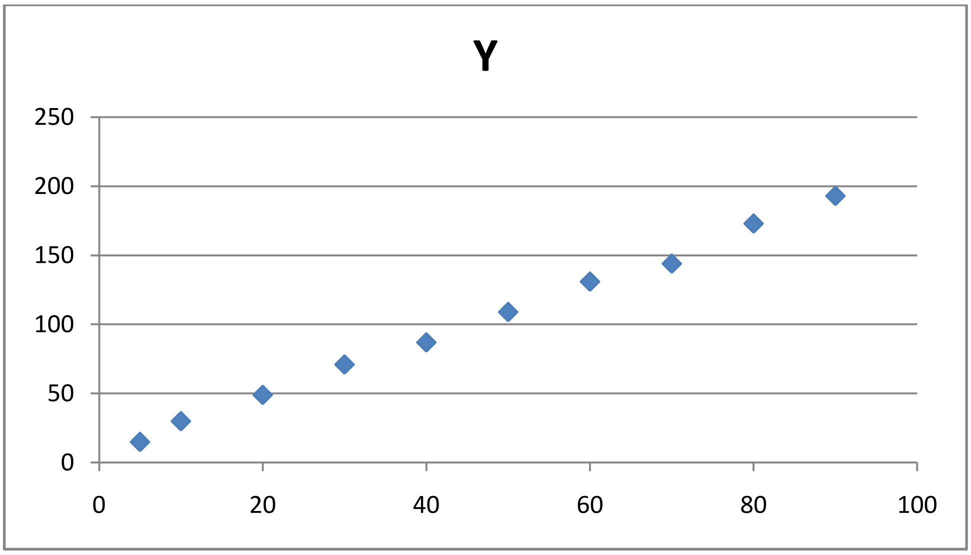
2 – دراسة العلاقة الارتباطية بينهما.

3 – تقييم النموذج الانحداري المقدر.

4 – تقدير الإنتاج المتوسط في ورشة عدد عمالها 120، ثم حساب قيمة الإنتاج المتوسط الفعلي لهذه الورشة عند نفس مستوى عدد العمال بمدى ثقة قدرة 0.95 .

الحـــل:

1. شكل الانتشار



من شكل انتشار ازواج القيم (X.Y) نلاحظ أن الاتجاه العام يمثل علاقة مستقيمة (خطية)، لذلك نعتمد في تمثيلها على المعادلة الخطية للمستقيم: $\widehat{Y_i} = \hat{a} + \widehat{\beta} X_i$.

2. تقدير معالم نموذج الانحدار:

N	X	Y	X^2	XY	x =(X-$\bar{X}$)	y =(Y-$\bar{Y}$)	x^2 =(X-$\bar{X}$)^2	xy	$\widehat{Y}$	e = Y − $\widehat{Y}$	e^2 = (Y − $\widehat{Y}$)^2	$\widehat{Y} - \bar{Y}$	$(\widehat{Y} - \bar{Y})^2$
1	5	15	25	75	-40,5	-85,2	1640,25	3450,6	17,49	-2,49	6,20	-82,71	6840,90
2	10	30	100	300	-35,5	-70,2	1260,25	2492,1	27,70	2,30	5,29	-72,50	5256,17
3	20	49	400	980	-25,5	-51,2	650,25	1305,6	48,12	0,88	0,77	-52,08	2712,21
4	30	71	900	2130	-15,5	-29,2	240,25	452,6	68,54	2,46	6,04	-31,66	1002,25
5	40	87	1600	3480	-5,5	-13,2	30,25	72,6	88,96	-1,96	3,85	-11,24	126,29
6	50	109	2500	5450	4,5	8,8	20,25	39,6	109,38	-0,38	0,15	9,18	84,33
7	60	131	3600	7860	14,5	30,8	210,25	446,6	129,80	1,20	1,43	29,60	876,37
8	70	144	4900	10080	24,5	43,8	600,25	1073,1	150,22	-6,22	38,74	50,02	2502,41
9	80	173	6400	13840	34,5	72,8	1190,25	2511,6	170,64	2,36	5,55	70,44	4962,45
10	90	193	8100	17370	44,5	92,8	1980,25	4129,6	191,07	1,93	3,74	90,87	8256,49
المجموع	**455**	**1002**	**28525**	**61565**	**0**	**0**	**7822,5**	**15974**	**1001,94**	**0,06**	**71,76**	**-0,06**	**32619,84**
المتوسط	**45,5**	**100,2**	**2852,5**	**6156,5**	**0**	**0**	**782,25**	**3450,6**					

- **طريقة الحذف والتعويض:**

$$\widehat{\beta} = \frac{n\sum X_i Y_i - \sum Y_i \sum X_i}{n\sum X_i^{\,2} - \left(\sum X_i\right)^2} = \frac{10*61565 - 1002*455}{10*28525 - 455^2} = 2.042$$

$$\hat{a} = \overline{Y} - \widehat{B}\,\overline{X} = 100.2 - (2.042*45.5) = 7.2863$$

$$\widehat{Y_i} = 7.2863 + 2.042 X_i$$

3. تقييم النموذج من الناحية الإحصائية:

➢ دراسة العلاقة الارتباطية (معامل الارتباط البسيط):

$$r_{xy} = \frac{\left(\overline{XY} - \overline{X}\,\overline{Y}\right)}{\delta_x . \delta_y} = \frac{\operatorname{cov}(X\ Y)}{\delta_x . \delta_y} = \widehat{\beta}\frac{\delta_x}{\delta_y}$$

$$\delta_x = \sqrt{(X - \overline{X})^2 / n} = \sqrt{(\overline{X^2} - \overline{X}^2)} = \sqrt{(2852.5 - (45.5)^2)} = 27.97$$

$$\delta_y = \sqrt{(Y - \overline{Y})^2 / n} = (\overline{Y^2} - \overline{Y}^2) = \sqrt{(13309.2 - (100.2)^2)} = 57.18$$

$$r_{xy} = \widehat{\beta}\frac{\delta_x}{\delta_y} = 2.04\frac{27.97}{57.18} = 0.998$$

التعليق: يعني أن هناك علاقة طردية قوية جدا.

➢ اختبار القوة التفسيرية للنموذج (معامل التحديد):

$$R^2=\frac{ESS}{TSS}=\frac{\sum\left(\widehat{Y_i}-\overline{Y}\right)^2}{\sum\left(Y_i-\overline{Y}\right)^2}=\frac{32619.84}{32691.6}=0.9978$$

$$=1-\frac{\sum e_i^2}{\sum\left(Y_i-\overline{Y}\right)^2}=1-\frac{71.76}{32691.6}=0.9978$$

$$=(r_{XY})^2=(0.998)^2=0.997$$

التعليق: يعني أن 99.7% من التغيرات التي تحدث في المتغير التابع سببها التغير في المتغير المستقل، والباقي عوامل أخرى تم إهمالها، كما أن تمثيل العلاقة بين المتغيرين بواسطة المعادلة المقدرة تعتبر ذو فعالية كبيرة (ذو جودة عالية).

➢ **اختبار المعنوية الإحصائية للنموذج ككل** (فيشر):

H_0 : فرضية العدم: النموذج غير معنوي إحصائيا تكوينه عشوائي.

H_1 : فرضية القبول: النموذج معنوي إحصائيا وتكوينه موضوعي.

$$F_{réel}=\frac{\sum\left(\widehat{Y_i}-\overline{Y}\right)^2 / m}{\sum\left(Y_i-\widehat{Y_i}\right)^2 / (n-m-1)}=\frac{32619.84/1}{71.76/8}=3636.40$$

$$=\frac{R_{xy}^2}{1-R_{xy}^2}.\frac{n-m-1}{m}=\frac{0.9978}{1-0.9978}.\frac{8}{1}=3636.4$$

القيمة F_{tab} الجدولية المقابلة لدرجات حرية عددها $V_1=1$ بالنسبة للبسط (أفقيا على الجدول) ودرجات الحرية مقدارها $V_2=10-1-1=8$ بمستوى 95 % تساوي: 5.32.

بما أن $F_{réel}>F_{tab}$ $(3636.66>5.32)$ يتم رفض الفرضية H_0 ونقبل الفرضية H_1، أي أن النموذج معنوي إحصائيا وتكوينه موضوعي.

➢ **اختبار المعنوية الإحصائية للمعلمات المقدرة** (سيودنت):

- **حساب التباينات:**

تباين الخطأ العشوائي:

$$\delta_{e_i}^2=\frac{\sum e_i^2}{n-2}=\frac{71.76}{8}=8.9704$$

تباين المعلمة $\widehat{\beta}$:

$$Var\left(\hat{\beta}\right)=E\left(\hat{\beta}-\beta\right)^2=\frac{\delta_{e_i}^{\ 2}}{\sum(X_i-\overline{X})^2}=\frac{8.9704}{7822.5}=0.01147$$

تباين المعلمة $\hat{a}$:

$$Var\left(\hat{a}\right)=\left(\frac{\delta_{e_i}^{\ 2}}{n}+Var\left(\hat{\beta}\right)\overline{X}^2\right)=\left(\frac{8.9704}{10}+0.01147(45.5)^2\right)=3.271$$

- **بالنسبة للمعلمة** $\hat{\alpha}$:

H_0 : فرضية العدم: المعلمة غير معنوي إحصائيا تكوينه عشوائي (a=0).

H_1 : فرضية القبول: النموذج معنوي إحصائيا وتكوينه موضوعي(a≠0) .

$$T_a=\left|\frac{\hat{\alpha}-a^*}{\sqrt{\delta_{\hat{\alpha}}^{\ 2}}}\right|=\left|\frac{\hat{\alpha}}{\sqrt{Vor\left(\hat{\alpha}\right)}}\right|==\left|\frac{7.28}{\sqrt{3.271}}\right|=4.028$$

القيمة الفعلية المحسوبة بالقيمة (الجدولية) لمقياس (t) بدرجات حرية 1-1-8 هي: 2.306.

بما أن $T_{réel}>T_{tab}$ ($4.028>2.306$) يتم رفض الفرضية H_0 ونقبل الفرضية H_1 ، أي أن المعلمة a معنوية إحصائيا وتكوينها موضوعي.

- **بالنسبة للمعلمة** $\hat{\beta}$:

H_0 : فرضية العدم: المعلمة غير معنوي إحصائيا تكوينه عشوائي (β=0).

H_1 : فرضية القبول: النموذج معنوي إحصائيا وتكوينه موضوعي(β≠0) .

$$T_\beta=\left|\frac{\hat{\beta}-\beta^*}{\sqrt{\delta_{\hat{\beta}}^{\ 2}}}\right|=\left|\frac{\hat{\beta}}{\sqrt{Vor\left(\hat{\beta}\right)}}\right|==\left|\frac{2.04}{\sqrt{0.0011}}\right|=60.30$$

بما أن $T_{réel}>T_{tab}$ ($60.30>2.306$) يتم رفض الفرضية H_0 ونقبل الفرضية H_1 ، أي أن المعلمة β معنوية إحصائيا وتكوينها موضوعي.

4. التنبؤ:

- **إجراء تقييم الأداء العام للنموذج المقترح (اختبار عدم التساوي)**

$$\cup=\frac{\sqrt{\frac{\sum(Y_i-\hat{Y}_i)^2}{n}}}{\sqrt{\frac{\left(\sum\hat{Y}_i\right)^2}{n}}+\sqrt{\frac{\left(\sum Y\right)^2}{n}}}=\frac{\sqrt{\frac{71.76}{10}}}{\sqrt{\frac{1001.94}{10}}+\sqrt{\frac{1002}{10}}}=0.004$$

يمكن القول أن القدرة التوقعية للنموذج المقترح جيدا جدا، وذلك لأن معامل عدم التساوي يقترب كثيرا من الصفر.

- **تقدير الإنتاج المتوسط عندما يكون عدد العمال 120.**

المعادلة التقديرية: $\widehat{Y_i} = \widehat{\alpha} + \widehat{\beta} X_i = 7.28 + 2.04 X_i$

المعادلة التنبؤية المتوقعة:

$$\widehat{Y_P} = \widehat{\alpha} + \widehat{\beta} X_p = 7.28 + 2.04 X_p$$

$$\widehat{Y_{120}} = 7.28 + 2.04(120) = 252.32$$

- **الانتاج الفعلي المقابلة لمستوى عدد العمال 120.**

– حساب متوسط الخطأ المعياري:

$$\delta_{\widehat{Y_p}} = \sqrt{\delta_{e_i}^2 \left(1 + \frac{1}{n} + \frac{(X_p - \overline{X})^2}{\sum x_i^2}\right)}$$

$$= \sqrt{8.9704\left(1 + \frac{1}{10} + \frac{(120 - 45.5)^2}{7822.5}\right)} = 2.69$$

أما حدود الثقة:

$$Y_p = \widehat{Y_p} \pm \left(T_{tab}\delta_{\widehat{Y_p}}\right) = 252.32 \pm (2.306 * 2.69)$$

ومنه مجال الثقة هو:

$$\widehat{Y_p} - \left(T_{tab}\delta_{\widehat{Y_p}}\right) \le Y_p \le \widehat{Y_p} + \left(T_{tab}\delta_{\widehat{Y_p}}\right)$$

$$246.11 \le Y_{120} \le 258.52$$

التمرين 04: لتكن ليدنا المعطيات التالية:

10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	N
80	75	60	55	52	47	45	40	25	20	Y
8	7	6	7	5	3	4	5	3	2	X

نفترض ان العلاقة بين المتغيرين خطية على النحو التالي: $Y_i = a + bx_i$

المطلوب: 1- ارسم شكل الانتشار، وبين ما إذا كانت هناك علاقة تقريبية بين المتغيرين.

2- قدر معالم نموذج الانحدار المعبر عن العلاقة بين المؤشرين المذكورين

3- احسب قيم $\widehat{Y}$ المقدرة.

4-احسب قيم الأخطاء المقدرة.

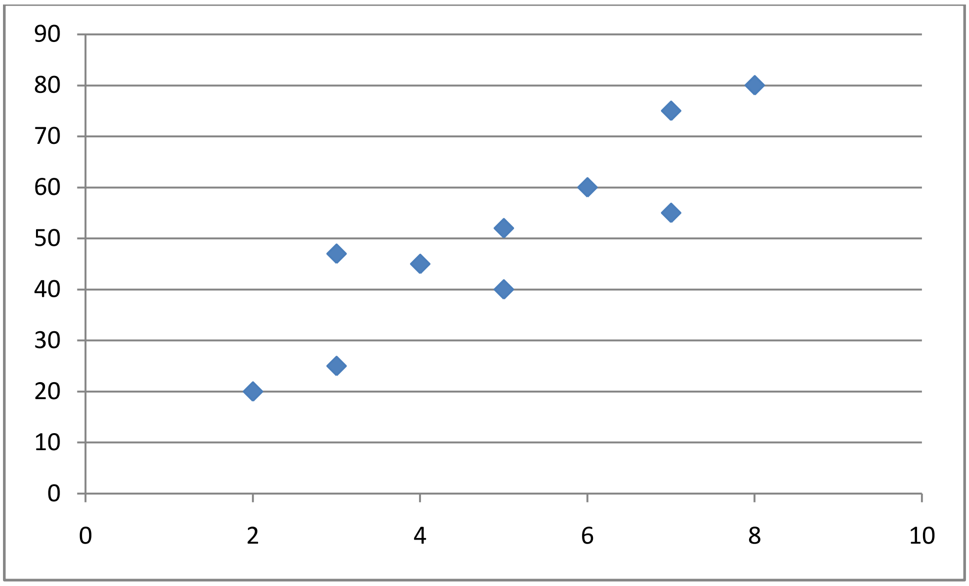
5-احسب تباين المقدرين، ثم قدر تباين الخطأ العشوائي.

6-اختبر صلاحية النموذج.

7- تنبأ بقيمة y_{11} لما $x_{11}=65$.

الحــل:

1. شكل الانتشار



من شكل انتشار ازواج القيم $(X.Y)$ نلاحظ أن الاتجاه العام يمثل علاقة مستقيمة (خطية)، لذلك نعتمد في تمثيلها على المعادلة الخطية للمستقيم: $\widehat{Y_i}=\hat{a}+\hat{\beta}X_i$.

2. تقدير معالم نموذج الانحدار:

N	X	Y	X^2	XY	x =(X-$\bar{X}$)	y =(Y-$\bar{Y}$)	x^2 =(X-$\bar{X}$)^2	xy	$\hat{Y}$	e $=Y-\hat{Y}$	$e^2=(Y-\hat{Y})^2$	$\hat{Y}-\bar{Y}$	$(\hat{Y}-\bar{Y})^2$
1	2	20	4	40	-3	-29,9	9	89,7	23,98	-3,98	15,82	-25,92	671,96
2	3	25	9	75	-2	-24,9	4	49,8	32,62	-7,62	58,01	-17,28	298,71
3	5	40	25	200	0	-9,9	0	0	49,89	-9,89	97,90	-0,01	0,00
4	4	45	16	180	-1	-4,9	1	4,9	41,26	3,74	14,02	-8,64	74,73
5	3	47	9	141	-2	-2,9	4	5,8	32,62	14,38	206,88	-17,28	298,71
6	5	52	25	260	0	2,1	0	0	49,89	2,11	4,43	-0,01	0,00
7	7	55	49	385	2	5,1	4	10,2	67,17	-12,17	148,16	17,27	298,33
8	6	60	36	360	1	10,1	1	10,1	58,53	1,47	2,15	8,63	74,53
9	7	75	49	525	2	25,1	4	50,2	67,17	7,83	61,27	17,27	298,33
10	8	80	64	640	3	30,1	9	90,3	75,81	4,19	17,55	25,91	671,39

المجموع	50	499	286	2806	0	0	36	311	498,94	0,06	626,21	-0,055	2686,69
المتوسط	5	49,9	28,6	280,6	0	0	3,6		49,89	0,01	62,62		

- **طريقة المحددات:**

$$\hat{a}=\frac{|D_a|}{|D|}=\frac{\begin{vmatrix}\sum Y_i & \sum X_{1i}\\ \sum X_{1i}Y_i & \sum X_{1i}^2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}n & \sum X_{1i}\\ \sum X_{1i} & \sum X_{1i}^2\end{vmatrix}}=\frac{\sum Y_i.\sum X_{1i}^2-\sum X_{1i}.\sum X_{1i}Y_i}{n.\sum X_{1i}^2-(\sum X_{1i})^2}=\frac{499*286-50*2806}{10*286-(50)^2}=6.7055$$

$$\hat{\beta}=\frac{|D_B|}{|D|}=\frac{\begin{vmatrix}n & \sum Y_1\\ \sum X_{1i} & \sum X_{1i}Y_i\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}n & \sum X_{1i}\\ \sum X_{1i} & \sum X_{1i}^2\end{vmatrix}}=\frac{n.\sum X_{1i}Y_i-\sum Y_1.\sum X_{1i}}{n.\sum X_{1i}^2-(\sum X_{1i})^2}=\frac{10*2806-499*50}{10*286-(50)^2}=8.6388$$

$$\widehat{Y_i}=6.7055+8.6388X_i$$

3. حساب التباينات:

- **تباين الخطأ العشوائي:**

$$\delta_{e_i}^{\ 2}=\frac{\sum e_i^2}{n-2}=\frac{626.21}{8}=78.2757$$

- **تباين المعلمة $\hat{\beta}$:**

$$Var\left(\hat{\beta}\right)=E\left(\hat{\beta}-\beta\right)^2=\frac{\delta_{e_i}^{\ 2}}{\sum(X_i-\overline{X})^2}=\frac{78.2757}{36}=2.1743$$

- **تباين المعلمة $\hat{a}$:**

$$Var\left(\hat{a}\right)=\left(\frac{\delta_{e_i}^{\ 2}}{n}+Var\left(\hat{\beta}\right)\overline{X}^2\right)=\left(\frac{78.2757}{10}+2.1743(5)^2\right)=1.5306$$

4. تقييم النموذج من الناحية الإحصائية:

- دراسة العلاقة الارتباطية:

$$r_{xy} = \frac{\left(\overline{XY} - \overline{X}\,\overline{Y}\right)}{\delta_x . \delta_y} = \frac{\operatorname{cov}(X\,Y)}{\delta_x . \delta_y} = \widehat{\beta}\frac{\delta_x}{\delta_y}$$

$$\delta_x = \sqrt{(X - \overline{X})^2 / n} = \sqrt{(\overline{X^2} - \overline{X}^2)} = \sqrt{3.6} = 1.8973$$

$$\delta_y = \sqrt{(Y - \overline{Y})^2 / n} = \sqrt{(\overline{Y^2} - \overline{Y}^2)} = \sqrt{331.29} = 18.2013$$

$$r_{xy} = \widehat{\beta}\frac{\delta_x}{\delta_y} = 8.6388\frac{1.8973}{18.2013} = 0.9005$$

التعليق: يعني أن هناك علاقة طردية قوية جدا.

➢ **اختبار القوة التفسيرية للنموذج (معامل التحديد)**:

$$R^2 = \frac{ESS}{TSS} = \frac{\sum\left(\widehat{Y_i} - \overline{Y}\right)^2}{\sum\left(Y_i - \overline{Y}\right)^2} = \frac{2686.69}{3312.9} = 0.8109$$

$$= 1 - \frac{\sum e_i^2}{\sum\left(Y_i - \overline{Y}\right)^2} = 1 - \frac{626.21}{3312.9} = 0.8109$$

$$= (r_{XY})^2 = (0.9005)^2 = 0.8109$$

التعليق: يعني أن 81.09% من التغيرات التي تحدث في المتغير التابع سببها التغير في المتغير المستقل، والباقي عوامل أخرى تم إهمالها، كما أن تمثيل العلاقة بين المتغيرين بواسطة المعادلة المقدرة تعتبر ذو فعالية كبيرة (ذو جودة عالية).

➢ **اختبار المعنوية الإحصائية للنموذج ككل (فيشر)**:

H_0 : فرضية العدم: النموذج غير معنوي إحصائيا تكوينه عشوائي.

H_1 : فرضية القبول: النموذج معنوي إحصائيا وتكوينه موضوعي.

$$F_{réel} = \frac{\sum\left(\widehat{Y_i} - \overline{Y}\right)^2 / m}{\sum\left(Y_i - \widehat{Y_i}\right)^2 / n - m - 1} = \frac{2686.69/1}{626.21/8} = 34.32$$

$$= \frac{R_{xy}^2}{1 - R_{xy}^2} . \frac{n - m - 1}{m} = \frac{0.8109}{1 - 0.8109} . \frac{8}{1} = 34.32$$

القيمة F_{tab} الجدولية المقابلة لدرجات حرية عددها $V_1 = 1$ بالنسبة للبسط (أفقيا على الجدول) ودرجات الحرية مقدارها $V_2 = 10 - 1 - 1 = 8$ بمستوى 95 % تساوي: 5.32.

بما أن $F_{réel} > F_{tab}$ $(34.32 > 5.32)$ يتم رفض الفرضية H_0 ونقبل الفرضية H_1، أي أن النموذج معنوي إحصائيا وتكوينه موضوعي.

- **اختبار المعنوية الإحصائية للمعلمات المقدرة (سيودنت):**

- **بالنسبة للمعلمة** $\hat{\alpha}$:

H_0 : فرضية العدم: المعلمة غير معنويۃ إحصائيا تكوينها عشوائي (a=0).

H_1 : فرضية القبول: النموذج معنوي إحصائيا وتكوينه موضوعي(a≠0) .

$$T_a = \left|\frac{\hat{\alpha}-a^*}{\sqrt{\delta_{\hat{\alpha}}^2}}\right| = \left|\frac{\hat{\alpha}}{\sqrt{Vor\left(\hat{\alpha}\right)}}\right| = \left|\frac{6.70}{\sqrt{62.1857}}\right| = 0.8503$$

القيمة الفعلية المحسوبة بالقيمة (الجدولية) لمقياس (t) بدرجات حرية 1-1-10 هي: 2.306.

بما أن $T_{réel} \prec T_{tab}$ $(0.85 \prec 2.306)$ يتم رفض الفرضية H_1 ونقبل الفرضية H_0، أي أن المعلمة a غير معنوية إحصائيا وتكوينها عشوائي.

- **بالنسبة للمعلمة** $\hat{\beta}$:

H_0 : فرضية العدم: المعلمة غير معنويۃ إحصائيا تكوينها عشوائي (β=0).

H_1 : فرضية القبول: النموذج معنوي إحصائيا وتكوينه موضوعي(β≠0) .

$$T_\beta = \left|\frac{\hat{\beta}-\beta^*}{\sqrt{\delta_{\hat{\beta}}^2}}\right| = \left|\frac{\hat{\beta}}{\sqrt{Vor\left(\hat{\beta}\right)}}\right| = \left|\frac{8.63}{\sqrt{2.1743}}\right| = 5.8586$$

بما أن $T_{réel} > T_{tab}$ $(10.069 > 2.57)$ يتم رفض الفرضية H_0 ونقبل الفرضية H_1، أي أن المعلمة β معنوية إحصائيا وتكوينها موضوعي.

5. التنبؤ:

- **إجراء تقييم الأداء العام للنموذج المقترح (اختبار عدم التساوي)**

$$\cup = \frac{\sqrt{\frac{\sum(Y_i - \hat{Y}_i)^2}{n}}}{\sqrt{\frac{\left(\sum\hat{Y}_i\right)^2}{n}} + \sqrt{\frac{\left(\sum Y\right)^2}{n}}} = \frac{\sqrt{\frac{626.21}{10}}}{\sqrt{\frac{498.94}{10}} + \sqrt{\frac{499}{10}}} = 0.025$$

يمكن القول أن القدرة التوقعية للنموذج المقترح جيدا جدا، وذلك لأن معامل عدم التساوي يقترب كثيرا من الصفر.

- **قيمة Y_{11} المقدرة عندما يكون X_{11}= 65.**

المعادلة التقديرية: $\widehat{Y_i} = \widehat{\alpha} + \widehat{\beta} X_i = 6.70 + 8.63 X_i$

المعادلة التنبؤية المتوقعة: $\widehat{Y_P} = \widehat{\alpha} + \widehat{\beta} X_p = 6.70 + 8.63 X_p$

$\widehat{Y_{120}} = 6.70 + 8.63(65) = 567.65$

- **قيمة Y_{11} الحقيقية المقابلة لمستوى X_{11}= 65.**

– حساب متوسط الخطأ المعياري:

$$\delta_{\widehat{Y_p}} = \sqrt{\delta_{e_i}{}^2 \left(1 + \frac{1}{n} + \frac{(X_p - \overline{X})^2}{\sum x_i{}^2}\right)}$$

$$= \sqrt{78.27\left(1 + \frac{1}{10} + \frac{(65-5)^2}{36}\right)} = 88.51$$

أما حدود الثقة:

$$Y_p = \widehat{Y_p} \pm \left(T_{tab}\delta_{\widehat{Y_p}}\right) = 567.65 \pm (2.306 * 88.51)$$

ومنه مجال الثقة هو:

$$\widehat{Y_p} - \left(T_{tab}\delta_{\widehat{Y_p}}\right) \le Y_p \le \widehat{Y_p} + \left(T_{tab}\delta_{\widehat{Y_p}}\right)$$

$$363.52 \le Y_{11} \le 771.77$$

تمارين:

التمرين 01: ان مكتب الدراسات لميناء الجزائر يريد بناء نموذج اقتصادي للتنبؤ، وبالتالي أراد أن يفسر حركة البواخر في هذا الميناء بالاستهلاك القومي، وتتوفر لديهم المعطيات لتسع سنوات الأخيرة.

حركة البواخر-الف وحدة_	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
الاستهلاك القومي	5	10	20	30	40	50	60	70	80	90

نفترض أن العلاقة بين المتغيرين خطية على النحو التالي: $Y_i=a+bx_i$

المطلوب: **1-** هل العلاقة المأخوذة تقترب من الحقيقة الاقتصادية؟ بين ذلك باقتراحك متغيرات تفسيرية أخرى، أي ما هي المتغيرات الاقتصادية التي تفسر حركة البواخر في الموانئ.

2 تكوين وتقدير نموذج الانحدار المعبر عن العلاقة بين المؤشرين المذكورين.

3 دراسة العلاقة الارتباطية بينهما.

4 تقييم النموذج الانحداري المقدر.

التمرين 02:

نعتبر نموذج الانحدار الخطي البسيط الآتي: $\hat{Y}= a + b X_i$

1- أكمل جدول تحليل التباين anova التالي:

مصدر التباين	مجموع المربعات	درجة الحرية	متوسط المربعات	F
الانحدار	217.2857			
البواقي			2.1428	
المجموع	228			

2-اختبر الدلالة الاحصائية الكلية للنموذج بمستوى دالة 5 % مع إعطاء فرضية العدم والقبول؟

3- حدد حجم العينة ثم احسب قيمة معامل التحديد مع تفسير النتيجة؟.

4- قدر التباين والانحراف المعياري للخطأ العشوائي

5- قدر كل من $\hat{b}$و$\hat{a}$ إذا علمت أن إشارة المعلمة $\hat{b}$ سالبة، وأن المعطيات الإحصائية الأولية كانت كالتالي:

$\sum X=28$ $\sum X^2=140$ $\sum Y= 56$ $\sum Y^2=676$

الفصل الثالث : تحليل الانحدار الخطي المتعدد

في الواقع الاقتصادي، لا يمكن الاستعانة بالنموذج ذي متغيرين لتحليل الظاهرة الاقتصادية، حيث أن هذه الأخيرة لا تفسر فقط بمحدد واحد وإنما ينبغي إدماج جميع المحددات أو العوامل المؤثرة في الظاهرة لكي تكون الدراسة أكثر شمولية في نموذج يدعى الانحدار المتعدد.

الانحدار الخطي المتعدد من الأساليب الإحصائية المتقدمة والتي تضمن دقة الاستدلال من أجل تحسين نتائج البحث عن طريق الاستخدام الأمثل للبيانات في إيجاد علاقات سببية بين الظواهر موضوع البحث .

1. تقديم وتقدير نموذج الانحدار الخطي المتعدد

1.1. تعريف نموذج الانحدار الخطي المتعدد:

إن الانحدار الخطي المتعدد يوضح العلاقة الدالية بين متغير التابع واحد وعدد من المتغيرات التفسيرية (أكثر من واحد)، أي هو عبارة عن انحدار للمتغير التابع (Y) على العديد من المتغيرات المستقلة $X_1, X_2, \ldots, \ldots, X_n$ لذا فهو يستخدم في التنبؤ بتغيرات المتغير التابع الذي يؤثر فيه عدة متغيرات مستقلة[1].

الانحدار الخطي المتعدد ليس مجرد أسلوب واحد وإنما مجموعة من الأساليب التي يمكن استخدامها لمعرفة العلاقة بين متغير تابع مستمر وعدد من المتغيرات المستقلة التي عادة ما تكون مستمرة.

ومن أمثلة الانحدار المتعدد نجد دالة الطلب التي توضح أن الكمية المطلوبة من السلعة كمتغير تابع تتأثر بسعر السلعة وأسعار السلع الأخرى والدخل كمتغيرات تفسيرية.

1.2. خطوات تكوين نموذج الانحدار المتعدد:

يتم تكوين نموذج الانحدار المتعدد وفق الخطوات التالية[2]:

– حصر وتحديد العوامل المؤثرة في الظاهرة الاقتصادية: تكوين النموذج الانحداري المتعدد يبدأ من تحديد العوامل (X_i) المؤثرة في الظاهرة المدروسة والمتمثلة بالمتغير التابع (Y_i)، ثم الحصول على البيانات الإحصائية الخاصة بكل منهم.

[1] جورج فهمي رزق، الاقتصاد التطبيقي في إدارة الأعمال، المكتبة الأكاديمية، مصر، 1999، ص 116.
[2] مكيد علي، مرجع سبق ذكره، ص 137.

إن تحديد عدد ونوع هذه العوامل يتم عن طريق التحليل النظري الاقتصادي لطبيعة الظاهرة المعنية وظروف حدوثها.

– اختيار نوع المعادلة: بعد تحديد وفرز أهم العوامل المؤثرة في الظاهرة المدروسة (Y_i) يتم اختيار شكل معادلة الانحدار التي تعبر عن عناصر الظاهرة المدروسة.

إن هذه المرحلة تعتبر من أهم وأعقد مراحل تكوين نموذج الانحدار المتعدد، هذه الصعوبة تكمن في عدم وجود أداة تمكن الباحث من اختيار نوع نموذج الانحدار المناسب الذي يمثل العلاقة المدروسة، لذلك فإنه عادة ما يعتمد في تحديد نوع نموذج الانحدار على معارف الباحث في ميدان النظرية الاقتصادية وقدراته على استعمالها في معالجة الظاهرة الاقتصادية المدروسة.

إن التحليل الاقتصادي سيمكن الباحث من حصر العلاقة المدروسة وتحديد أهم خواصها واكتشاف أهم العناصر المؤثرة فيها.

1.3. الصياغة الرياضية لنموذج الانحدار الخطي المتعدد:

يستند النموذج الخطي المتعدد على افتراض وجود علاقة خطية بين متغير تابع Y_i وعدد من المتغيرات المستقلة $X_1, X_2, \ldots, \ldots, X_n$ وحد عشوائي ε_i، ويعبر عن هذه العلاقة بالنسبة لـ n من المشاهدات وm من المتغيرات المستقلة بالشكل الأتي[3]:

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_{1i} + \beta_2 X_{2i} + \ldots + \beta_k X_{mi} + \varepsilon_i, \quad i = 1, \ldots\ldots, n \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

وفي واقع الآمر فإن هذه المعادلة هي واحدة من جملة معادلات يبلغ عددها (n) تكون نظام المعادلات الأتي:

$$\begin{array}{l} i = 1: Y_1 = \beta_0 + \beta_1 X_{11} + \beta_2 X_{12} + \ldots.. + \beta_k X_{1m} + \varepsilon_1 \\ i = 2: Y_2 = \beta_0 + \beta_1 X_{21} + \beta_2 X_{22} + \ldots.. + \beta_k X_{2m} + \varepsilon_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ i = n: Y_n = \beta_0 + \beta_1 X_{n1} + \beta_2 X_{n2} + \ldots.. + \beta_k X_{nm} + \varepsilon_n \end{array}$$

هذه المعادلة تتضمن ($m+1$) من المعلومات المطلوب تقديرها علما بأن الحد الأول منها β_0 يمثل الحد الثابت الآمر الذي يتطلب اللجوء إلى المصفوفات والمتجهات لتقدير تلك المعلمات، عليه يمكن صياغة هذه المعادلات في صورة مصفوفات كآلاتي[4] :

---

[3] Ben M'barek Alaya, Séries d'exercices Corrigés d'économétrie, Imprimere Officielle de la République Tunisienne, 2002, P14.

[4] Greenes .W, Econométrie, Pearson, France, 2005, P 10.

$$\begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ . \\ Y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & X_{11} & X_{12} & \dots & X_{1K} \\ 1 & X_{21} & X_{22} & \dots & X_{2K} \\ . & . & . & \dots & . \\ 1 & X_{n1} & X_{n2} & \dots & X_{nk} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_0 \\ B_1 \\ . \\ B_K \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ . \\ \varepsilon_n \end{bmatrix} \quad \dots (2)$$

وباختصار يمكن كتابة العلاقة السابقة كالآتي[5]:

$$Y = X\beta + \varepsilon$$

Y : متجه عمودي أبعاده $(n\times 1)$ يحتوي مشاهدات المتغير التابع.

X : مصفوفة أبعادها $(n\times m+1)$ تحتوي مشاهدات المتغيرات المستقلة يحتوي عمودها الأول على قيم الواحد الصحيح ليمثل الحد الثابت .

β : متجه عمودي أبعاده $(m+1\times 1)$ يحتوي على المعالم المطلوب تقديرها .

ε : متجه عمودي أبعاده $(n\times 1)$ يحتوي على الأخطاء العشوائية .

وبما أن المعادلة (1) هي العلاقة الحقيقية المجهولة والمراد تقديرها باستخدام الإحصاءات المتوفرة عن المتغير التابع Y والمتغيرات المستقلة $X_1, X_2, \dots, \dots, X_k$ ، فإنه يستوجب تحقق الفروض الأساسية الخاصة بـ ε_i التالية :

1.4. الفرضيات التي يقوم عليها نموذج الانحدار الخطي المتعدد:

إن بناء نموذج الانحدار الخطي المتعدد يجب أن يكون مستوفيا لعدد من الفرضيات التي يمكن إجمالها كما يلي[6]:

$H.1$ * المتغيرات المفسرة المهملة في النموذج لها أثر متوسط معدوم، أي القيمة المتوقعة لمتجه حد الخطأ تساوي صفرا أي أن: $E(\varepsilon_i)=0$

$$E(\varepsilon_i) = E\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ . \\ \varepsilon_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E(\varepsilon_1) \\ E(\varepsilon_2) \\ . \\ E(\varepsilon_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ . \\ 0 \end{bmatrix}$$

$H.2$ * تباين العناصر العشوائية ثابت، والتباين المشترك بينها يساوي صفرا أي أن [7]:

---

[5] Bourbonniais. R , Econométrie, 9 ème édition, Edition Dunod, Paris, 2015, p 48.
[6] Damodar Gujarati, Econometrics by Exemple, Palgrave Macmillan, USA, 2012, P9.
[7] Philippe Casin, OP.CIT, P96.

$$\begin{cases} \operatorname{var}(\varepsilon_i) = \sigma^2, & \forall i = 1........n \\ \operatorname{cov}(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = 0, & \forall i \neq j \end{cases}$$

$$E(\varepsilon\varepsilon') = E\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ . \\ \varepsilon_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 & \varepsilon 2 & ... & \varepsilon_n \end{bmatrix}$$

$$= E\begin{bmatrix} \varepsilon_1^2 & \varepsilon_1\varepsilon_2 & ... & \varepsilon_1\varepsilon_n \\ \varepsilon_2\varepsilon_1 & \varepsilon_2^2 & ... & \varepsilon_2\varepsilon_n \\ . & . & . & . \\ \varepsilon_n\varepsilon_1 & \varepsilon_n\varepsilon_2 & ... & \varepsilon_n^2 \end{bmatrix}$$

$$E(\varepsilon'\varepsilon) = \begin{bmatrix} E(\varepsilon_1^2) & E(\varepsilon_1\varepsilon_2) & .... & E(\varepsilon_1\varepsilon_n) \\ E(\varepsilon_2\varepsilon_1) & E(\varepsilon_2^2) & .... & E(\varepsilon_2\varepsilon_n) \\ . & . & ..... & . \\ E(\varepsilon_n\varepsilon_1) & E(\varepsilon_n\varepsilon_2) & .... & E(\varepsilon_n^2) \end{bmatrix}$$

$$E(\varepsilon\varepsilon') = \begin{bmatrix} \operatorname{var}(\varepsilon_1) & Cov(\varepsilon_1\varepsilon_2) & .... & Cov(\varepsilon_1\varepsilon_n) \\ Cov(\varepsilon_2\varepsilon_1) & Var(\varepsilon_2) & .... & Cov(\varepsilon_2\varepsilon_n) \\ . & . & .... & . \\ Cov(\varepsilon_n\varepsilon_1) & Cov(\varepsilon_n\varepsilon_2) & .... & Var(\varepsilon_n) \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} \operatorname{var}(\varepsilon_i) = E(\varepsilon^2{}_i) = \sigma^2 \\ \operatorname{cov}(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = 0, & \forall i \neq j \end{cases}$$

$$\Omega_\varepsilon = E(\varepsilon\varepsilon') = \begin{pmatrix} \sigma_\varepsilon^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_\varepsilon^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_\varepsilon^2 \end{pmatrix}$$

حيث أن: $\sigma_1{}^2 = \sigma^2{}_2 = \sigma^2 = ...\sigma^2{}_n$

$$\Omega_\varepsilon = E(\varepsilon\varepsilon') = \sigma^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = \sigma_\varepsilon^2 I_n$$

وتسمى المصفوفة العددية أعلاه بمصفوفة التباين والتباين المشترك لحد الخطأ ε_i، حيث تشكل العناصر القطرية في المصفوفة تباين قيم ε_i، بينما تبقى العناصر غير القطرية (أعلى وأسفل القطر) مساوية للصفر لانعدام التباين المشترك والترابط بين قيم ε_i .

* $H.3$ (X) مصفوفة غير عشوائية[8]، وتعني هذه الفرضية أنه إذا أخذنا عينة أخرى تتكون من (n) مشاهدة فإن المصفوفة (X) (مصفوفة المتغيرات المفسرة) تبقى دون تغيير، المصدر الوحيد للتغير هنا هو شعاع الخطأ العشوائي (ε)وهذا ما يؤثر على الشعاع (Y) أي : $\operatorname{cov}(X,\varepsilon)=E(X'\varepsilon)=0$.

* $H.4$ $\frac{1}{n}(X'X)$ تؤول إلى مصفوفة محدودة غير فردية.

* $H.5$ عدم وجود ارتباط خطي بين المتغيرات المستقلة كما أن عدد المشاهدات يجب أن يزيد على عدد المعلمات المطلوب تقديرها أي أن : $\rho(X)=m+1\prec n$ حيث أن ρ رتبة مصفوفة البيانات و m عدد المتغيرات المستقلة، وهي أصغر من عدد المشاهدات (n)، وهذه الفرضية ضرورية جدا لضمان أيجاد معكوس المصفوفة $(X'X)$ إذ أن عدم توفر هذا الفرض يجعل رتبة المصفوفة (X) اقل من $m+1$ وبالتالي فان رتبة $(X'X)$ التي تستخدم في الحصول على مقدرات المربعات الصغرى العادية بدورها اقل من $m+1$ ولا يمكن إيجاد معكوسا لها أي أن : $(X'X)^{-1}$ غير معرفة لن محدده يؤول إلى الصفر وهذا ما يسبب ما يسمى بمشكلة الارتباط الخطي المتعدد، وبالتالي لا يمكن الحصول على المقدرات باستخدام طريقة المربعات الصغرى العادية.

1.5. طرق تقدير معالم النموذج:

إذا كانت العلاقة بين الظاهرة المدروسة (Y_i) والعوامل المؤثرة فيها (X_i) هي علاقة خطية، فعادة ما تمثل بالنموذج التالي:

$$Y_i=\beta_0+\beta_1 X_{1i}+\beta_2 X_{2i}+\ldots+\beta_k X_{mi}+\varepsilon_i\,,\quad i=1,\ldots\ldots,n \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

وباستعمال طريقة المربعات الصغرى العادية وبإتباع نفس خطوات التقدير التي رأيناها في النموذج الخطي البسيط نستطيع تقدير النموذج الخطي المتعدد باستعمال الخطوات التالية:

[8] هاري كلجيان و والاس أونس، ترجمة السيد حجازي وعبد القادر عطية، مقدمة في الاقتصاد القياسي المبادئ والتطبيقات، النشر العلمي والمطابع - جامعة الملك سعود، المملكة العربية السعودية، 2001، ص 203.

في حالة وجود **متغيرين مستقلين فقط** وهي أبسط حالة لنموذج الانحدار المتعدد تكون صيغة النموذج كما يلي:

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_{i1} + \beta_2 X_{i2} + e_i \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 1$$

النموذج المقدر هو:

$$Y_i = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X_{i1} + \hat{\beta}_2 X_{i2} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 2$$

حيث أن:

$\hat{\beta}_2, \hat{\beta}_1, \hat{\beta}_0$ هي مقدرات $\beta_2, \beta_1, \beta_0$ على الترتيب.

تهدف هذه الطريقة إلى إيجاد تقدير للشعاع β الذي يُصَغِّر مجموع مربعات الانحراف $\hat{\varepsilon}_i$ بين القيمة المقدرة $\hat{Y}$ والقيمة الحقيقية Y أي:

$$Min\sum_{i=1}^{n}\hat{e}_i^2 = Min\sum_{i=1}^{n}\left(Y_i - \hat{Y}_i\right)^2$$

$$\hat{e}_i = Y_i - \hat{Y}_i \qquad i = 1 \ldots\ldots n$$

ومن خلال التعويض عن $\hat{Y}_i$ بما يساويها وأخذ المشتقات الجزئية بالنسبة إلى $\hat{\beta}_2, \hat{\beta}_1, \hat{\beta}_0$ ومساواتها بالصفر نحصل على:

الشرط اللازم لتدنية قيمة $\sum_{i=1}^{n} e_i^2$ هو أن تكون المشتقات الجزئية بالنسبة ل $\hat{\beta}_2, \hat{\beta}_1, \hat{\beta}_0$ معدومة أي[9]:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial\hat{\beta}_0}\sum_i \left(Y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 X_{1i} - \hat{\beta}_{2i}\right)^2 = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 3 \\ \dfrac{\partial}{\partial\hat{\beta}_1}\sum_i \left(Y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 X_{1i} - \hat{\beta}_{2i}\right)^2 = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 4 \\ \dfrac{\partial}{\partial\hat{\beta}_2}\sum_i \left(Y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 X_{1i} - \hat{\beta}_2 X_{2i}\right)^2 = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 5 \end{cases}$$

$$3 \Rightarrow \; -2\sum_i \left(Y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 X_{1i} - \hat{\beta}_2 X_{2i}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \; \sum_i Y_i = n\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 \sum X_{1i} + \hat{\beta}_2 . \sum X_{2i} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 6$$

المعادلة رقم: (6) تعبر عن ما يسمى بالمعادلة الطبيعية الأولى.

[9] Jack Johnston& John Dinardo., Méthodes économétrique, Economica, Paris, 1999, p 21-21.

$$-2\sum_i \left(Y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 X_{1i} - \hat{\beta}_2 X_{2i}\right)^2 \left(X_{1i}\right) = 0$$

$4 \Rightarrow$

$$\sum_i \left(Y_i X_{1i}\right) = \hat{\beta}_0 \sum_i X_{1i} + \hat{\beta}_1 \sum_i X_{1i}^{\ 2} + \hat{\beta}_2 \sum X_{1i} X_{2i} \ldots\ldots\ldots\ldots.7$$

المعادلة رقم: (7) تعبر عن ما يسمى بالمعادلة الطبيعية الثانية.

$$-2\sum_i \left(Y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 X_{1i} - \hat{\beta}_2 X_{2i}\right)^2 \left(X_{2i}\right) = 0$$

$5 \Rightarrow$

$$\sum_i \left(Y_i X_{2i}\right) = \hat{\beta}_0 \sum_i X_{2i} + \hat{\beta}_1 \sum_i X_{1i} X_{2i} + \hat{\beta}_2 \sum X_{2i}^{\ 2} \ldots\ldots\ldots\ldots.8$$

المعادلة رقم: (8) تعبر عن ما يسمى بالمعادلة الطبيعية الثالثة.

وتمثل المعادلات (6) و (7) و (8) المعادلات الطبيعية الثلاث التي تستخدم في تقدير المعالم الثلاثة المجهولة $\hat{\beta}_2, \hat{\beta}_1, \hat{\beta}_0$ وهذه المعادلات يمكن حلها بإحدى الطرق الآتية:

طريقة المحددات:

يمكن أن تحل هذه المعادلات بواسطة قاعدة كرا يمر للحصول على قيم $\hat{\beta}_K$ من المعلمات وعلى النحو الآتي[10]:

$$\sum_i Y_i = n\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 \sum X_{1i} + \hat{\beta}_2 . \sum X_{2i} .$$

$$\sum_i \left(Y_i X_{1i}\right) = \hat{\beta}_0 \sum_i X_{1i} + \hat{\beta}_1 \sum_i X_{1i}^{\ 2} + \hat{\beta}_2 \sum X_{1i} X_{2i}$$

$$\sum_i \left(Y_i X_{2i}\right) = \hat{\beta}_0 \sum_i X_{2i} + \hat{\beta}_1 \sum_i X_{1i} X_{2i} + \hat{\beta}_2 \sum X_{2i}^{\ 2}$$

$$\begin{bmatrix} \sum Y_i \\ \sum Y_i X_{1i} \\ \sum Y_i X_{2i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n & \sum X_{1i} & \sum X_{2i} \\ \sum X_{1i} & \sum X_{1i}^2 & \sum X_{1i} X_{2i} \\ \sum X_{2i} & \sum X_{1i} X_{2i} & \sum X_{2i}^2 \end{bmatrix}$$

[10] فارس عياد شاكر و عزت قناوي، مبادئ الاقتصاد القياسي والرياضي، دار العلم للنشر والتوزيع بالفيوم، مصر، 2006، ص63.

ولتقدير β_0 وβ_1 وβ_2 ينبغي تكوين المحددات الآتية:

$$|D| = \begin{vmatrix} n & \sum X_{1i} & \sum X_{2i} \\ \sum X_{1i} & \sum X_{1i}^2 & \sum X_{1i}X_{2i} \\ \sum X_{2i} & \sum X_{1i}X_{2i} & \sum X_{2i}^2 \end{vmatrix}$$

$$|D_0| = \begin{vmatrix} \sum Y_i & \sum X_{1i} & \sum X_{2i} \\ \sum X_{1i}Y_i & \sum X_{1i}^2 & \sum X_{1i}X_{2i} \\ \sum X_{2i}Y_i & \sum X_{1i}X_{2i} & \sum X_{2i}^2 \end{vmatrix}$$

$$|D_1| = \begin{vmatrix} n & \sum Y_1 & \sum X_{2i} \\ \sum X_{1i} & \sum X_{1i}Y_i & \sum X_{1i}X_{2i} \\ \sum X_{2i} & \sum X_{2i}Y_i & \sum X_{2i}^2 \end{vmatrix}$$

$$|D_2| = \begin{vmatrix} n & \sum X_{1i} & \sum Y_i \\ \sum X_{1i} & \sum X_{1i}^2 & \sum X_{1i}Y_i \\ \sum X_{2i} & \sum X_{1i}X_{2i} & \sum X_{2i}Y_i \end{vmatrix}$$

$$\hat{\beta}_0 = \frac{|D_0|}{|D|} = \frac{\begin{vmatrix} \sum Y_i & \sum X_{1i} & \sum X_{2i} \\ \sum X_{1i}Y_i & \sum X_{1i}^2 & \sum X_{1i}X_{2i} \\ \sum X_{2i}Y_i & \sum X_{1i}X_{2i} & \sum X_{2i}^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} n & \sum X_{1i} & \sum X_{2i} \\ \sum X_{1i} & \sum X_{1i}^2 & \sum X_{1i}X_{2i} \\ \sum X_{2i} & \sum X_{1i}X_{2i} & \sum X_{2i}^2 \end{vmatrix}}$$

$$\hat{\beta}_1 = \frac{|D_1|}{|D|} = \frac{\begin{vmatrix} n & \sum Y_1 & \sum X_{2i} \\ \sum X_{1i} & \sum X_{1i}Y_i & \sum X_{1i}X_{2i} \\ \sum X_{2i} & \sum X_{2i}Y_i & \sum X_{2i}^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} n & \sum X_{1i} & \sum X_{2i} \\ \sum X_{1i} & \sum X_{1i}^2 & \sum X_{1i}X_{2i} \\ \sum X_{2i} & \sum X_{1i}X_{2i} & \sum X_{2i}^2 \end{vmatrix}}$$

$$\hat{\beta}_2 = \frac{|D_2|}{|D|} = \frac{\begin{vmatrix} n & \sum X_{1i} & \sum Y_i \\ \sum X_{1i} & \sum X_{1i}^2 & \sum X_{1i}Y_i \\ \sum X_{2i} & \sum X_{1i}X_{2i} & \sum X_{2i}Y_i \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} n & \sum X_{1i} & \sum X_{2i} \\ \sum X_{1i} & \sum X_{1i}^2 & \sum X_{1i}X_{2i} \\ \sum X_{2i} & \sum X_{1i}X_{2i} & \sum X_{2i}^2 \end{vmatrix}}$$

طريقة المصفوفات:

تهدف هذه الطريقة إلى إيجاد تقدير للشعاع β الذي يُصَغِّر مجموع مربعات الانحراف $\hat{\varepsilon}_i$ بين القيمة المقدرة $\hat{Y}$ والقيمة الحقيقية Y.

الصيغة الرياضية لتقدير الشعاع β تكتب على الشكل التالي[11]:

$$\hat{\beta} = (X'X)^{-1}(X'Y)$$

حيث أن:

(X): مصفوفة رتبتها $m+1$.

$(X'X)$: مصفوفة مربعة $((m+1)\times(m+1))$ رتبتها $m+1$ ، وهي على الشكل التالي:

$$(X'X) = \begin{bmatrix} n & \sum X_{1i} & \sum X_{2i} \\ \sum X_{1i} & \sum X_{1i}^2 & \sum X_{1i}X_{2i} \\ \sum X_{2i} & \sum X_{1i}X_{2i} & \sum X_{2i}^2 \end{bmatrix}$$

(X') : مقلوب المصفوفة.

$(X'X)^{-1}$: معكوس المصفوفة، حيث أن: $(X'X)^{-1} = \frac{1}{(X'X)}\overline{(X'X)}$

$\overline{(X'X)}$: المصفوفة المرافقة، حيث أن: $\overline{(X'X)} = a_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$

M_{ij} : المحدد بعد حذف السطر والعمود.

$(X'Y)$: شعاع يكتب على الشكل التالي: $(X'Y) = \begin{bmatrix} \sum Y_i \\ \sum Y_i X_{1i} \\ \sum Y_i X_{2i} \end{bmatrix}$

B_i : شعاع يكتب على الشكل التالي: $B_i = \begin{bmatrix} B_0 \\ B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}$

البرهان:

لدينا: $Y = XB$

من الشرط الأساسي للمربعات الصغرى:

---

[11] Bournonniais. R, OP.CIT, P49.

$$\Rightarrow \quad e = Y - \hat{Y} = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix}$$

$$Min \sum_{i=1}^{n} \hat{e}_i^2 = Min \sum_{i=1}^{n} \left(Y_i - \hat{Y}_i\right)^2$$

$$\hat{e}_i = Y_i - \hat{Y}_i \qquad i = 1 \ldots\ldots n$$

$$Min \sum_{i=1}^{n} \left(Y_i - \hat{Y}_i\right)^2 = Min \left(Y - \hat{Y}\right)' \left(Y - \hat{Y}\right) = Min\, e'e$$

وبتعويض قيمة Y بما يعادلها نجد:

$$Min\,(e'e) = \left(Y - \hat{Y}\right)' \left(Y - \hat{Y}\right) = \hat{Y}'\hat{Y} - 2\hat{Y}'Y + Y'Y = \hat{\beta}'X'X\hat{\beta} - 2\hat{\beta}'X'Y + Y'Y$$

للحصول على النهاية الصغرى فيجب أن يحقق الشرط الضروري:

$$\frac{\partial \sum e_i^2}{\partial \hat{\beta}'} = 0 \Leftrightarrow 2(X'X)\hat{\beta} - 2X'Y = 0$$

وبما أن رتبة (X) هي $m+1$ فإن : $(X'X)$ مصفوفة مربعة $\left((m+1)\times(m+1)\right)$ رتبتها $m+1$ وتقبل معكوس $(X'X)^{-1}$.

ومنه: $2(X'X)\hat{\beta} - 2X'Y = 0 \quad \Rightarrow (X'X)\hat{\beta} - X'Y = 0$

نضرب طرفي المعادلة بـ $(X'X)^{-1}$ لنحصل على : $\boxed{\hat{\beta} = (X'X)^{-1}X'Y}$ وهو تقدير لـ β .

وللتأكد من أن $\hat{\beta}$ المتحصل عليه هو قيمة دنيا لـ $\sum e_i^2$ ، يجب تحقيق الشرط من الدرجة الثانية:

$\frac{\partial^2 \sum e_i^2}{\partial \hat{\beta}' \partial \hat{\beta}} = (X'X) > 0$ وهي مصفوفة موجبة معرفة ومنه فإن $\hat{\beta}$ هو نهاية صغرى.

طريقة الانحرافات:

لدينا:

$$\sum_i Y_i = n\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 \sum X_{1i} + \hat{\beta}_2 . \sum X_{2i} .$$

$$\sum_i (Y_i X_{1i}) = \hat{\beta}_0 \sum_i X_{1i} + \hat{\beta}_1 \sum_i X_{1i}^2 + \hat{\beta}_2 \sum X_{1i} X_{2i}$$

$$\sum_i (Y_i X_{2i}) = \hat{\beta}_0 \sum_i X_{2i} + \hat{\beta}_1 \sum_i X_{1i} X_{2i} + \hat{\beta}_2 \sum X_{2i}^2$$

من الممكن الحصول على المقدرات **باستخدام الانحرافات** وذلك بواسطة y و x عن وسطهما الحسابي:

$$y_i = (Y_i - \bar{Y})$$

$$x_{1i} = (X_{1i} - \bar{X}_1)$$

$$x_{2i} = (X_{2i} - \bar{X}_2)$$

إذن تصبح معادلة الانحدار بالمعطيات المركزة بالشكل الآتي:

$Y_i = \beta_1 X_{i1} + \beta_2 X_{i2} + e_i$ ....1 نلاحظ من هذه المعادلة أن الحد الثابت لا يوجد.

وفي واقع الآمر فإن هذه المعادلة هي واحدة من جملة معادلات يبلغ عددها (n) تكون نظام المعادلات الآتي[12]:

$$\begin{aligned}
i = 1 &: Y_1 = \beta_1 X_{11} + \beta_2 X_{12} + \ldots + \beta_k X_{1k} + e_1 \\
i = 2 &: Y_2 = \beta_1 X_{21} + \beta_2 X_{22} + \ldots + \beta_k X_{2k} + e_2 \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
i = n &: Y_n = \beta_1 X_{n1} + \beta_2 X_{n2} + \ldots + \beta_k X_{nk} + e_n
\end{aligned}$$

هذه المعادلة تتضمن $(m+1)$ من المعلومات المطلوب تقديرها علما بان الحد الأول منها β_0 يمثل الحد الثابت الأمر الذي يتطلب اللجوء إلى المصفوفات والمتجهات لتقدير تلك المعلمات، عليه يمكن صياغة هذه المعادلات في صورة مصفوفات كالآتي:

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ . \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & x_{11} & x_{12} & \ldots & x_{1K} \\ & x_{21} & x_{22} & \ldots & x_{2K} \\ . & . & . & \ldots & . \\ & x_{n1} & x_{n2} & \ldots & x_{nk} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_1 \\ . \\ B_K \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ . \\ \varepsilon_n \end{bmatrix} \quad \ldots.\ (2)$$

وباختصار يمكن كتابة العلاقة السابقة كالآتي:

$$y = x\beta + e$$

y : متجه عمودي أبعاده $(n \times 1)$ يحتوي مشاهدات المتغير التابع .

---

[12] فارس عياد شاكر و عزت قناوي، مرجع سبق ذكره، ص 65.

x : مصفوفة أبعادها ($n \times m$) تحتوي مشاهدات المتغيرات المستقلة لا يحتوي عمودها الأول على قيم الواحد الصحيح لأنه لا يوجد الحد الثابت .

β : متجه عمودي أبعاده ($m \times 1$) يحتوي على المعالم المطلوب تقديرها .

e : متجه عمودي أبعاده ($n \times 1$) يحتوي على الأخطاء العشوائية .

مثلا يمكننا ببساطة إيجاد $\hat{\beta}_2, \hat{\beta}_1$ كالآتي:

لدينا :

$$Min\sum_{i=1}^{n}\hat{\varepsilon}_i^2 = Min\sum_{i=1}^{n}(y_i - \ddot{y}_i)^2$$
$$\hat{\varepsilon}_i = y_i - \hat{y}_i \qquad i = 1.......n$$
$$Min\sum_{i=1}^{n}(y_i - \hat{y}_i)^2 = Min(y - \hat{y})'(y - \hat{y}) = Min\, e'e$$
$$\Rightarrow \quad e = y - \hat{y} = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix}$$

$$Min(e'e) = (y-\hat{y})'(y-\hat{y}) = \hat{y}'\hat{y} - 2\hat{y}'y + y'y = \hat{\beta}'x'x\hat{\beta} - 2\hat{\beta}'x'y + y'y$$

للحصول على النهاية الصغرى فيجب أن يحقق الشرط الضروري:

$$\frac{\partial \sum e_i^{\,2}}{\partial \hat{\beta}'} = 0 \Leftrightarrow 2(x'x)\hat{\beta} - 2x'y = 0$$

وبما أن رتبة (X) هي m فإن : $(x'x)$ مصفوفة مربعة $((m)\times(m))$ رتبتها m وتقبل معكوس $(x'x)^{-1}$

.

ومنه: $2(x'x)\hat{\beta} - 2x'y = 0 \quad \Rightarrow (x'x)\hat{\beta} - x'y = 0$

نضرب طرفي المعادلة بـ $(x'x)^{-1}$ لنحصل على:

$\hat{\beta} = (x'x)^{-1}x'y$ وهو تقدير لـ β .

في حالة وجود **متغيرين مستقلين فقط** تأخذ المصفوفات الشكل التالي:

$$(x'x) = \begin{pmatrix} \sum x_{1i}^{\;2} & \sum x_{1i}x_{2i} \\ \sum x_{2i}x_{1i} & \sum x_{2i}^{\;2} \end{pmatrix} \quad \text{و} \quad (x'y) = \begin{bmatrix} \sum x_{1i}y_i \\ \sum x_{2i}y_i \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \hat{B}_1 \\ \hat{B}_2 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \sum x_{1i}^{\ 2} & \sum x_{1i} x_{2i} \\ \sum x_{2i} x_{1i} & \sum x_{2i}^{\ 2} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \sum x_{1i} y_i \\ \sum x_{2i} y_i \end{bmatrix}$$

يمكننا ايجا عناصر هذه المصفوفة انطلاقا من المعطيات الأصلية كما يلي :

$$\sum x_{1i} y_i = \sum X_{1i} Y_i - \frac{\sum X_{1i} \sum Y_i}{n}$$

$$\sum x_{2i} y_i = \sum X_{2i} Y_i - \frac{\sum X_{2i} \sum Y_i}{n}$$

$$\sum x_{1i} x_{2i} = \sum X_{1i} X_{2i} - \frac{\sum X_{1i} \sum X_{2i}}{n}$$

$$\sum x_{1i}^{\ 2} = \sum X_{1i}^{\ 2} - \frac{\left(\sum X_{1i}\right)^2}{n}$$

$$\sum x_{2i}^{\ 2} = \sum X_{2i}^{\ 2} - \frac{\left(\sum X_{2i}\right)^2}{n}$$

$$\sum y_i^{\ 2} = \sum Y_i^{\ 2} - \frac{\left(\sum Y_i\right)^2}{n}$$

أما $\hat{\beta}_0$ فيحسب بالطريقة التالية:

$$\hat{\beta}_0 = \bar{Y} - \hat{\beta}_1 \bar{X}_1 - \hat{\beta}_2 \bar{X}_2$$

كما يمكن تقدير $\hat{\beta}_1$ و $\hat{\beta}_2$ بواسطة انحرافات المتغيرين X_i وY_i عن وسطهم الحسابي بطريقة أخرى وفق العلاقات التالية[13]:

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum_i yx_{1i} \sum_i x_{2i}^{\ 2} - (\sum_i yx_{2i})(\sum_i x_{2i} x_{1i})}{\sum_i x_{1i}^{\ 2} \sum_i x_{2i}^{\ 2} - (\sum_i x_{2i} x_{1i})^2}$$

[13] Damodar .N, Gurjarati, Dawn C. Porter, Basic Econometrics, Fiftin Edition, McGraw-Hill, USA,2008, P193.

$$\hat{\beta}_2 = \frac{\sum_i yx_{2i} \sum_i x_{1i}^2 - (\sum_i yx_{1i})(\sum_i x_{2i} x_{1i})}{\sum_i x_{1i}^2 \sum_i x_{2i}^2 - (\sum_i x_{2i} x_{1i})^2}$$

مثال 1:

أعطي لك الجدول التالي الذي يمثل بعلاقة خطية من الشكل: $Y_i = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X_{i1} + \hat{\beta}_2 X_{i2}$

المطلوب: تقدير معالم النموذج بمختلف الطرق؟

N	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Y	40	44	46	48	52	58	60	68	74	80
X_1	6	10	12	14	16	18	22	24	26	32
X_2	4	4	5	7	9	12	14	20	21	24

الحـل:

تقدير معالم النموذج $Y_i = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X_{i1} + \hat{\beta}_2 X_{i2}$:

N	**Y**	**X_1**	**X_2**	**X_1Y**	**X_2Y**	**X_1^2**	**X_2^2**	**X_1X_2**	**Y^2**
1	40	6	4	240	160	36	16	24	1600
2	44	10	4	440	176	100	16	40	1936
3	46	12	5	552	230	144	25	60	2116
4	48	14	7	672	336	196	49	98	2304
5	52	16	9	832	468	256	81	144	2704
6	58	18	12	1044	696	324	144	216	3364
7	60	22	14	1320	840	484	196	308	3600
8	68	24	20	1632	1360	576	400	480	4624
9	74	26	21	1924	1554	676	441	546	5476
10	80	32	24	2560	1920	1024	576	768	6400
المجموع	**570**	**180**	**120**	**11216**	**7740**	**3816**	**1944**	**2684**	**34124**

طريقة المحددات:

لتقدير β_0 وβ_1 وβ_2 ينبغي تكوين المحددات الآتية:

$$|D| = \begin{vmatrix} n & \sum X_{1i} & \sum X_{2i} \\ \sum X_{1i} & \sum X_{1i}^2 & \sum X_{1i}X_{2i} \\ \sum X_{2i} & \sum X_{1i}X_{2i} & \sum X_{2i}^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 10 & 180 & 120 \\ 180 & 3816 & 2684 \\ 120 & 2684 & 1944 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} &= (10*(3816*1944) - (2684*2684)) \\ = \quad &-(180*(180*1944) - (2684*120)) \\ &+(120*(180*2684) - (3816*120)) \\ &= 157280 \end{aligned}$$

$$|D_0| = \begin{vmatrix} \sum Y_i & \sum X_{1i} & \sum X_{2i} \\ \sum X_{1i}Y_i & \sum X_{1i}^2 & \sum X_{1i}X_{2i} \\ \sum X_{2i}Y_i & \sum X_{1i}X_{2i} & \sum X_{2i}^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 570 & 180 & 120 \\ 11216 & 3816 & 2684 \\ 7740 & 2684 & 1944 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} &= (570*(3816*1944) - (2684*2684)) \\ &-(180*(11216*1944) - (2684*7740)) \\ &+(120*(11216*2684) - (3816*7740)) \\ &= 5029920 \end{aligned}$$

$$|D_1| = \begin{vmatrix} n & \sum Y_1 & \sum X_{2i} \\ \sum X_{1i} & \sum X_{1i}Y_i & \sum X_{1i}X_{2i} \\ \sum X_{2i} & \sum X_{2i}Y_i & \sum X_{2i}^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 10 & 570 & 120 \\ 180 & 11216 & 2684 \\ 120 & 7740 & 1944 \end{vmatrix} = 102240$$

$$= \ |D_2| = \begin{vmatrix} n & \sum X_{1i} & \sum Y_i \\ \sum X_{1i} & \sum X_{1i}^2 & \sum X_{1i}Y_i \\ \sum X_{2i} & \sum X_{1i}X_{2i} & \sum X_{2i}Y_i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 10 & 180 & 570 \\ 180 & 3816 & 11216 \\ 120 & 2684 & 7740 \end{vmatrix} = 174560$$

$$\hat{\beta}_0 = \frac{|D_0|}{|D|} = \frac{5029920}{157280} = 31.98$$

$$\hat{\beta}_1 = \frac{|D_1|}{|D|} = \frac{102240}{157280} = 0.65$$

$$\hat{\beta}_2 = \frac{|D_2|}{|D|} = \frac{174280}{157280} = 1.10$$

ومنه: $Y_i = 31.98 + 0.65X_{i1} + 1.10X_{i2}$

طريقة المصفوفات: $Y = XB$

حيث: $\hat{\beta} = (X'X)^{-1}(X'Y)$

$$(X'X)=\begin{bmatrix} n & \sum X_{1i} & \sum X_{2i} \\ \sum X_{1i} & \sum X_{1i}^2 & \sum X_{1i}X_{2i} \\ \sum X_{2i} & \sum X_{1i}X_{2i} & \sum X_{2i}^2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 10 & 180 & 120 \\ 180 & 3816 & 2684 \\ 120 & 2684 & 1944 \end{bmatrix}=157280$$

$$(X'Y)=\begin{bmatrix} \sum Y_i \\ \sum Y_i X_{1i} \\ \sum Y_i X_{2i} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 570 \\ 11216 \\ 7740 \end{bmatrix}$$

$$\overline{(X'X)}=a_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}=\begin{bmatrix} 214448 & -27840 & 25200 \\ -27840 & 5040 & -5240 \\ 25200 & -5240 & 5760 \end{bmatrix}$$

$$(X'X)^{-1}=\frac{1}{(X'X)}\overline{(X'X)}=\frac{1}{157280}\begin{bmatrix} 214448 & -27840 & 25200 \\ -27840 & 5040 & -5240 \\ 25200 & -5240 & 5760 \end{bmatrix}$$

ومنه:

$$\hat{\beta}=(X'X)^{-1}(X'Y)=\begin{bmatrix} 214448 & -27840 & 25200 \\ -27840 & 5040 & -5240 \\ 25200 & -5240 & 5760 \end{bmatrix}*\begin{bmatrix} \frac{570}{157280} \\ \frac{11216}{157280} \\ \frac{7740}{157280} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 31.98 \\ 0.65 \\ 1.10 \end{bmatrix}$$

ومنه: $Y_i=31.98+0.65X_{i1}+1.10X_{i2}$

طريقة الانحرافات:

$$Y_i=\hat{\beta}_0+\hat{\beta}_1 X_{i1}+\hat{\beta}_2 X_{i2}$$

$$y_i=\left(Y_i-\overline{Y}\right)$$

$$x_{1i}=\left(X_{1i}-\overline{X}_1\right)$$

$$x_{2i}=\left(X_{2i}-\overline{X}_2\right)$$

$$y=xB$$

حيث: $\hat{\beta}=(x'x)^{-1}(x'y)$

$$(x'x)=\begin{pmatrix}\sum x_{1i}^{2} & \sum x_{1i}x_{2i}\\ \sum x_{2i}x_{1i} & \sum x_{2i}^{2}\end{pmatrix} \qquad (x'y)=\begin{bmatrix}\sum x_{1i}y_i\\ \sum x_{2i}y_i\end{bmatrix}$$

$$\sum x_{1i}y_i=\sum X_{1i}Y_i-\frac{\sum X_{1i}\sum Y_i}{n}=11216-\frac{180*570}{10}=956$$

$$\sum x_{2i}y_i=\sum X_{2i}Y_i-\frac{\sum X_{2i}\sum Y_i}{n}=7740-\frac{120*570}{10}=900$$

$$\sum x_{1i}x_{2i}=\sum X_{1i}X_{2i}-\frac{\sum X_{1i}\sum X_{2i}}{n}=2684-\frac{180*120}{10}=524$$

$$\sum x_{1i}^{2}=\sum X_{1i}^{2}-\frac{\left(\sum X_{1i}\right)^2}{n}=3816-\frac{(180)^2}{10}=576$$

$$\sum x_{2i}^{2}=\sum X_{2i}^{2}-\frac{\left(\sum X_{2i}\right)^2}{n}=1944-\frac{(120)^2}{10}=504$$

$$\sum y_i^{2}=\sum Y_i^{2}-\frac{\left(\sum Y_i\right)^2}{n}=34124-\frac{(570)^2}{10}=1634$$

ومنه:

$$(x'x)=\begin{pmatrix}\sum x_{1i}^{2} & \sum x_{1i}x_{2i}\\ \sum x_{2i}x_{1i} & \sum x_{2i}^{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}576 & 524\\ 524 & 504\end{pmatrix}=15728$$

$$(x'y)=\begin{bmatrix}\sum x_{1i}y_i\\ \sum x_{2i}y_i\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}956\\ 900\end{bmatrix}$$

$$\overline{(x'x)}=a_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}=\begin{bmatrix}504 & -524\\ -524 & 576\end{bmatrix}$$

$$(x'x)^{-1}=\frac{1}{(X'X)}\overline{(X'X)}=\frac{1}{15728}\begin{bmatrix}504 & -524\\ -524 & 576\end{bmatrix}$$

ومنه:

$$\hat{\beta}=\left(x'x\right)^{-1}\left(x'y\right)=\begin{bmatrix}504 & -524\\ -524 & 576\end{bmatrix}*\begin{bmatrix}\dfrac{956}{15728}\\ \dfrac{900}{15728}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.65\\ 1.10\end{bmatrix}$$

بطريقة أخرى يمكن تقدير b_1 و b_2 كالتالي:

N	y	x_1	x_2	x_1y	x_2y	x_1^2	x_2^2	x_1x_2	y^2
1	-17	-12	-8	204	136	144	64	96	289
2	-13	-8	-8	104	104	65	64	64	169
3	-11	-6	-7	66	77	36	49	42	121
4	-9	-4	-5	36	45	16	25	20	81
5	-5	-2	-3	10	15	4	9	6	25
6	1	0	0	0	0	0	0	0	1
7	3	4	2	12	6	16	4	8	9
8	11	6	8	66	88	36	64	48	121
9	17	8	9	136	153	64	81	72	289
10	23	14	12	322	276	196	144	168	529
المجموع	**0**	**0**	**0**	**956**	**900**	**576**	**504**	**524**	**1634**

$$\hat{\beta}_1=\frac{\sum_i yx_{1i}\sum_i x_{2i}^2-(\sum_i yx_{2i})(\sum_i x_{2i}x_{1i})}{\sum_i x_{1i}^2\sum_i x_{2i}^2-(\sum_i x_{2i}x_{1i})^2}=\frac{956*576-(900)(524)}{576*504-(524)^2}=0.65$$

$$\hat{\beta}_2=\frac{\sum_i yx_{2i}\sum_i x_{1i}^2-(\sum_i yx_{1i})(\sum_i x_{2i}x_{1i})}{\sum_i x_{1i}^2\sum_i x_{2i}^2-(\sum_i x_{2i}x_{1i})^2}=\frac{900*576-(956)(524)}{576*504-(524)^2}=1.10$$

$$\hat{\beta}_0=\bar{Y}-\hat{\beta}_1\bar{X}_1-\hat{\beta}_2\bar{X}_2=57-0.65(18)-1.10(12)=31.98$$

ومنه: $Y_i=31.98+0.65X_{i1}+1.10X_{i2}$

1.6. الخصائص الإحصائية للمعالم المقدرة:

إن مقدرات المربعات الصغرى في الانحدار الخطي المتعدد لا تختلف عن خصائص مقدرات الانحدار البسيط، لكن الاختلاف في الشكل المصفوفي وما يتطلبه من معالجة خاصة.

خاصية عدم التحيز[14]:

لدينا: $\hat{\beta} = (X'X)^{-1}X'Y$..............01

و أيضا : $Y = X\beta + e$

بتعويض قيمة Y في المعادلة 01 نجد:

$$\hat{\beta} = (X'X)^{-1}X'[X\beta + \varepsilon] = (X'X)^{-1}X'X\beta + (X'X)^{-1}X'\varepsilon \Rightarrow \hat{\beta} = \beta + (X'X)^{-1}X'\varepsilon$$

$$\hat{\beta} = \beta + (X'X)^{-1}X'\varepsilon \text{..............................02}$$

بإدخال التوقع الرياضي :

$$E(\hat{\beta}) = \beta + (X'X)^{-1}X'E(e) \quad / \quad E(\varepsilon) = 0$$

نتحصل على: $\boxed{E(\hat{\beta}) = \beta}$

نستنتج أن $\hat{\beta}$ المحصل عليه بطريقة المربعات الصغرى مقدرة غير متحيزة.

خاصية الاتساق:

بما أن $\hat{\beta}$ تحقق الشروط:

$$E(\hat{\beta}) = \beta$$

$$\lim_{n\to\infty} \Omega_{\hat{\beta}} = 0$$

فإن المقدرات $\hat{\beta}$ هي مقدرات متسقة للمعالم $\hat{\beta}$.

1.7. التباينات:

تقدير تباين الأخطاء σ_{ε}^{2} :

[14] Jack Johnston& John Dinardo, Econometric Methods, fourth Edition McGraw-Hill Companies, USA, 1996, P87.

حسب نظرية " Gausse – Marcov" والتي تقول من بين المقدرات الخطية وغير المتحيزة، تكون مقدرات طريقة المربعات الصغرى العادية "OLS" أفضل مقدرات خطية غير متحيزة " BLUE " حيث أن لها أصغر تباين ممكن مقارنة مع بقية المقدرات الخطية وغير المتحيزة الأخرى.

تتضمن هذه النظرية خاصية أقل تباين للمقدرات ويمكن البرهنة عليها بعد إيجاد تباينات المقدرات كما يلي[15]:

لدينا:

$$\hat{e} = Y - X\hat{\beta} = X\beta + e - X\hat{\beta} = e - X(\hat{\beta} - \beta) = e - X(X'X)^{-1}X'e = (I_n - X(X'X)^{-1}X')e$$

نضع : $M_X = (I_n - X(X'X)^{-1}X')$ ، حيث M_X *تسمى المصفوفة الدورية* أي :

$$M_X = M'_X M_X = M_X^2 = M'$$

بالإضافة إلى ذلك : $M_X X = 0$

ومنه: $e'e = e'M'_X M_X e$ أي : $e'e = e'M_X e$

ندخل التوقع الرياضي على الطرفين : $E(e'e) = E(e'M_X e)$

ويجب الملاحظة أن أثر $e'e$ يساوي أثر $e'Me$ ، ونعلم أيضا أن أثر (AB)=أثر (BA).

يكون لدينا إذن : أثر $(e'Me)$=أثر $(ee'M)$

$$E(ee') = E(ee')Tr(M_X)$$

نعلم أن: $E(ee') = \sigma^2$ وعليه: $E(ee') = \sigma^2\{Tr(I_n) - Tr(X(X'X)^{-1}X')\}$

ومنه : $E(e'e) = \sigma^2(n - m - 1)$

حيث : $Tr(X(X'X)^{-1}X') = m + 1$ $Tr(I_n) = n$;

لكي نحصل على تقدير غير متحيز لـ σ^2 يكفي قسمة العبارة على: $(n - m - 1)$

$$E\left(\frac{e'e}{n-m-1}\right) = \sigma^2$$

[15] Jack Johnston& John Dinardo, OP.CIT, P89.

في حالة الانحدار المتعدد حيث هناك $m+1$ معلم للتقدير و n عدد المشاهدات، وهذا يُعطي عدد درجات الحرية $n-m-1$ ، إذن :

$$\hat{\sigma}_e^2 = \frac{e'e}{n-m-1} = \frac{\sum_{i=1}^{n} e_i^2}{n-m-1}$$

تباين المقدرات:

إن قيمة عناصر مصفوفة التباين والتباين المشترك للمعالم المقدرة تحسب وفق العلاقة التالية[16]:

$$\Omega_{\hat{\beta}} = \sigma_e^2 \left(X'X\right)^{-1}$$

لدينا:

$$\Omega_{\hat{\beta}} = Var(\hat{\beta}) = E\left[\left(\hat{\beta}-\beta\right)\left(\hat{\beta}-\beta\right)'\right] \text{.........................03}$$

من المعادلة رقم 02 نجد:

$$\hat{\beta}-\beta = (X'X)^{-1}X'e$$

نعوض $\hat{\beta}-\beta$ في المعادلة رقم 03 نجد:

$$\Omega_{\hat{\beta}} = E\left[\left((X'X)^{-1}X'e\right)\left(\left(X'X\right)^{-1}X'e\right)'\right]$$

$$\Omega_{\hat{\beta}} = E\left[\left(X'X\right)X'ee'X\left(X'X\right)^{-1}\right]$$

بإدخال التوقع الرياضي :

$$\Omega_{\hat{\beta}} = \left[\left(X'X\right)X'E\ \left(ee'\right)X\ \ \left(X'X\right)^{-1}\right] \text{..................04}$$

لدينا : $\Omega_B = Var(\hat{\beta}) = E(ee') = \sigma_e^2 I_n$

بتعويض هذه العلاقة في المعادلة رقم : 04 نجد:

---

[16] شيخي محمد، طرق الاقتصاد القياسي: محاضرات وتطبيقات، دار حامد للنشر والتوزيع، الأردن، 2011، ص 63.

$$\Omega_{\hat{\beta}} = \left[\left(X'X \right) X' \sigma^2{}_{\varepsilon} I_n X \left(X'X \right)^{-1} \right]$$

نتحصل على:

$$\Omega_{\hat{\beta}} = Var(\hat{\beta}) = \sigma_e^2 \left(X'X \right)^{-1}$$

حيث σ_e^2: تباين الحد العشوائي.

وتسمى المصفوفة العددية أعلاه بمصفوفة التباين والتباين المشترك للمعالم المقدرة، حيث تشكل العناصر القطرية في المصفوفة تباين المعالم المقدرة، بينما العناصر غير القطرية (أعلى وأسفل القطر) التباين المشترك والترابط بين أي إثنين من هاته المعالم المقدرة.

$$\Omega_{\hat{\beta}} = \begin{bmatrix} \text{var}(\hat{\beta}_0) & Cov(\hat{\beta}_0 \hat{\beta}_1) & .... & Cov(\hat{\beta}_0 \hat{\beta}_K) \\ Cov(\hat{\beta}_1 \hat{\beta}_0) & Var(\hat{\beta}_1) & .... & Cov(\hat{\beta}_1 \hat{\beta}_K) \\ . & . & .... & . \\ Cov(\hat{\beta}_K \hat{\beta}_0) & Cov(\hat{\beta}_K \hat{\beta}_1) & .... & Var(\hat{\beta}_K) \end{bmatrix}$$

وبالتالي فإن تباين أي عنصر من عناصر $\hat{\beta}$ هو عبارة عن حاصل ضرب قيمة $\sigma_e{}^2$ بما يقابلها من العناصر الواقعة على قطر المصفوفة $(X'X)^{-1}$، كما أن قيمة التباين المشترك بين أي اثنين من عناصر $\hat{\beta}$ هو عبارة عن حاصل ضرب $\sigma_e{}^2$ بالعنصر المقابل لها والواقع خارج نطاق القطر للمصفوفة $(X'X)^{-1}$ [17].

يمكن أن نبرهن عن هذا التباين $\Omega_{\hat{\beta}}$ هو الأقل بحساب نهايته عندما يكون n كبير نسبيا:

$$\Omega_{\hat{\beta}} = \sigma_e^2 \left(X'X \right)^{-1} = \sigma^2{}_e \frac{n}{n} \left(X'X \right)^{-1} = \frac{\sigma^2{}_e}{n} \left(\frac{1}{n} \mathrm{X'X} \right)^{-1}$$

إذا كانت الفرضيتين الرابعة والخامسة محققتين فإن:

$$\Omega_{\hat{\beta}} = \frac{\sigma^2{}_e}{n} \left(\frac{1}{n} \mathrm{X'X} \right)^{-1} \Rightarrow \lim_{n \to \infty} \Omega_{\hat{\beta}} = 0$$

كما يمكن حساب التباينات بواسطة العلاقات التالية:

[17] عبد المحمود محمد عبد الرحمان، مقدمة في الاقتصاد القياسي، عمادة شؤون المكتبات، الرياض، المملكة العربية السعودية، 1995، ص96.

$$\operatorname{var}(b_0)=\frac{\sum(Y-Y)^2}{n-m-1}\left(\frac{\sum(X_1)^2\sum(X_2)^2-\sum X_1X_2}{n\sum(X_1)^2\sum(X_2)^2-n(\sum X_1X_2)^2-(\sum X_1)^2\sum(X_2)^2-(\sum X_2)^2\sum(X_1)^2+(2\sum X_1\sum X_2\sum X_1X_2)}\right)$$

$$\operatorname{var}(b_1)=\frac{\sum(Y-Y)^2}{n-m-1}\left(\frac{\sum(x_2-\overline{x_2})^2}{\sum(x_2-\overline{x_2})^2\sum(x_1-\overline{x_1})^2-(\sum(x_2-\overline{x_2})(x_1-\overline{x_1}))^2}\right)$$

$$\operatorname{var}(b_2)=\frac{\sum(Y-Y)^2}{n-m-1}\left(\frac{\sum(x_1-\overline{x_1})^2}{\sum(x_2-\overline{x_2})^2\sum(x_1-\overline{x_1})^2-(\sum(x_2-\overline{x_2})(x_1-\overline{x_1}))^2}\right)$$

تباين المقدرات باستخدام المعطيات المركزة:

يمكننا إيجاد مصفوفة التباين والتباين المشترك باستخدام المعطيات المركزة كما يلي:

$$\Omega_{\hat{\beta}}=\sigma_e^2\left(x'x\right)^{-1}$$

فلنأخذ مثالا لنموذج متكون من متغيرتين مستقلتين في النموذج

$$Y_i=\beta_0+\beta_1X_{1i}+\beta_2X_{2i}+\varepsilon_i$$

$\Omega_{\hat{\beta}}$ تكتب على الشكل التالي:

$$\Omega_{\hat{\beta}}=\sigma_\varepsilon^2\begin{bmatrix}\sum x_{1i}^{\;2} & \sum x_{1i}x_{2i}\\ \sum x_{1i}x_{2i} & \sum x_{2i}^{\;2}\end{bmatrix}^{-1}$$

$$\Omega_{\hat{\beta}}=\begin{bmatrix}\operatorname{var}(\hat{\beta}_1) & Cov(\hat{\beta}_1\hat{\beta}_2)\\ Cov(\hat{\beta}_2\hat{\beta}_1) & Var(\hat{\beta}_2)\end{bmatrix}$$

نلاحظ من مصفوفة التباين والتباين المشترك للمقدرات بالانحرافات أنها لا تتضمن تباين الحد الثابت

$Var(\hat{\beta}_0)$ كما أنها لا تتضمن التباين المشترك للحد الثابت مع أي ميل حدي $i=1,2,$ $Cov(\hat{\beta}_0,\hat{\beta}_i)$

نستطيع أن نستخرج تباين الحد الثابت بكل سهولة من العلاقة الآتية:

$$Var(\hat{\beta}_0)=\sigma_e^2\left[\overline{X}'(x'x)^{-1}\overline{X}+\frac{1}{n}\right]$$

حيث أن: $\bar{X}'$ منقول مصفوفة المتوسطات الحسابية في حالة متغيرتين مستقلتين: $\bar{X}'=(\bar{X}_1,\bar{X}_2)$ و

$$\bar{X}=\begin{pmatrix}\bar{X}_1\\ \bar{X}_2\end{pmatrix}$$

مثال2: بالرجوع للمثال السابق سنقوم بحساب التباين والتباين المشترك للمعالم المقدرة؟

- **حساب قيم** Y_i و e_i^2

$\hat{Y}$	40,32	42,92	45,33	48,85	52,37	57	61,82	69,78	72,19	79,42	**570**
e_i^2	0,1	1,16	0,45	0,72	0,14	1	3,31	3,17	3,28	0,34	**13.67**

- **حساب التباين والتباين المشترك:**
- **تباين الخطأ العشوائي:**

$$\hat{\sigma}_e^2=\frac{e'e}{n-m-1}=\frac{\sum_{i=1}^{n}e_i^2}{n-m-1}=\frac{13.67}{10-2-1}=1.95$$

$$=\frac{\hat{Y}'\mathrm{Y}-\hat{\beta}'(X'\mathrm{Y})}{n-m-1}=\frac{\sum_{i=1}^{n}Y_i^2-(b_0\sum_{i=1}^{n}Y_i+b_1\sum_{i=1}^{n}Y_iX_1+b_2\sum_{i=1}^{n}Y_iX_2)}{n-m-1}$$

$$=\frac{34124-(31.98*570+0.65*11216+1.10*7740)}{10-2-1}=1.95$$

- **مصفوفة التباين والتباين المشترك:**

$$\Omega_{\hat{\beta}}=\sigma_e^2(X'X)^{-1}=\begin{bmatrix}\mathrm{var}(\hat{\beta}_0) & Cov(\hat{\beta}_0\hat{\beta}_1) & .... & Cov(\hat{\beta}_0\hat{\beta}_K)\\ Cov(\hat{\beta}_1\hat{\beta}_0) & Var(\hat{\beta}_1) & .... & Cov(\hat{\beta}_1\hat{\beta}_K)\\ . & . & .... & .\\ Cov(\hat{\beta}_K\hat{\beta}_0) & Cov(\hat{\beta}_K\hat{\beta}_1) & .... & Var(\hat{\beta}_K)\end{bmatrix}$$

$$\Omega_{\hat{\beta}} = \sigma_e^2 (X'X)^{-1} = \frac{1.95}{157280} \begin{bmatrix} 214448 & -27840 & 25200 \\ -27840 & 5040 & -5240 \\ 25200 & -5240 & 5760 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2,663 & -0,346 & 0,313 \\ -0,346 & 0,063 & -0,065 \\ 0,313 & -0,065 & 0,072 \end{pmatrix}$$

ومنه تباين المعلمات:

$$\mathrm{var}(\hat{\beta}_0) = 2.663$$
$$\mathrm{var}(\hat{\beta}_1) = 0.063$$
$$\mathrm{var}(\hat{\beta}_2) = 0.072$$

بطريقة أخرى:

$$\mathrm{var}(b_0) = \frac{\sum (Y - \hat{Y})^2}{n-m-1} \left(\frac{\sum (X_1)^2 \sum (X_2)^2 - \sum X_1 X_2}{n \sum (X_1)^2 \sum (X_2)^2 - n(\sum X_1 X_2)^2 - (\sum X_1)^2 \sum (X_2)^2 - (\sum X_2)^2 \sum (X_1)^2 + (2 \sum X_1 \sum X_2 \sum X_1 X_2)} \right)$$

$$= 1.95\left(\frac{3816*1944 - 2684}{10*3816*1944 - 10(2684)^2 - (180^2*1944) - (120^2*3816) + 2*180*120*2684}\right) = 2.66$$

$$\mathrm{var}(b_1) = \frac{\sum (Y - \hat{Y})^2}{n-m-1} \left(\frac{\sum (x_2 - \overline{x}_2)^2}{\sum (x_2 - \overline{x}_2)^2 \sum (x_1 - \overline{x}_1)^2 - (\sum (x_2 - \overline{x}_2)(x_1 - \overline{x}_1))^2} \right)$$

$$= 1.95\left(\frac{504}{504*576 - (524)^2}\right) = 0.06$$

$$\mathrm{var}(b_2) = \frac{\sum (Y - \hat{Y})^2}{n-m-1} \left(\frac{\sum (x_1 - \overline{x}_1)^2}{\sum (x_2 - \overline{x}_2)^2 \sum (x_1 - \overline{x}_1)^2 - (\sum (x_2 - \overline{x}_2)(x_1 - \overline{x}_1))^2} \right)$$

$$= 1.95\left(\frac{576}{504*576 - (524)^2}\right) = 0.07$$

2. تقييم نموذج الانحدار الخطي المتعدد:

بعد تكوين نموذج الانحدار وتقدير معلماته سوف نحصل على معادلة محددة، لتمثيل العلاقة محل الدراسة بين الظاهرة المفسرة لـ(Y_i) ومجموعة العوامل المؤثرة فيها(X_i)، ننتقل الآن إلى مرحلة تحليل الأداء لنموذج الانحدار المختار وتقييم جودة وفعالية تمثيله للعلاقة.

2.1. دراسة العلاقة الارتباطية (معامل الارتباط الخطي المتعدد R_{YX_i})

لحساب معامل الارتباط الخطي المتعدد نعتمد على العلاقة التالية[18]:

$$R_{YX_i} = \sqrt{1-\frac{A}{B}} = \sqrt{\frac{\sum(\hat{Y}_i - \bar{Y})^2}{\sum(Y_i - \bar{Y})^2}} = \sqrt{1-\frac{\sum(Y - \hat{Y}_i)^2}{\sum(Y_i - \bar{Y})^2}}$$

حيث أن:

A: يمثل محدد معاملات الارتباط الثنائي بين كل المؤشرات الموجودة في النموذج

$$A = \begin{bmatrix} 1 & r_{YX_1} & r_{YX_2} & \ldots\ldots & r_{YX_n} \\ r_{YX1} & 1 & r_{x_1x_2} & \ldots\ldots & r_{X_1X_n} \\ r_{YX_2} & r_{X_1X_2} & 1 & \ldots\ldots & r_{X_2X_n} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & 1 & \ldots\ldots \\ r_{YXn} & r_{X_1Xn} & r_{X_2X_n} & \ldots\ldots & 1 \end{bmatrix}$$

B: هو محدد آخر لمعاملات الارتباط الثنائي بعد حذف الصف والعمود الأول.

$$B = \begin{bmatrix} 1 & r_{x_1x_2} & \ldots\ldots & r_{X_1X_n} \\ r_{X_1X_2} & 1 & \ldots\ldots & r_{X_2X_n} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & 1 & \ldots\ldots \\ r_{X_1Xn} & r_{X_2X_n} & \ldots\ldots & 1 \end{bmatrix}$$

قيمة معامل الارتباط R_{YX_i} تتراوح في المجال [0-1]، ويجب أن لا تكون أقل من أكبر قيمة لمعاملات الارتباط الثنائي الزوجي، أي:

$$R_{YX_i} \geq MAX\, r_{YX_i}$$

[18] مكيد علي، مرجع سبق ذكره، ص 156.

2.2. اختبار جودة التوفيق (معامل التحديد R^2):

يعد معامل التحديد مؤشر أساس في تقييم مدى معنوية العلاقة بين المتغير التابع (Y) والمتغيرات المستقلة (X_i) حيث: $(i = 1,2,3.......n)$، بعبارة أخرى هو مقياس يوضح نسبة مساهمة المتغيرات المستقلة في تفسير التغير الحاصل في المتغير التابع. ويمكن حسابه كالأتي:

$$R_{YX_i}^{\ 2} = (R_{YX_i})^2 = 1 - \frac{A}{B} = \frac{\sum(\hat{Y}_i - \bar{Y})^2}{\sum(Y_i - \bar{Y})^2} = 1 - \frac{\sum(Y - \hat{Y}_i)^2}{\sum(Y_i - \bar{Y})^2}$$

بذلك يمكن كتابة معادلة الانحرافات الكلية كآلاتي[19] :

$$R^2 = \frac{RSS}{TSS} = \frac{TSS - ESS}{TSS}$$

$$ESS = \sum_i(\hat{Y}_i - \bar{Y})^2 = \sum \hat{Y}_i - n\bar{Y}^2$$

$$\sum \hat{Y}_i - n\bar{Y}^2 = \hat{Y}'\hat{Y} - n\bar{Y}^2$$

$$\hat{Y} = X\hat{\beta}$$

$$\hat{Y}' = \hat{\beta}'X'$$

$$\hat{Y}'Y = (\hat{\beta}'X')X\hat{\beta}$$

لدينا :

$$\hat{\beta} = (X'X)^{-1}X'Y$$

$$\hat{Y}'Y = \beta'X'X(X'X)^{-1}(X'Y)$$

$$\hat{Y}'Y = \hat{\beta}'(X'Y)$$

أي أن :

$$ESS = \sum(\hat{Y}_i - \bar{Y})^2 = \hat{Y}'Y - n\bar{Y}^2 = \hat{\beta}'(X'Y) - n\bar{Y}^2$$

$$TSS = \sum_i (Y_i - \bar{Y})^2 = \sum Y_i^2 - n\bar{Y}^2$$

$$\frac{ESS = \sum(\hat{Y}_i - \bar{Y})^2 = \hat{Y}'Y - n\bar{Y}^2 = \hat{\beta}'(X'Y) - n\bar{Y}^2}{TSS = \sum(Y_i - \bar{Y})^2 = \sum Y_i^2 - n\bar{Y}^2}$$

[19] Iain Pardoe, Applied Regression Modeling, 3rd Edition, Wiley.USA, 2020, P 108.

$$R^2 = \frac{\hat{\beta}'X'Y - n\bar{Y}^2}{Y'Y - n\bar{Y}^2}$$

$$R^2 = 1 - \frac{e'e}{Y'Y - n\bar{Y}^2}$$

TSS : تمثل الانحرافات الكلية .

ESS : تمثل الانحرافات الموضحة من قبل خط الانحدار.

$e'e$: تمثلا الانحرافات غير الموضحة.

وبما أن معامل التحديد R^2 عبارة عن نسبة الانحرافات الموضحة من قبل خط الانحدار إلى الانحرافات الكلية، فانه يمثل نسبة مجموع مربعات التغير في المتغيرات المستقلة إلى مجموع المربعات الكلية:

$$\boldsymbol{R^2 = \frac{\hat{\beta}'X'Y - n\bar{Y}^2}{Y'Y - n\bar{Y}^2}}$$

$$\boldsymbol{R^2 = 1 - \frac{e'e}{Y'Y - n\bar{Y}^2}}$$

ملاحظة : $0 \le R^2 \le 1$

- عندما يكون R^2 قريب من الواحد فهذا يدل على جودة التوفيق وقوة القدرة التفسيرية للنموذج والعكس صحيح.
- إذا كان: "RSS=0" فهذا يعني أن النموذج هو عبارة عن خط مستقيم ولا توجد أخطاء في النموذج وهي حالة نادرة الحدوث.
- أما إذا كان: " ESS=0" فهذا يعني أن المتغيرات المستقلة لا تفسر إطلاقا المتغير التابع وهي حالة نادرة الحدوث أيضا.

يمكن إيجاد معامل التحديد بالانحرافات كما يلي:

حيث : $y_i = Y_i - \bar{Y} \quad , \quad x_i = X_i - \bar{X} \qquad \forall i = 1......n$

$$R^2 = \frac{\hat{\beta}'x'y}{y'y} = \frac{\hat{\beta}'x'y}{\sum y^2}$$

هناك مجموعة من المشاكل التي نواجهها مع استعمال (R^2) ، منها:

- كل نتائجنا الإحصائية تأتي من الفرضية القائلة بأن نموذجنا المبني في المعادلة: $Y = X\beta + \varepsilon$ يكون صحيحا، ثم ليس لدينا طريقة أو قيمة إحصائية بديلة للمقارنة.

- أن (R^2) غير حساس لعدد المتغيرات المستقلة والموجودة بالنموذج، حيث أن إضافة متغيرات مستقلة أخرى لمعادلة الانحدار لا يمكن أبدا أن تقلل من قيمة (R^2)، وبالعكس يمكن أن تزيد من قيمته.
- إن صعوبات استعمال (R^2) كمقياس لجودة التوفيق راجعة لأن هذا المعامل يعتمد على التغيرات الحالة في (Y_i)، وبالتالي لا تؤخذ بعين الاعتبار درجات الحرية في أي مشكل إحصائي.

لتجنب المشاكل السالفة الذكر يستعمل مقياس آخر يسمى معامل التحديد المصحح.

معامل التحديد المصحح $\bar{R}^2$:

إن إضافة متغيرات مستقلة جديدة إلى المعادلة يؤدي إلى رفع قيمة R^2، وذلك لثبات قيمة المقام وتغير قيمة البسط بمقدار $(\hat{\beta}'X'Y)$ غير أن الاستمرار بإضافة المتغيرات المستقلة سيؤدي إلى انخفاض درجات الحرية $(n-m-1)$، مما يتطلب استخراج معامل التحديد المعدل أو المصحح $\bar{R}^2$ على النحو الآتي[20] :

$$\bar{R}^2 = \left[1 - \frac{RSS \ / \ n-m-1}{TSS \ / \ n-1}\right]$$

$$\bar{R}^2 = \left[1 - \left(\frac{RSS}{TSS}\right)\frac{n-1}{n-m-1}\right]$$

$$\bar{R}^2 = \left[1 - \left(1\text{-R}^2\right)\frac{n-1}{n-m-1}\right]$$

نلاحظ أن: $R^2 \geq \bar{R}^2$ إذا كانت $m > 1$.

يمكن أن نلاحظ أنه عندما يكون عدد المشاهدات n كبير نسبيا فإن R^2 يؤول إلى $\bar{R}^2$

$$\lim_{x\to\infty} R^2 = 1 - \lim_{x\to\infty}\frac{n-1}{n-m-1}(1-R^2) = R^2$$

$R^2 = \bar{R}^2$ إذا كانت $m = 1$.

نتيجة: إذا كان حجم العينة n كبيرا، فإن R^2 و $\bar{R}^2$ يقتربان قي قيمتهما، لكن في العينات الصغيرة، إذن $\bar{R}^2$ له مجموعة من الخصائص تجعله وسيلة قياس توفيق أفضل من R^2، فهو على الأقل يؤكد أهمية زيادة عدد المتغيرات للنموذج، للإشارة فإن $\overline{R^2}$ لا يحل كل المشاكل المتعلقة بمقياس R^2 كجودة التوفيق، حيث أن القرار حول إمكانية ظهور بعض المتغيرات في النموذج أم لا، تبقى معتمدة

[20] Philippe D'echamp, OP.CIT, P58.

على اعتبارات نظرية أخرى في القياس الاقتصادي، كما أن القيمة العددية لـ R^2 تكون جد حساسة لنوع المعطيات أو البيانات المستعملة.

2.3. اختبار الفرضيات لنموذج الخطي المتعدد :

يهدف هذا العنصر إلى توسيع معارفنا الأساسية لنموذج الانحدار وذلك بإجراء اختبار معنوية الانحدار المتعدد والمقدر باستخدام توزيع اختبار إحصاءه F ومقارنته باختبار t ومن ثم تقييم كفاءة الأداء العام لنموذج الانحدار المتعدد R^2 ومقارنته بمعامل التحديد المقدر المعدل $\bar{R}^2$ ، وكذلك اختبار العلاقة بين F و R^2 من خلال جدول تحليل التباين $ANOVA$, ثم علاقة R^2 بقيمة المتغير العشوائي $\sum e_i^2$.

اختبار فيشر F – Statistics :

اختبار موضوعية معامل التحديد ومعامل الارتباط وكذلك جودة تمثيل معادلة الانحدار المقترحة تتم بواسطة مقياس فيشر، وكما هو الحال في الانحدار البسيط فإنه يعتمد على نوعين من الفروض[21]:

(فرضية العدم): الانحدار ككل ليس له دلالة معنوية $H_0 : \beta_i = \beta_2 = \beta_3 = ...\beta_k = 0$

(الفرضية البديلة): الانحدار ككل له دلالة معنوية $H_1 : \exists$ معامل $\neq 0$

والصيغة الرياضية لهذا الاختبار هي[22]:

$$F_c = \frac{\sum_{i=1}^{n}(\hat{Y}_i - \bar{Y})^2 \Big/ m}{\sum_{i=1}^{n} e_i^2 \Big/ (n-m-1)} = \frac{\hat{\beta}'X'Y - n\bar{Y}^2 \big/ m}{\sum_{i=1}^{n} e_i^2 \Big/ (n-m-1)} \sim F_\alpha(m, n-m-1)$$

$$F_c = \frac{R^2 / m}{(1-R^2)/(n-m-1)} \sim F_\alpha(m, n-m-1)$$

وبعد احتساب قيمة F تقارن مع قيمتها الجدولية بدرجة حرية (m) و $(n-m-1)$ للبسط والمقام ولمستوى معنوية معين .

[21] حسين علي بخيت، وسحر فتح الله، مرجع سبق ذكره، ص193.

[22] Badi H. Baltagi, Badi H. Baltagi, op.cit, P 79.

- عندما تكون $FCal \rangle FTab$ نرفض فرضية العدم (H_0) ونقبل الفرضية البديلة (H_1) مما يدل على أنه من بين معلمات النموذج يوجد واحد على الأقل يختلف عن الصفر أي أن هناك متغيرا مفسرا له تأثير جوهري على المتغير التابع بمعنى أن معادلة الانحدار المقدرة لها معنوية إحصائيا.
- عندما تكون $FCal \leq FTab$ نقبل فرضية العدم (H_0) أي جميع المتغيرات التفسيرية لا تمارس أي تأثير على المتغير التابع وتكون معادلة الانحدار المقدرة غير معنوية إحصائيا.

اختبار معنوية المعالم (t) :

من أجل تقييم المعنوية الإحصائية لتكوين معاملات معادلة الانحدار يتم كما رأينا سابقا في حالة نموذج الانحدار البسيط يستخدم اختبار t لتقييم معنوية تأثير المتغيرات المستقلة $X_1, X_2 ..., ,..., X_k$ في المتغير التابع y ، وفي نموذج الانحدار المتعدد يعتمد على نوعين من الفروض[23]:

المعلمة ليس لها دلالة معنوية $H_0 : \beta_i = 0 / i = 0,1,...,m$ (فرضية العدم)

المعلمة لها دلالة معنوية $H_1 : \beta_i \neq 0$ (الفرضية البديلة)

وبعد احتساب قيمة (t) تقارن مع قيمتها الجدولية لتحديد قبول او رفض فرضية العدم ومن ثم تقييم معنوية معلمات النموذج المقدر، والصيغة الرياضية لهذا الاختبار يمكن بيانها كما يلي[24] :

$$t_c = \frac{\hat{\beta}_i - \beta_i}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_i}}$$

وما دمنا نختبر فرضية العدم والتي تنص على انعدام β_i فإن قيمة t_c تصبح على الشكل التالي:

$$t_c = \left| \frac{\hat{\beta}_i}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_i}} \right|$$

حيث أن:

$\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_i}$: الانحراف المعياري للمعلمات المقدرة، والتي تحسب وفق العلاقة التالية:

---

[23] تومي صالح، مرجع سبق ذكره، ص107.

[24] Bourbonniais. R OP.CIT, P58.

$$\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_i} = \sqrt{\text{var}(\hat{\beta}_i)} = \sqrt{\sigma_e^2\left(X'X\right)^{-1}} = \frac{\delta_Y\sqrt{1-R_{YXi}{}^2}}{\delta_{X_i}\sqrt{1-R_{x_1x_2}{}^2}}\frac{1}{\sqrt{n-m-1}}$$

يتم قبول أو رفض الفرضية H_0 بمستوى معنوية $(\alpha\%)$ على أساس مقارنة t_C مع القيمة المجدولة t_{Tab} ،

حيث أن : t_{Tab} يتم قراءتها من جدول ستودينت كالتالي: $t_{(n-m-1,\alpha)}$ حيث أن:

α : مستوى المعنوية و m : عدد المتغيرات المستقلة في نموذج الانحدار الخطي المتعدد المراد دراسته.

إذا كانت $\left|\frac{\hat{\beta}_i}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_i}}\right| \le t_{n-m-1,\alpha}$ ففي هذه الحالة المعلمة ليس لها معنوية إحصائية أي يساوي معنويا الصفر .

إذا كانت $\left|\frac{\hat{\beta}_i}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_i}}\right| > t_{n-m-1,\alpha}$ أي المعلمة لها معنوية إحصائية فهو يختلف معنويا عن الصفر.

ملاحظة: عندما يكون حجم العينة كبيرا $(n \ge 30)$ فينبغي استعمال التوزيع الطبيعي و يمكن أخذ القيمة الحرجة z_α و ذلك بحساب المساحة المظللة للتوزيع الطبيعي.

2.4. جدول تحليل التباين ANOVA [25]:

لغرض الوقوف على تأثير كل من (X_1) ، (X_2) في المتغير التابع Y ، لابد من عمل جدول تحليل التباين لبيان أثر المتغيرين المستقلين (X_1) و (X_2) في النموذج، والذي يأخذ الشكل التالي:

جدول تحليل التباين

مصدر التباين	مجموع مربعات الخطأ	درجات الحرية	متوسط مربعات الخطأ	اختبار F
الانحراف الموضح من قبل (X_1) و (X_2) **ESS**	$\sum(\hat{Y}_i-\bar{Y})^2$	m	$\sum(\hat{Y}_i-\bar{Y})^2/m$	$F_c = \frac{\sum_{i=1}^{n}(\hat{Y}_i-\bar{Y})^2/m}{\sum_{i=1}^{n}e_i^2/(n-m-1)} \sim F_\alpha(k,n-m-1)$
الانحراف غير الموضح **RSS**	$e'e$	$n-m-1$	$e'e/n-m-1$	
الانحراف الكلي **TSS**	$\sum(Y_i-\bar{Y})^2$	$n-1$		

[25] Damodar N, Gurjarati, Dawn C. Porter, OP.CIT, P239.

مثال3: بالرجوع للمثال السابق سنقوم بـ:

1. دراسة العلاقة الارتباطية؟
2. اختبار القوة التفسيرية للنموذج ثم حساب معامل التحديد المصحح؟
3. اختبار معنوية النموذج ككل؟
4. إعداد جدول تحليل التباين؟
5. اختبار معنوية المقدرات من الناحية الإحصائية؟

الحــل:

1. **دراسة العلاقة الارتباطية:**

$$R_{YX_i} = \sqrt{1-\frac{A}{B}} = \sqrt{\frac{\sum(\hat{Y_i}-\overline{Y})^2}{\sum(Y_i-\overline{Y})^2}} = \sqrt{1-\frac{\sum(Y-\hat{Y_i})^2}{\sum(Y_i-\overline{Y})^2}}$$

حيث أن:

A: يمثل محدد معاملات الارتباط الثنائي بين كل المؤشرات الموجودة في النموذج

$$A = \begin{bmatrix} 1 & r_{YX_1} & r_{YX_2} \\ r_{YX1} & 1 & r_{X_1X_2} \\ r_{YX_2} & r_{X_1X_2} & 1 \end{bmatrix} = 1+2r_{YX_1}.r_{YX_2}.r_{X_2X_1} - (r^2_{YX_1}+r^2_{YX_2}+r^2_{X_2X_1})$$

$$r_{X_1Y} = \frac{\operatorname{cov}(X_1Y)}{\delta_{X_1}.\delta_Y} = \frac{\left(\overline{X_1Y}-\overline{X_1}\,\overline{Y}\right)}{\delta_{X_1}.\delta_Y}$$

$$\delta_{X1} = \sqrt{(X_1-\overline{X}_1)^2/n} = \sqrt{(\overline{X_1^2}-\overline{X}_1^2)} = \sqrt{381.6-18^2} = 7.5894$$

$$\delta_Y = \sqrt{(Y-\overline{Y})^2/n} = \sqrt{(\overline{Y^2}-\overline{Y}^2)} = \sqrt{3412.4-57^2} = 12.7828$$

$$\delta_{X2} = \sqrt{(X_2-\overline{X}_2)^2/n} = \sqrt{(\overline{X_2^2}-\overline{X}_2^2)} = \sqrt{194.4-12^2} = 7.0994$$

$$r_{X_1Y} = \frac{1121.6-57*18}{7.5894*12.7828} = 0.9854$$

$$r_{X_2Y} = \frac{774-57*12}{7.0994*12.7828} = 0.9917$$

$$r_{X_1X_2} = \frac{268.4-18*12}{7.5894*7.0994} = 0.9725$$

$$A = 1+2*0.9854*0.9917*0.9725-(0.9854^2+0.9917^2+0.9725^2) = 0.0004532$$

B: هو محدد آخر لمعاملات الارتباط الثنائي بعد حذف الصف والعمود الأول.

$$B = \begin{bmatrix} 1 & r_{X_1X_2} \\ r_{X_1X_2} & 1 \end{bmatrix} = 1 - r^2_{X_2X_1} = 1 - 0.9725^2 = 0.0541$$

$$R_{YX_i} = \sqrt{1 - \frac{A}{B}} = \sqrt{1 - \frac{0.0004532}{0.0541776}} = 0.9958$$

التعليق: إن القيمة المتحصل عليها تشير إلى وجود علاقة ارتباطية قوية جدا.

2. اختبار القوة التفسيرية – جودة التوفيق :

- **معامل التحديد** R^2 :

$$R_{YX_i}^{\ 2} = (R_{YX_i})^2 = 1 - \frac{A}{B} = \frac{\sum(\hat{Y}_i - \bar{Y})^2}{\sum(Y_i - \bar{Y})^2} = 1 - \frac{\sum(Y - \hat{Y}_i)^2}{\sum(Y_i - \bar{Y})^2}$$
$$= (0.9958)^2 = 0.9916$$

بطريقة أخرى:

$$R^2 = \frac{\hat{\beta}'X'Y - n\bar{Y}^2}{Y'Y - n\bar{Y}^2}$$
$$= \frac{(b_0.\sum Y + b_1.\sum YX_1 + b_2.\sum YX_2) - n\bar{Y}^2}{\sum Y^2 - n\bar{Y}^2}$$
$$= \frac{(31.9806*570 + 0.65*11216 + 1.1098*7740) - 10*57^2}{34124 - 10*57^2} = 0.9916$$

التعليق: هذه القيمة تعكس الطبيعة الموضوعية لمعادلة الانحدار المقترحة، حيث أنها تمثل الظاهرة المدروسة تمثيلا جيدا. كما أن 99.16% من التغيرات التي تحدث في المتغير Y سببها التغير في X_1 و X_2.

- **معامل التحديد المصحح** $\bar{R}^2$:

$$\bar{R}^2 = \left[1 - (1\text{-R}^2)\ \frac{n-1}{n-m-1}\right]$$
$$= \left[1 - (1\text{-}0.9958)\ \frac{10-1}{10-2-1}\right] = 0.9892$$

3. اختبار معنوية النموذج ككل (اختبار فيشر F):

(فرضية العدم): الانحدار ككل ليس له دلالة معنوية. $H_0 : \beta_i = \beta_2 = \beta_3 = ...\beta_k = 0$

(الفرضية البديلة): الانحدار ككل له دلالة معنوية $H_1 : \exists$ معامل $\neq 0$

$$F_c = \frac{R^2}{1-R^2}\frac{n-m-1}{m} = \frac{0.9916}{1-0.9916}\frac{10-2-1}{2} = 414.84$$

$$F_{(a;v_1,v_2)} = F_{(0.05;2.7)} = 4.74$$

بما أن $F_{Cal} \rangle F_{Tab}$ $(414.84 \rangle 4.74)$ نرفض فرضية العدم (H_0) ونقبل الفرضية البديلة (H_1) مما يدل على أنه من بين معلمات النموذج يوجد واحد على الأقل يختلف عن الصفر أي أن هناك متغيرا مفسرا له تأثير جوهري على المتغير التابع بمعنى أن معادلة الانحدار المقدرة لها معنوية إحصائيا.

4. اختبار معنوية المعالم (اختبار ستيودنت t) :

- المعلمة ليس لها دلالة معنوية $H_0 : \beta_i = 0 / i = 0,1,...,m$ (فرضية العدم)

- المعلمة لها دلالة معنوية $H_1 : \beta_i \neq 0$ (الفرضية البديلة)

بالنسبة للمعلمة b_0:

$$t_c = \left|\frac{\hat{\beta}_0}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_0}}\right| = \left|\frac{\hat{\beta}_0}{\sqrt{\text{var}(b_0)}}\right| = \left|\frac{31.9806}{\sqrt{2.663}}\right| = 19.598$$

بالنسبة للمعلمة b_1:

$$t_c = \left|\frac{\hat{\beta}_1}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_1}}\right| = \left|\frac{\hat{\beta}_1}{\sqrt{\text{var}(b_1)}}\right| = \left|\frac{0.65}{\sqrt{0.063}}\right| = 2.598$$

بالنسبة للمعلمة b_2:

$$t_c = \left|\frac{\hat{\beta}_2}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_2}}\right| = \left|\frac{\hat{\beta}_2}{\sqrt{\text{var}(b_2)}}\right| = \left|\frac{1.109}{\sqrt{0.072}}\right| = 4.15$$

$$t^T_{(n-m-1,\alpha)} = t_{(7,0.05)} = 2.3646$$

بما أن $t^c \geq t^T$ فإن كل المعلمات لها معنوية إحصائية وتكوينها موضوعي.

جدول تحليل التباين ANOVA:

مصدر التباين	مجموع مربعات الخطأ	درجات الحرية	متوسط مربعات الخطأ	اختبار F
الانحراف الموضح من قبل (X_1) و (X_2) **ESS**	$\sum(\hat{Y}_i-\bar{Y})^2$ $=1620.33$	$m=2$	$\sum(\hat{Y}_i-\bar{Y})^2/m$ $=1620.33/2$ $=810.165$	$F_c=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(\hat{Y}_i-\bar{Y})^2/m}{\sum_{i=1}^{n}e_i^2/(n-m-1)}$ $=\dfrac{810.16}{1.95}$ $=414.84$
الانحراف غير الموضح **RSS**	$e'e=13.67$	$n-m-1$ $=10-2-1$ $=7$	$e'e/n-m-1$ $=13.67/7$ $=1.95$	
الانحراف الكلي **TSS**	$\sum(Y_i-\bar{Y})^2$ $=1634$	$n-1$ $=9$		

3. التنبؤ باستعمال الانحدار الخطي المتعدد

لاحتساب حدود الثقة لأية مشاهدة (نقطة) من مشاهدات الانحدار للمجتمع أو بعبارة أخرى لحساب القيمة الحقيقية ل Y عند مستوى معنوية معين للمتغير المستقل في النموذج، نفترض أن النقطة المراد تقدير حدود ثقتها هي Y_p. ولتقدير المجال الذي يمكن أن تقع فيه قيمة Y_p المقابلة لتشكيلة معينة من قيم المتغيرات المستقلة (m) يجب اشتقاق متباينة القيمة Y_p.

التنبؤ في المستقبل باستخدام نموذج الانحدار المتعدد كما يلي[26]:

$$\hat{Y}_p=\hat{\beta}_0+\hat{\beta}_1X_{1p}+\ldots+\hat{\beta}_mX_{mp}$$

[26] حسين علي بخيت و سحر فتح الله، مرجع سبق ذكره، ص 180.

$$\hat{Y}_p = \begin{bmatrix} 1 X_{1p} X_{2p} \dots X_{mp} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\beta}_0 \\ \hat{\beta}_1 \\ . \\ . \\ \hat{\beta}_m \end{bmatrix}$$

$$\hat{Y}_p = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X_{1p} + \dots + \hat{\beta}_m X_{mp}$$

وباختصار : $\hat{Y}_p = X'_p \hat{B}$ حيث أن: $x'_p = \begin{pmatrix} 1 \\ X_1 \\ X_2 \\ \dots\dots \\ X_p \end{pmatrix}$ شعاع التنبؤ.

مجال الثقة للتنبؤ

ولغرض اشتقاق المتباينة الخاصة بتقدير فترات حدود الثقة للقيمة Y_p يجب اشتقاق وتباين القيمة $(\hat{Y}_p)$ كالآتي:

لإيجاد الوسط فإننا نأخذ القيمة المتوقعة ل $(\hat{Y}_p)$:

$$E(\hat{Y}_P) = E(X'_p \hat{\beta})$$

$$E(\hat{Y}_P) = X'_p E(\hat{\beta})$$

$$E(\hat{\beta}) = \beta$$

$$E(\hat{Y}_P) = X'_p \beta$$

ولإيجاد التباين:

$$Var(\hat{Y}_P) = E\{(\hat{Y}_P - E(\hat{Y}_P))(\hat{Y}_P - E(\hat{Y}_P))'\}$$

$$= E\{(\hat{Y}_P - X'_p \beta)(\hat{Y}_P - X'_p \beta)'\}$$

$$\hat{Y}_P = X'_p \hat{\beta}$$

$$= X'_p \{E(\hat{\beta} - \beta)(\hat{\beta} - \beta)'\} X_p$$

$$= \sigma^2 X'_p (X'X)^{-1} X_p$$

لنعرف شعاع أخطاء التنبؤ:

$$e_p = Y_p - \hat{Y}_p$$

$$E(e_p) = E(Y_p - \hat{Y}_p) = 0$$

أما تباين شعاع أخطاء التنبؤ فهو:

$$\operatorname{var}\left(e_p\right)=\operatorname{var}\left(Y_p-\hat{Y}_p\right)=E\left[\left(-X_{T+H}\left(\hat{\beta}-\beta\right)+e_{T+H}\right)\left(-X_{T+H}\left(\hat{\beta}-\beta\right)+\varepsilon_{T+H}\right)'\right]$$

لنجد في الأخير:

$$Var\left(Y_p-\hat{Y}_p\right)=\operatorname{var}\left(e_p\right)=\sigma_e^2 X'_p\left(X'X\right)^{-1}X_p+\sigma_e^2 I_H$$

مجال الثقة للتنبؤ:

$$Y_p=\hat{Y}_p\mp T_{Tab}.\sigma(\hat{Y}_p)$$

$$Y_p=X'_p\hat{\beta}\mp T_{Tab}.\sigma(\hat{Y}_p)$$

$$Y_p=X'_p\hat{\beta}\pm T_{Tab}\sqrt{\sigma_e^2\left[X'_p\left(X'X\right)^{-1}X_P+1\right]}$$

$$Y_p\pm T_{Tab}\sqrt{\sigma_e^2\left[X'_p\left(X'X\right)^{-1}X_p+1\right]}\leq Y_p\leq Y_p\pm T_{Tab}\sqrt{\sigma_e^2\left[X'_p\left(X'X\right)^{-1}X_p+1\right]}$$

تمارين محلولة:

التمرين 1:

لدينا المعطيات التالية الخاصة بـ10 شركات تنتمي إلى الصناعات الكيميائية y_i الأرباح بالمليون دولار، x_1 انتاجية العامل بالوحدة، x_2 نسبة الإنتاج المخصص للتصدير (%)، إذا افترضنا أن العلاقة بين y_i و x_i يمثلها نموذج قياسي متعدد خطي .

I	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Y	2	1	3	8	7	5	4	6	7	7
X_1	11	10	12	18	15	13	13	15	16	17
X_2	3	2	4	10	11	6	5	7	10	12

المطلوب: 1- تقدير النموذج المعبر عن هذه العلاقة.

2- تقييم جودة النموذج في التعبير عن هذه العلاقة.

3- إجراء عملية التوقع لقيمة Y المقدرة عندما يكون x1 =20، وx2=15، ثم تقدير قيمة Y الفعلية عند نفس مستوى المؤشرين المستقلين.

الحـل:

1. **تقدير معالم النموذج** $Y_i = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X_{i1} + \hat{\beta}_2 X_{i2}$:

N	Y	X_1	X_2	X_1Y	X_2Y	X_1^2	X_2^2	X_1X_2	Y^2	$\hat{Y}$	e_i^2
1	2	11	3	22	6	121	9	33	4	2,285	0,081
2	1	10	2	10	2	100	4	20	1	1,459	0,211
3	3	12	4	36	12	144	16	48	9	3,110	0,012
4	8	18	10	144	80	324	100	180	64	8,061	0,004
5	7	15	11	105	77	225	121	165	49	6,545	0,207
6	5	13	6	65	30	169	36	78	25	4,175	0,681
7	4	13	5	52	20	169	25	65	16	3,935	0,004
8	6	15	7	90	42	225	49	105	36	5,585	0,172
9	7	16	10	112	70	256	100	160	49	6,890	0,012
10	7	17	12	119	84	289	144	204	49	7,955	0,913
المجموع	50	140	70	755	423	2022	604	1058	302	50,000	2,297

طريقة المحددات:

لتقدير β_0 وβ_1 وβ_2 ينبغي تكوين المحددات الآتية:

$$|D| = \begin{vmatrix} n & \sum X_{1i} & \sum X_{2i} \\ \sum X_{1i} & \sum X_{1i}^2 & \sum X_{1i}X_{2i} \\ \sum X_{2i} & \sum X_{1i}X_{2i} & \sum X_{2i}^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 10 & 140 & 70 \\ 140 & 2022 & 1058 \\ 70 & 1058 & 604 \end{vmatrix} = 9840$$

$$|D_0| = \begin{vmatrix} \sum Y_i & \sum X_{1i} & \sum X_{2i} \\ \sum X_{1i}Y_i & \sum X_{1i}^2 & \sum X_{1i}X_{2i} \\ \sum X_{2i}Y_i & \sum X_{1i}X_{2i} & \sum X_{2i}^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 50 & 140 & 70 \\ 755 & 2022 & 1058 \\ 423 & 1058 & 604 \end{vmatrix} = -47960$$

$$|D_1| = \begin{vmatrix} n & \sum Y_1 & \sum X_{2i} \\ \sum X_{1i} & \sum X_{1i}Y_i & \sum X_{1i}X_{2i} \\ \sum X_{2i} & \sum X_{2i}Y_i & \sum X_{2i}^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 10 & 50 & 70 \\ 140 & 755 & 1058 \\ 70 & 423 & 604 \end{vmatrix} = 5760$$

$$|D_2| = \begin{vmatrix} n & \sum X_{1i} & \sum Y_i \\ \sum X_{1i} & \sum X_{1i}^2 & \sum X_{1i}Y_i \\ \sum X_{2i} & \sum X_{1i}X_{2i} & \sum X_{2i}Y_i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 10 & 140 & 50 \\ 140 & 2022 & 755 \\ 70 & 1058 & 423 \end{vmatrix} = 2360$$

$$\hat{\beta}_0 = \frac{|D_0|}{|D|} = \frac{-47960}{9840} = -4.8739$$

$$\hat{\beta}_1 = \frac{|D_1|}{|D|} = \frac{5760}{9840} = 0.5853$$

$$\hat{\beta}_2 = \frac{|D_2|}{|D|} = \frac{2360}{9840} = 0.2398$$

ومنه: $Y_i = -4.8739 + 0.5853X_{i1} + 0.2398X_{i2}$

طريقة المصفوفات: $Y = XB$

حيث: $\hat{\beta} = (X'X)^{-1}(X'Y)$

$$(X'X) = \begin{bmatrix} n & \sum X_{1i} & \sum X_{2i} \\ \sum X_{1i} & \sum X_{1i}^2 & \sum X_{1i}X_{2i} \\ \sum X_{2i} & \sum X_{1i}X_{2i} & \sum X_{2i}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 140 & 70 \\ 140 & 2022 & 1058 \\ 70 & 1058 & 604 \end{bmatrix} = 9840$$

$$(X'Y) = \begin{bmatrix} \sum Y_i \\ \sum Y_i X_{1i} \\ \sum Y_i X_{2i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 50 \\ 755 \\ 423 \end{bmatrix}$$

$$\overline{(X'X)} = a_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij} = \begin{bmatrix} 101924 & -10500 & 6580 \\ -10500 & 1140 & -780 \\ 6580 & -780 & 620 \end{bmatrix}$$

$$(X'X)^{-1} = \frac{1}{(X'X)}\overline{(X'X)} = \frac{1}{9840}\begin{bmatrix} 101924 & -10500 & 6580 \\ -10500 & 1140 & -780 \\ 6580 & -780 & 620 \end{bmatrix}$$

ومنه:

$$\hat{\beta}=(X'X)^{-1}(X'Y)=\begin{bmatrix}101924 & -10500 & 6580\\ -10500 & 1140 & -780\\ 6580 & -780 & 620\end{bmatrix}*\begin{bmatrix}\frac{50}{9840}\\ \frac{755}{9840}\\ \frac{423}{9840}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-4.8739\\ 0.5853\\ 0.2398\end{bmatrix}$$

ومنه: $Y_i=-4.8739+0.5853X_{i1}+0.2398X_{i2}$

طريقة الانحرافات:

$$Y_i=\hat{\beta}_0+\hat{\beta}_1X_{i1}+\hat{\beta}_2X_{i2}$$

$$y_i=\left(Y_i-\overline{Y}\right)$$

$$x_{1i}=\left(X_{1i}-\overline{X}_1\right)$$

$$x_{2i}=\left(X_{2i}-\overline{X}_2\right)$$

$$y=xB$$

حيث: $\hat{\beta}=(x'x)^{-1}(x'y)$

$$\left(x'x\right)=\begin{pmatrix}\sum x_{1i}^{2} & \sum x_{1i}x_{2i}\\ \sum x_{2i}x_{1i} & \sum x_{2i}^{2}\end{pmatrix}\qquad \left(x'y\right)=\begin{bmatrix}\sum x_{1i}y_i\\ \sum x_{2i}y_i\end{bmatrix}$$

$$\sum x_{1i}y_i=\sum(X_{1i}-\overline{X}_1)(Y_i-\overline{Y})=\sum X_{1i}Y_i-\frac{\sum X_{1i}\sum Y_i}{n}=755-\frac{140*50}{10}=55$$

$$\sum x_{2i}y_i=\sum(X_{2i}-\overline{X}_2)(Y_i-\overline{Y})=\sum X_{2i}Y_i-\frac{\sum X_{2i}\sum Y_i}{n}=423-\frac{70*50}{10}=73$$

$$\sum x_{1i}x_{2i}=\sum(X_{1i}-\overline{X}_1)(X_{2i}-\overline{X}_2)=\sum X_{1i}X_{2i}-\frac{\sum X_{1i}\sum X_{2i}}{n}=1058-\frac{140*70}{10}=78$$

$$\sum x_{1i}^{2}=\sum(X_{1i}-\overline{X}_1)^2=\sum X_{1i}^{2}-\frac{\left(\sum X_{1i}\right)^2}{n}=2022-\frac{(140)^2}{10}=62$$

$$\sum x_{2i}^{2}=\sum(X_{2i}-\overline{X}_2)^2=\sum X_{2i}^{2}-\frac{\left(\sum X_{2i}\right)^2}{n}=604-\frac{(70)^2}{10}=114$$

$$\sum y_i^{2}=\sum(Y_i-\overline{Y})=\sum Y_i^{2}-\frac{\left(\sum Y_i\right)^2}{n}=302-\frac{(50)^2}{10}=52$$

ومنه:

$$(x'x)=\begin{pmatrix}\sum x_{1i}^{2} & \sum x_{1i}x_{2i}\\ \sum x_{2i}x_{1i} & \sum x_{2i}^{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}62 & 78\\ 78 & 114\end{pmatrix}=984$$

$$(x'y)=\begin{bmatrix}\sum x_{1i}y_i\\ \sum x_{2i}y_i\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}55\\ 73\end{bmatrix}$$

$$\overline{(x'x)}=a_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}=\begin{bmatrix}114 & -78\\ -78 & 62\end{bmatrix}$$

$$(x'x)^{-1}=\frac{1}{(X'X)}\overline{(X'X)}=\frac{1}{984}\begin{bmatrix}114 & -78\\ -78 & 62\end{bmatrix}$$

ومنه:

$$\hat{\beta}=(x'x)^{-1}(x'y)=\begin{bmatrix}114 & -78\\ -78 & 62\end{bmatrix}*\begin{bmatrix}\frac{55}{984}\\ \frac{73}{984}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.5853\\ 0.2398\end{bmatrix}$$

بطريقة أخرى يمكن تقدير b_1 و b_2 كالتالي:

N	y	x_1	x_2	x_1y	x_2y	x_1^2	x_2^2	x_1x_2	y^2
1	-3	-3	-4	9	12	9	16	12	9
2	-4	-4	-5	16	20	16	25	20	16
3	-2	-2	-3	4	6	4	9	6	4
4	3	4	3	12	9	16	9	12	9
5	2	1	4	2	8	1	16	4	4
6	0	-1	-1	0	0	1	1	1	0
7	-1	-1	-2	1	2	1	4	2	1
8	1	1	0	1	0	1	0	0	1
9	2	2	3	4	6	4	9	6	4
10	2	3	5	6	10	9	25	15	4
المجموع	**0**	**0**	**0**	**55**	**73**	**62**	**114**	**78**	**52**

$$\hat{\beta}_1=\frac{\sum_i yx_{1i}\sum_i x_{2i}^{2}-(\sum_i yx_{2i})(\sum_i x_{2i}x_{1i})}{\sum_i x_{1i}^{2}\sum_i x_{2i}^{2}-(\sum_i x_{2i}x_{1i})^{2}}=\frac{55*144-(73*78)}{62*114-(78)^{2}}=0.5353$$

$$\hat{\beta}_2 = \frac{\sum_i yx_{2i} \sum_i x_{1i}^2 - (\sum_i yx_{1i})(\sum_i x_{2i}x_{1i})}{\sum_i x_{1i}^2 \sum_i x_{2i}^2 - (\sum_i x_{2i}x_{1i})^2} = \frac{73*62-(55*78)}{62*114-(78)^2} = 0.2398$$

$$\hat{\beta}_0 = \bar{Y} - \hat{\beta}_1 \bar{X}_1 - \hat{\beta}_2 \bar{X}_2 = 5 - 0.5853(14) - 0.2398(7) = -4.8798$$

ومنه: $Y_i = -4.8739 + 05853 X_{i1} + 0.2398 X_{i2}$

تقييم النموذج:

دراسة العلاقة الارتباطية:

$$R_{YX_i} = \sqrt{1-\frac{A}{B}} = \sqrt{\frac{\sum(\hat{Y}_i - \bar{Y})^2}{\sum(Y_i - \bar{Y})^2}} = \sqrt{1-\frac{\sum(Y - \hat{Y}_i)^2}{\sum(Y_i - \bar{Y})^2}}$$

حيث أن:

A: يمثل محدد معاملات الارتباط الثنائي بين كل المؤشرات الموجودة في النموذج

$$A = \begin{bmatrix} 1 & r_{YX_1} & r_{YX_2} \\ r_{YX_1} & 1 & r_{X_1X_2} \\ r_{YX_2} & r_{X_1X_2} & 1 \end{bmatrix} = 1 + 2r_{YX_1}.r_{YX_2}.r_{X_2X_1} - (r^2_{YX_1} + r^2_{YX_2} + r^2_{X_2X_1})$$

$$r_{X_1Y} = \frac{\operatorname{cov}(X_1Y)}{\delta_{X_1}.\delta_Y} = \frac{\left(\overline{X_1Y} - \bar{X}_1\bar{Y}\right)}{\delta_{X_1}.\delta_Y}$$

$$\delta_{X1} = \sqrt{(X_1 - \bar{X}_1)^2/n} = \sqrt{(\overline{X_1^2} - \bar{X}_1^2)} = \sqrt{6.2} = 2.4899$$

$$\delta_Y = \sqrt{(Y - \bar{Y})^2/n} = \sqrt{(\overline{Y^2} - \bar{Y}^2)} = \sqrt{5.2} = 2.2803$$

$$\delta_{X2} = \sqrt{(X_2 - \bar{X}_2)^2/n} = \sqrt{(\overline{X_2^2} - \bar{X}_2^2)} = \sqrt{11.4} = 3.3763$$

$$r_{X_1Y} = \frac{75.5 - 14*5}{2.4899*2.2803} = 0.9686$$

$$r_{X_2Y} = \frac{42.3 - 5*7}{3.3763*2.2803} = 0.9481$$

$$r_{X_1X_2} = \frac{105.8 - 14*7}{2.4899*3.3763} = 0.9277$$

$$A = 1 + 2*0.9686*0.9481*0.9277 - (0.9686^2 + 0.9481^2 + 0.9277^2) = 0.00614$$

B: هو محدد آخر لمعاملات الارتباط الثنائي بعد حذف الصف والعمود الأول.

$$B = \begin{bmatrix} 1 & r_{X_1X_2} \\ r_{X_1X_2} & 1 \end{bmatrix} = 1 - r^2_{X_2X_1} = 1 - 0.9277^2 = 0.1392$$

$$R_{YX_i} = \sqrt{1-\frac{A}{B}} = \sqrt{1-\frac{0.00614}{0.1392}} = 0.9776$$

أو بطريقة أخرى:

$$R_{YX_i} = \sqrt{1-\frac{\sum(Y-\hat{Y}_i)^2}{\sum(Y_i-\bar{Y})^2}} = \sqrt{1-\frac{2.297}{52}} = 0.9776$$

التعليق: إن القيمة المتحصل عليها تشير إلى وجود علاقة ارتباطية قوية جدا.

اختبار جودة التوفيق (معامل التحديد R^2):

$$R_{YX_i}{}^2 = (R_{YX_i})^2 = 1-\frac{A}{B} = \frac{\sum(\hat{Y}_i-\bar{Y})^2}{\sum(Y_i-\bar{Y})^2} = 1-\frac{\sum(Y-\hat{Y}_i)^2}{\sum(Y_i-\bar{Y})^2}$$
$$= (0.9776)^2 = 0.9558$$

بطريقة أخرى:

$$R^2 = \frac{\hat{\beta}'X'Y - n\bar{Y}^2}{Y'Y - n\bar{Y}^2}$$
$$= \frac{(b_0.\sum Y + b_1.\sum YX_1 + b_2.\sum YX_2) - n\bar{Y}^2}{\sum Y^2 - n\bar{Y}^2}$$
$$== \frac{(-4.8739*50+0.5853*755+0.2398*423)-10*5^2}{302-10*5^2} = 0.9558$$

التعليق: هذه القيمة تعكس الطبيعة الموضوعية لمعادلة الانحدار المقترحة، حيث أنها تمثل الظاهرة المدروسة تمثيلا جيدا. كما أن 95.58% من التغيرات التي تحدث في المتغير Y سببها التغير في X_1 و X_2.

معامل التحديد المصحح $\bar{R}^2$:

$$\bar{R}^2 = \left[1-(1\text{-}R^2)\frac{n-1}{n-m-1}\right]$$
$$= \left[1-(1\text{-}0.9558)\frac{10-1}{10-2-1}\right] = 0.9503$$

اختبار الفرضيات لنموذج الخطي المتعدد :

اختبار فيشر F – Statistics

(فرضية العدم): الانحدار ككل ليس له دلالة معنوية. $H_0 : \beta_i = \beta_2 = \beta_3 = ...\beta_k = 0$

(الفرضية البديلة): الانحدار ككل له دلالة معنوية $H_1 : \exists$ معامل $\neq 0$

$$F_c=\frac{R^2}{1-R^2}\frac{n-m-1}{m}=\frac{0.9558}{1-0.9558}\frac{10-2-1}{2}=75.74$$

$$F_{(a;v_1,v_2)}=F_{(0.05;2.7)}=4.74$$

بما أن $F_{Cal}\rangle F_{Tab}$ (4.74 $\rangle$75.74) نرفض فرضية العدم (H_0) ونقبل الفرضية البديلة (H_1) مما يدل على أنه من بين معلمات النموذج يوجد واحد على الأقل يختلف عن الصفر أي أن هناك متغيرا مفسرا له تأثير جوهري على المتغير التابع بمعنى أن معادلة الانحدار المقدرة لها معنوية إحصائيا.

- **اختبار معنوية المعالم (t)** :

المعلمة ليس لها دلالة معنوية $H_0:\beta_i=0/i=0,1,...,m$ (فرضية العدم) •

المعلمة لها دلالة معنوية $H_1:\beta_i\neq 0$ (الفرضية البديلة) •

حساب التباينات:

- **تباين الخطأ العشوائي:**

$$\hat{\sigma}_e^2=\frac{e'e}{n-m-1}=\frac{\sum_{i=1}^{n}e_i^2}{n-m-1}=\frac{2.297}{10-2-1}=0.3281$$

$$=\frac{\hat{Y}'\mathrm{Y}-\hat{\beta}'\left(X'\mathrm{Y}\right)}{n-m-1}=\frac{\sum_{i=1}^{n}Y_i^2-(b_0\sum_{i=1}^{n}Y_i+b_1\sum_{i=1}^{n}Y_iX_1+b_2\sum_{i=1}^{n}Y_iX_2)}{n-m-1}$$

$$=\frac{302-(-4.8739*50+0.5853*755+423*0.2398)}{10-2-1}=0.3281$$

تباين المعلمات:

$$\Omega_{\hat{\beta}}=\sigma_e^2\left(X'X\right)^{-1}=\begin{bmatrix}\mathrm{var}(\hat{\beta}_0) & Cov(\hat{\beta}_0\hat{\beta}_1) & .... & Cov\left(\hat{\beta}_0\hat{\beta}_K\right)\\ Cov(\hat{\beta}_1\hat{\beta}_0) & Var(\hat{\beta}_1) & .... & Cov(\hat{\beta}_1\hat{\beta}_K)\\ . & . & .... & .\\ Cov(\hat{\beta}_K\hat{\beta}_0) & Cov(\hat{\beta}_K\hat{\beta}_1) & .... & Var(\hat{\beta}_K)\end{bmatrix}$$

$$\Omega_{\hat{\beta}} = \sigma_e^2 (X'X)^{-1} = \frac{0.3281}{9840}\begin{bmatrix} 101924 & -10500 & 6580 \\ -10500 & 1140 & -780 \\ 6580 & -780 & 620 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3,3986 & -0,3501 & 0,2194 \\ -0,3501 & 0,0380 & -0,0260 \\ 0,2194 & -0,0260 & 0,0207 \end{pmatrix}$$

ومنه:

$$\mathrm{var}(\hat{\beta}_0) = 3.398$$
$$\mathrm{var}(\hat{\beta}_1) = 0.038$$
$$\mathrm{var}(\hat{\beta}_2) = 0.0206$$

بالنسبة للمعلمة $\mathbf{b_0}$:

$$t_c = \left|\frac{\hat{\beta}_0}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_0}}\right| = \left|\frac{\hat{\beta}_0}{\sqrt{\mathrm{var}(b_0)}}\right| = \left|\frac{-4.8739}{\sqrt{3.398}}\right| = 2.64$$

بالنسبة للمعلمة $\mathbf{b_1}$:

$$t_c = \left|\frac{\hat{\beta}_1}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_1}}\right| = \left|\frac{\hat{\beta}_1}{\sqrt{\mathrm{var}(b_1)}}\right| = \left|\frac{0.5853}{\sqrt{0.038}}\right| = 3$$

بالنسبة للمعلمة $\mathbf{b_2}$:

$$t_c = \left|\frac{\hat{\beta}_2}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_2}}\right| = \left|\frac{\hat{\beta}_2}{\sqrt{\mathrm{var}(b_2)}}\right| = \left|\frac{0.2398}{\sqrt{0.02}}\right| = 1.66$$

$$t^T_{(n-m-1,\alpha)} = t_{(7,0.05)} = 2.3646$$

بما أن $t^c \geq t^T$ لكل من المعلمتين $\mathbf{b_0}$ و $\mathbf{b_1}$ وبالتالي هما معنويتان إحصائيا وتكوينهما موضوعي، بنما $t^c \geq t^T$ للمعلمة $\mathbf{b_2}$ وبالتالي هي غير معنوية إحصائيا وتكوينها عشوائي.

إجراء عملية التوقع:

- **إجراء تقييم الأداء العام للنموذج المقترح (اختبار عدم التساوي)**

$$\cup = \frac{\sqrt{\frac{\sum(Y_i - Y_i)^2}{n}}}{\sqrt{\frac{\left(\sum Y_i\right)^2}{n}} + \sqrt{\frac{\left(\sum Y\right)^2}{n}}} = \frac{\sqrt{\frac{2.297}{10}}}{\sqrt{\frac{50}{10}} + \sqrt{\frac{50}{10}}} = 0.10$$

يمكن القول أن القدرة التوقعية للنموذج المقترح جيدا جدا، وذلك لأن معامل عدم التساوي يقترب من الصفر.

- **تقدير قيمة الأرباح المقابلة لإنتاجية العامل عند 20 وحدة و نسبة 15% من الإنتاج المخصص للتصدير.**

المعادلة التقديرية: $Y_i = b_0 + b_1X_1 + b_2X_2 = -4.8739 + 0.5853X_1 + 0.2398X_2$

المعادلة التنبؤية المتوقعة:

$$Y_p = b_0 + b_1X_{1p} + b_2X_{2p}$$
$$= -4.8739 + 0.5853X_1 + 0.2398X_2$$
$$Y_{11} = -4.8739 + 0.5853(20) + 0.2398(15) = 10.43$$

– **حساب متوسط الخطأ المعياري:**

$$\sigma^2_{Y_P} = \sigma^2 X'_p (X'X)^{-1} X_p + 1$$

حيث أن: $x'_p = \begin{pmatrix} 1 \\ X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 20 \\ 15 \end{pmatrix}$ شعاع التنبؤ.

$$\sigma^2_{Y_P} = \sigma^2 X'_p (X'X)^{-1} X_p$$

$$(X'X)^{-1} X_p = \frac{1}{9840}\begin{bmatrix} 101924 & -10500 & 6580 \\ -10500 & 1140 & -780 \\ 6580 & -780 & 620 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 20 \\ 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.9528 \\ 0.0609 \\ 0.0284 \end{pmatrix}$$

$$X'_p (X'X)^{-1} X_p = \begin{bmatrix} 1 & 20 & 15 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} 0.9528 \\ 0.0609 \\ 0.0284 \end{pmatrix} = 0.6934$$

$$\sigma^2_{Y_P} = \sigma^2 X'_p (X'X)^{-1} X_p + 1 = 0.3281 * 0.6934 + 1 = 1.2275$$

$$\sigma_{Y_P} = \sqrt{1.2275} = 1.1079$$

– **مجال الثقة للتنبؤ:**

$$Y_p = \hat{Y}_p \mp T_{Tab} . \sigma_{(\hat{Y}_p)}$$
$$Y_p = 10.43 \mp 2.3060 * 1.1079$$

$$7.87 \le Y_{11} \le 12.79$$

التمرين 02: لتكن المعطيات التالية:

$X'Y = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 9 \end{pmatrix}$ Y'Y=38 t=1.2.3….8

$$X'X = \begin{pmatrix} 8 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

المطلوب:

1- احسب المصفوفة $(X'X)^{-1}$.

2- أحسب الشعاع B ، ثم اكتب معادلة الانحدار الخطي المتعدد.

3- أحسب معامل التحديد.

4- قيم النموذج من الناحية الإحصائية عند مستوى معنوية 0.05.

الحـل:

1. تقدير معالم النموذج $Y_i = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X_{i1} + \hat{\beta}_2 X_{i2}$:

طريقة المصفوفات: $Y = XB$

حيث: $\hat{\beta} = (X'X)^{-1}(X'Y)$

$$(X'X) = \begin{bmatrix} n & \sum X_{1i} & \sum X_{2i} \\ \sum X_{1i} & \sum X_{1i}^2 & \sum X_{1i} X_{2i} \\ \sum X_{2i} & \sum X_{1i} X_{2i} & \sum X_{2i}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix} = 48$$

$$(X'Y) = \begin{bmatrix} \sum Y_i \\ \sum Y_i X_{1i} \\ \sum Y_i X_{2i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 7 \\ 9 \end{bmatrix}$$

$$\overline{(X'X)} = a_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij} = \begin{bmatrix} 7 & -2 & -3 \\ -2 & 28 & -6 \\ -3 & -6 & 15 \end{bmatrix}$$

$$(X'X)^{-1} = \frac{1}{(X'X)} \overline{(X'X)} = \frac{1}{48} \begin{bmatrix} 7 & -2 & -3 \\ -2 & 28 & -6 \\ -3 & -6 & 15 \end{bmatrix}$$

حساب الشعاع $\hat{\beta}$:

$$\hat{\beta} = (X'X)^{-1}(X'Y) = \begin{bmatrix} 7 & -2 & -3 \\ -2 & 28 & -6 \\ -3 & -6 & 15 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \frac{1}{48} \\ \frac{7}{48} \\ \frac{9}{48} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.7083 \\ 2.9166 \\ 1.875 \end{bmatrix}$$

ومنه: $Y_i = -0.7083 + 2.9166 X_{i1} + 1.875 X_{i2}$

طريقة الانحرافات:

$$Y_i = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X_{i1} + \hat{\beta}_2 X_{i2}$$

$$y_i = \left(Y_i - \overline{Y}\right)$$
$$x_{1i} = \left(X_{1i} - \overline{X}_1\right)$$
$$x_{2i} = \left(X_{2i} - \overline{X}_2\right)$$

$$y = x B$$

حيث: $\hat{\beta} = (x'x)^{-1}(x'y)$

$$(x'x) = \begin{pmatrix} \sum x_{1i}^2 & \sum x_{1i}x_{2i} \\ \sum x_{2i}x_{1i} & \sum x_{2i}^2 \end{pmatrix} \qquad (x'y) = \begin{bmatrix} \sum x_{1i}y_i \\ \sum x_{2i}y_i \end{bmatrix}$$

$$\sum x_{1i}y_i = \sum (X_{1i} - \overline{X_1})(Y_i - \overline{Y}) = \sum X_{1i}Y_i - \frac{\sum X_{1i}\sum Y_i}{n} = 7 - \frac{1*1}{8} = 6.875$$

$$\sum x_{2i}y_i = \sum (X_{2i} - \overline{X_2})(Y_i - \overline{Y}) = \sum X_{2i}Y_i - \frac{\sum X_{2i}\sum Y_i}{n} = 9 - \frac{2*1}{8} = 8.75$$

$$\sum x_{1i}x_{2i} = \sum (X_{1i} - \overline{X_1})(X_{2i} - \overline{X_2}) = \sum X_{1i}X_{2i} - \frac{\sum X_{1i}\sum X_{2i}}{n} = 1 - \frac{1*2}{8} = 0.75$$

$$\sum x_{1i}^2 = \sum (X_{1i} - \overline{X_1})^2 = \sum X_{1i}^2 - \frac{\left(\sum X_{1i}\right)^2}{n} = 2 - \frac{(1)^2}{8} = 1.875$$

$$\sum x_{2i}^2 = \sum (X_{2i} - \overline{X_2})^2 = \sum X_{2i}^2 - \frac{\left(\sum X_{2i}\right)^2}{n} = 4 - \frac{(2)^2}{8} = 3.5$$

$$\sum y_i^2 = \sum (Y_i - \overline{Y}) = \sum Y_i^2 - \frac{\left(\sum Y_i\right)^2}{n} = 38 - \frac{(1)^2}{8} = 37.875$$

ومنه:

$$(x'x) = \begin{pmatrix} \sum x_{1i}^2 & \sum x_{1i}x_{2i} \\ \sum x_{2i}x_{1i} & \sum x_{2i}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.875 & 0.75 \\ 0.75 & 3.5 \end{pmatrix} = 6$$

$$(x'y)=\begin{bmatrix}\sum x_{1i}y_i\\ \sum x_{2i}y_i\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6.875\\ 8.75\end{bmatrix}$$

$$\overline{(x'x)}=a_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}=\begin{bmatrix}3.5 & -0.75\\ -0.75 & 1.875\end{bmatrix}$$

$$(x'x)^{-1}=\frac{1}{(X'X)}\overline{(X'X)}=\frac{1}{6}\begin{bmatrix}3.5 & -0.75\\ -0.75 & 1.875\end{bmatrix}$$

ومنه:

$$\hat{\beta}=(x'x)^{-1}(x'y)=\begin{bmatrix}3.5 & -0.75\\ -0.75 & 1.875\end{bmatrix}*\begin{bmatrix}\frac{6.875}{6}\\ \frac{8.75}{6}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2.9166\\ 1.875\end{bmatrix}$$

$$\hat{\beta}_0=\bar{Y}-\hat{\beta}_1\bar{X}_1-\hat{\beta}_2\bar{X}_2=1/8-2.9166(1/8)-1.875(2/8)=-0.7083$$

ومنه: $Y_i=0.7083+2.9166X_{i1}+1.875X_{i2}$

اختبار جودة التوفيق (معامل التحديد R^2):

$$R^2=\frac{\hat{\beta}'X'Y-n\bar{Y}^2}{Y'Y-n\bar{Y}^2}$$
$$=\frac{(b_0.\sum Y+b_1.\sum YX_1+b_2.\sum YX_2)-n\bar{Y}^2}{\sum Y^2-n\bar{Y}^2}$$
$$==\frac{(-0.7083*1+2.9166*7+1.875*9)-8*(1/8)^2}{38-8*(1/8)^2}=0.9625$$

التعليق: هذه القيمة تعكس الطبيعة الموضوعية لمعادلة الانحدار المقترحة، حيث أنها تمثل الظاهرة المدروسة تمثيلا جيدا. كما أن 96.25 % من التغيرات التي تحدث في المتغير Y سببها التغير في X_1 و X_2.

اختبار الفرضيات لنموذج الخطي المتعدد :

اختبار فيشر F – Statistics

(فرضية العدم): الانحدار ككل ليس له دلالة معنوية. $H_0:\beta_i=\beta_2=\beta_3=..........\beta_k=0$

(الفرضية البديلة): الانحدار ككل له دلالة معنوية $H_1:\exists$ معامل $\neq 0$

$$F_c = \frac{R^2}{1-R^2}\frac{n-m-1}{m} = \frac{0.9625}{1-0.9625}\frac{8-2-1}{2} = 64.33$$

$$F_{(a;v_1,v_2)} = F_{(0.05;2.5)} = 5.79$$

بما أن $F_{Tab} \rangle F_{Cal}$ $(5.79 \rangle 64.33)$ نرفض فرضية العدم (H_0) ونقبل الفرضية البديلة (H_1) مما يدل على أنه من بين معلمات النموذج يوجد واحد على الأقل يختلف عن الصفر أي أن هناك متغيرا مفسرا له تأثير جوهري على المتغير التابع بمعنى أن معادلة الانحدار المقدرة لها معنوية إحصائيا.

التمرين 03:

نعتبر الانحدار التالي على شكل الانحراف بالنسبة للمتوسط: **$y = b_1x_1 + b_2x_2 + e_i$**

ولتكن لدينا النتائج التالية:

$\sum y_i^2 = 493/3$ $\quad \sum x_{1i}^2 = 30$ $\quad \sum x_{2i}^2 = 3$ $\quad \sum x_1x_2 = 0$

$\sum y_ix_1 = 20$ $\quad \sum y_ix_2 = 20$ $\quad N = 100$

المطلوب: قدر معالم النموذج، ثم ادرس صلاحية النموذج.

الحـل:

1. **تقدير معالم النموذج** $Y_i = \hat{\beta}_1 X_{i1} + \hat{\beta}_2 X_{i2}$:

طريقة الانحرافات:

$$Y_i = \hat{\beta}_1 X_{i1} + \hat{\beta}_2 X_{i2}$$

$$y_i = (Y_i - \bar{Y})$$
$$x_{1i} = (X_{1i} - \bar{X}_1)$$
$$x_{2i} = (X_{2i} - \bar{X}_2)$$

$$y = xB$$

حيث: $\hat{\beta} = (x'x)^{-1}(x'y)$

$$(x'x) = \begin{pmatrix} \sum x_{1i}^2 & \sum x_{1i}x_{2i} \\ \sum x_{2i}x_{1i} & \sum x_{2i}^2 \end{pmatrix} \qquad (x'y) = \begin{bmatrix} \sum x_{1i}y_i \\ \sum x_{2i}y_i \end{bmatrix}$$

ومنه:

$$(x'x)=\begin{pmatrix}\sum x_{1i}{}^2 & \sum x_{1i}x_{2i}\\ \sum x_{2i}x_{1i} & \sum x_{2i}{}^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}30 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix}=90$$

$$(x'y)=\begin{bmatrix}\sum x_{1i}y_i\\ \sum x_{2i}y_i\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}20\\ 20\end{bmatrix}$$

$$\overline{(x'x)}=a_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}=\begin{bmatrix}3 & 0\\ 0 & 30\end{bmatrix}$$

$$(x'x)^{-1}=\frac{1}{(X'X)}\overline{(X'X)}=\frac{1}{90}\begin{bmatrix}3 & 0\\ 0 & 30\end{bmatrix}$$

ومنه:

$$\hat{\beta}=(x'x)^{-1}(x'y)=\begin{bmatrix}3 & 0\\ 0 & 30\end{bmatrix}*\begin{bmatrix}\frac{20}{90}\\ \frac{20}{90}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2/3\\ 20/3\end{bmatrix}$$

بطريقة أخرى يمكن تقدير b_1 و b_2 كالتالي:

$$\hat{\beta}_1=\frac{\sum_i yx_{1i}\sum_i x_{2i}{}^2-(\sum_i yx_{2i})(\sum_i x_{2i}x_{1i})}{\sum_i x_{1i}{}^2\sum_i x_{2i}{}^2-(\sum_i x_{2i}x_{1i})^2}=\frac{20*3-(20*0)}{30*3-(0)^2}=2/3$$

$$\hat{\beta}_2=\frac{\sum_i yx_{2i}\sum_i x_{1i}{}^2-(\sum_i yx_{1i})(\sum_i x_{2i}x_{1i})}{\sum_i x_{1i}{}^2\sum_i x_{2i}{}^2-(\sum_i x_{2i}x_{1i})^2}=\frac{20*30-(20*0)}{30*0-(0)^2}=20/3$$

ومنه: $Y_i=2/3X_{i1}+20/3X_{i2}$

تقييم النموذج:

دراسة العلاقة الارتباطية:

$$R_{YX_i}=\sqrt{1-\frac{A}{B}}$$

حيث أن:

A: يمثل محدد معاملات الارتباط الثنائي بين كل المؤشرات الموجودة في النموذج

$$A=\begin{bmatrix}1 & r_{YX_1} & r_{YX_2}\\ r_{YX1} & 1 & r_{X_1X_2}\\ r_{YX_2} & r_{X_1X_2} & 1\end{bmatrix}=1+2r_{YX_1}.r_{YX_2}.r_{X_2X_1}-(r^2_{YX_1}+r^2_{YX_2}+r^2_{X_2X_1})$$

$$r_{X_1Y}=\frac{\operatorname{cov}(X_1Y)}{\delta_{X_1}.\delta_Y}=\frac{\left(\overline{X_1Y}-\overline{X}_1\overline{Y}\right)}{\delta_{X_1}.\delta_Y}$$

$$\delta_{X1}=\sqrt{(X_1-\overline{X}_1)^2/n}=\sqrt{(\overline{X_1^2}-\overline{X}_1^2)}=\sqrt{30/100-0}=0.5477$$

$$\delta_Y=\sqrt{(Y-\overline{Y})^2/n}=\sqrt{(\overline{Y^2}-\overline{Y}^2)}=\sqrt{493/300-0}=1.2819$$

$$\delta_{X2}=\sqrt{(X_2-\overline{X}_2)^2/n}=\sqrt{(\overline{X_2^2}-\overline{X}_2^2)}=\sqrt{3/100-0}=1.1732$$

$$r_{X_1Y}=\frac{2/100-0*0}{0.5477*1.2819}=0.28$$

$$r_{X_2Y}=\frac{2/100-0*0}{1.1732*1.2819}=0.9$$

$$r_{X_1X_2}=0$$

$$A=1+0-(0.28^2+0.9^2+0^2)=0.105$$

B: هو محدد آخر لمعاملات الارتباط الثنائي بعد حذف الصف والعمود الأول.

$$B=\begin{bmatrix}1 & r_{X_1X_2}\\ r_{X_1X_2} & 1\end{bmatrix}=1-r^2_{X_2X_1}=1-0^2=1$$

$$R_{YX_i}=\sqrt{1-\frac{A}{B}}=\sqrt{1-\frac{1.05}{1}}=0.94$$

التعليق: إن القيمة المتحصل عليها تشير إلى وجود علاقة ارتباطية قوية جدا.

اختبار جودة التوفيق (معامل التحديد R^2):

$$R_{YX_i}^{\ 2}=(R_{YX_i})^2$$
$$=(0.94)^2=0.89$$

بطريقة أخرى:

$$R^2=\frac{\hat{\beta}'x'y}{y'y}=\frac{(b_1.\sum yx_1+b_2.\sum yx_2)}{\sum y^2}$$
$$=\frac{(20*2/3+20*20/3}{493/3}=0.89$$

التعليق: هذه القيمة تعكس الطبيعة الموضوعية لمعادلة الانحدار المقترحة، حيث أنها تمثل الظاهرة المدروسة تمثيلا جيدا. كما أن 89% من التغيرات التي تحدث في المتغير Y سببها التغير في X_1 و X_2.

اختبار الفرضيات لنموذج الخطي المتعدد :

اختبار فيشر F – Statistics

(فرضية العدم): الانحدار ككل ليس له دلالة معنوية. $H_0 : \beta_i = \beta_2 = \beta_3 = ...\beta_k = 0$

(الفرضية البديلة): الانحدار ككل له دلالة معنوية $H_1 : \exists$ معامل $\neq 0$

$$F_c = \frac{R^2}{1-R^2}\frac{n-m-1}{m} = \frac{0.89}{1-0.89}\frac{100-2-1}{2} = 492.40$$

$$F_{(0.05;2.90)} \geq F_{(a;v_1,v_2)} = F_{(0.05;2.97)} \geq F_{(0.05;2.100)}$$
$$3.10 \geq F_{(a;v_1,v_2)} = F_{(0.05;2.97)} \geq 3.09$$

بما أن $F_{Cal} \rangle F_{Tab}$ نرفض فرضية العدم (H_0) ونقبل الفرضية البديلة (H_1) مما يدل على أنه من بين معلمات النموذج يوجد واحد على الأقل يختلف عن الصفر أي أن هناك متغيرا مفسرا له تأثير جوهري على المتغير التابع بمعنى أن معادلة الانحدار المقدرة لها معنوية إحصائيا.

تمرين 4: لتكن المعطيات التالية:

$$X'Y = \begin{pmatrix} 132 \\ 24 \\ 92 \end{pmatrix} \qquad x'x = \begin{pmatrix} 33 & 0 & 0 \\ 0 & 40 & 20 \\ 0 & 20 & 60 \end{pmatrix} \qquad \sum\left(Y - Y\right)^2 = 150$$

المطلوب:

1– ما هو حجم العينة، ثم احسب المصفوفة $(X'X)^{-1}$.

2– حساب الشعاع B ، ثم اكتب معادلة الانحدار الخطي المتعدد.

3– قدر الانحراف المعياري لـ b_2.، واختبر المعنوية الإحصائية للمعلمة b_2.

4– اختبر معنوية النموذج ككل عند مستوى معنوية 0.01.

الحــل:

2. حجم العينة: N=33، حساب المصفوفة $(X'X)^{-1}$:

لدينا:

$$(X'X)=\begin{bmatrix} n & \sum X_{1i} & \sum X_{2i} \\ \sum X_{1i} & \sum X_{1i}^2 & \sum X_{1i}X_{2i} \\ \sum X_{2i} & \sum X_{1i}X_{2i} & \sum X_{2i}^2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 33 & 0 & 0 \\ 0 & 40 & 20 \\ 0 & 20 & 60 \end{bmatrix}=66000$$

$$\overline{(X'X)}=a_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}=\begin{bmatrix} 2000 & 0 & 0 \\ 0 & 1980 & -660 \\ 0 & -660 & 1320 \end{bmatrix}$$

$$(X'X)^{-1}=\frac{1}{(X'X)}\overline{(X'X)}=\frac{1}{66000}\begin{bmatrix} 2000 & 0 & 0 \\ 0 & 1980 & -660 \\ 0 & -660 & 1320 \end{bmatrix}$$

3. حساب الشعاع $\hat{\beta}$:

لدينا $Y=XB$

حيث: $\hat{\beta}=(X'X)^{-1}(X'Y)$

$$(X'Y)=\begin{bmatrix} \sum Y_i \\ \sum Y_i X_{1i} \\ \sum Y_i X_{2i} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 50 \\ 755 \\ 423 \end{bmatrix}$$

ومنه:

$$\hat{\beta}=(X'X)^{-1}(X'Y)=\begin{bmatrix} 2000 & 0 & 0 \\ 0 & 1980 & -660 \\ 0 & -660 & 1320 \end{bmatrix}*\begin{bmatrix} \frac{132}{66000} \\ \frac{24}{66000} \\ \frac{92}{66000} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 4 \\ -1/5 \\ 8/5 \end{bmatrix}$$

ومنه: $Y_i=4-1/5X_{i1}+8/5X_{i2}$

4. حساب الانحراف المعياري للمعلمة b₂:

$$\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_2}=\sqrt{\operatorname{var}(\hat{\beta}_2)}=\sqrt{\sigma_e^2\left(X'X\right)^{-1}}=\frac{\delta_Y\sqrt{1-R_{YXi}{}^2}}{\delta_{X_2}\sqrt{1-R_{x_1x_2}{}^2}}\frac{1}{\sqrt{n-m-1}}$$

$$\delta_Y=\sqrt{\frac{\sum(Y-\bar{Y})^2}{n}}=\sqrt{150/33}=2.1320$$

$$\delta_{X_2}=\sqrt{\frac{\sum(X_2-\overline{X_2})^2}{n}}=\sqrt{\overline{X_2^{\,2}}-\overline{X_2}^{\,2}}=\sqrt{60/33}=1.3484$$

$$R_{YXi}{}^2=\frac{\hat{\beta}'X'Y-n\bar{Y}^2}{Y'Y-n\bar{Y}^2}=\frac{(b_0.\sum Y+b_1.\sum YX_1+b_2.\sum YX_2)-n\bar{Y}^2}{\sum Y^2-n\bar{Y}^2}$$

$$\sum(Y-\bar{Y})^2=n(\overline{Y^2}-\bar{Y}^2)$$

$$\frac{\sum(Y-\bar{Y})^2}{n}=(\overline{Y^2}-\bar{Y}^2)$$

$$\overline{Y^2}=150/33+(132/33)^2=678/33$$

ومنه

$$\sum(Y)^2=678$$

$$R_{YXi}{}^2=\frac{(4*132-1/5*24+8/5*92)-33*4^2}{678-33*4^2}=0.9493$$

$$R_{X1X2}{}^2=\left(\frac{\overline{X_1X_2}-\overline{X_1}\,\overline{X_2}}{\sqrt{\overline{X_1^{\,2}}-\overline{X_1}^{\,2}}\sqrt{\overline{X_2^{\,2}}-\overline{X_2}^{\,2}}}\right)^2=\left(\frac{20/33-0}{\sqrt{40/33-0}\sqrt{60/33-0}}\right)^2=0.1666$$

$$\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_2}=\sqrt{\operatorname{var}(\hat{\beta}_2)}=\sqrt{\sigma_e^2\left(X'X\right)^{-1}}=\frac{\delta_Y\sqrt{1-R_{YXi}{}^2}}{\delta_{X_2}\sqrt{1-R_{x_1x_2}{}^2}}\frac{1}{\sqrt{n-m-1}}$$

$$=\frac{2.1320\sqrt{1-0.9493}}{1.3448\sqrt{1-0.1666}}\frac{1}{\sqrt{33-2-1}}=0.07118$$

- **اختبار معنوية المعلمة b₂:** (اختبار سيودنت t) :

المعلمة ليس لها دلالة معنوية $H_0:\beta_i=0/i=0,1,\dots,m$ (فرضية العدم)

المعلمة لها دلالة معنوية $H_1:\beta_i\neq 0$ (الفرضية البديلة)

$$t_c=\left|\frac{\hat{\beta}_2}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_2}}\right|==\left|\frac{0.2}{\sqrt{0.071}}\right|=22.47$$

$$t^{T}_{(n-m-1,\alpha)} = t_{(30,0.05)} = 2.0423$$

بما أن $t^c \geq t^T$ فإن لمعلمة $\mathbf{b_2}$ هي معنوية إحصائيا وتكوينها موضوعي

5. **اختبار معنوية النموذج (اختبار فيشر** F :

(فرضية العدم): الانحدار ككل ليس له دلالة معنوية. $H_0 : \beta_i = \beta_2 = \beta_3 = ...\beta_k = 0$

(الفرضية البديلة): الانحدار ككل له دلالة معنوية $H_1 : \exists$ معامل $\neq 0$

$$F_c = \frac{R^2}{1-R^2}\frac{n-m-1}{m} = \frac{0.9493}{1-0.9493}\frac{33-2-1}{2} = 181.05$$

$$F_{(\alpha;v_1,v_2)} = F_{(0.05;2.30)} = 3.32$$

بما أن $F_{Cal} \rangle F_{Tab}$ (3.32 $\rangle$ 181.05) نرفض فرضية العدم (H_0) ونقبل الفرضية البديلة (H_1) مما يدل على أنه من بين معلمات النموذج يوجد واحد على الأقل يختلف عن الصفر أي أن هناك متغيرا مفسرا له تأثير جوهري على المتغير التابع بمعنى أن معادلة الانحدار المقدرة لها معنوية إحصائيا.

تمارين:

التمرين 01:

لنفترض المعطيات التالية خاصة بالنفقات الاستهلاكية المباشرة Yi لأسرة ما، دخلها الشهري X_1 وكذلك مدخراتها X_2 ، إذا افترضنا أن العلاقة بين المتغير التابع والمتغيرين المستقلين X_1 و X_2 يمكن التعبير عنها بنموذج قياسي متعدد خطي.

$$Y_i = B_0 + B_1X_1 + B_2X_2 + \varepsilon_i$$

VAr (Y)= 1230 **$F_t^{0.05}=5.79$**

$T_t^{0.05}=2.57$

$\sum Y=948$ **$\sum YX1=221170$** **$\sum YX2=66920$** **$COV(b_0.b_1)=-4.48895$**

$COV(b_0.b_2)=8.52183$ **$COV(b_1.b_2)=-0.09261$**

$Var(b_0)=446.42420$ **$Var(b_1)=0.04742$**

$Var(b_2)=0.18499$

المطلوب:

1- قدر النموذج التالي بطريقة المربعات الصغرى، (بالنسبة لتباين الخطأ العشوائي **لا يتعدى** 60).

2- أوجد معامل التحديد العادي والمصحح.

3- اختبر معنوية المعالم المقدرة "كل معلمة على حدى" عند مستوى الدلالة 0.05.

4- اختبر معنوية النموذج ككل عند مستوى الدلالة 0.05.

5- كون مجال الثقة لـ Yi عند مستوى المعنوية 95%، إذا كان (X_1= 400 ,X_2 = 160)

تمرين 02:

المعطيات التالية الواردة في الجدول التالي خاصة بالنفقات الاستهلاكية المباشرة y_i لأسرة ما، دخلها الشهري x_1وكذلك مدخراتها x_2 اذا افترضنا ان علاقة y_i بالمؤشرين $x_2.x_1$ يمكن التعبير عنها بنموذج قياسي متعدد خطي.

النفقات الاستهلاكية	80	83	86	97	120	150	160	172
الدخل الشهري	115	130	150	160	205	250	310	355
المدخرات	10	15	30	45	55	75	100	140

المطلوب:

1- تقدير النموذج المعبر عن هذه العلاقة.

2- تقييم جودة النموذج في التعبير هم هذه العلاقة.

3- إجراء عملية التوقع لقيمة الاستهلاك الأسري المقدر عندما يكون الدخل =400، ومستوى الادخار =160، ثم تقدير قيمة الاستهلاك الفعلي عند نفس مستوى المؤشرين المستقلين.

الفصل الرابع: الازدواج الخطي واختيار النموذج الأمثل

1. الانحدار الجزئي:

المقصود بالانحدار الجزئي، عند دراسة نماذج الانحدار المتعددة، هو حصر علاقة المتغير التابع (Y_i) بأحد المتغيرات المستقلة (X_i) الداخلة في تكوين معادلة الانحدار المدروسة. فمعادلة الانحدار الجزئية هي تلك المعادلة التي تجمع بين المتغير التابع (Y_i) وأحد المؤشرات المستقلة (X_i) فقط مع تثبيت المؤشرات المستقلة الأخرى، الداخلة في تكوين معادلة الانحدار المدروسة، عند مستواها المتوسط. بهذه الطريقة نحول نموذج انحدار متعدد إلى نموذج انحدار آخر يسمى جزئي يميز العلاقة بين المتغير التابع وأحد المتغيرات المستقلة (X_i) فقط.

إذا كانت لدينا معادلة الانحدار المتعددة التالية[27]:

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_{1i} + \beta_2 X_{2i} + \beta_3 X_{3i} + ... + \beta_n X_{ni} + \varepsilon_i$$

نستطيع أن نستخرج منها معادلة الانحدار الجزئية بالنسبة لـ $(X_1.X_2.X_3......X_n)$ كالتالي:

$$Y_{i\,X_1}(\overline{X_2.X_3.......X_n}) = \beta_0 + \beta_1 X_{1i} + \beta_2 \overline{X_{2i}} + \beta_3 \overline{X_{3i}} + ... + \beta_n \overline{X_{ni}}$$

وهي تعني معادلة الانحدار الجزئي لـ (Y) على (X_1) مع بقاء العوامل الأخرى ثابتة.

$$Y_{i\,X_2}(\overline{X_1.X_3.......X_n}) = \beta_0 + \beta_1 \overline{X_{1i}} + \beta_2 X_{2i} + \beta_3 \overline{X_{3i}} + ... + \beta_n \overline{X_{ni}}$$

وهي تعني معادلة الانحدار الجزئي لـ (Y) على (X_2) مع بقاء العوامل الأخرى ثابتة.

$$Y_{i\,X_n}(\overline{X_2.X_3.......X_{n-1}}) = \beta_0 + \beta_1 \overline{X_{1i}} + \beta_2 \overline{X_{2i}} + \beta_3 \overline{X_{3i}} + ... + \beta_{n-1} \overline{X_{n-1i}} + \beta_n X_{ni}$$

وهي تعني معادلة الانحدار الجزئي لـ (Y) على (X_n) مع بقاء العوامل الأخرى ثابتة.

عندما نعوض في هذه المعادلات المؤشرات المثبتة المعنية بقيم وسطها الحسابي، فإنها تأخذ شكل معادلات انحدار خطية بسيطة أي:

$$Y_{i\,X_1}(\overline{X_2.X_3.......X_n}) = A_1 + \beta_1 X_{1i}$$

$$Y_{i\,X_2}(\overline{X_1.X_3.......X_n}) = A_2 + \beta_2 X_{2i}$$

$$Y_{i\,X_n}(\overline{X_2.X_3.......X_{n-1}}) = A_n + \beta_n \overline{X_{ni}}$$

حيث أن:

$$A_1 = \beta_0 + \beta_2 \overline{X_{2i}} + \beta_3 \overline{X_{3i}} + ... + \beta_n \overline{X_{ni}}$$

$$A_2 = \beta_0 + \beta_1 \overline{X_{1i}} + \beta_3 \overline{X_{3i}} + ... + \beta_n \overline{X_{ni}}$$

$$A_n = \beta_0 + \beta_1 \overline{X_{1i}} + \beta_2 \overline{X_{2i}} + \beta_3 \overline{X_{3i}} + ... + \beta_{n-1} \overline{X_{n-1i}}$$

[27] مكيد علي، مرجع سبق ذكره، ص 161.

بعكس نماذج الانحدار البسيطة (ذات متغير مستقل واحد)، نماذج الانحدار الجزئية توفر إمكانية حصر تأثير متغير مستقل واحد على المتغير التابع (Y)، نظرا لأن المؤشرات المستقلة الأخرى هي مثبتة عند مستوى محدد. نتيجة تأثير المتغيرات المثبتة تكون محصورة في هذه الحالة في المعامل الحر (A).

1.1. الارتباط الجزئي:

في بعض الظواهر والدراسات يوجد هناك عدد من المتغيرات (ثلاثة فأكثر) مرتبطة بعلاقة رياضية فيما بينها مثل: إنفاق أسرة يكون مرتبط بدخلها الشهري و عدد افرداها وكذلك حجم مبيعات سلعة معينة يرتبط بسعرها وحجم الدعاية لها وكذلك الفترة الزمنية للبيع ففي هذه الحالة، ولغرض حساب معامل الارتباط بين متغيرين اثنين في دراسة معينة مع وجود متغيرات أخرى نلجأ إلى حساب ما يسمى بالارتباط الجزئي .

الارتباط الجزئي هو: العلاقة الرياضية الصافية بين متغيرين اثنين فقط مع تثبيت أو عزل أو استبعاد قيم متغيرات أخرى مؤثرة في نموذج الانحدار المدروس عند مستوى معين، ويمكن حساب هذه العلاقة الرياضية من خلال معامل الارتباط الجزئي[28].

مقياس الارتباط الجزئي يعبر عن انخفاض تباين التمثيل (تباين الخطأ المرتكب) نتيجة إدخال متغير إضافي في معادلة الانحدار.

كما أن الفرق بينه وبين معامل الارتباط البسيط هو أن معامل بيرسون يستخرج العلاقة بين متغيرين اثنين لأي ظاهرة بدون يأخذ بنظر الاعتبار وجود متغيرات أخرى تؤثر في الظاهرة أو لا، بينما معامل الارتباط الجزئي لا يأخذ بنظر الاعتبار وجود متغيرات أخرى تؤثر في الظاهرة فحسب وإنما يقوم باستبعاد أثرها لكي يستخرج الارتباط الصافي بين أي متغيرين.

1.2. معاملات الارتباط الجزئي:

يحسب معامل الارتباط الجزئي وفق الصيغ التالية[29]:

من الرتبة صفر (ارتباط ثنائي بسيط):

$$r_{X_iY} = \frac{\sum\left(X_i-\overline{X_i}\right)\left(Y_i-\overline{Y}\right)}{n.\delta_{X_i}.\delta_Y} = \frac{\left(\overline{X_iY}-\overline{X_i}\,\overline{Y}\right)}{\delta_{X_i}.\delta_Y} = \frac{\operatorname{cov}\left(X_i.Y\right)}{\delta_{X_i}.\delta_Y}$$

[28] ثروت محمد عبد المنعم، مرجع سبق ذكره، ص308.

[29] Jack Johnston& John Dinardo, OP.CIT, P 214.

من الرتبة الأولى:

$$r_{(Y,x_i)}\left(\overline{X_j}\right)=\frac{r_{YX_i}-r_{YX_j}\,r_{X_iX_j}}{\sqrt{\left(1-r^2_{Yx_j}\right)\left(1-r^2_{x_ix_j}\right)}}$$

من الرتبة الثانية:

$$r_{(Y,x_i)}\left(\overline{X_j.X_z}\right)=\frac{r_{YX_i}\left(\overline{X_j}\right)-r_{YX_z}\left(\overline{X_j}\right)r_{X_iX_z}\left(\overline{X_j}\right)}{\sqrt{\left(1-r^2_{YX_z}\left(\overline{X_j}\right)\right)\left(1-r^2_{X_iX_z}\left(\overline{X_j}\right)\right)}}$$

وتتمثل **خصائص الارتباط الجزئي في:**

- قيمة معامل الارتباط الجزئي تتراوح بين $(1,-1)$.
- تفسر قيمته كما تفسر قيمة معامل الارتباط البسيط.
- إن معامل الارتباط الجزئي لأي متغيرين تكون إشارته مماثلة لإشارة معامل الارتباط البسيط بينهما.

تفصيل:

ليكن لدينا نموذج انحدار متكون من متغيرتين مستقلتين كالآتي:

$$Y_i=\beta_0+\beta_1X_{1i}+\beta_2X_{2i}+\beta_3X_{3i}+\varepsilon_i$$

معامل الارتباط الثنائي بين (X_i,Y):

- **معامل الارتباط الثنائي بين** (X_1,Y):

$$r_{X_1Y}=\frac{\sum\left(X_1-\overline{X}_1\right)\left(Y_i-\overline{Y}\right)}{n.\delta_{X_1}.\delta_Y}=\frac{\left(\overline{X_1Y}-\overline{X}_1\overline{Y}\right)}{\delta_{X_1}.\delta_Y}=\frac{\operatorname{cov}(X_1Y)}{\delta_{X_1}.\delta_Y}$$

- **معامل الارتباط الثنائي بين** (X_2,Y):

$$r_{X_2Y}=\frac{\sum\left(X_2-\overline{X}_2\right)\left(Y_i-\overline{Y}\right)}{n.\delta_{X_2}.\delta_Y}=\frac{\left(\overline{X_2Y}-\overline{X}_2\overline{Y}\right)}{\delta_{X_2}.\delta_Y}=\frac{\operatorname{cov}(X_2Y)}{\delta_{X_2}.\delta_Y}$$

- **معامل الارتباط الثنائي بين** (X_3,Y):

$$r_{X_3Y}=\frac{\sum\left(X_3-\overline{X_3}\right)\left(Y_i-\overline{Y}\right)}{n.\delta_{X_3}.\delta_Y}=\frac{\left(\overline{X_3Y}-\overline{X_3}\,\overline{Y}\right)}{\delta_{X_3}.\delta_Y}=\frac{\operatorname{cov}\left(X_3Y\right)}{\delta_{X_3}.\delta_Y}$$

حساب معامل الارتباط الجزئي من الرتبة الأولى:

- **معامل الارتباط الجزئي بين** (X_1,Y):

$$r_{(Y,x_1)\left(\overline{X_2}\right)}=\frac{r_{YX_1}-r_{YX_2}\,r_{X_1X_2}}{\sqrt{\left(1-r^2_{Yx_2}\right)\left(1-r^2_{x_1x_2}\right)}}$$

حيث تعني العبارة بين القوسين X_2 تثبيت المتغيرة عند مستواها المتوسط.

$$r_{(Y,x_1)\left(\overline{X_3}\right)}=\frac{r_{YX_1}-r_{YX_3}\,r_{X_1X_3}}{\sqrt{\left(1-r^2_{Yx_3}\right)\left(1-r^2_{x_1x_3}\right)}}$$

حيث تعني العبارة بين القوسين X_3 تثبيت المتغيرة عند مستواها المتوسط.

- **معامل الارتباط الجزئي بين** (X_2,Y):

$$r_{(Y,x_2)\left(\overline{X_1}\right)}=\frac{r_{YX_2}-r_{YX_1}\,r_{X_1X_2}}{\sqrt{\left(1-r^2_{YX_1}\right)\left(1-r^2_{X_1X_2}\right)}}$$

حيث تعني العبارة بين القوسين X_1 تثبيت المتغيرة عند مستواها المتوسط.

$$r_{(Y,x_2)\left(\overline{X_3}\right)}=\frac{r_{YX_2}-r_{YX_3}\,r_{X_3X_2}}{\sqrt{\left(1-r^2_{YX_3}\right)\left(1-r^2_{X_3X_2}\right)}}$$

حيث تعني العبارة بين القوسين X_3 تثبيت المتغيرة عند مستواها المتوسط.

- **معامل الارتباط الجزئي بين** (X_3,Y):

$$r_{(Y,x_3)\left(\overline{X_1}\right)}=\frac{r_{YX_3}-r_{YX_1}\,r_{X_1X_3}}{\sqrt{\left(1-r^2_{YX_1}\right)\left(1-r^2_{X_1X_3}\right)}}$$

حيث تعني العبارة بين القوسين X_1 تثبيت المتغيرة عند مستواها المتوسط.

$$r_{(Y,x_3)\left(\overline{X_2}\right)}=\frac{r_{YX_3}-r_{YX_2}\,r_{X_2X_3}}{\sqrt{\left(1-r^2_{YX_2}\right)\left(1-r^2_{X_2X_3}\right)}}$$

حيث تعني العبارة بين القوسين X_2 تثبيت المتغيرة عند مستواها المتوسط.

معامل الارتباط الجزئي من الرتبة الثانية:

- **معامل الارتباط الجزئي بين** (X_1, Y):

$$r_{(Y,x_1)}\left(\overline{X_2 . X_3}\right)=\frac{r_{YX_1}\left(\overline{X_2}\right)-r_{YX_3}\left(\overline{X_2}\right) r_{X_1X_3}\left(\overline{X_2}\right)}{\sqrt{\left(1-r^2_{YX_3}\left(\overline{X_2}\right)\right)\left(1-r^2_{X_1X_3}\left(\overline{X_2}\right)\right)}}$$

حيث تعني العبارة بين القوسين $X_2.X_3$ تثبيت المتغيرة عند مستواها المتوسط.

- **معامل الارتباط الجزئي بين** (X_2, Y):

$$r_{(Y,x_2)}\left(\overline{X_1 . X_3}\right)=\frac{r_{YX_2}\left(\overline{X_1}\right)-r_{YX_3}\left(\overline{X_1}\right) r_{X_2X_3}\left(\overline{X_1}\right)}{\sqrt{\left(1-r^2_{YX_3}\left(\overline{X_1}\right)\right)\left(1-r^2_{X_1X_3}\left(\overline{X_1}\right)\right)}}$$

حيث تعني العبارة بين القوسين $X_1.X_3$ تثبيت المتغيرة عند مستواها المتوسط.

- **معامل الارتباط الجزئي بين** (X_3, Y):

$$r_{(Y,x_3)}\left(\overline{X_1 . X_2}\right)=\frac{r_{YX_3}\left(\overline{X_1}\right)-r_{YX_2}\left(\overline{X_1}\right) r_{X_2X_3}\left(\overline{X_1}\right)}{\sqrt{\left(1-r^2_{YX_2}\left(\overline{X_1}\right)\right)\left(1-r^2_{X_2X_3}\left(\overline{X_1}\right)\right)}}$$

حيث تعني العبارة بين القوسين $X_1.X_2$ تثبيت المتغيرة عند مستواها المتوسط.

مثال1: نفترض أن حجم المبيعات اليومي لاحدى الجرائد Y يعتمد على تفضيلات القراء لهذه الجريدة (الطلب) والذي نرمز له بالرمز X_1، اتساع السوق (عرضها) ممثلا بنقاط البيع X_2، وكذلك عدد صحفي غرفة التحرير لهذه الجريدة X_3.

إذا كان جدول معاملات الارتباط الثنائي للمؤشرات المذكورة كالتالي:

	Y	X_1	X_2	X_3
Y	1			
X_1	0.69	1		
X_2	0.58	0.46	1	
X_3	0.55	0.5	0.41	1

المطلوب: ترتيب المؤشرات المستقلة حسب درجة تأثيرها الصافي على المؤشر التابع (بمعنى تصفية تأثير كل مؤشر مستقل على المؤشر التابع من تأثير المؤشرات الأخرى على بعضها البعض).

الحـل:

حساب معامل الارتباط الجزئي من الرتبة الأولى:

- **معامل الارتباط الجزئي بين** (X_1, Y):

$$r_{(Y,x_1)}(\overline{X_2}) = \frac{r_{YX_1} - r_{YX_2}\, r_{X_1X_2}}{\sqrt{\left(1-r^2_{Yx_2}\right)\left(1-r^2_{x_1x_2}\right)}} = \frac{0.69-0.58*0.46}{\sqrt{\left(1-(0.58)^2\right)\left(1-(0.46)^2\right)}} = 0.585$$

$$r_{(Y,x_1)}(\overline{X_3}) = \frac{r_{YX_1} - r_{YX_3}\, r_{X_1X_3}}{\sqrt{\left(1-r^2_{Yx_3}\right)\left(1-r^2_{x_1x_3}\right)}} \frac{0.69-0.55*0.5}{\sqrt{\left(1-(0.55)^2\right)\left(1-(0.5)^2\right)}} = 0.574$$

- **معامل الارتباط الجزئي بين** (X_2, Y):

$$r_{(Y,x_2)}(\overline{X_1}) = \frac{r_{YX_2} - r_{YX_1}\, r_{X_1X_2}}{\sqrt{\left(1-r^2_{YX_1}\right)\left(1-r^2_{X_1X_2}\right)}} = \frac{0.58-0.69*0.46}{\sqrt{\left(1-(0.69)^2\right)\left(1-(0.46)^2\right)}} = 0.409$$

$$r_{(Y,x_2)}(\overline{X_3}) = \frac{r_{YX_2} - r_{YX_3}\, r_{X_3X_2}}{\sqrt{\left(1-r^2_{YX_3}\right)\left(1-r^2_{X_3X_2}\right)}} = \frac{0.58-0.55*0.41}{\sqrt{\left(1-(0.55)^2\right)\left(1-(0.41)^2\right)}} = 0.465$$

- **معامل الارتباط الجزئي بين** (X_3, Y):

$$r_{(Y,x_3)}(\overline{X_1}) = \frac{r_{YX_3} - r_{YX_1}\, r_{X_1X_3}}{\sqrt{\left(1-r^2_{YX_1}\right)\left(1-r^2_{X_1X_3}\right)}} = \frac{0.55-0.69*0.5}{\sqrt{\left(1-(0.69)^2\right)\left(1-(0.5)^2\right)}} = 0.327$$

$$r_{(Y,x_3)}(\overline{X_2}) = \frac{r_{YX_3} - r_{YX_2}\, r_{X_2X_3}}{\sqrt{\left(1-r^2_{YX_2}\right)\left(1-r^2_{X_2X_3}\right)}} = \frac{0.55-r0.58*0.41}{\sqrt{\left(1-(0.58)^2\right)\left(1-(0.41)^2\right)}} = 0.42$$

معامل الارتباط الجزئي من الرتبة الثانية:

- **معامل الارتباط الجزئي بين** (X_1,Y):

$$r_{(Y,x_1)\left(\overline{X_2.X_3}\right)}=\frac{r_{YX_1\left(\overline{X_2}\right)}-r_{YX_3\left(\overline{X_2}\right)}\,r_{X_1X_3\left(\overline{X_2}\right)}}{\sqrt{\left(1-r^2_{YX_3\left(\overline{X_2}\right)}\right)\left(1-r^2_{X_1X_3\left(\overline{X_2}\right)}\right)}}=\frac{0.535-0.42*0.385}{\sqrt{\left(1-(0.42)^2\right)\left(1-(0.385)^2\right)}}=0.505$$

- **معامل الارتباط الجزئي بين** (X_2,Y):

$$r_{(Y,x_2)\left(\overline{X_1.X_3}\right)}=\frac{r_{YX_2\left(\overline{X_1}\right)}-r_{YX_3\left(\overline{X_1}\right)}\,r_{X_2X_3\left(\overline{X_1}\right)}}{\sqrt{\left(1-r^2_{YX_3\left(\overline{X_1}\right)}\right)\left(1-r^2_{X_1X_3\left(\overline{X_1}\right)}\right)}}=\frac{0.409-0.327*0.234}{\sqrt{\left(1-(0.327)^2\right)\left(1-(0.234)^2\right)}}=0.362$$

- **معامل الارتباط الجزئي بين** (X_3,Y):

$$r_{(Y,x_3)\left(\overline{X_1.X_2}\right)}=\frac{r_{YX_3\left(\overline{X_1}\right)}-r_{YX_2\left(\overline{X_1}\right)}\,r_{X_2X_3\left(\overline{X_1}\right)}}{\sqrt{\left(1-r^2_{YX_2\left(\overline{X_1}\right)}\right)\left(1-r^2_{X_2X_3\left(\overline{X_1}\right)}\right)}}=\frac{0.327-0.409*0.234}{\sqrt{\left(1-(0.409)^2\right)\left(1-(0.234)^2\right)}}=0.261$$

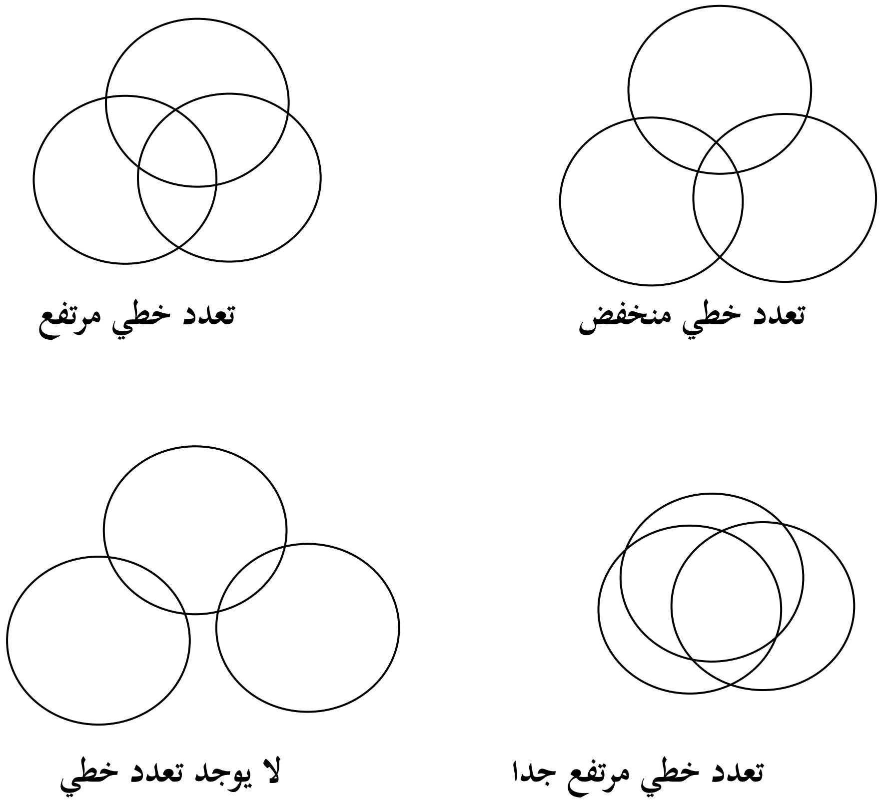
2. الازدواج الخطي:

تعتبر مشكلة الازدواج الخطي من بين المشاكل المؤثرة سلبا على جودة النموذج المتعدد، وترتبط بأحد الفرضيات الأساسية لطريقة المربعات الصغرى العادية، فهذه الفرضية تنص على عدم وجود ارتباط بين المتغيرات المستقلة أي عدم وجود علاقة خطية محددة بين قيم مشاهدات المتغيرات المستقلة.

2.1. تعريف التعدد الخطي: هو وجود ارتباط قوي بين اثنان أو أكثر من المتغيرات المستقلة مما يؤثر على نتائج عملية التقدير وبالتالي على القيم التنبؤية للظاهرة المدروسة، كما يؤدي في بعض الحالات إلى تغيير إشارات معلمات النموذج[30].

ويمكن عرض مشكلة التعدد الخطي بيانيا من الشكل أدناه، وبافتراض أن الدوائر تمثل المتغير التابع ومتغيرين مستقلين، تقاس درجة التعدد الخطي من خلال المنطقة المظللة بين الدائرتين فإذا تداخلتا فنحن في حالة التعدد الخطي التام، وإن كانتا مستقلين فنحن في حالة انعدام التعدد الخطي.

شكل يمثل حالات التعدد الخطي



30 أموري هادي كاظم و باسم شليبه مسلم، القياس الاقتصادي المتقدم: النظرية والتطبيق، مكتبة دنيا الأمل، بغداد، العراق، 2002، ص 181.

2.2. أسباب ظهور مشكلة التعدد الخطي: ونذكر منها:

- اتجاه المتغيرات الاقتصادية تبعا للتغير مع مرور الزمن، فمثلا في فترات الانتعاش يميل كل من الدخل والادخار والاستثمار نحو الارتفاع، والعكس في فترات الانكماش والركود فتميل الانخفاض، لذا يمكن القول أن النمو هو أحد الأسباب في إحداث التعدد الخطي.
- استخدام متغيرات مستقلة ذات فترات إبطاء في المعادلة المراد تقديرها.
- يؤدي صغر حجم العينة المدروسة، بحيث ينصح أن تكون حجم العينة يساوي 6 أضعاف عدد المتغيرات، وكلما ارتفع عدد المتغيرات وانخفض حجم العينة أدى إلى ظهور مشكلة التعدد الخطي.

2.3. اختبارات الكشف عن وجود التعدد الخطي: هناك عدة طرق للكشف عن مشكلة الارتباط الخطي المتعدد منها[31]:

- **طريقة التحليل الترافدي Firsh**:

تعتمد هذه الطريقة على قيمة معامل التحديد (R^2) ومعامل الارتباط (r) والأخطاء المعيارية (s)، وتتلخص خطوات هذا الاختبار فيما يلي:

1- إيجاد معادلة انحدار المتغير التابع على كل متغير من المتغيرات المستقلة على حدة، ثم نقوم بتحديد قيمة معامل التحديد (R^2) والأخطاء المعيارية للمقدرات في كل حالة. بعد ذلك، يتم اختيار المعادلة المقدرة التي تكون نتائج تقديراتها أفضل من غيرها طبقا للمعايير التالية:

- أن قيمة قيمة معامل التحديد (R^2) كبيرة؛
- أن تكون الأخطاء المعيارية للقيم المقدرة للمعاملات أقل من نظيراتها في المعادلة المقدرة الأخرى.

2- إضافة متغيرات مستقلة واحد تلو الآخر إلى المعادلة التي تم اختيارها، ثم اختبار آثار كل منها على قيمة معامل التحديد والقيم المقدرة لمعاملات النموذج المقدر، ويجب اتخاذ القرار كما يلي:

- إذا كان المتغير المستقل المضاف يؤدي إلى تحسين معامل التحديد (R^2) فقط يجب إبقاء هذا المتغير.
- إذا كان المتغير المستقل المضاف يؤثر على إشارات وقيم المقدرات حيث يجعلها غير مقبولة اقتصاديا وإحصائيا، فإن هذا المتغير هو السبب في وجود مشكلة التعدد الخطي، وعليه يجب حذفه.
- إذا كان المتغير المستقل المضاف لا يؤثر في تحسين معامل التحديد (R^2) ولا يؤثر على قيم معاملات الانحدار فيجب حذف هذا المتغير.

---

31 Bourbonnais, op.cit, P 115.

- **اختبار Klein**:

لا يتعلق الأمر باختبار احصائي وإنما خاصية يمكن الاعتماد عليها لكشف مشكلة التعدد الخطي.

نقر بوجود مشكلة التعدد الخطي إذا كان الارتباط الخطي المتعدد اكبر نسبياً من درجة الارتباط المتعدد الكلي بين كل المتغيرات المستقلة، ويعتقد كلاين أن الارتباط الخطي $r^2_{X1X2} \succ R^2_{YX1X1....Xm}$ يكون مؤذياً إذا كان الارتباط الداخلي يكون اكبر من الارتباط الكلي، ولكن يعاب على هذا الاختبار أن درجة الارتباط الداخلي بين المتغيرات المستقلة لا تعتبر معيارا دقيقا لمدى التأثير الذي يحدثه وجود التعدد الخطي على قيم المعلمات المقدرة وقيم الأخطاء المعيارية. فقد تكون معاملات الارتباط البسيطة بين المتغيرات المستقلة منخفضة بالرغم من وجود مشكلة تعدد خطي خطير.

- **اختبار Farrar–Glauber**:

إن أسلوب كلاين تم تحجيمه من قبل كل من (**Farrar–Glauber**) في بحثهما المعنون **Multicollinerity in regression analysis** مشكلة الارتباط الخطي المتعدد في تحليل الانحدار، والمنشور في مجلة **Review of econamics and statistic**، سنة 1967 ويعتمد هذا الاختبار على ثلاثة اختبارات أساسية:

اختبار مربع كي (χ^2): ولتطبيق هذا الاختبار يتم إتباع الخطوات التالية:

- حساب محدد مصفوفة معاملات الارتباط التالية:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & r_{X_1X_2} & r_{X_1X_3} & \cdots & r_{X_1X_k} \\ r_{X_2X_1} & 1 & r_{X_2X_3} & \cdots & r_{X_2X_k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ r_{X_kX_k} & r_{X_kX_2} & r_{X_kX_3} & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

– قطر مصفوفة دائما يساوي الواحد صحيح لأن ارتباط المتغير مع نفسه هو دائما يساوي 1.

– عندما تكون قيمة المحدد تقترب من الصفر، فإن هناك دليل على وجود تعدد خطي.

– إذا كانت قيمة المحدد تساوي واحد، فإن هذا يعني عدم وجود تعدد خطي.

- حساب القيمة المحسوبة لإحصائية **Farrar–Glauber** كما يلي:

$$\chi^2 = -\left[n - 1 - \frac{1}{6}(2m+5) \right] . \ln D$$

حيث n هو حجم العينة، m هو عدد المتغيرات المفسرة في النموذج و $\ln$ هو اللوغاريتم النبيري لمحدد مصفوفة معاملات الارتباطات الثنائية.

اتخاذ القرار: نقوم بمقارنة (χ^2) المحسوبة مع (χ^2) المجدولة لاختبار قبول أو رفض إحدى الفرضيتين:

$H_0 : \mathrm{D} = 1$ (استقلال خطي)

$H_1 : \mathrm{D} < 1$ (ارتباط خطي)

- إذا كانت قيمة χ^2 أكبر تماما من القيمة المجدولة لتوزيع χ^2 بدرجة حرية $\frac{1}{2}m(m-1)$ و نسبة معنوية α ، نقبل H_1 أي هناك تعدد خطي.
- إذا كانت قيمة χ^2 أصغر من القيمة المجدولة لتوزيع χ^2 بدرجة حرية $\frac{1}{2}m(m-1)$ و نسبة معنوية α ، نقبل H_1 أي ليست هناك مشكلة التعدد الخطي.

اختبار فيشر (F):

بعد ثبوت مشكلة التعدد الخطي بموجب الاختبار أعلاه، يستوجب تحديد أي متغير من المتغيرات المستقلة مرتبطة خطياً والتي أدى إلى حدوث مشكلة التعدد الخطي، ويتم التشخيص من خلال اختبار F والذي يحسب وفق الصيغة التالية[32]:

$$F_c == \frac{R^2_{xj.x1.x2.........Xn} / m}{\left(1-R^2_{xj.x1.x2......Xn}\right)/ n-m-1} \sim F_\alpha(m, n-m-1)$$

وذلك لاختبار الفرضيات التالية:

$H_0: \ \mathrm{R}^2_{XJ.X1.X2.....Xn} = 0$

$H_1: \ \mathrm{R}^2_{XJ.X1.X2.....Xn} \neq 0$

نقارن قيمة F_c المحسوبة مع قيمة F_t النظرية بدرجتي حرية $(m, n-m-1)$ ومستوى معنوية α فإذا كانت $F_{Tab} \rangle \left|F_{Cal}\right|$ ترفض H_0 أي أن المتغيرات التوضيحية مرتبطة مع بعضها **وبعكسه** ترفض الفرضية البديلة H_1 والتي تنص أن المتغيرات التوضيحية لا ترتبط مع بعضها ولا يشكل مصدر قلق لمشكلة التعدد الخطي، وبذلك يتم تشخيص كافة المتغيرات المرتبطة مع بقية المتغيرات التوضيحية.

اختبار ستيودنت (T):

ولغرض تحديد العوامل المسببة لحصول مثل هذه المشكلة للمتغيرات التوضيحية لذلك يجب إجراء اختبار ثالث وهو اختبار t الذي يعتمد على قيم معاملات الارتباط الزوجي ما بين كل اثنين من المتغيرات التوضيحية والذي يحسب وفق الصيغة التالية[33] :

$$t_{ij} = \frac{r^2_{xij.x1x2......xn}}{\sqrt{\left(1-r^2_{xij.x1x2......xn}\right)}}$$

حيث أن : $r^2_{ij.}$ يمثل مربع معامل التحديد ما بين المتغيرين المستقلين (X_i و X_j) باعتبار أن بقية المتغيرات المستقلة ثابتة .

---

[32] حسين علي بخيت و سحر فتح الله، مرجع سبق ذكره، ص 250.

[33] أموري هادي كاظم باسم شليبه مسلم، مرجع سبق ذكره، ص 264.

نقارن القيمة المحسوبة t_c والقيمة الجدولية t_t بدرجة حرية $(n-m-1)$ ومستوى معنوية معين، ثم نتخذ قرار بقول أو رفض إحدى الفرضيتين التاليتين:

$H_0 : \mathrm{r}_{Kij.X1X2......XK} = 0$

$H_1 : \mathrm{r}_{Kij.X1X2......XK} \neq 0$

فإذا كانت $t_{Tab} \rangle \left|t_{Cal}\right|$ ترفض H_0 ، أي أن الارتباط الجزئي بين (X_i و X_j) معنوي، وبذلك يتم تشخيص بشكل نهائي المتغيرات التوضيحية التي تكون سبباً في حصول مشكلة التعدد الخطي.

وإذا كانت $t_{Tab} \rangle \left|t_{Cal}\right|$ ترفض H_1 ، أي أن الارتباط الجزئي بين (X_i و X_j) غير معنوي، وبذلك يتم الإقرار بعدم وجود مشكلة التعدد الخطي.

2.4. معالجة مشكلة التعدد الخطي:

بعد التأكد من وجود مشكلة التعدد الخطي، تكون الخطوة الموالية هي محاولة معالجة هذه المشكلة، وهناك عدة طرق يستخدمها الباحث طبقا للأسلوب القياسي أهمها:

- إسقاط بعض المتغيرات المستقلة من النموذج: يمكن حذف المتغير المستقل من النموذج الذي يتسبب في ظهور مشكلة التعدد الخطي.

تجدر الإشارة أنه في بعض الأحيان يتسبب حذف أحد المتغيرات في حدوث مشكلة أخرى، لأن هذا المتغير له أهمية تفسيرية.

- زيادة حجم العينة: هذه العملية صالحة إذا كانت السلسلة المضافة تختلف عن السلسلة الأولى المستعملة.

- تحويل العلاقة الدالية: عند حدوث هذا النوع من المشاكل القياسية، يمكن تحويل شكل الدالة من العلاقة الخطية مثلا إلى شكل غير خطي بشرط أن يتم تفسير النتائج عند التقدير بما يتطابق ومنطلق النظرية الاقتصادية.

3. اختيار النموذج الأمثل:

من خلال مشكلة التعدد الخطي يتضح أن الدراسات القياسية التطبيقية قد تقترح العديد من النماذج التي يمكن بناؤها لدراسة ظاهرة اقتصادية معينة، وذلك من خلال اختيار المتغيرات المستقلة X_j التي يجب وضعها في النموذج (أو حذفها منه) لشرح المتغير التابع Y_i. في هذا الإطار تم وضع مجموعة من المعايير الإحصائية التي تسمح بتحديد أحسن نموذج ممكن وذلك بغض النظر عن الجانب الاقتصادي والذي يجب مراعاته مسبقا.

فإذا تحصلنا على مجموعة من النماذج كلها معنوية إحصائيا والمتغيرات المستقلة فيها أيضا كلها معنوية إحصائيا فالسؤال المطروح إذا، ما هو أحسن نموذج جيد ينبغي اختباره للتعبير عن المتغير التابع Y_i؟

فالجواب البديهي هو الاعتماد على معامل التحديد R^2، حيث أن أحسن نموذج مقدر هو ذلك الذي يعطي أكبر قيمة ممكنة لمعامل التحديد.

غير أن هذا يعد كافيا لذلك نعتمد على معياري AIC و SC، والذي يحسبان وفق العلاقات التالية[34]:

المعيار المعلوماتي AKAIKE (AIC):

$$AIC = \ln(\frac{RSS}{n}) + \frac{2m}{n}$$

المعيار المعلوماتي Schwatrs (SC):

$$SC = \ln(\frac{RSS}{n}) + \frac{m\ln(n)}{n}$$

حيث أن:

n هو حجم العينة، m هو عدد المتغيرات المفسرة في النموذج و $\ln$ هو اللوغاريتم النبيري، RSS مجموع مربعات البواقي للنموذج المقدر.

أحسن نموذج ممكن هو ذلك النموذج الذي يتميز بكون متغيراته المستقلة تشرح بأفضل شكل ممكن المتغير التابع من جهة، وتتميز أيضا بكونها الأقل ارتباطا من جهة أخرى، ويمكن تعيينه عن طريق تقدير كل النماذج الممكنة، ثم اختيار النموذج الذي تكون كل المتغيرات المستقلة فيه معنوية، ويعطي أقل قيمة ممكنة لمعياري AIC و SC.

أو يتم الاعتماد على طرق أخرى لاختيار نموذج أمثل من بينها:

[34] Peter Kennedy, AGuide to Econometrics, 6 E, Blackwell Publishing, USA, 2008, P 101

طريقة الانحدار خطوة بخطوة: تعتمد هذه الطريقة على معامل الارتباط الجزئي بين المتغير المستقل X_i والمتغير التابع Y_i، حيث نقوم بإدخال المتغيرات ذات أكبر معامل ارتباط جزئي، ونقوم بفحص قيمة ستيودنت للمتغير الذي تم إدراجها في النموذج. ونقوم بحذف المتغيرات ذات أقل قيمة لسيودنت.

طريقة الإقصاء التدريجي: تتمثل هذه الطريقة في تقدير النموذج بكامل المتغيرات المفسرة ثم القيام بإقصاء المتغيرات التي قيمة سيودنت أقل من القيمة المجدولة لسيودنت بمعنوية معينة، ونعيد تقدير النموذج في كل مرة حتى نتحصل على النموذج النهائي، غير أن هذه الطريقة صالحة إذا كان النموذج الابتدائي قابل للتقدير نظرا لإمكانية وجود التعدد الخطي.

تمارين محلولة:

التمرين 1: قام أحد الباحثين بدراسة الطلب على سلعة معينة، فوجد أن هناك متغيرين أساسيين يؤثران فيها وهما سعر السلعة X_1 وأسعار السلع الأخرى البديلة X_2.

وقد أعطيت نتائج التقدير ما يلي:

$$Y = 7.683 + 0.266X_1 - 0.29X_2$$

$$R^2 = 0.95 \qquad r = 0.97 \qquad F = 81.298 \qquad D-W = 1.77 \qquad n = 10$$

المطلوب: هل النموذج يعاني من مشكل التعدد الخطي أم لا باستخدام Farrar-g=Glauber؟

الحل:

اختبار مشكل التعدد الخطي باستخدام Farrar-g=Glauber:

اختبار مربع كي (χ^2):

$H_0 : \mathrm{D} = 1$ (استقلال خطي)

$H_1 : \mathrm{D} < 1$ (ارتباط خطي)

- حساب محدد مصفوفة معاملات الارتباط التالية:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & r_{X_1X_2} \\ r_{X_1X_2} & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -0.969 \\ -0.969 & 1 \end{vmatrix} = 0.061039$$

- حساب القيمة المحسوبة لمربع كي (χ^2):

$$\chi_c^2 = -\left[n-1-\frac{1}{6}(2m+5)\right].\ln D = -\left[10-1-\frac{1}{6}(2*2+5)\right].\ln(0.061039) = 20.9718$$

$$\chi_t^2{}_{\left(\frac{1}{2}m(m-1)\right)} = \chi_t^2{}_{\left(\frac{1}{2}2(2-1)\right)} = 3.41$$

- بما أن $\chi_c^2 \succ \chi_t^2$ نقبل H_1 أي هناك تعدد خطي.

اختبار فيشر (F):

$H_0 : \mathrm{R}^2_{XJ.X1.X2.....Xn} = 0$

$H_1 : \mathrm{R}^2_{XJ.X1.X2.....Xn} \neq 0$

$$F^c = \frac{R^2_{x1.x2}/m}{\left(1-R^2_{x1.x2}\right)/n-m-1} = \frac{0.938/1}{(1-0.938)/10-1-1} = 121.03$$

$$F^t_{(1,8)} = 5.32$$

بمان أن $F_{Tab} \rangle |F_{Cal}|$ ترفض H_0 وتقبل الفرضية البديلة H_1 أي أن المتغيرين X_1 و X_2 مرتبطان مع بعضهما البعض.

اختبار ستيودنت (T):

$$H_0 : r_{Kij.X1X2......XK} = 0$$

$$H_1 : r_{Kij.X1X2......XK} \neq 0$$

$$t^c = \frac{r^2_{x1x2}}{\sqrt{\left(1-r^2_{xx1x2}\right)}} = \frac{0.938}{\sqrt{(1-0.938)}} = 3.76$$

$$t^T_{(8;0.05)} = 2.30$$

بما $t_{Tab} \rangle |t_{Cal}|$ ترفض H_0 وتقبل H_1، أي أن المتغيرين X_1 و X_2 مرتبطان مع بعضهما.

التمرين 2: تمثل البيانات التالية دخل الفرد مفسر من طرف نسبة القوى العاملة في الزراعة X_1 ومتوسط سنوات التعليم للسكان X_2 لخمسة عشر دولة متقدمة.

$$\sum x1y = -28 \quad \sum x2y = 38 \quad \sum x_1x_2 = -12 \quad \sum x_1^2 = 60 \quad \sum x_2^2 = 74$$

$$\sum y^2 = 40 \quad \sum y = 27.6 \quad \overline{Y} = 9 \quad \overline{X}_1 = 7 \quad \overline{X}_2 = 12$$

المطلوب:

تقدير معادلة الانحدار من الشكل:

اختبار وجود مشكل التعدد الخطي باستخدام Klein؟

الحـــل:

4. تقدير معالم النموذج $Y_i = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X_{i1} + \hat{\beta}_2 X_{i2}$:

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum_i yx_{1i} \sum_i x_{2i}^2 - (\sum_i yx_{2i})(\sum_i x_{2i}x_{1i})}{\sum_i x_{1i}^2 \sum_i x_{2i}^2 - (\sum_i x_{2i}x_{1i})^2} = \frac{-28*74-(38)(-12)}{60*74-(-12)^2} = -0.376$$

$$\hat{\beta}_2 = \frac{\sum_i yx_{2i} \sum_i x_{1i}^2 - (\sum_i yx_{1i})(\sum_i x_{2i}x_{1i})}{\sum_i x_{1i}^2 \sum_i x_{2i}^2 - (\sum_i x_{2i}x_{1i})^2} = \frac{38*60-(-28)(-12)}{60*74-(-12)^2} = 0.452$$

$$\hat{\beta}_0 = \overline{Y} - \hat{\beta}_1 \overline{X}_1 - \hat{\beta}_2 \overline{X}_2 = 9 - 0.376(7) - 0.452(12) = 6.208$$

5. اختبار وجود مشكل التعدد الخطي باستخدام Klein:

$$R^2_{YX_1X_1} = \frac{\sum(\hat{Y} - \bar{Y})^2}{\sum(Y - \bar{Y})^2} = \frac{\sum \hat{y}^2}{\sum y^2} = \frac{27.6}{40} = 0.69$$

$$r^2_{X_1X_2} = \frac{\sum x_1 x_2}{\sqrt{\sum x_1^2 \sum x_2^2}} = \frac{-12}{\sqrt{60*74}} = -0.18$$

بما أن $R^2_{YX_1X_2} \succ r^2_{X_1X_2}$ فإن النموذج لا يعاني من مشكل التعدد الخطي.

تمارين:

التمرين 01:

من أجل دراسة العلاقة بين الدخل الصافي (Y)، وقيمة تداول رأس المال X_1 وقيمة رأس المال المستعمل X_2 وعدد العاملين والموظفين X_3، قمنا بتجميع المعطيات الإحصائية الخاصة بالمؤشرات الثلاثة من 8 شركات والتي تمت معالجتها معالجة إحصائية أولية، تحصلنا على المجاميع التالية:

$\sum y_i=948$ $\sum x_1= 1675$ $\sum x_2= 470$ $\sum x_1x_2=125525$
$\sum y_ix_1=221170$ $\sum y_ix_2=66920$
$\sum y_i^2=122178$ $\sum x_1^2=404875$ $\sum x_2^2=41500$ $r_{yx3}=0.55$

$r_{x1x3}=0.5$ $r_{x2x3}=0.41$

المطلوب: - احسب الانحراف المعياري للمتغيرات الأربعة.

- إعداد جدول الارتباط الثنائي بين المتغيرات الأربعة.
- ترتيب معاملات الارتباط الجزئي من الرتبة 1 و2.

التمرين 02:

الجدول التالي يبين السلسلة الزمنية لخمسة متغيرات:

yi	6	6	6.5	7.1	7.2	7.6	8	9	9	9.3
X1	40.1	40.3	47.5	49.2	52.3	58	61.3	62.5	64.7	66.8
X2	5.5	4.7	5.2	6.8	7.3	8.7	10.2	14.1	17.1	21.3
X3	108	93	108	100	99	99	101	97	93	102
X4	63	72	86	100	107	111	114	116	119	121

المطلوب: اختبر وجود مشكلة التعدد الخطي.

قائمة المراجع:

الكتب العربية:

1. أموري هادي كاظم و باسم شليبه مسلم، القياس الاقتصادي المتقدم: النظرية والتطبيق، مكتبة دنيا الأمل، بغداد، العراق، 2002.
2. تومي صالح، مدخل لنظرية القياس الاقتصادي: دراسة نظرية مدعمة بأمثلة وتمارين، ديوان المطبوعات الجامعية، الجزء الأول، ط2، الجزائر، 2011.
3. ثروت محمد عبد المنعم، الانحدار، مكتبة الأنجلو مصرية، مصر، 2005.
4. جعفر باقر الوائلي، الاقتصاد القياسي وبرنامج الكومبيوتر الاحصائي spss، ط1، جامعة واسط، كلية الادارة والاقتصاد، 2009، العراق.
5. جورج فهمي رزق، الإقتصاد التطبيقي في إدارة الأعمال، المكتبة الأكاديمية، مصر، 1999.
6. حسام علي داود وخالد محمد السواعي، الاقتصاد القياسي بين النظرية والتطبيق، دار المسيرة، الأردن، 2013.
7. حسين بخيت، الاقتصاد القياسي، الدار اليازوري للنشر والتوزيع، الأردن، 2018.
8. سمير خالد صافي، مقدمة في تحليل نماذج الانحدار باستخدام برنامج Eviews، الجزء الأول، الجامعة الإسلامية غزة، فلسطين، 2015.
9. شيخي محمد، طرق الاقتصاد القياسي: محاضرات وتطبيقات، دار حامد للنشر والتوزيع، الأردن، 2011.
10. طه حسين الزبيدي، مبادئ الإحصاء، دار غيداء للنشر والتوزيع،الأأردن، 2013.
11. عبد القادر محمد عبد القادر عطية، الاقتصاد القياسي بين النظرية والتطبيق، الدار الجامعية، ط2، مصر، 1998.
12. عبد المحمود محمد عبد الرحمان، مقدمة في الاقتصاد القياسي، عمادة شؤون المكتبات، الرياض، المملكة العربية السعودية، 1995.
13. عدنان داود محمد العذاري، الاقتصاد القياسي نظرية وحلول –تطبيق باستخدام برنامج Minitab,Relase 14، دار الجرير للنشر والتوزيع، الأردن، 2010.
14. علي مجيد الحمادي، التشابك الاقتصادي بين النظرية والتطبيق، دار اليازوري للنشر والتوزيع الأردن، 2017.
15. عمرو حامد، إدارة الأعمال الدولية، المكتبة الأكاديمية، القاهرة، مصر، 1999.

16. فارس عياد شاكر و عزت قناوي، مبادئ الاقتصاد القياسي والرياضي، دار العلم للنشر والتوزيع بالفيوم، مصر، 2006.
17. فارس عياد شاكر و عزت قناوي، مبادئ الاقتصاد القياسي والرياضي، دار العلم للنشر والتوزيع بالفيوم، مصر، 2006.
18. محمد أحمد الأفندي، النظرية الاقتصادية الكلية والسياسية الاقتصادية الجزء الأول، مركز الكتاب الأكاديمي، 2020، الأردن.
19. محمد غرس الدين، ياسر محمد جاد الله، مدخل إلى الاقتصاد القياسي، القاهرة، 2005.
20. محمود عبد السميع عناني، التحليل القياسي والإحصائي للعلاقات الاقتصادية، الدار الجامعية، الإسكندرية، مصر، 2008.
21. مكيد علي، الاقتصاد القياسي: دروس ومسائل محلولة، ط 2، ديوان المطبوعات الجامعية، الجزائر، 2011.
22. هاري كلجيان و والاس أونس، ترجمة السيد حجازي وعبد القادر عطية، مقدمة في الاقتصاد القياسي المبادئ والتطبيقات، النشر العلمي والمطابع - جامعة الملك سعود، المملكة العربية السعودية، 2001.
23. وليد اسماعيل السفو، فيصل مفتاح شلوف، صائب جواد إبراهيم، أساسيات الإقتصاد القياسي التحليلي، الطبعة العربية الأولى، الأهلية للنشر والتوزيع، المملكة الأردنية، عمان، 2006.

الكتب الأجنبية:

24. Badi H. Baltagi, Econometrics, Center for Policy Research Syracuse University Syracuse, USA, 2008.
25. Ben M’barek Alaya, Séries d’exercices Corrigés d’économétrie, Imprimere Officielle de la République Tunisienne, 2002.
26. Bourbonniais. R , Econométrie, 9 ème édition, Edition Dunod, Paris, 2015.
27. Christopher Doughert, Introduction to Econometrics, Oxford University Press, 5th Edition, USA, 2016.
28. Corinne Hahn, Sandrine Macé, Méthodes statistiques appliquées au management, Pearson france, France, 2012.
29. Damodar .N, Gurjarati, Dawn C. Porter, Basic Econometrics, Fiftin Edition, McGraw-Hill, USA,2008.
30. Damodar Gujarati, Econometrics by Exemple, Palgrave Macmillan, USA, 2012.

31. Damodar N. Gujarati, Econométrie, Edition De Boeck, Paris, 2004.
32. G. S. Maddala, Kajal Lahiri Introduction to Econometrics, 4th edition, Wiley, USA, 2009.
33. G.C .Chow, Econometrics, McGraw-Hill, USA, 1983.
34. Greenes .W, Econométrie, Pearson, France, 2005.
35. Humberto Barreto, Frank Howland, Introductory Econometrics: Using Monte Carlo Simulation with Microsoft Excel, Cambridge University press, New York,USA, 2006.
36. Iain Pardoe, Applied Regression Modeling, 3rd Edition, Wiley.USA, 2020.
37. Jack Johnston& John Dinardo, Econometric Methods, fourth Edition McGraw-Hill Companies, USA, 1996.
38. Jack Johnston& John Dinardo., Méthodes économétrique, Economica, Paris, 1999.
39. Jean Louis Brillet; Modélisation économétrique principe et technique, économica 1994.
40. Jeffrey Wooldridge, Introduction à l'économétrie: Une approche moderne, 2 édition, deboeck supérieur, Bruxelles, 2018.
41. Jeffrey Wooldridge, Introductory Econometrics: a moderne approach, 5 th edition, south-western cengage learning, USA, 2013.
42. Peter Kennedy, A Guide to Econometrics, 5th edition, The mit press, Massachusetts, Cambridge, England, 2003.
43. Peter Kennedy, AGuide to Econometrics, 6 E, Blackwell Publishing, USA, 2008.
44. PHILIPPE Casin, Econométrie Méthode et applications avec Eviews, Edition TECHNIP,Paris, 2009.
45. Virginie Delsart, Arnaud Rys, Nicolas Vaneecloo, Méthodes Statistiques de L'économie Et de la Gestion: Économétrie, théorie et application, Septentrion Presses Universitaires, France, 2009 .

الجداول الإحصائية

جدول – 1 – القيم الحرجة لمقياس – t – لستيودنت

بمستوى معنوية 0,1 ; 0,05 ; 0,01 (من الجانبين)

درجات الحرية	مستوى المعنوية α 0,10	0,05	0,01	درجات الحرية	مستوى المعنوية α 0,1	0,05	0,01
1	6,3138	12,706	63,657	18	1,7341	2,1009	2,8784
2	2,9200	4,3027	9,9248	19	1,7291	2,0930	2,8609
3	2,3534	3,1825	5,8409	20	1,7247	2,0860	2,8453
4	2,1318	2,7764	4,6041	21	1,7207	2,0796	2,8314
5	2,0150	2,5706	4,0321	22	1,7171	2,0739	2,8188
6	1,9432	2,4469	3,7074	23	1,7139	2,0687	2,8073
7	1,8946	2,3646	3,4995	24	1,7109	2,0639	2,7969
8	1,8595	2,3060	3,3554	25	1,7081	2,0595	2,7874
9	1,8331	2,2622	3,2498	26	1,7056	2,0555	2,7787
10	1,8125	2,2281	3,1693	27	1,7033	2,0518	2,7707
11	1,7959	2,2010	3,1058	28	1,7011	2,0484	2,7633
12	1,7823	2,1788	3,0545	29	1,6991	2,0452	2,7564
13	1,7709	2,1604	3,0123	30	1,6973	2,0423	2,7500
14	1,7613	2,1448	2,9768	40	1,6839	2,0211	2,7045
15	1,7530	2,1315	2,9467	60	1,6707	2,0003	2,6603
16	1,7459	2,1199	2,9208	120	1,6577	1,9799	2,6174
17	1,7396	2,1098	2,8982	∞	1,6446	1,9600	2,5758

جدول -4- القيم الحرجة - χ^2 - توزيع (CHI-DEUX)

ν \ p	0,90	0,80	0,70	0,50	0,30	0,20	0,10	0,05	0,02	0,01
1	0,0158	0,0642	0,148	0,455	1,074	1,642	2,706	3,841	5,412	6,635
2	0,211	0,446	0,713	1,386	2,408	3,219	4,605	5,991	7,824	9,210
3	0,584	1,005	1,424	2,366	3,665	4,642	6,251	7,815	9,837	11,345
4	1,064	1,649	2,195	3,357	4,878	5,989	7,779	9,488	11,668	13,277
5	1,610	2,343	3,000	4,351	6,064	7,289	9,236	11,070	13,388	15,086
6	2,204	3,070	3,828	5,348	7,231	8,558	10,645	12,592	15,033	16,812
7	2,833	3,822	4,671	6,346	8,383	9,803	12,017	14,067	16,662	18,475
8	3,490	4,594	5,527	7,344	9,524	11,030	13,362	15,507	18,168	20,090
9	4,168	5,380	6,393	8,343	10,656	12,242	14,684	16,919	19,679	21,666
10	4,865	6,179	7,267	9,342	11,781	13,442	15,987	18,307	21,161	23,209
11	5,578	6,989	8,148	10,341	12,899	14,631	17,275	19,675	22,618	24,725
12	6,304	7,807	9,034	11,340	14,011	15,812	18,549	21,026	24,054	26,217
13	7,042	8,634	9,926	12,340	15,119	16,985	19,812	22,362	25,472	27,688
14	7,790	9,467	10,821	13,339	16,222	18,151	21,064	23,685	26,873	29,141
15	8,547	10,307	11,721	14,339	17,322	19,311	22,307	24,996	28,259	30,578
16	9,312	11,152	12,624	15,338	18,418	20,465	23,542	26,296	29,633	32,000
17	10,085	12,002	13,531	16,338	19,511	21,615	24,769	27,587	30,995	33,409
18	10,865	12,857	14,440	17,338	20,601	22,760	25,989	28,869	32,346	34,805
19	11,651	13,716	15,352	18,338	21,689	23,900	27,204	30,144	33,687	36,191
20	12,443	14,578	16,266	19,337	22,775	25,038	28,412	31,410	35,020	37,566
21	13,240	15,445	17,182	20,337	23,858	26,171	29,615	32,671	36,343	38,932
22	14,041	16,314	18,101	21,337	24,939	27,301	30,813	33,924	37,659	40,289
23	14,848	17,187	19,021	22,337	26,018	28,429	32,007	35,172	38,968	41,638
24	15,659	18,062	19,943	23,337	27,096	29,553	33,196	36,415	40,270	42,980
25	16,473	18,940	20,867	24,337	28,172	30,675	34,382	37,652	41,566	44,314
26	17,292	19,820	21,792	25,336	29,346	31,795	35,563	38,885	42,856	45,642
27	18,114	20,703	22,719	26,336	30,319	32,912	36,741	40,113	44,140	46,963
28	18,939	21,588	23,647	27,336	31,391	34,027	37,916	41,337	45,419	48,278
29	19,768	22,475	24,577	28,336	32,461	35,139	39,087	42,557	46,693	49,588
30	20,599	23,364	25,508	29,336	33,530	36,250	40,256	43,773	47,962	50,892

جدول – 2– القيم الحرجة لإحصائية (Durbin-Watson)

عند مستوى معنوية 5% dL , dU

(n : عدد المشاهدات في العينة/ k : عدد المتغيرات المستقلة في النموذج)

n	K=1		K=2		K=3		K=4		K=5	
	d_L	d_U	d_L	d_U	d_L	d_U	d_L	d_U	d_L	d_U
6	0,61	1,40	-	-	-	-	-	-	-	-
7	0,70	1,36	0,47	1,90	-	-	-	-	-	-
8	0,76	1,33	0,56	1,78	0,37	2,29	-	-	-	-
9	0,82	1,32	0,63	1,70	0,46	2,13	0,29	2,59	-	-
10	0,88	1,32	0,70	1,64	0,53	2,02	0,37	2,41	0,24	2,82
11	0,93	1,32	0,66	1,60	0,60	1,93	0,44	2,28	0,32	2,65
12	0,97	1,33	0,81	1,58	0,66	1,86	0,51	2,18	0,38	2,51
13	1,01	1,34	0,86	1,56	0,72	1,82	0,57	2,09	0,44	2,39
14	1,05	1,35	0,91	1,55	0,77	1,78	0,63	2,03	0,51	2,3
15	1,08	1,36	0,95	1,54	0,81	1,75	0,66	1,98	0,56	2,22
16	1,10	1,37	0,98	1,54	0,86	1,73	0,74	1,93	0,62	2,16
17	1,13	1,38	1,02	1,54	0,90	1,71	0,78	1,90	0,67	2,10
18	1,16	1,39	1,05	1,53	0,93	1,69	0,82	1,87	0,71	2,06
19	1,18	1,40	1,08	1,53	0,97	1,68	0,86	1,85	0,75	2,02
20	1,20	1,41	1,10	1,54	1,00	1,68	0,90	1,83	0,79	1,99
21	1,22	1,42	1,13	1,54	1,03	1,67	0,93	1,81	0,83	1,96
22	1,24	1,43	1,15	1,54	1,05	1,66	0,96	1,80	0,86	1,94
23	1,26	1,44	1,17	1,54	1,08	1,66	0,99	1,79	0,90	1,92
24	1,27	1,45	1,19	1,55	1,10	1,66	1,01	1,78	0,93	1,90
25	1,29	1,45	1,21	1,55	1,12	1,66	1,04	1,77	0,95	1,89
26	1,30	1,46	1,22	1,55	1,14	1,65	1,06	1,76	0,98	1,88
27	1,32	1,47	1,24	1,56	1,16	1,65	1,08	1,76	1,01	1,86
28	1,33	1,48	1,26	1,56	1,18	1,65	1,10	1,75	1,03	1,85
29	1,34	1,48	1,27	1,56	1,20	1,65	1,12	1,74	1,05	1,84
30	1,35	1,49	1,28	1,57	1,21	1,65	1,14	1,74	1,07	1,83

جدول–3– القيم الحرجة - F - (توزيع فيشر)

عند مستوى معنوية $\alpha = 0,05$

(v1 : درجات الحرية للبسط / v2: درجات الحرية للمقام)

v_2 \ v_1	1	2	3	4	5	6	8	12	24	∞
1	161,4	199,5	215,7	224,6	230,2	233,9	238,9	243,9	249,1	254,3
2	18,51	19,00	19,16	19,25	19,30	19,33	19,37	19,41	19,45	19,50
3	10,13	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94	8,84	8,74	8,64	8,53
4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,04	5,91	5,77	5,63
5	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,82	4,68	4,53	4,36
6	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,15	4,00	3,84	3,67
7	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,73	3,57	3,41	3,23
8	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,44	3,28	3,12	2,93
9	5,12	4,26	3,86	3,63	3,48	3,37	3,23	3,07	2,90	2,71
10	4,96	4,10	3,71	3,48	3,33	3,22	3,07	2,91	2,74	2,54
11	4,84	3,98	3,59	3,36	3,20	3,09	2,95	2,79	2,61	2,40
12	4,75	3,88	3,49	3,26	3,11	3,00	2,85	2,69	2,50	2,30
13	4,67	3,80	3,41	3,18	3,02	2,92	2,77	2,60	2,42	2,21
14	4,60	3,74	3,34	3,11	2,96	2,85	2,70	2,53	2,35	2,13
15	4,54	3,68	3,29	3,06	2,90	2,79	2,64	2,48	2,29	2,07
16	4,49	3,63	3,24	3,01	2,85	2,74	2,59	2,42	2,24	2,01
17	4,45	3,59	3,20	2,96	2,81	2,70	2,55	2,38	2,19	1,96
18	4,41	3,55	3,16	2,93	2,77	2,66	2,51	2,34	2,15	1,92
19	4,38	3,52	3,13	2,90	2,74	2,63	2,48	2,31	2,11	1,88
20	4,35	3,49	3,10	2,87	2,71	2,60	2,45	2,28	2,08	1,84
21	4,32	3,47	3,07	2,84	2,68	2,57	2,42	2,25	2,05	1,81
22	4,30	3,44	3,05	2,82	2,66	2,55	2,40	2,23	2,03	1,78
23	4,28	3,42	3,03	2,80	2,64	2,53	2,38	2,20	2,00	1,76
24	4,26	3,40	3,01	2,78	2,62	2,51	2,36	2,18	1,98	1,73
25	4,24	3,38	2,99	2,76	2,60	2,49	2,34	2,16	1,96	1,71
26	4,22	3,37	2,98	2,74	2,59	2,47	2,32	2,15	1,95	1,69
27	4,21	3,35	2,96	2,73	2,57	2,46	2,30	2,13	1,93	1,67
28	4,20	3,34	2,95	2,71	2,56	2,44	2,29	2,12	1,91	1,65
29	4,18	3,33	2,93	2,70	2,54	2,43	2,28	2,10	1,90	1,64
30	4,17	3,32	2,92	2,69	2,53	[illegible]	2,27	2,09	1,89	1,62
35	4,12	3,26	2,87	2,64	2,48	2,37	2,22	2,04	1,83	1,57
40	4,08	3,23	2,84	2,61	2,45	2,34	2,18	2,00	1,79	1,51
45	4,06	3,21	2,81	2,58	2,42	2,31	2,15	1,97	1,76	1,48
50	4,03	3,18	2,79	2,56	2,40	2,29	2,13	1,95	1,74	1,44
60	4,00	3,15	2,76	2,52	2,37	2,25	2,10	1,92	1,70	1,39
70	3,98	3,13	2,74	2,50	2,35	2,23	2,07	1,89	1,67	1,35
80	3,96	3,11	2,72	2,49	2,33	2,21	2,06	1,88	1,65	1,31
90	3,95	3,10	2,71	2,47	2,32	2,20	2,04	1,86	1,64	1,28
100	3,94	3,09	2,70	2,46	2,30	2,19	2,03	1,85	1,63	1,26
150	3,90	3,06	2,66	2,43	2,27	2,16	2,00	1,82	1,59	1,18
200	3,89	3,04	2,65	2,42	2,26	2,14	1,98	1,80	1,57	1,14
500	3,86	3,01	2,62	2,39	2,23	2,11	1,96	1,77	1,54	1,06
∞	3,84	2,99	2,60	2,37	2,21	2,09	1,94	1,75	1,52	1,00