

République Algérienne démocratique et populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique



Université De M'Hamed Bougara - Boumerdes

Faculté de Technologie

Département de Génie Civil



Mémoire de fin d'études

En vue de l'obtention du diplôme de

Master en Génie civil

OPTION de Géotechnique

THEME

***ANALYSE MATHÉMATIQUE ET NUMÉRIQUE DU
PROBLÈME DE CONSOLIDATION***

Présenté par :

KHODJA Farida.

SAIB Ibrahim.

Encadré par :

Dr : Abdelouaheb ROUABHI

2019-2020

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

شكر و عرفان

الحمد لله حمدا كثيرا طيبا مباركا فيه كما يحب ربنا ويرضى أن وفقنا لهذا العمل وأن مدنا بالعون والقوة
لكتابة هذه المذكرة ونسأله تعالى أن يوفقنا لمزيد من الأعمال والنجاحات

وعملا بقول النبي صلى الله عليه وسلم " لا يشكر الله من لا يشكر الناس " فأريد أن أغتتم الفرصة كذلك
لأوجه تشكري و عرفاني للدكتور روابحي عبد الوهاب نظير المجهود الذي بذله وأمدّه لنا لتجسيد هذا
المشروع ... هذا الأستاذ الذي لطالما حرص أشدّ الحرص على أن يكون العمل متقنا ومميّزا وفق المعايير
وبتدقيق بالغ، حتى وصل به الأمر للسهر إلى سويغات الفجر بين تصحيح وتمحيص وتنقيح وإثراء
للمذكرة ... كما لا ننسى دعمه المعنوي والنفسي خاصة في ظل ظروف معيّنة والتي دفعتنا في التفكير في
الانسحاب فلم يتأخر في تقديم النصائح والتوجيهات والتي كانت السبب في عدولنا عن القرار

فلا نظن أن كتابة الكلمات ستفي حقّ أستاذنا، الذي نعتبر العمل معه حتى ولو لمدة قصيرة شرفاً بالنسبة لنا
كطلبة ومهندسين.. وسيبقى هذا الأستاذ أنموذجا للطلبة وحتى للأساتذة ونسأل الله لنا وله التوفيق والسداد
ودون استثناء نشكر جميع أساتذة وإداريي وحتى طلبة قسم الهندسة المدنية تخصص جيو تقني لجامعة
محمد بوقرة بومرداس على منحنا فرصة لا تعوّض في خوض غمار تجربة جديدة استفدنا منها الكثير
وأعطتنا صورة عن الجامعة الجزائرية التي فعلا تذخر بالخب من طلبة وأساتذة والتي هي ليست حكرا
على المدارس العليا ... فنشكرهم جميعا على ما تلقيناه من ترحيب ومساعدة ودعم مادّي أو معنوي

وفي الأخير أعود لأحمد الله وأشكره على توفيقنا لمثل هذه المحطات في حياتنا ونسأله تعالى أن يجعل هذا
العمل خالصا لوجهه الكريم...

الإهداء

أهدي هذا العمل المتواضع إلى من لن أستطيع أن أفيهما حقهما أبًا ما فعلت:

والديّ العزيزين - حفظكم الله -

إلى الشمعة التي تضيء حياتي، إليك أخي "حكيم" - أحبك كثيرا -

إلى الذين عرفتهم قيمتهم بعد أن ابتعدت عنهم، إخوتي جميعا - حفظكم الله لي وأدام وُدنا -

إلى اللذين فارقنا هذه السنة: جدتي وأبي الثاني - رحمهما الله -

إلى جميع عائلة زوجي كل باسمه

وأخيرا وليس آخرا إلى زوجي، رفيقي في هذه الحياة ورفيقي في هذا العمل، وسنسى دائما لتحقيق أهدافنا

سويًا إن شاء الله - جمعنا الله في جناته كما جمعنا في هذه الدنيا -

أما الإهداء الخاص فهو إلى فترة عيني، إلى ابنتي، "هنوءتي" التي وكما شاركتني الدراسة في بداية هذه

السنة، فقد خطت أنا ملما معي هذه الأطروحة - جعلك الله فترة عيني في الدنيا والآخرة يا ابنتي -.

Table des matières

<i>Introduction générale</i>	3
<i>Chapitre I : Généralités</i>	5
1- <i>Introduction</i> :	6
2- <i>Tassement du sol</i> :	6
2.1. <i>Différence entre le compactage et la consolidation</i> :	6
2.2. <i>Types de tassements</i> :	7
2.3. <i>Composantes d'un tassement</i> :	8
3- <i>Phénomène de consolidation</i> :	10
3.1. <i>Relation entre la nature et l'état du sol et la consolidation</i> :	11
3.2. <i>Principales causes de la consolidation</i> :	12
3.3. <i>Influence de la consolidation</i> :	14
4- <i>Etapas d'investigation théorique d'un problème physique</i> :	20
5- <i>Analogie physique du phénomène de consolidation</i> :	20
<i>Chapitre II : Analyse mathématique du problème</i>	20
1- <i>Introduction</i> :	21
2- <i>Equations aux dérivées partielles (EDP)</i> :	21
2.1. <i>Ordre de l'EDP</i> :	21
2.2. <i>EDP linéaire ou non linéaire</i> :	22
2.3. <i>EDP homogène ou non homogène</i> :	22
2.4. <i>EDP elliptiques, paraboliques et hyperboliques</i> :	22
2.5. <i>EDP d'évolution</i> :	22
2.6. <i>Conditions initiales et aux limites</i> :	23
3- <i>Théorie de consolidation de Terzaghi</i> :	23
3.1. <i>Description du problème</i> :	23
3.2. <i>Les hypothèses de la théorie de Terzaghi</i> :	28
3.3. <i>Limites de validité de ces hypothèses</i> :	29
3.4. <i>Formulation mathématique</i> :	30
3.5. <i>Autres théories de consolidation</i> :	34
4- <i>Résolution analytique de l'équation de Terzaghi</i> :	34
4.1. <i>Conditions initiales et aux limites</i> :	34
4.2. <i>La méthode de séparation des variables</i> :	37
4.3. <i>Différence entre drainage simple et double</i> :	43
4.4. <i>La méthode de transformation de Fourier</i> :	44

<i>Application 1</i> :	47
<i>Chapitre III : Analyse numérique du problème.</i>	51
1- <i>Introduction</i> :	52
2- <i>Principe de la méthode des différences finies</i> :	53
2.1. <i>Elaboration d'un maillage:</i>	53
2.2. <i>Approximation des dérivées par différences finies:</i>	54
2.3. <i>Les conditions initiales et les conditions au bord</i> :	55
2.4. <i>Les schémas implicites, explicites et le schéma de Richardson</i> :	56
2.5. <i>Fiabilité des schémas (Convergence des schémas):</i>	60
<i>Application 1</i> :	65
<i>Application 2</i> :	69
<i>Conclusion générale</i>	77
<i>Références Bibliographiques</i>	Error! Bookmark not defined.

Liste des figures :

<i>Figure I.1 : description du tassement.</i>	6
<i>Figure I.2: tassement uniforme.</i>	7
<i>Figure I.3: rupture de canalisations suite à un tassement uniforme.</i>	7
<i>Figure I.4 : tassement différentiel.</i>	8
<i>Figure I.5: désordre dû à un tassement différentiel.</i>	8
<i>Figure I.6: composantes d'un tassement</i>	9
<i>Figure I.7: Les phases d'un tassement.</i>	10
<i>Figure I.8 : Pressoir à raisin, dans ce cas, l'expulsion du fluide se fait radialement.</i>	10
<i>Figure I.9: La relation entre la nature et l'état du sol et la consolidation.</i>	12
<i>Figure I.10: Dessiccation des couches du sol.</i>	12
<i>Figure I.11: présence d'arbres</i>	13
<i>Figure I.12: Abaissement des nappes phréatiques</i>	13
<i>Figure I.13: une photo de la tour penchée à Pise.</i>	14
<i>Figure I.14: coupe en élévation de la tour de pise et couches de sol.</i>	14
<i>Figure I.15: l'écartement du sommet de la tour par rapport à la verticale au cours des années.</i>	15
<i>Figure I.16: Photo de la cathédrale de Mexico.</i>	15
<i>Figure I.17: Evolution des tassements de la cathédrale de Mexico au cours du temps.</i>	16
<i>Figure I.18: Les tassements différentiels entre les tours de la cathédrale et couches de sol.</i>	16
<i>Figure I.19: Tassement différentiel du Temple des Capucines (Mexico).</i>	17
<i>Figure I.20: la ville de Mexico a été construite sur un ancien lac.</i>	17
<i>Figure I.21: Carte schématique du centre de la ville de Mexico.</i>	18
<i>Figure I.22: Le tassement des différentes constructions en Mexico.</i>	18
<i>Figure I.23: L'Aéroport International du Kansai (Japon).</i>	19
<i>Figure I.24: La capitale d'Iran-Téhéran.</i>	19
<i>Figure I.25: Processus de la modélisation.</i>	20
<i>Figure I.26: Modèle analogique expliquant le phénomène de consolidation.</i>	20
<i>Figure I.27: Evolution des contraintes et du tassement au cours de la consolidation.</i>	22
<i>Figure II.1: Principe de la modélisation mathématique.</i>	21
<i>Figure II.2: Sol saturé chargé en surface et drainé par une seule face.</i>	23
<i>Figure II.3(a) : Changements de contraintes verticales pendant la consolidation avant l'application de $\Delta\sigma$.</i>	26
<i>Figure II.3(b) : Changements de contraintes verticales pendant la consolidation immédiatement après l'application de $\Delta\sigma$.</i>	26
<i>Figure II.3(c) : Changements de contraintes verticales pendant la consolidation long période après l'application de $\Delta\sigma$.</i>	26
<i>Figure II.4: La vitesse d'infiltration d'eau en fonction de la perméabilité.</i>	27
<i>Figure II.5: Couche compressible saturée drainée, par ses deux faces (a), et par une seule face (b).</i>	27
<i>Figure II.6 : Couche compressible saturée chargée en surface et drainée sur une seule face.</i>	31
<i>Figure II.7: Couche compressible saturée chargée en surface et drainée sur ses deux faces.</i>	35

<i>Figure II.8 : Couche compressible saturée chargée en surface et drainée sur une seule face.</i>	36
<i>Figure II.9 : la direction de l'écoulement vers les drains, cas d'un drainage simple et double.</i>	43
<i>Figure II.10 : solution obtenue pour un drainage simple et double.</i>	44
<i>Figure II.11 : L'idée de base de la transformation de Fourier.</i>	44
<i>Figure II.12 : Le problème à étudié.</i>	47
<i>Figure II.13 : Le code MATLAB, pour le calcul de la solution analytique.</i>	49
<i>Figure II.14: Représentation graphique tridimensionnelle de la solution analytique.</i>	50
<i>Figure II.15: Représentation graphique des isochrones.</i>	50
<i>Figure III.1: principe des méthodes de discrétisation.</i>	52
<i>Figure III.2: Maillage en différences finies.</i>	54
<i>Figure III.3 : Représentation d'une grille espace-temps avec N=9 et M=7.</i>	54
<i>Figure III.4: Représentation d'approximation centrée et décentrée.</i>	55
<i>Figure III.5: Les M (N-1) inconnues des nœuds intérieurs et les valeurs connues sur la frontière.</i>	56
<i>Figure III.6: représentation graphique du schéma explicite de calcul de u_i^{n+1}.</i>	57
<i>Figure III.7: Graphes de dépendance pour les calculs de u_i^{n+1} par le schéma implicite.</i>	58
<i>Figure III.8 : Représentation graphique du schéma centré pour le calcul de u_i^{n+1}.</i>	60
<i>Figure III.9 : Théorème de Lax.</i>	61
<i>Figure III.10: Exemples d'un schéma stable et autre instable.</i>	62
<i>Figure III.11: La matrice résultat (N+1)×(M+1).</i>	63
<i>Figure III.12 : Les vecteurs z et t.</i>	64
<i>Figure III.13: Problème à étudié pour l'application 1.</i>	65
<i>Figure III.14: Code MATLAB réalisant la solution numérique du problème.</i>	67
<i>Figure III.15 : Représentation tridimensionnelle de la solution numérique.</i>	68
<i>Figure III.16 : Représentation graphique des isochrones.</i>	69
<i>Figure III.17 : Problème à étudié pour l'application 2.</i>	70
<i>Figure III.18 : programme dans l'environnement QB64</i>	72
<i>Figure III.19 : La fenêtre d'exécution du programme QB64</i>	72
<i>Figure III.20 : Les résultats obtenus sous forme d'un tableau.</i>	73
<i>Figure III.21 : Principe de méthode d'intégration de Simpson.</i>	74
<i>Figure III.22 : programme MathCad pour le calcul des intégrales.</i>	74
<i>Figure III.23 : conversion du tableau résultat de format QuickBasic au format MathCad. ...</i>	75
<i>Figure III.24 : sous-programme MathCAD pour calculer le degré moyen de consolidation..</i>	76
<i>Figure III.25 : Le vecteur résultat contenant les degrés moyens de consolidation pour tous les pas temporels.</i>	76

Liste des Tableaux

<i>Tableau I.1: Évolution des contraintes au cours de la consolidation.....</i>	<i>21</i>
<i>Tableau II.1: Effet des différents facteurs sur le temps d'écoulement d'eau, et sur la vitesse de consolidation.</i>	<i>28</i>
<i>Tableau II.2 : les valeurs du coefficient de consolidation cv de quelques sols.....</i>	<i>33</i>
<i>Tableau III.1 : Les valeurs initiales de la pression interstitielle en fonction de la profondeur.</i>	<i>69</i>

ملخص:

تعد مشكلة الانضمام واحدة من أكثر المشاكل تعقيداً في ميكانيكا التربة، حيث أنها مرتبطة أساساً بعامل الوقت والمكان في هذه المشكلة، قمنا أولاً بنمذجة هذه المشكلة رياضياً. بعد ذلك قمنا بحل هذه المشكلة تحليلياً باستخدام طريقة فورييه من جهة وتحويل فورييه من جهة أخرى، وعددياً باستخدام طريقة الفروق المحدودة. إضافة إلى ذلك، قمنا بكتابة بعض البرامج باستخدام كل من MATLAB وMathCAD وكذلك QuickBasic لإجراء الحسابات الضرورية والتمثيل البياني للنتائج التحليلية والرقمية المتحصل عليه في هذا العمل. المقارنة بين هذه النتائج أظهرت تقارباً كبيراً بينها وأن الأخطاء المتعلقة بالنتائج العددية ضئيلة جداً ويمكن إهمالها وعدم أخذها في الاعتبار.

كلمات مفتاحية: الإنضمام، طريقة فورييه، تحويل فورييه، الفروق المحدودة، MATLAB، MathCAD، QuickBasic، برامج.

Résumé :

Le problème de consolidation est l'un des problèmes le plus compliqués de la mécanique des sols, puisqu'il est fonction à la fois du temps et de l'espace. Dans ce mémoire, nous avons tout d'abord modélisé ce problème mathématiquement. Ensuite, nous l'avons résolu analytiquement en se servant de la méthode de Fourier d'un côté et des transformées de Fourier d'un autre côté et numériquement de la méthode des différences finies.

En plus nous avons élaboré quelques programmes en utilisant MATLAB, MathCAD et QuickBasic pour effectuer les calculs nécessaires et représenter graphiquement les résultats analytiques et numériques obtenus dans ce travail. La comparaison entre a montré que ces résultats sont comparables et a que les erreurs relatives aux résultats numériques sont négligeables.

Mots-clés : Consolidation, méthode de Fourier, transformée de Fourier, différences finies, MATLAB, MathCAD, QuickBasic, programmes.

Abstract:

The problem of consolidation is one of the more complicated problems, since it is a function of both time and space. In this memoir, we have first modeled this problem mathematically. Then, we have solved this problem analytically, by using, on one side the method of Fourier and on another side the Fourier transform and numerically, the finite difference method. In addition, we have developed some programs using MATLAB, MathCAD and QuickBasic to perform the necessary calculations and to represent graphically the analytical and numerical results obtained in this work. The comparison between the latter showed that the difference between them is negligible.

Key words: Consolidation, method of Fourier, Fourier transform, finite difference, MATLAB, MathCAD, QuickBasic, programmes.

Introduction générale

Avec le développement de la construction, on est maintenant amené à édifier des ouvrages de plus en plus importants sur des fondations argileuses de faible qualité.

Les villes et les mégapoles se sont pour beaucoup développées dans les vallées, les estuaires, en bordure de lacs ou sur les façades maritimes. Le sous-sol de ces zones est constitué de matériaux alluvionnaires, limons, vases et d'argiles. Ces matériaux sont souvent à forte teneur en eau et se sont **consolidés** sous le poids des couches sédimentaires déposées successivement au cours des ères géologiques. Cette consolidation correspond à l'expulsion de l'eau interstitielle sous l'effet de la contrainte appliquée par les couches supérieures.

Toute construction en surface apporte un surcroît de contrainte et provoque alors **un tassement supplémentaire**, à l'échelle du bâtiment construit, d'un remblai, d'un mur de soutènement, d'un pont, d'un barrage ou d'une zone urbaine.

En raison de la perméabilité faible des argiles, le tassement se développe pendant des périodes de temps allant de quelques jours à plusieurs siècles.

Donc, en ingénierie géotechnique, il faut dès lors disposer de méthodes fiables de calcul et d'analyse du phénomène de consolidation.

La théorie de la consolidation unidimensionnelle proposée par Terzaghi (1925) est une théorie simplifiée dont l'objectif est de représenter le phénomène de consolidation des argiles, cette théorie est couramment utilisée pour estimer le tassement final d'un ouvrage, ainsi que la vitesse de consolidation du sol.

Ce mémoire de fin d'étude a pour but de décrire tout d'abord le phénomène de consolidation, le modéliser mathématiquement en se basant sur les hypothèses de la théorie unidimensionnelle de Terzaghi et en fin de résoudre le problème mathématique correspondant.

Pour cela, le mémoire est structuré en trois chapitres.

Le premier chapitre est réservé à des généralités.

Le deuxième chapitre est consacré à la modélisation mathématique du phénomène de consolidation et la résolution du problème correspondant analytiquement en utilisant la méthode de Fourier et la méthode de la transformée de Fourier.

Dans **le troisième chapitre**, nous présentons une étude numérique du problème, basée sur la méthode des différences finies. Ce chapitre comprend également l'élaboration de quelques programmes en MATLAB, MathCAD et QuickBasic. Ces programmes sont utilisés pour effectuer les calculs nécessaires dont certains résultats ont été représentés graphiquement sous MATLAB et MathCAD.

Chapitre I : Généralités

1- Introduction :

Lorsque l'on soumet les matériaux en général et les sols en particulier à des contraintes, il se produit des déformations. Ces dernières vont agir sur les structures et pourraient provoquer des désordres mettant en péril le bon usage, voir la sûreté des ouvrages. Ces problèmes se rencontrent par exemple dans le cas des fondations d'immeubles ou d'ouvrages d'art mais également pour les remblais et les ouvrages en terre en général.

Les deux causes principales d'instabilité du sol sont le **tassement** et le glissement ; les soulèvements sont plus rares.

2- Tassement du sol :

Le tassement noté habituellement s (figure I.1) est une déformation verticale vers le bas du sol (vers le haut, c'est un gonflement). Il est dû à l'application de charges extérieures telles que celles des remblais, des fondations ou des poids propres des sols.

Le tassement du sol se traduit par une diminution de la porosité, c'est-à-dire de l'espace disponible entre les particules du sol.

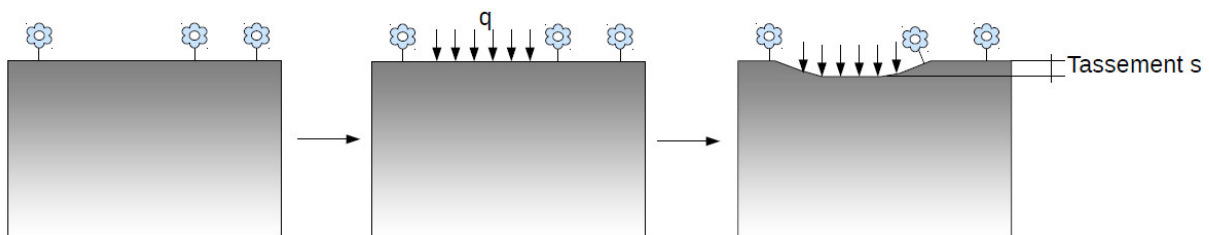


Figure I.1 : description du tassement.

Les tassements subis par le sol sous l'effet d'une contrainte sont dus à trois phénomènes :

- la compression des grains solides du sol ;
- la compression de l'air et de l'eau contenus dans les vides (les pores) ;
- l'évacuation de l'eau et de l'air contenus dans les vides.

2.1. Différence entre le compactage et la consolidation :

La compression de l'air et l'expulsion de l'air et de l'eau des vides contribuent le plus au changement de volume du sol chargé. Ce changement de volume peut être mis en évidence par deux processus distincts le **Compactage** et la **consolidation**.

Compactage : La compaction est le processus par lequel les particules de sol sont plus étroitement liées, provenant d'un effet dynamique ou d'un chargement statique. Le

changement de volume est associé à la diminution du volume d'air, Il y a peu ou pas de réduction de la teneur en eau.

Consolidation : La consolidation est le processus par lequel les particules de sol sont plus étroitement comprimées au cours d'une période de temps sous l'action d'un chargement statique. Ce processus est principalement réalisé par un drainage progressif de l'eau des pores du sol. Le changement de volume progressif est associé à une réduction de la teneur en eau du sol.

2.2.Types de tassements :

Dans la nature, On distingue deux types de tassements :

Tassement uniforme : Un tassement uniforme est un mouvement d'enfoncement du sol de façon uniforme (figure I.2).

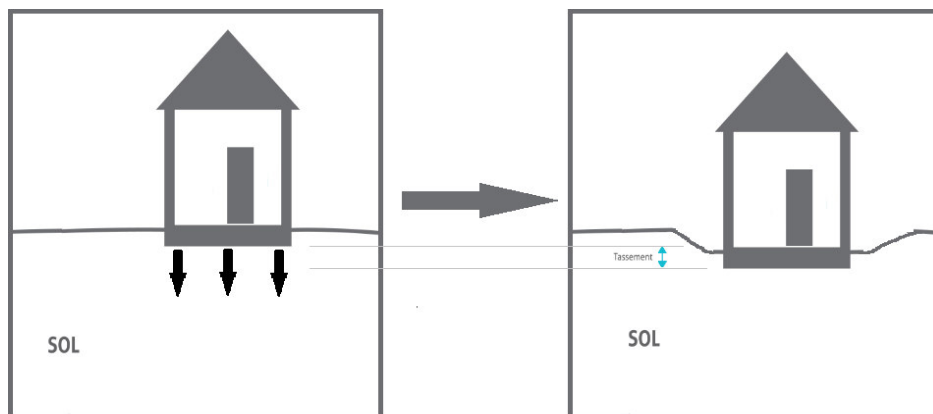


Figure I.2: tassement uniforme.

Vis-à-vis des structures que porte le sol, les tassements uniformes affectent peu la structure, ils peuvent cependant endommager les services et accessoires tels les conduites d'eau et les passages souterrains (figure I.3).



Figure I.3: rupture de canalisations suite à un tassement uniforme.

Tassement différentiel : La différence de tassement entre deux points A et B de la structure (figure I.4) est appelée tassement différentiel : $s_{AB} = s_A - s_B$

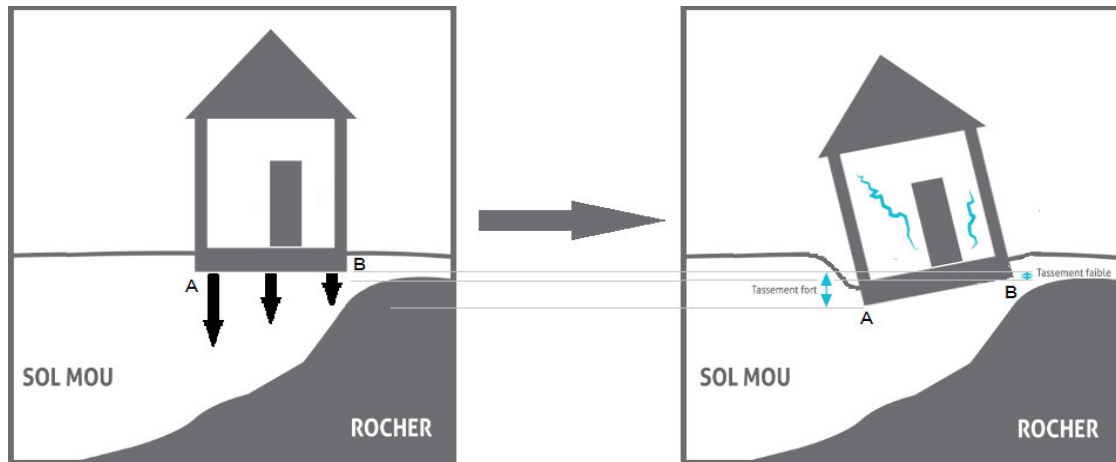


Figure I.4 : tassement différentiel.

Ce type de tassement peut entraîner des désordres importants dans la structure (figure I.5)

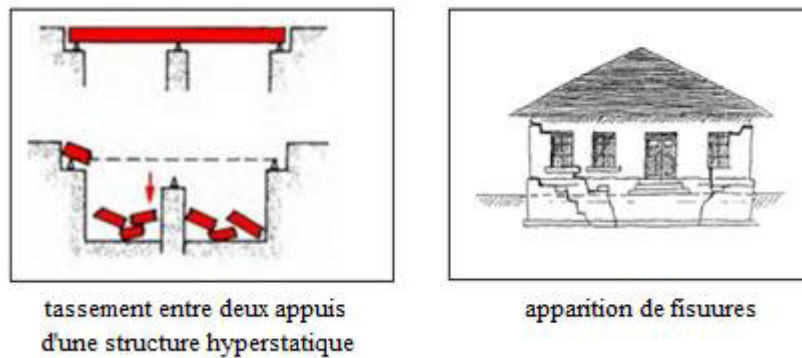


Figure I.5: désordre dû à un tassement différentiel.

2.3. Composantes d'un tassement :

Le tassement totale est souvent décomposé en plusieurs termes (figure I.6), liés chacun à un phénomène différent (figure I.7), la formule générale d'un tassement peut être écrite sous la forme suivante :

$$s = s_i + s_c + s_s + s_{lat}$$

Avec :

s_i –tassement immédiat (sans expulsion d'eau interstitielle) ;

s_c –tassement de consolidation sans déformation latérale (variation de la teneur en eau) ;

s_s –tassement de consolidation secondaire sans déformation latérale (fluage) ;

s_{lat} –tassement lié au déplacement latéral du sol au cours du temps.

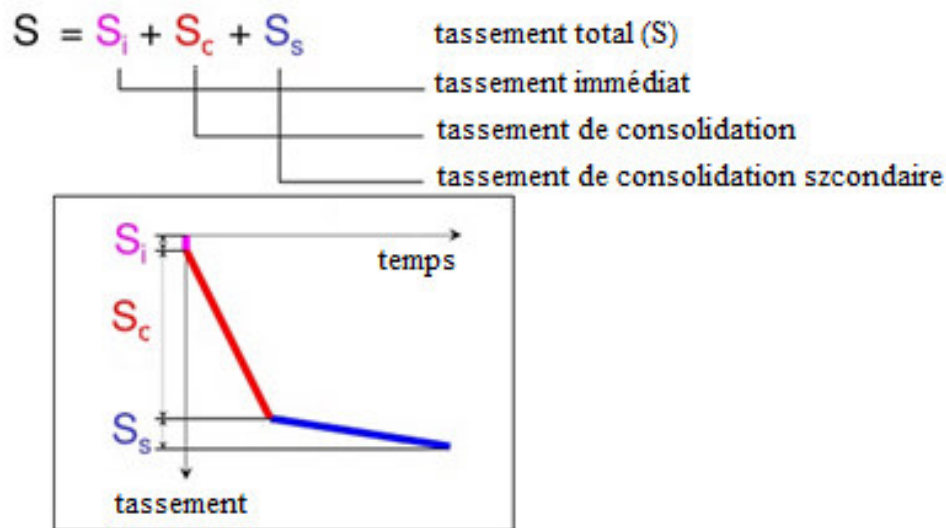


Figure I.6: composantes d'un tassement

Tassement immédiat : Ce tassement est appelé aussi tassement initial, tassement élastique ou tassement instantané. L'application instantanée ou quasi-instantanée de la charge à la surface du sol entraîne des déformations immédiates, c'est-à-dire sans expulsion d'eau interstitielle.

Tassement de consolidation : Aussi appelé tassement primaire ou tassement principal parce qu'en général constitue la majeure partie du tassement. Dans les sols saturés, l'application d'une charge provoque un état d'excès de pression hydrostatique. La dissipation de cet excès de pression avec le temps engendre de déformations dites tassements de consolidation.

Le tassement dû à la consolidation primaire représente 80 à 90% du tassement total.

Tassement de consolidation secondaire : Aussi appelé compression secondaire ou fluage. Après dissipation des excès de pression interstitielle, on constate en général la poursuite de déformations du sol. C'est la phase de consolidation secondaire pendant laquelle le sol se déforme dans le temps sous des contraintes constantes, il s'agit d'un fluage.

Par conséquent ce type de tassement est également fonction du temps, mais s'effectue sans aucun changement des contraintes effectives. La compression secondaire est due à l'arrangement graduel des particules de sol pour une configuration beaucoup plus stable.

Tassement dû aux déplacements latéraux : Les effets des déplacements latéraux sont séparés des composantes verticales de la déformation.

La diminution du volume du sol est due à plusieurs facteurs a savoir:

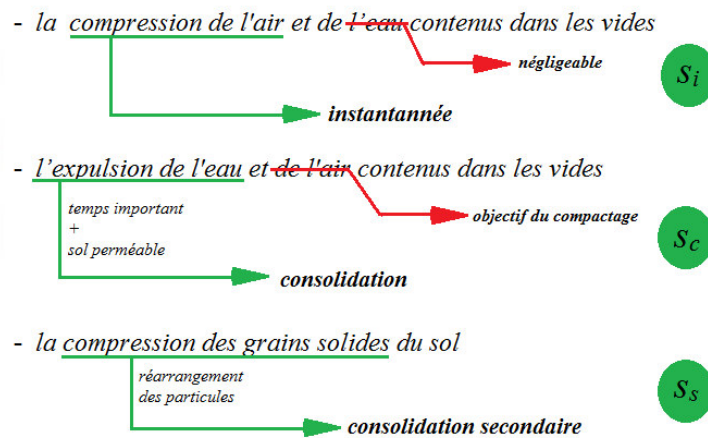


Figure I.7: Les phases d'un tassement.

3- Phénomène de consolidation :

La consolidation (ou consolidation primaire) d'un sol fin est un phénomène conduisant à la dissipation des surpressions interstitielles et à la diminution du volume du sol au cours du temps sous les charges qui lui sont appliquées. L'application rapide d'une charge à la surface d'un massif ou d'une éprouvette de sol se traduit, à l'instant initial, par l'apparition de surpressions interstitielles (excès de pression par rapport à la distribution d'équilibre, généralement hydrostatique) dans la phase liquide du sol. S'il existe des possibilités de drainage aux limites du massif ou de l'éprouvette, il s'établit un écoulement transitoire.



Figure I.8 : Pressoir à raisin, dans ce cas, l'expulsion du fluide se fait radialement.

La consolidation c'est donc le processus d'expulsion des vides du sol, de l'air ou de l'eau. Les grains se resserrent donc et le sol diminue de volume. Une analogie que l'on peut faire de ce processus est celui d'un presseur à fruits (Figure I.8) où le jus est expulsé sous l'effet de la contrainte appliquée par la vis agissant sur le plateau.

3.1. Relation entre la nature et l'état du sol et la consolidation :

Dans un sol perméable saturé, une augmentation des contraintes (une surcharge $\Delta\sigma$ telle que causée par les charges d'un bâtiment à la surface du sol) induit un écoulement instantané de l'eau interstitielle, la consolidation ne se manifeste pas et ce type de sol manifeste un tassement instantané s_i . Autrement dit, l'augmentation de la pression interstitielle se dissipera rapidement à cause de la perméabilité relativement élevée des sols sableux. Pour les sols grenus, les déformations (tassements) sont instantanées ou quasi instantanées, compte tenu de leur forte perméabilité, et en amplitude elles sont identiques quel que soit l'état de saturation initial du sol.

Le phénomène de consolidation se manifeste dans les sols fins saturés (argile). Le tassement de ce type de sol évolue dans le temps jusqu'à l'annulation des surpressions interstitielles Δu et atteint alors une valeur s_c . Un tel phénomène se produit à long terme et ce type de consolidation est appelé **consolidation primaire**.

Au-delà de ce stade, le tassement du sol se manifeste toujours et est dû à un réarrangement des grains et à des déformations plastiques des couches argileuses. Sous des contraintes effectives constantes dans le temps. Un tel phénomène est appelé fluage et la consolidation dans cette étape est dite **consolidation secondaire**. Le tassement évolue très lentement et est prépondérant dans les sols pratiquement imperméables comme la vase et la tourbe. Le tassement atteint dans ce stade est noté s_f

Pour les sols fins argileux ou limoneux saturés, le tassement de consolidation primaire est prépondérant, le tassement de fluage peut devenir une part significative dans le cas des sols comprenant des composants organiques (vase-tourbe).

Dans un sol sec, le phénomène de tassement peut se composer de deux phases :

- Compression primaire**, dans laquelle le volume des vides se réduit par expulsion de l'air, avec un tassement instantané,
- Compression secondaire**, analogue à la consolidation secondaire où le tassement évolue lentement.

En conclusion, voir le schéma récapitulatif de la figure I.9.

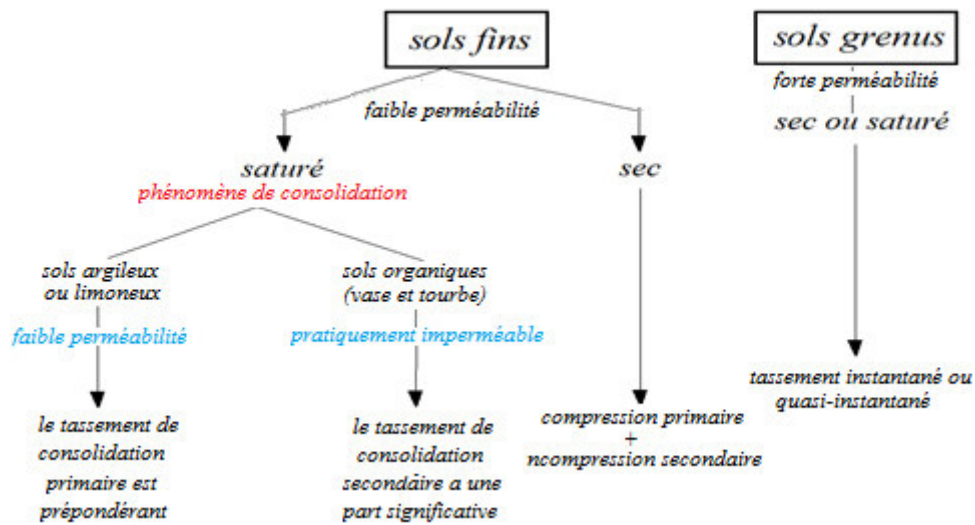


Figure I.9: La relation entre la nature et l'état du sol et la consolidation.

3.2.Principales causes de la consolidation :

La consolidation se manifeste sur de longues périodes, ce qui rend difficile la détermination des causes réelles de ce phénomène, mais on peut citer :



Figure I.10: Dessiccation des couches du sol.

Dessiccation des couches du sol (sécheresse) :

Lors d'une période de sécheresse (un été chaud et sec par exemple), l'assèchement progresse en profondeur et peut atteindre la couche d'argile. Lorsque cette dernière se tarit, l'argile qui a perdu de sa teneur en eau réagit alors en changeant de volume, en se contractant et en provoquant une consolidation de sol (figure I.10).

L'assèchement du sol argileux est plus fréquent en ville puisque les rues, les trottoirs et les toitures sont autant des surfaces imperméables, qui favorisent le ruissellement des eaux de pluie vers les égouts. Par conséquent, en période de sécheresse, l'eau s'évapore du sol argileux, et celui-ci a difficilement droit à sa juste part d'infiltrations d'eau de pluie.

Présence d'arbres : Le sol d'argile tend à se contracter lorsqu'il perd de sa teneur en eau et c'est alors que les arbres, qui ont de grands besoins en eau, absorbent de l'eau à partir ou au moyen de leurs racines (figure I.11).



Figure I.11: présence d'arbres

Abaissement des nappes phréatiques : c'est-à-dire une modification des pressions interstitielles (changement hydrologique) (figure I.12).



Figure I.12: Abaissement des nappes phréatiques

Poids de nouvelles charges : l'existence de nouvelles constructions sur des terrains voisins, ainsi que l'augmentation des charges appliquées aux fondations de ces mêmes constructions.

Erreurs de conception et d'exécution : elles sont dues à une sous-évaluation des efforts ou au non prise en compte de l'étude de sol.

Sols instables constitués de remblais : Un remblai insuffisant, mal compacté ou inadéquat peut très bien être responsable d'une consolidation du sol, parce que les terrains remaniés ou rapportés perdent leur capacité portante.

3.3. Influence de la consolidation :

Dans ce qui suit, nous allons présenter quelques exemples ou cas réels représentant l'influence des consolidations des sols sur les constructions :

Tour penchée de pise :

La construction de la tour penchée à Pise en Italie (figure I.13) a débuté en 1173 et été achevée en 1350. De forme cylindrique, elle comporte 8 étages de 207 colonnes superposées et une hauteur de 60 m jusqu'à la fondation.



Figure I.13: une photo de la tour penchée à Pise.

La fondation repose sur une couche de sable limoneux de 10 m d'épaisseur, surmontant une couche d'argile molle (figure I.14).

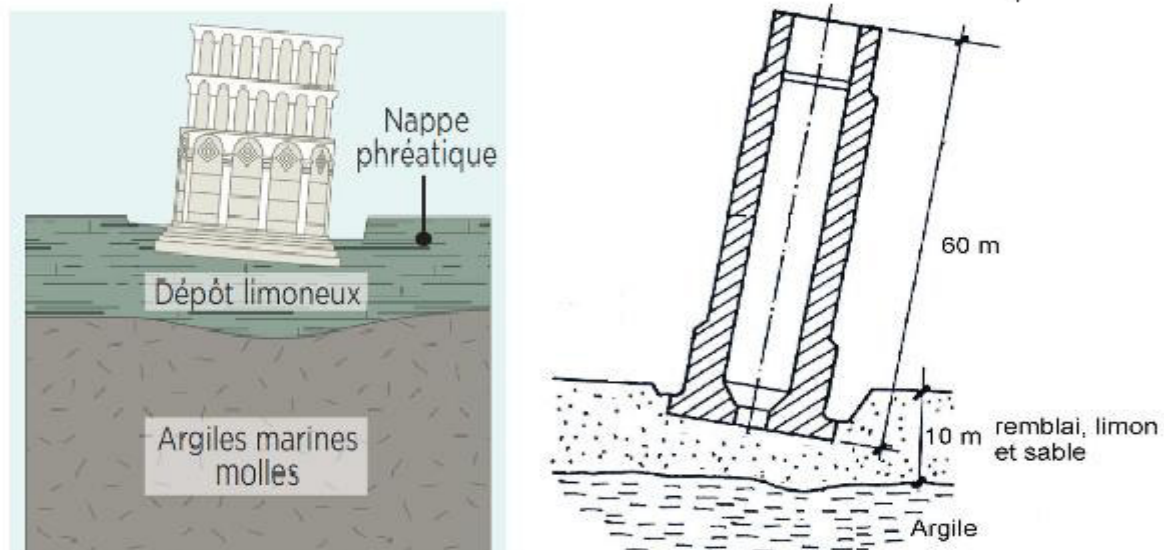


Figure I.14: coupe en élévation de la tour de pise et couches de sol.

Durant les 800 ans de l'existence de la tour de Pise, la partie sud de la Tour a subi un tassement d'environ 2,8 m, tandis que la partie nord a subi un tassement d'environ 0,8 m, produisant un tassement différentiel de 2,0 m. La majeure partie de l'inclinaison de la tour s'est produite pendant les 200 premières années. Actuellement, on observe une vitesse de tassement d'environ 1 mm/an.

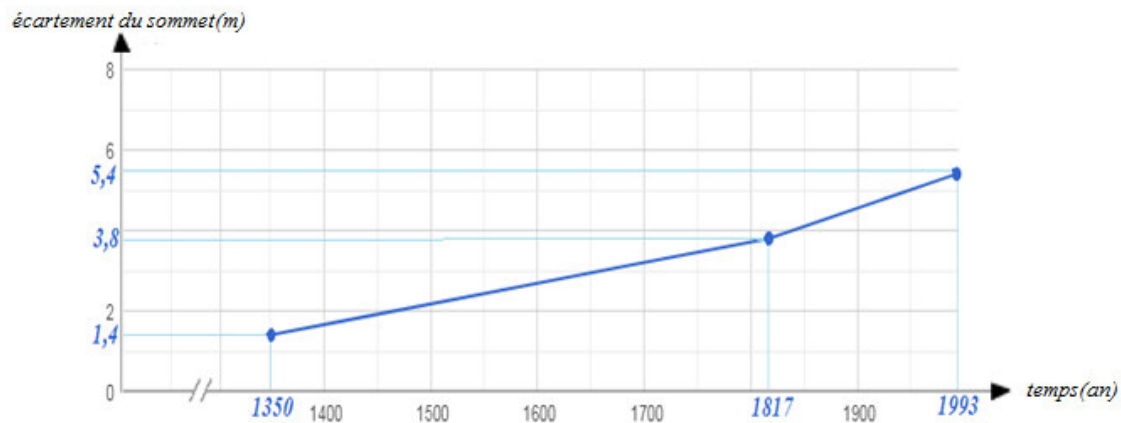


Figure I.15: L'écartement du sommet de la tour par rapport à la verticale au cours des années.

La tour s'agit d'un exemple concret de tassement différentiel dû à la consolidation lente de l'argile molle, cette dernière n'étant pas homogène.

Cathédrale de Mexico :

La cathédrale de Mexico (figure I.16) a été construite à partir de 1560, pendant plus de 400 ans de sa construction a accumulé des tassements différentiels très importants (figure I.17).



Figure I.16: Photo de la cathédrale de Mexico.

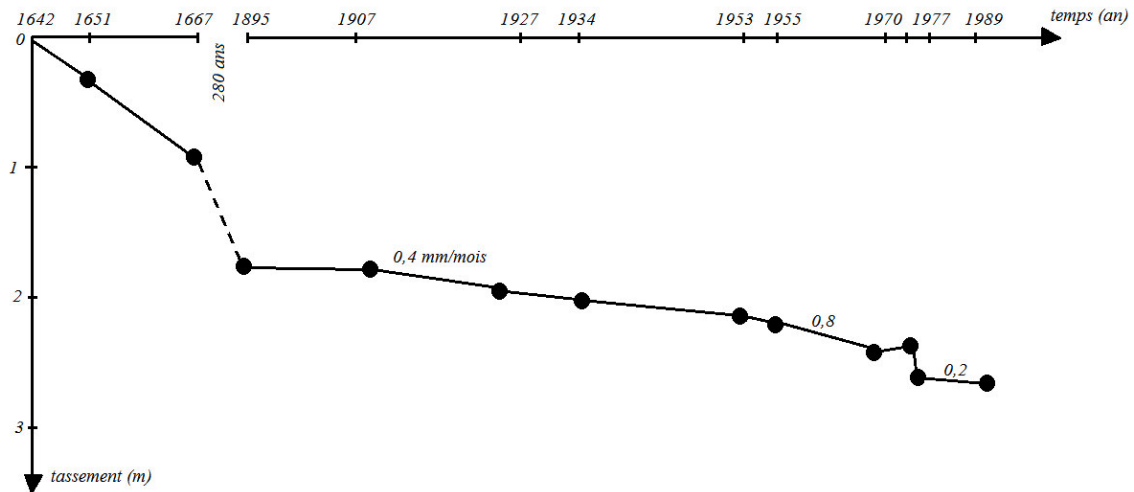


Figure I.17: Evolution des tassements de la cathédrale de Mexico au cours du temps.

En 1907 Le tassement différentiel maximal dépassait 1,5 m, principalement en raison de l'auto-consolidation du poids. Par pompage, de l'eau à usage domestique et industriel a commencé à être extraite des puits forés dans la ville (car les sources de surface n'étaient pas suffisantes pour satisfaire la demande croissante d'une ville en croissance), cette dissipation d'eau a produit des baisses de niveaux piézométriques dans les couches d'argile ; par conséquent, des tassements différentiels supplémentaires se sont accumulés jusqu'en 1989, alors qu'ils totalisaient 2,4 m et les dommages sont devenus alarmants. Les tassements différentiels atteignent 1,25 m entre les tours Ouest et Est de la cathédrale.

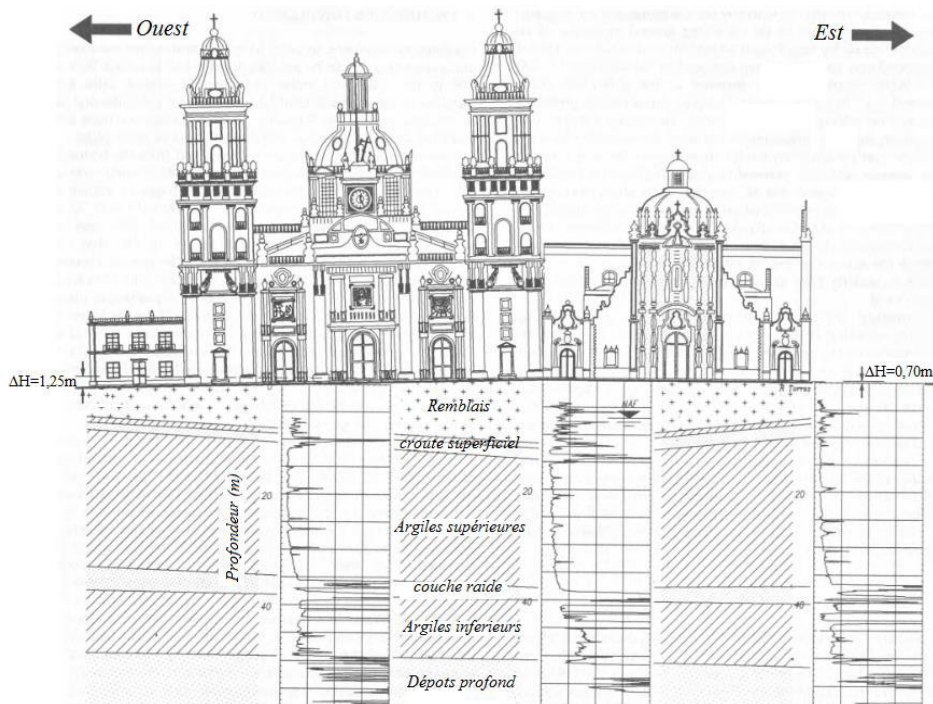


Figure I.18: Les tassements différentiels entre les tours de la cathédrale et couches de sol.

La figure I.19 montre les tassements différentiels d'un autre monument célèbre de la cité de Mexico, le Temple des Capucines, construit par les Espagnols en 1787.

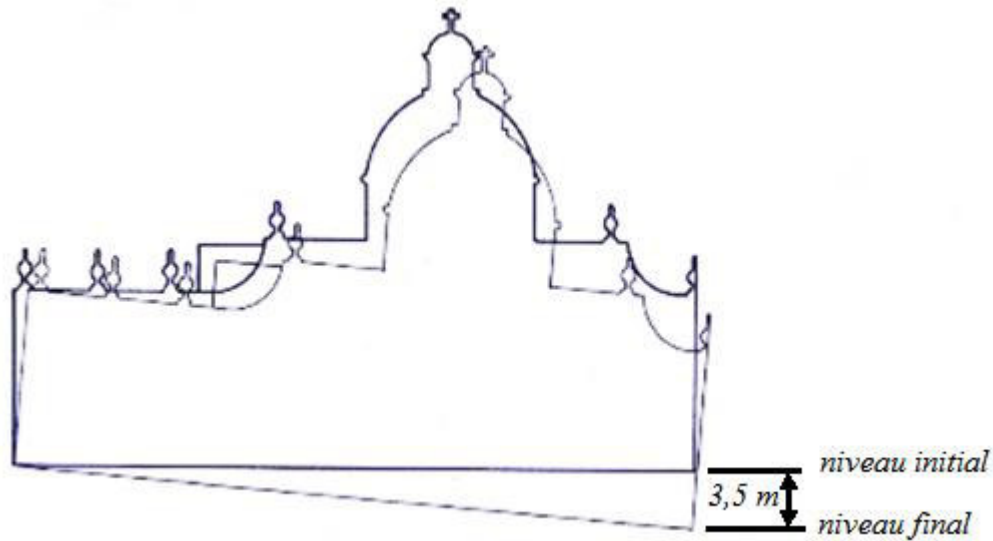


Figure I.19: Tassement différentiel du Temple des Capucines (Mexico).

La ville de Mexico a été construite sur un ancien lac (lac de Texaco) qui repose en grande partie sur des argiles tendres qui sont très peu stables (fig. I.20).

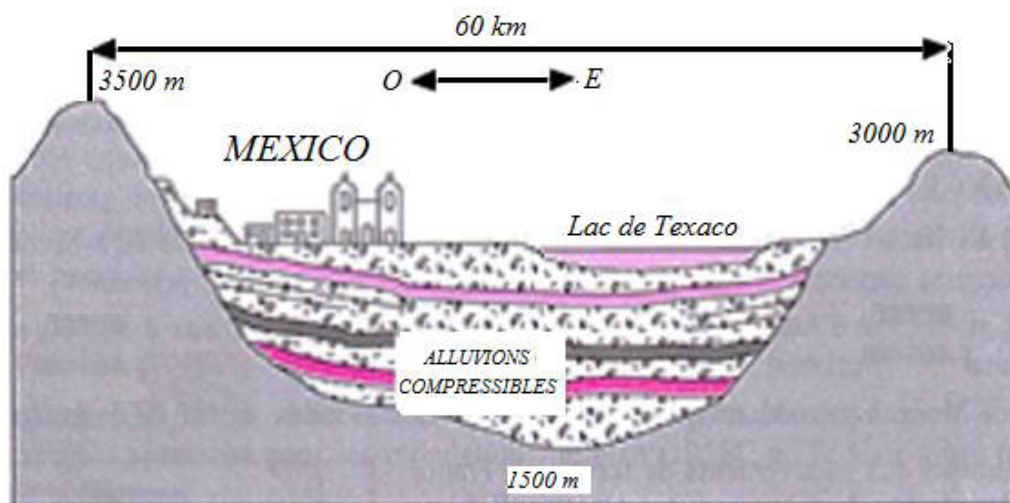


Figure I.20: la ville de Mexico a été construite sur un ancien lac.

La carte schématique du centre de la ville de Mexico présentée sur la figure I.21 permet de comprendre l'ampleur du problème, les tassements enregistrés au cours des 70 années écoulées de 1891 à 1966 ont atteints 8 mètres, avec des variations rapides dans certaines zones.

On note que la charge appliquée à la surface du sol ne constitue pas un facteur essentiel du tassement puisqu'un monument, un parc, un palais et une cathédrale ont des tassements très semblables (figure I.22)

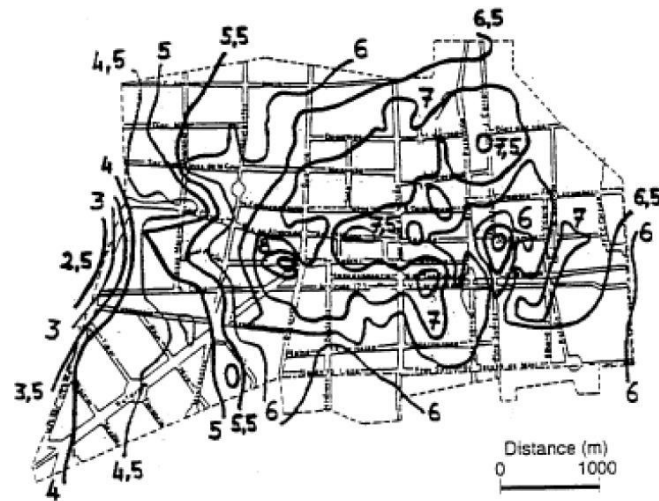


Figure 1.21: Carte schématique du centre de la ville de Mexico.

Effectivement, les tassements de Mexico étaient dus principalement aux pompages effectués dans les nappes profondes pour l'alimentation en eau de la ville. L'arrêt des pompages a permis de ralentir l'évolution des tassements.

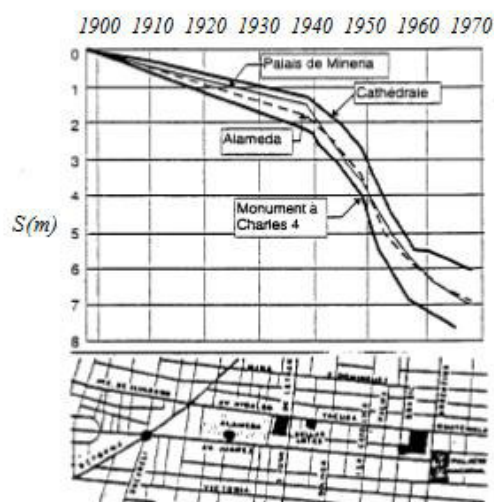


Figure 1.22: Le tassement des différentes constructions en Mexico.

Plate-forme aéroportuaire d'Osaka :

L'Aéroport International du Kansai (mis en service depuis le 4 septembre 1994) est un aéroport international construit sur une île artificielle 1,25 x 4 km au sud de la ville d'Osaka au Japon (figure 1.23). Les tassements prévus étaient de l'ordre de 11 m et le niveau final de l'aéroport reste à 4 m au-dessus de la surface de la mer, mais les tassements observés sous le poids propre de l'aéroport seulement ont été plus forts que prévu (environ 14,3 m) et ont conduit à des travaux importants d'élévation des murs périphériques anti-vagues et aussi à

des travaux sur les bâtiments qui ont été fissurés. Le projet était alors devenu le plus cher de l'histoire.



Figure I.23: L'Aéroport International du Kansai (Japon).

En 1990 (après 3 ans de début des travaux) l'île artificielle était enfoncée de 8,5 mètres au lieu de 7 mètres prévus, Le tassement s'était notablement ralenti (17 centimètres de tassement en 2002).

La ville de Téhéran :

Des images de la ville capturées par satellite entre 2003 et 2017 ont révélé qu'environ 10% du centre de [Téhéran](#) ainsi que de nombreux villages voisins situés au nord-ouest sont concernés par le phénomène de subsidence (Autrement dit, une consolidation depuis une quinzaine d'années). Dans certaines zones, le niveau aurait même baissé de 25 centimètres par an, tandis que l'aéroport international de la ville (Imam-Khomeyni) s'enfonce de cinq centimètres par an depuis 2003.

Le cas de la capitale iranienne (figure I.24) n'est pas isolé. Des observations "satellite" ont montré que [Venise](#) en Italie, certaines parties de Texas et de [Louisiane](#) ou encore [Jakarta](#), capitale de l'Indonésie sont victimes d'un phénomène similaire.



Figure I.24: La capitale d'Iran-Téhéran.

Mais le rythme actuel de subsidence observé dans la capitale iranienne figurerait parmi les plus élevés au monde.

4- Etapes d'investigation théorique d'un problème physique :

Pour bien comprendre le phénomène de consolidation, on suit le processus de la modélisation suivant (illustré sur la figure I.25) :

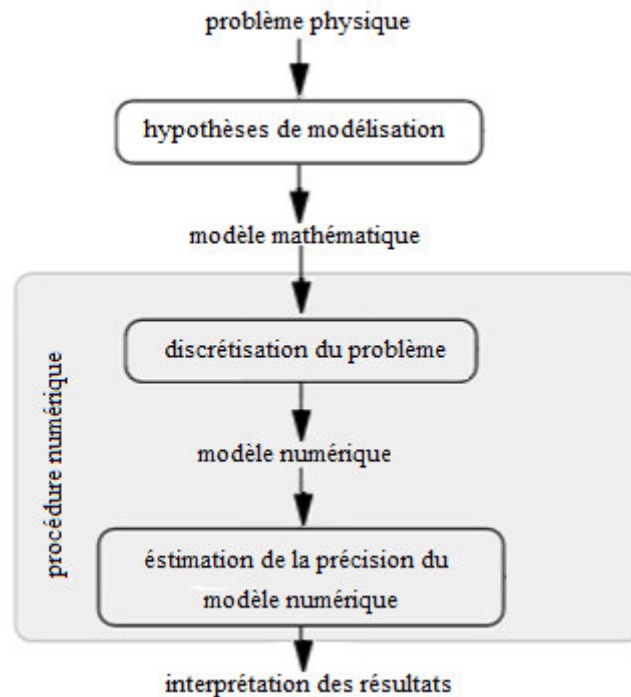


Figure I.25: Processus de la modélisation.

5- Analogie physique du phénomène de consolidation :

Le modèle analogique illustré à la figure I.26 permet de schématiser le phénomène de consolidation d'une couche de sol saturé soumise à une pression $\Delta\sigma$ en surface.

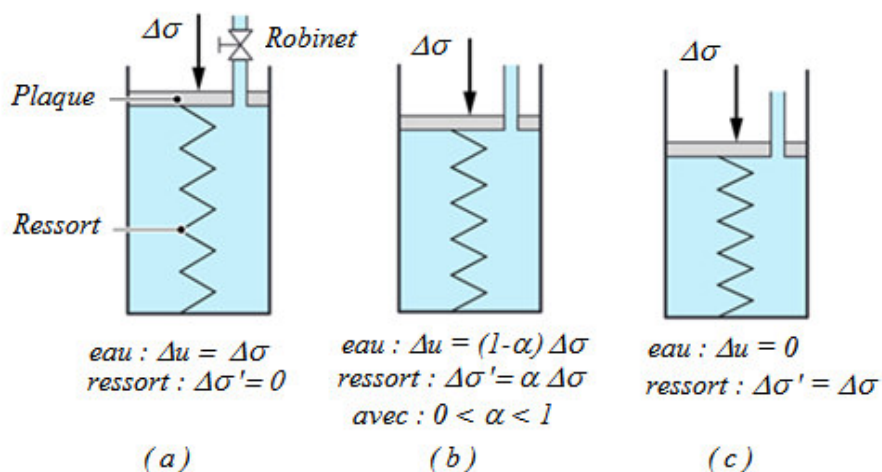


Figure I.26: Modèle analogique expliquant le phénomène de consolidation.

Le sol est chargé par l'intermédiaire d'une plaque percée d'un orifice de faible diamètre, muni d'un robinet. Le comportement mécanique du squelette solide du sol est schématisé par un ressort élastique. La faible perméabilité du sol est assurée en restreignant la section de l'orifice permettant à l'eau de s'échapper à travers la plaque de chargement.

La Figure I.26 a montre À l'instant initial $t = 0$ (robinet fermé), la charge $\Delta\sigma$ appliquée à la plaque est transmise intégralement à l'eau, le ressort n'est pas sollicité : $\Delta u = \Delta\sigma$ et $\Delta\sigma' = 0$

La Figure I.26 b Après l'ouverture du robinet, et sous l'effet de la surpression Δu , l'eau commence à s'évacuer lentement au cours du temps et le ressort reprend au fur et à mesure une part de la pression $\Delta\sigma$. Autrement dit, la contrainte effective augmente dans le temps et en contrepartie, la surpression interstitielle diminue, telle qu'en un temps t donné :

$$\Delta u = [(1 - \alpha(t))]\Delta\sigma \text{ et } \Delta\sigma' = \alpha(t)\Delta\sigma \text{ avec : } 0 < \alpha(t) < 1$$

Où : $\alpha(t)$ est une fonction du temps.

La Figure I.26 c représente L'augmentation de la contrainte effective $\Delta\sigma'$ s'exprime par une compression du ressort, soit s , ce qui représente le tassement du sol. Le phénomène évolue jusqu'à ce que la surpression interstitielle se dissipe, l'écoulement s'arrête et le ressort reprend toute la charge c'est à dire qu'à $t=t_{100\%}$: $\Delta u = 0$ et $\Delta\sigma' = \Delta$. On parle alors de la fin du processus de consolidation. Le temps $t_{100\%}$ nécessaire à cette opération est théoriquement infini, mais en pratique il correspond à une dissipation presque totale de la surpression interstitielle. Son évolution est résumée dans le tableau I.1.

Temps	Contrainte totale (charge appliquée)	Contrainte effective	Pression interstitielle	Tassement	État du phénomène de consolidation
0	$\Delta\sigma$	0	$\Delta\sigma$	0	Début $\alpha = \beta = 1$
t	$\Delta\sigma$	$\alpha\Delta\sigma$	$(1 - \alpha)\Delta\sigma$	$\beta\Delta H$	En cours $0 < \alpha < 1$ $0 < \beta < 1$
$t_{100\%}$	$\Delta\sigma$	$\Delta\sigma$	0	ΔH	Fin $\alpha = \beta = 1$

Tableau I.1: Évolution des contraintes au cours de la consolidation.

L'évolution de la contrainte effective, de la pression interstitielle et du tassement dans le temps sont illustré sur la figure I.27.

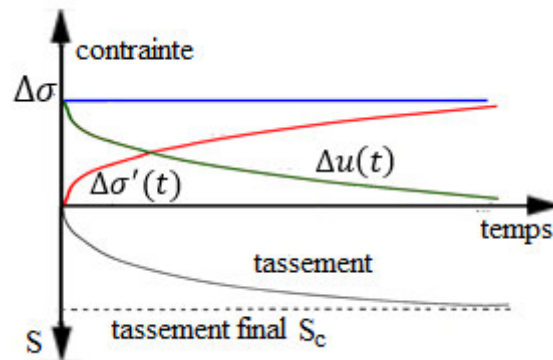


Figure I.27: Evolution des contraintes et du tassement au cours de la consolidation.

*Chapitre II : Analyse
mathématique du problème.*

1- Introduction :

Dans la nature, les systèmes et phénomènes physiques les plus intéressants sont aussi les plus complexes à étudier. Ils sont souvent régis par un grand nombre de paramètres non-linéaires interagissant entre eux. L'une des solutions possibles est de recourir à une série d'expériences pour mesurer et analyser les paramètres et grandeurs du système et leurs dépendances. Mais les essais peuvent s'avérer très coûteux et ils peuvent être parfois très dangereux. Par conséquent, on préfère de construire un modèle mathématique permettant la représentation du phénomène physique.

Ces modèles mathématiques utilisent très souvent des équations ou systèmes d'équations aux dérivées partielles (EDP).

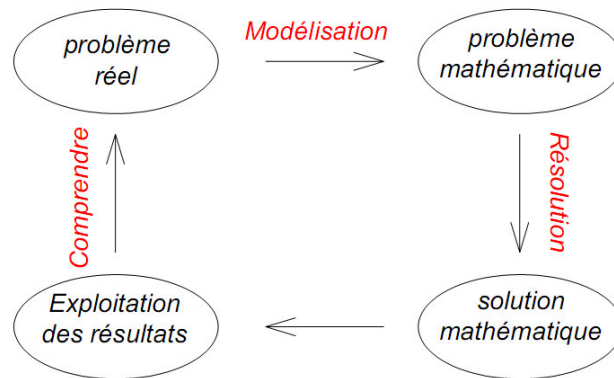


Figure II.1: Principe de la modélisation mathématique.

2- Equations aux dérivées partielles (EDP) :

Les EDP apparaissent dans tous les domaines des sciences et de l'ingénierie. Une EDP est une relation liant de façon générale une fonction de plusieurs variables et quelques ou toutes ses dérivées partielles. Mathématiquement une telle relation peut être écrite dans le cas général sous la forme suivante :

$$F\left(x_1, \dots, x_n, f, \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}, \dots, \frac{\partial^m f}{\partial x_n^m}\right) = 0$$

2.1.Ordre de l'EDP :

L'ordre de l'équation est défini par l'ordre le plus élevé des dérivées partielles intervenant dans l'équation.

2.2.EDP linéaire ou non linéaire :

On dit qu'une EDP est linéaire si on peut l'écrire sous la forme $L(f(x)) = g(x)$, où x est un vecteur de composantes (x_1, \dots, x_n) et où $f \rightarrow L$ est une application linéaire par rapport à f . Autrement dit, L est un opérateur différentiel linéaire, sinon l'EDP est dite non linéaire.

2.3.EDP homogène ou non homogène :

On dit qu'une EDP linéaire ou non linéaire est homogène si $g(X)=0$. Sinon, elle est non homogène.

2.4.EDP elliptiques, paraboliques et hyperboliques :

Les EDP linéaires du second ordre à coefficients constants, peuvent être écrites sous la forme suivante :

$$\sum_{i,j=1}^2 a_{ij} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(X) + \sum_{i=1}^2 b_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(X) + cf(X) = g(X).$$

Ou plus simplement :

$$\alpha \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \beta \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} + \gamma \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} + \delta \frac{\partial f}{\partial x_1} + \varphi \frac{\partial f}{\partial x_2} + \zeta f = g$$

Ou :

$\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varphi, \zeta$ sont des constantes.

Si l'équation algébrique quadratique :

$$\sum_{i,j=1}^2 a_{ij} x_i x_j + \sum_{i=1}^2 b_i x_i + c = 0$$

est celle d'une ellipse (ou parabole, ou hyperbole), on dit que l'EDP est elliptique (ou parabolique, ou hyperbolique). Autrement l'EDP ci-dessus est :

- Elliptique si $\beta^2 - 4\alpha\gamma > 0$,
- Parabolique si $\beta^2 - 4\alpha\gamma = 0$,
- Hyperbolique si $\beta^2 - 4\alpha\gamma < 0$.

2.5.EDP d'évolution :

Ce sont des équations qui modélisent des phénomènes non-stationnaires, c'est à dire des phénomènes qui évoluent avec le temps.

2.6. Conditions initiales et aux limites :

Conditions initiales : si f est une fonction de x et t , les conditions initiales peuvent être exprimées par : $f(x, t_0) = \varphi_0(x)$.

Conditions aux limites : si f est une fonction de $x \in \Omega$, il peut y avoir trois types de contraintes ou conditions aux limites pour cette fonction :

Conditions de type Dirichlet qui sont de la forme : $f = g$.

Conditions de type Neumann qui sont de la forme : $\frac{\partial f}{\partial x} = g$.

Conditions de type Robin ou mixtes qui mélangent les deux : $f + \frac{\partial f}{\partial x} = g$.

3- Théorie de consolidation de Terzaghi :

La théorie de la consolidation unidimensionnelle proposée par Terzaghi, au début du XXe siècle, considère une couche de sol homogène dans laquelle les déformations et les écoulements sont uniquement verticaux et où la charge est appliquée instantanément à l'instant initial.

3.1. Description du problème :

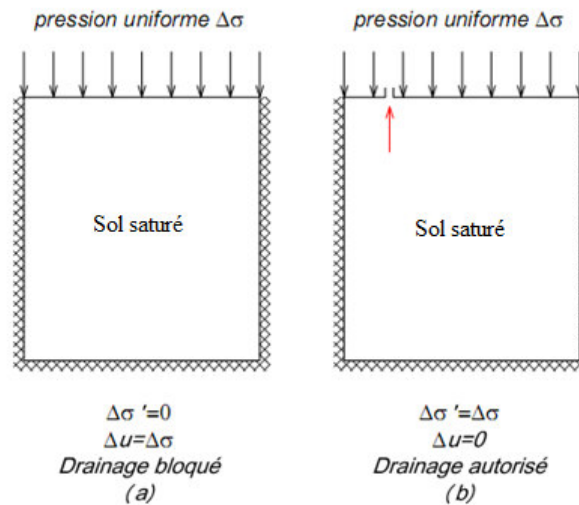


Figure II.2: Sol saturé chargé en surface et drainé par une seule face.

La figure II.2 (a) représente un récipient à paroi rigide mais lisse qui est rempli de sol saturé.

- Le récipient est scellé au moyen d'une membrane recouvrant la surface supérieure du sol.
- Une pression uniforme de $(\Delta\sigma)$ est appliquée au niveau de la surface supérieure de la couche du sol considérée.
- Le sol est saturé, le conteneur est rigide et aucun tassement du sol ne sera observé.

- Le changement de la pression interstitielle dans le sol est égal à la contrainte appliquée ($\Delta u = \Delta \sigma$) parce que la contrainte totale appliquée et la pression interstitielle, augmentent ensemble de la même quantité, il n'y aura pas de changement dans la contrainte effective ($\Delta \sigma' = 0$).

- L'absence de tassement observé exprime la conformité avec le principe de la contrainte effective, qui exige que le changement de volume ne se produise que suite à un changement de contrainte effective. La figure II.2 (b) montre qu'une ouverture a été prévue dans la membrane pour permettre à l'eau d'être expulsée ou drainée du récipient.

- Sous l'effet de l'augmentation de la pression interstitielle ($\Delta u = \Delta \sigma$), l'eau sera expulsée du sol et ce drainage de l'eau se poursuivra jusqu'à ce que la pression de l'eau diminue et revienne à la valeur d'équilibre qui prévalait avant le changement de la contrainte $\Delta \sigma$ appliquée au sol. Cela signifie que le changement de pression interstitielle sera finalement nul.

- La contrainte totale a augmenté de $\Delta \sigma$, donc la contrainte effective augmentera également de $\Delta \sigma$, après que la pression interstitielle devienne nulle.

En réponse à ce changement de contrainte effective, un tassement du sol se produira, la quantité dépend de **la compressibilité du sol**.

Variation des contraintes durant la consolidation : Les variations des contraintes sur toute la profondeur d'une couche de sol sont illustrées sur la figure II.3.

La figure II.3 (a) représente les conditions initiales, la nappe phréatique coïncide avec la surface du sol.

- La pression interstitielle initiale u_i à une profondeur z est :

$$u_i = \gamma_w \cdot z$$

- La contrainte verticale totale initiale σ_i est :

$$\sigma_i = \gamma_{sat} \cdot z$$

- Et la contrainte verticale effective initiale σ'_i est :

$$\sigma'_i = \sigma_i - u_i$$

D'où :

$$\sigma'_i = \gamma' \cdot z$$

Où γ' est le poids volumique effectif du sol.

La répartition de cette contrainte effective sur toute la profondeur de la couche du sol est représentée par la zone hachurée.

La figure II.3 (b) : montre qu'une contrainte ($\Delta\sigma$) a été appliquée sur la surface du sol, le diagramme a été tracé à l'instant de l'application de la charge, avant que l'eau ne soit expulsée du sol.

- La pression interstitielle augmentera d'une quantité équivalente à la pression appliquée ($\Delta\sigma$):

$$\Delta u = \Delta\sigma.$$

- La pression interstitielle u à une profondeur z est $u = u_i + \Delta u$, ce qui permet d'écrire :

$$u = \gamma_w \cdot z + \Delta\sigma$$

- La contrainte verticale totale σ est :

$$\sigma = \sigma_i + \Delta\sigma$$

- La contrainte effective est la même que celle produite avant l'application de la charge :

$$\sigma' = \sigma'_i$$

La figure II.3 (c) : Sous l'effet de la pression interstitielle supplémentaire (surpression Δu), l'eau commence à s'évacuer par l'ouverture de la limite supérieure du sol.

Le drainage de l'eau continuera jusqu'à ce que la pression interstitielle supplémentaire soit nulle $\Delta u = 0$.

- La pression interstitielle u_f à une profondeur z est :

$$u_f = u_i$$

- La contrainte verticale totale finale σ_f est :

$$\sigma_f = \sigma_i + \Delta\sigma$$

- La contrainte $\Delta\sigma$ qui était portée comme une pression interstitielle Δu a maintenant été transformée à une contrainte effective.

- La contrainte effective finale σ'_f à une profondeur z est :

$$\sigma'_f = \sigma'_i + \Delta\sigma$$

- Suite à l'augmentation $\Delta\sigma$ de la contrainte effective, le sol subira une diminution de volume provoquant un tassement de la surface du sol.

Le processus de transformation progressive de la contrainte $\Delta\sigma$, de la pression interstitielle, la contrainte effective, avec le changement de volume associé est appelé consolidation.

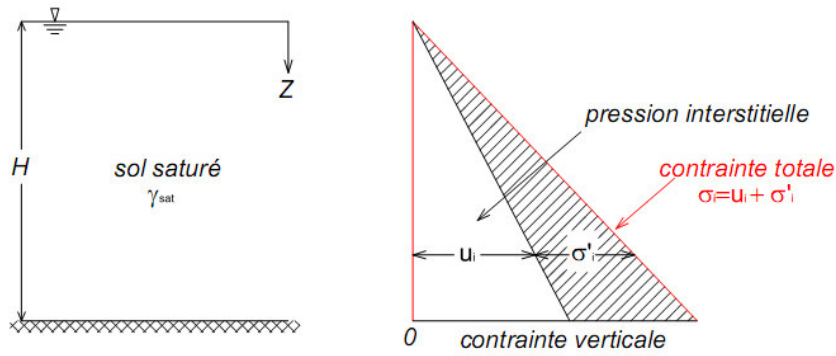


Figure II.3(a) : Changements de contraintes verticales pendant la consolidation avant l'application de $\Delta\sigma$.

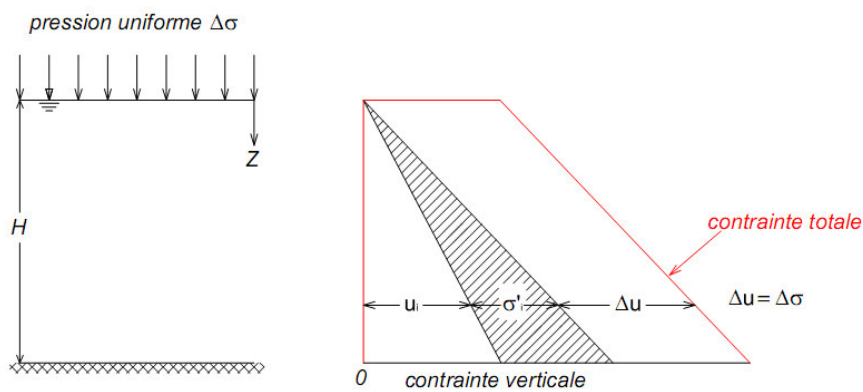


Figure II.3(b) : Changements de contraintes verticales pendant la consolidation immédiatement après l'application de $\Delta\sigma$.

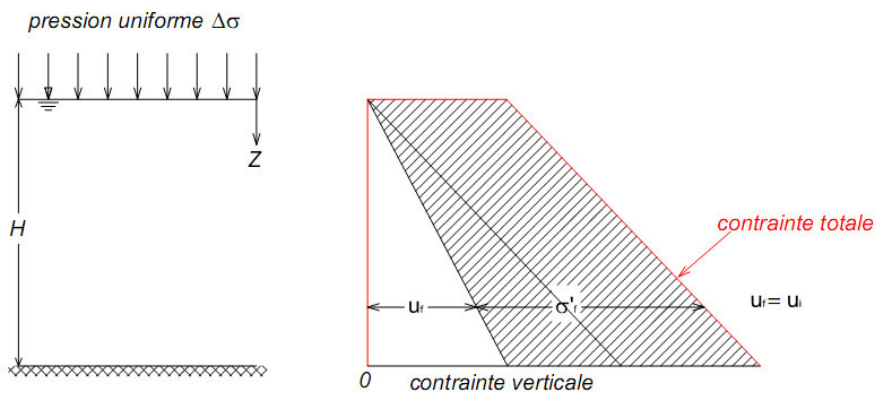


Figure II.3(c) : Changements de contraintes verticales pendant la consolidation long période après l'application de $\Delta\sigma$.

Facteurs affectant la vitesse de consolidation : La vitesse à laquelle le tassement se produit dépend de la vitesse à laquelle l'eau est expulsée du sol et cela dépend de plusieurs facteurs liés au sol.

Perméabilité : si la perméabilité du sol est très faible, le temps de dissipation sera très élevé, c'est-à-dire que la surpression interstitielle ne se dissipera que très lentement, et par conséquent, la vitesse de consolidation diminue.

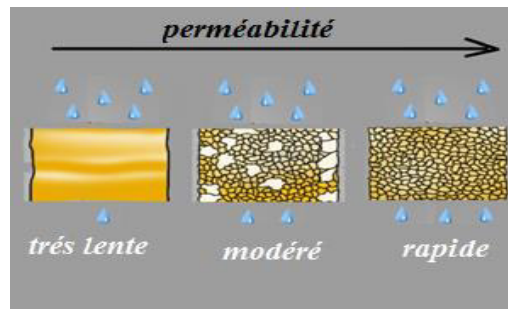


Figure II.4: La vitesse d'infiltration d'eau en fonction de la perméabilité.

Compressibilité : une forte compressibilité conduit à une grande diminution de l'espace vide du sol pour un changement de contrainte particulier. Cela signifie qu'un grand volume d'eau doit être expulsé du sol et cela prendra plus de temps. En conséquence, la vitesse de consolidation sera plus faible.

Épaisseur de la couche : une augmentation de l'épaisseur de la couche entraîne une augmentation de la longueur du trajet d'écoulement, et par suite la vitesse de consolidation diminue.

Conditions aux limites : les faces de drainage à travers lesquelles l'eau peut être expulsée a un effet significatif sur la vitesse de consolidation. Si des couches de drainage existent des deux côtés d'une couche de consolidation (doublement drainée, voir figure II.5 (a)), la vitesse d'expulsion de l'eau sera plus élevée que dans le cas où une seule couche de drainage est utilisée, (l'autre côté étant une couche imperméable- il y a une seule face de drainage, voir figure II.5 (b)).

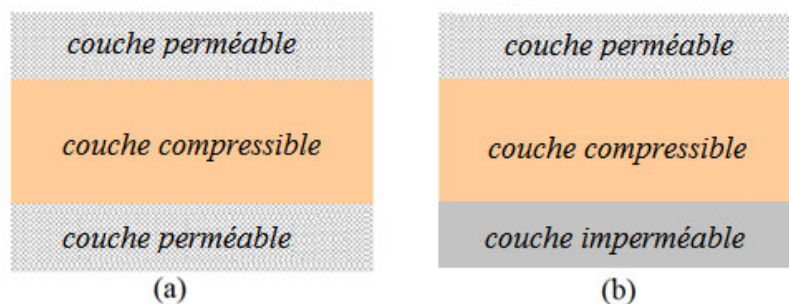


Figure II.5: Couche compressible saturée drainée, par ses deux faces (a), et par une seule face (b).

Par conséquent, une couche de sol qui est doublement drainée se consolide rapidement qu'une couche qui est drainée par une seule face.

Le tableau II.1 résume l'effet des différents facteurs sur le temps de l'écoulement d'eau, et sur la vitesse de consolidation.

Les facteurs		Le temps d'écoulement	La vitesse de consolidation
La perméabilité	↗	↘	↗
La compressibilité	↗	↗	↘
L'épaisseur de la couche du sol	↗	↗	↘
les faces de drainage	↗	↘	↗

Tableau II.1: Effet des différents facteurs sur le temps d'écoulement d'eau, et sur la vitesse de consolidation.

3.2. Les hypothèses de la théorie de Terzaghi :

Terzaghi (1925) a développé une solution complète de la consolidation dans un cas particulier simple, soit celui de la consolidation unidimensionnelle d'une couche mince soumise à une charge uniforme $\Delta\sigma$ de grande étendue. Cette solution, qui est celle utilisée pour l'analyse de tous les problèmes courants de fondations sur dépôts argileux, fait appel à neuf hypothèses principales :

L'hypothèse 1 : le sol est formé d'une couche compressible homogène, et comporte au moins une face drainante.

L'hypothèse 2 : Le sol est saturé et reste saturé pendant toute la période de consolidation, (il est donc composé de deux phases seulement : le squelette et l'eau interstitielle).

L'hypothèse 3 : L'eau et les particules solides sont incompressibles.

L'hypothèse 4 : Les déformations du squelette sont uniquement verticales (unidimensionnelles).

L'hypothèse 5 : L'écoulement de l'eau interstitielle (le drainage) est uniquement vertical (unidimensionnel), et il obéit à la loi de Darcy.

L'hypothèse 6 : Les caractéristiques du sol (module E , perméabilité k) sont constantes pendant le processus de consolidation.

L'hypothèse 7 : Il existe une relation linéaire entre les contraintes effectives et les variations de volume du sol.

L'hypothèse 8 : Le sol ne présente pas de viscosité structurale, ou consolidation secondaire.

L'hypothèse 9 : Les déformations du sol restent petites pendant la consolidation.

3.3.Limites de validité de ces hypothèses :

La plupart de ces hypothèses ne sont que des approximations assez grossières de la réalité. Avant d'aborder la formulation mathématique de l'équation de consolidation, Il convient d'examiner les limites de validité de ces hypothèses :

Hypothèse d'homogénéité du sol : En effet l'homogénéité des sols est toute relative dans les dépôts de sols naturels, et il est très rare de rencontrer une couche d'argile réellement homogène.

Hypothèse de saturation du sol : De manière très générale, il est rare que les sols soient parfaitement saturés d'eau, même si cette hypothèse est satisfaite, elle exclut le traitement des sols non-saturés qui sont à l'heure actuelle mal connus.

Hypothèse d'incompressibilité des éléments du sol : les sols naturels contiennent, en général, un certain pourcentage de gaz, provenant de la décomposition des matières organiques, et qui se présente quelquefois sous forme de bulles, mais plus souvent à l'état de dissolution dans l'eau, qui fait que la compressibilité du fluide (eau + gaz) qui remplit les pores du sol, n'est pas tout à fait négligeable.

Hypothèse de déformation unidimensionnelle : dans les dépôts de sols naturels, et sous l'action des ouvrages réels, l'état de déformation ne sera pas strictement uni-axial. Au contraire des déplacements horizontaux sont souvent présents.

Hypothèse d'un drainage unidimensionnel obéissant à la loi de Darcy : On doit évidemment noter que les conditions de géométrie, requises pour produire une condition d'écoulement unidimensionnel sont rarement réunies, et l'écoulement de l'eau suit les trois directions. On aura donc un écoulement plus rapide.

D'autre part, certains travaux ont conduit à suggérer l'existence d'un gradient hydraulique limite au-dessous duquel la loi de Darcy ne serait plus applicable (Hansbo, 1960).

Hypothèse de constance des caractéristiques du sol : les propriétés physiques et mécaniques varient d'un point à l'autre; elles dépendent, en particulier, de l'état des contraintes initiales, qui varie en fonction de la profondeur. Par ailleurs, il est maintenant bien établi que les propriétés du sol, varient en fonction de l'indice des vides, et donc au cours de la consolidation. De ce fait, une couche d'argile qui serait initialement homogène deviendra nécessairement hétérogène durant le processus de consolidation.

Hypothèse de linéarité entre les contraintes et les déformations volumétriques: cette hypothèse n'est pas vérifiée expérimentalement. On notera d'ailleurs que Terzaghi lui-même fait l'hypothèse contradictoire d'une relation linéaire entre les déformations volumétriques (l'indice des vides) et le logarithme de la contrainte effective et non de la contrainte effective elle-même dans son calcul de l'amplitude des tassements (Terzaghi et Peck, 1965).

Hypothèse d'absence de consolidation secondaire : dans certains types de sols, les tourbes par exemple, on ne peut pas négliger la compressibilité secondaire qui accompagne la consolidation.

Hypothèse des petites déformations : chacun sait que le comportement d'un sol est complexe et fort loin d'être élastique linéaire. En effet la non-linéarité, non-réversibilité, dilatance, effet du temps, anisotropie sont autant des caractéristiques de comportement du squelette des sols, auquel il faut adjoindre le couplage avec la pression interstitielle pour les sols fins saturés.

Bien que ces hypothèses simplifient et limitent fortement certains aspects de l'étude, l'analyse et la modélisation du comportement des sols, la théorie de Terzaghi reste une théorie de référence pour les calculs de consolidation, car elle contient les composantes principales du phénomène et représente correctement les phénomènes observés dans les sols saturés compressibles sous l'action des ouvrages et des constructions.

3.4. Formulation mathématique :

Une couche de sol en cours de la consolidation est représentée sur la figure II.6 (a). Le sol repose sur une base imperméable, dans ce cas, l'écoulement de l'eau se fait vers la limite de drainage à la surface supérieure du sol. Un élément volumique du sol de dimensions géométriques différentielles dx, dy et dz a été considéré pour la mise en équation du processus de consolidation (figure II.6 (b)).

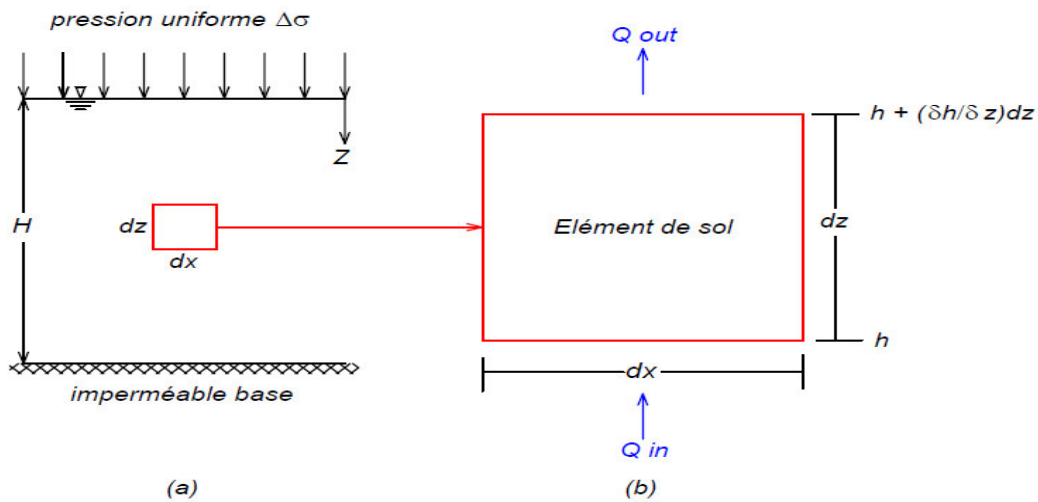


Figure II.6 : Couche compressible saturée chargée en surface et drainée sur une seule face.

L'équation de la consolidation unidimensionnelle de Terzaghi s'obtient en combinant les équations de conservation de la masse de l'eau et de la masse des particules solides, la loi de Darcy et la loi de compressibilité du squelette.

La loi de Darcy : en 1956, Darcy a constaté que, le débit Q est proportionnel au gradient hydraulique i , ce qui lui a permis d'écrire :

$$Q = k i A$$

Où :

k – Coefficient de perméabilité ou conductivité hydraulique.

A – Surface de l'élément différentiel situé dans le plan (x, y)

i – Gradient hydraulique de l'écoulement de l'eau dans le sol :

$$i = \frac{\partial h}{\partial z}$$

∂h : Perte de la charge hydraulique sur une longueur ∂z

Le taux d'écoulement d'eau entrant dans l'élément est indiqué par Q_{in} et le taux d'écoulement sortant d'élément est indiqué par Q_{out} . Au cours de la consolidation, le tassement sera une conséquence de la réduction des vides, suite à l'expulsion d'une partie de l'eau, contenue dans le sol. Le volume d'eau qui sort Q_{out} est supérieur au volume d'eau qui entre Q_{in} .

Le rapport des flux entrant et sortant de l'élément sera donné par l'équation de Darcy.

$$Q_{in} = k \frac{\partial h}{\partial z} dx dy = k \frac{\partial}{\partial z} (h + \frac{\partial h}{\partial z} dz) dx dy = k (\frac{\partial h}{\partial z} + \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} dz) dx dy$$

Loi de conservation de la masse :

La loi de conservation de la masse de l'eau pour l'écoulement transitoire qui se développe au cours de la consolidation exprime tout simplement que la quantité d'eau sortie d'un volume est égale à la variation de ce volume. Le taux de stockage de l'eau peut être exprimé par :

$$Q_{in} - Q_{out} = k \frac{\partial h}{\partial z} dx dy - k \left(\frac{\partial h}{\partial z} + \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} \cdot dz \right) dx dy = -k \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} \cdot dz dx dy$$

Le volume de l'élément de sol contenant des pores est :

$$V_p = dz dx dy n$$

Avec :

n – Porosité de sol.

Afin de garantir la continuité, le taux de variation du volume des pores $dz dx dy \frac{\partial n}{\partial t}$ doit être égal au taux de stockage de l'eau :

$$-k \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} \cdot dz dx dy = dz dx dy \frac{\partial n}{\partial t}$$

Après avoir simplifié cette égalité, nous obtenons :

$$-k \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} = \frac{\partial n}{\partial t} \text{ et } n = \frac{e}{e_0 + 1} \quad (II.1)$$

Ou :

e_0 – Indice des vides initiales (en place sous $\Delta\sigma'$).

Par conséquent, de l'équation (II.1) nous aurons :

$$-k \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{e}{e_0 + 1} \right) = \frac{1}{e_0 + 1} \cdot \frac{\partial e}{\partial t}$$

Loi de compressibilité du squelette :

En multipliant le membre droit de l'égalité précédente par $\frac{\partial \sigma'}{\partial \sigma'} = 1$, nous obtenons :

$$-k \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} = \frac{1}{e_0 + 1} \cdot \frac{\partial e}{\partial \sigma'} \cdot \frac{\partial \sigma'}{\partial t} \quad (II.2)$$

D'autre part, l'hypothèse de linéarité entre la contrainte effective verticale et l'indice des vides du sol (volume) :

$$\frac{\partial e}{\partial \sigma'} = a_v \quad (II.3)$$

Ou :

a_v – Coefficient de compressibilité du squelette.

En portant (II.3) dans (II.2) nous obtenons :

$$-k \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} = \frac{a_v}{e_0 + 1} \cdot \frac{\partial \sigma'}{\partial t} \quad (II.4)$$

Avec :

$$\sigma' = \sigma - u ;$$

$$h = \frac{u}{\gamma_w} + z ;$$

u – Pression interstitielle dans l'élément du sol considéré ;

γ_w – Poids volumique de l'eau interstitielle.

z – Cote de l'élément du sol considéré.

Comme σ est une constante, alors il nous est possible d'écrire :

$$\frac{\partial \sigma'}{\partial t} = - \frac{\partial u}{\partial t}$$

Alors, la relation (II.4) prendra la forme suivante :

$$-k \frac{\partial^2 \left(\frac{u}{\gamma_w} + z \right)}{\partial z^2} = \frac{a_v}{e_0 + 1} \cdot \left(- \frac{\partial u}{\partial t} \right)$$

La simplification de cette dernière nous donne :

$$\frac{k \cdot (e_0 + 1)}{a_v \cdot \gamma_w} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{\partial u}{\partial t} \quad (II.5)$$

Compte tenu de l'hypothèse 6, Terzaghi exprime le coefficient de consolidation c_v , comme propriété caractéristique du sol, par la relation :

$$c_v = \frac{k \cdot (e_0 + 1)}{a_v \cdot \gamma_w}$$

Finalement, l'équation aux dérivées partielles du processus de consolidation aura la forme suivante:

$$c_v \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{\partial u}{\partial t} \quad (II.6)$$

Type de sol	$c_v(m^2/s)$
sable	∞
Argile très plastique	$0,8 \times 10^{-8}$
Argile peu plastique	10^{-7}
Limon argileux	5×10^{-7}
Limon	5×10^{-6}
Tourbe	10^{-7}

Tableau II.2 : les valeurs du coefficient de consolidation c_v de quelques sols.

Les valeurs des coefficients de consolidation de la plupart des sols fins, et comme le montre le tableau ci-dessus, sont comprises entre 10^{-6} et 10^{-9} m^2/s .

L'équation (II.6) est celle développée par Terzaghi en 1943 pour décrire le phénomène de consolidation unidimensionnelle des sols. C'est une équation aux dérivées partielles du second ordre, parabolique, homogène, linéaire et à coefficients constants. Elle est dite d'évolution parce qu'elle modélise un phénomène non stationnaire.

La résolution de cette équation permet d'obtenir la distribution de la pression interstitielle $u(z, t)$ d'un point quelconque de la couche du sol, durant le processus de consolidation.

3.5. Autres théories de consolidation :

De nombreuses études ont été consacrées à la consolidation des sols fins, en modifiant toutes ou une partie des hypothèses ou paramètres de la théorie de la consolidation unidimensionnelle de Terzaghi. Dans la littérature technique, beaucoup de travaux de perfectionnement de la théorie de Terzaghi ont été publiés. Ce perfectionnement concerne l'introduction ou la prise en considération de ce qui suit :

- généralisation bidimensionnelle et tridimensionnelle ;
- répartition non uniforme des surpressions interstitielles initiales suivant l'épaisseur ;
- variation en fonction du temps des propriétés des sols ;
- perméabilité anisotrope du sol ;
- combinaison des phénomènes de consolidation et de compression secondaire ;
- autres lois de comportement mécanique du sol ;
- sol constitué d'une succession de couches de caractéristiques différentes ;
- chargement progressif et non instantané ;
- calcul en grandes déformations.

4- Résolution analytique de l'équation de Terzaghi :

La résolution de l'équation de la consolidation unidimensionnelle, en se servant des conditions initiales et des conditions aux limites, permet d'obtenir la pression interstitielle $u(z, t)$ en tout point et à tout instant de temps dans une couche pendant la consolidation, et par suite, l'évolution au cours du temps des contraintes effectives à l'intérieur de la couche de sol.

4.1. Conditions initiales et aux limites :

Cas d'une couche de sol doublement drainée : pour une couche compressible d'épaisseur $2H$, comprise entre deux couches drainantes (figure II.7(a)), à laquelle on

applique instantanément au temps $t = 0$, une charge uniformément répartie d'intensité q (figure II.7(b)).

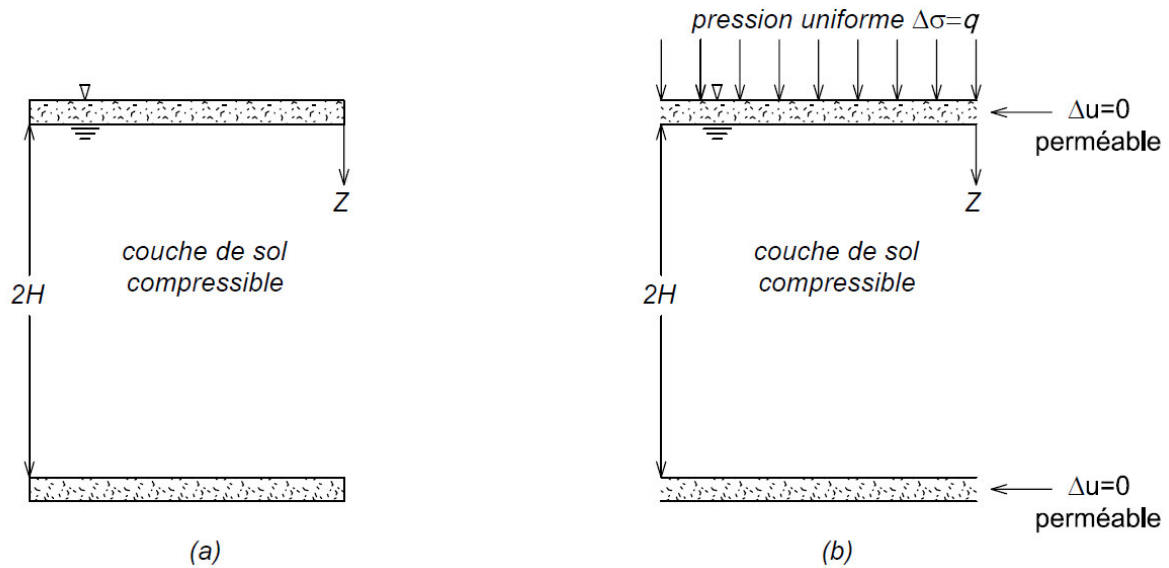


Figure II.7: Couche compressible saturée chargée en surface et drainée sur ses deux faces.

Avant le chargement de la couche de sol (figure II.7(a)), nous pouvons écrire :

$$\sigma = \sigma_i = \sigma'_i + u_i$$

Comme conditions initiales, nous avons (figure II.7(b)) :

$$\Delta\sigma = q$$

Où $\Delta\sigma$ est la surcharge appliquée sur la surface de la couche du sol à l'instant $t = 0$.

Ainsi, il est possible d'écrire :

$$\sigma = \sigma_i + q$$

En ce qui concerne les conditions aux limites, à tout instant t , la surpression interstitielle est nulle au niveau des surfaces limites de la couche, parce qu'elles sont drainantes ($\Delta u = 0$).

En s'intéressant aux conditions relatives à une surpression interstitielle $\Delta u(z, t)$, les conditions initiales et celles aux limites pour un écoulement unidimensionnel peuvent être résumés comme suit :

- **Conditions aux limites** (pour tout instant t)

$$\text{Pour } z = 0 : \Delta u(0, t) = 0$$

$$\text{Pour } z = 2H : \Delta u(2H, t) = 0$$

- **Conditions initiales** (pour $t = 0$) :

$$\text{Pour tout } z \neq 0 \text{ et } z \neq 2H : \Delta u(z, 0) = q$$

Si l'on voulait trouver directement la valeur de la pression interstitielle $u(z, t)$ et non celle de la surpression interstitielle $\Delta u(z, t)$, on devrait utiliser les conditions initiales et aux limites suivantes :

- **Conditions aux limites** (à tout instant t) :

Pour $z = 0$: $u(0, t) = 0$

Pour $z = 2H$: $u(2H, t) = \gamma_w \cdot 2H$

- **Conditions initiales** (pour $t = 0$):

Pour tout $z \neq 0$ et $z \neq 2H$: $u(z, 0) = \gamma_w \cdot z + q$

En s'intéressant aux conditions appliquées à la surpression interstitielle $\Delta u(z, t)$, ça revient à chercher une solution du problème linéaire ci-dessous, avec les conditions aux limites de type Dirichlet suivant :

Trouver $u : [0, 2H] \times [0, T] \in \mathbb{R}$, solution de :

$$\begin{cases} c_v \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{\partial u}{\partial t} \\ u(z, 0) = q \\ u(0, t) = u(2H, t) = 0 \quad \forall t \end{cases} \quad (\text{II.7})$$

Cas d'une couche de sol drainée sur une seule face : soit une couche de sol compressible, d'épaisseur H , indéfinie dans le sens horizontal, à laquelle on applique instantanément au temps $t = 0$ une charge $\Delta\sigma = q$ (figure II.8).

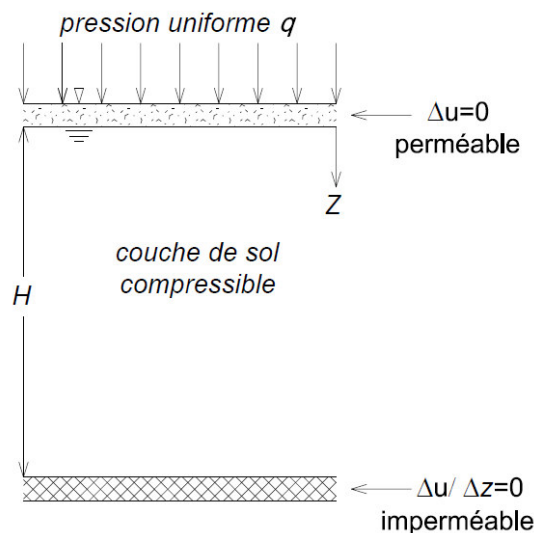


Figure II.8 : Couche compressible saturée chargée en surface et drainée sur une seule face.

Pour ce cas, à l'instant $t = 0$, les conditions initiales peuvent être écrites sous la forme suivante

$$u = u_i + q$$

$$\sigma' = \sigma'_i$$

$$\sigma = \sigma_i + q$$

Quant aux conditions aux limites, à tout instant t , la surpression interstitielle est nulle à la surface de la couche du sol ($\Delta u = 0$), et la vitesse de l'eau au niveau de la base imperméable est nulle ($\frac{\partial u}{\partial z} = 0$). En s'intéressant aux conditions appliquées à la surpression interstitielle $\Delta u(z, t)$, nous aurons :

- Conditions aux limites (à tout instant t)

Pour $z = 0$: $\Delta u(0, t) = 0$

Pour $z = H$: $\frac{\partial \Delta u(z, t)}{\partial z} = 0$

- Conditions initiales (pour $t = 0$) :

Pour tout $z \neq 0$ et $z \neq 2H$: $\Delta u(z, 0) = q$

Ainsi, nous aboutissons à notre but final étant la résolution d'un problème aux limites avec des conditions initiales et aux limites de type Dirichlet et Neumann, défini comme suit :

Trouver $u : [0, H] \times [0, T] \in \mathbb{R}$, solution de :

$$\left\{ \begin{array}{l} c_v \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{\partial u}{\partial t} \\ u(z, 0) = q \\ u(0, t) = 0 \text{ et } \frac{\partial u(z, t)}{\partial z} = 0, \text{ pour } z = H \quad \forall t \end{array} \right. \quad (\text{II. 8})$$

4.2. La méthode de séparation des variables :

Dans ce qui suit, nous allons chercher une solution analytique $u(z, t)$ non triviale pour l'équation (II.6). Selon la méthode de Fourier ou la méthode de séparation des variables, la solution de ce problème peut être écrite sous la forme d'un produit de deux fonctions, une fonction de z et la seconde fonction de t :

$$u(z, t) = Z(z) \cdot T(t)$$

$Z(z)$ et $T(t)$ sont des fonctions ayant au moins des dérivées premières et secondes continues.

Pour le cas d'une couche de sol doublement drainée, si nous substituons une telle solution dans l'équation de Terzaghi, nous obtenons :

$$c_v \frac{\partial^2 (Z(z)T(t))}{\partial z^2} = \frac{\partial (Z(z) T(t))}{\partial t}$$

Dans un but de simplification des calculs, nous écrivons l'équation précédente sous la forme suivante :

$$c_v T Z'' = Z T' \quad (II.9)$$

Ou :

Z'' – Dérivée seconde de Z par rapport à z .

T' – Première dérivée de T par rapport à t .

La relation (II.9) peut être écrite sous une autre forme :

$$\frac{Z''}{Z} = \frac{1}{c_v} \frac{T'}{T}$$

Le membre gauche de cette équation est une fonction de z seulement, alors que le membre droit est une fonction seulement de t . Cette égalité ne peut être vérifiée que si la valeur de chaque côté de l'égalité est une constante, par conséquent, il est possible d'écrire :

$$\frac{Z''}{Z} = \frac{1}{c_v} \frac{T'}{T} = \lambda \quad (II.10)$$

Ou λ est une constante à déterminer.

Dans ce cas la relation (II.10) peut être remplacée par deux équations ordinaires homogènes :

$$Z'' - \lambda Z = 0$$

$$T' - \lambda c_v T = 0$$

Les expressions des conditions aux limites pour ce problème prennent les formes suivantes :

Pour tout $t > 0$:

$$u(0, t) = Z(0) T(t) = 0$$

$$u(2H, t) = Z(2H) T(t) = 0$$

D'où :

$$Z(0) = 0 \quad \text{ou} \quad T(t) = 0$$

Comme la solution cherchée $u(z, t) = Z(z)T(t)$ ne doit être triviale, nous pouvons supposer alors que $T(t) \neq 0$ pour au moins un $t = t_0$:

$$Z(0) T(t_0) = 0 \quad \text{ou} \quad Z(0) = 0$$

$$Z(2H) T(t_0) = 0 \quad \text{ou} \quad Z(2H) = 0$$

En fin la résolution du problème revient à résoudre les équations différentielles ordinaires homogènes ci-dessous avec des conditions aux limites pour une et initiales pour l'autre :

$$Z'' - \lambda Z = 0; Z(0) = 0 \quad \text{et} \quad Z(2H) = 0 \quad (II.11)$$

$$T' - \lambda c_V T = 0 \quad \text{Pour } t > 0 \quad (\text{II.12})$$

Dans ce qui suit nous allons déterminer les expressions représentant les solutions analytiques de ces équations.

Résolution de l'équation différentielle (II.12) :

Une seule intégration de cette équation par rapport au temps permet d'aboutir à la solution générale suivante :

$$T(t) = k e^{\lambda c_V t} \quad (\text{II.13})$$

Avec k est une constante d'intégration.

Résolution de l'équation différentielle (II.11):

Comme cette équation différentielle homogène et à coefficients constants est du second ordre, alors sa peut être écrite sous la forme suivante :

$$Z(z) = e^{rz} \quad (\text{II.14})$$

Avec :

r –Coefficient réel.

En portant cette fonction et sa dérivée seconde dans l'équation différentielle ci-dessus, nous obtenons après simplification l'équation algébrique suivante : $r^2 - \lambda = 0$. Cette équation s'appelle équation caractéristique de l'équation différentielle.

Si $\lambda > 0$, il est possible d'écrire :

$$\lambda = \alpha^2 \text{ avec } \alpha > 0,$$

En portant les racines de l'équation caractéristique dans (II.14) et en superposant les solutions obtenues, nous obtenons finalement la solution cherchée :

$$Z(z) = A e^{\alpha z} + B e^{-\alpha z}$$

Ou :

A et B –constantes d'intégration qui peuvent être déterminées en utilisant les conditions aux limites :

$$Z(0) = 0 ; Z(2H) = 0$$

La première condition permet d'avoir :

$$A = -B$$

La seconde condition exige que :

$$A e^{4\alpha H} + B = 0$$

Puisque $H \neq 0$ et $\alpha \neq 0$, alors :

$$A = B = 0$$

D'où, nous aurons ;

$$Z(z) = 0$$

Ce qui nous donne le résultat final suivant :

$$u(z, t) = 0.$$

Dans le cas où $\lambda = 0$, l'intégration de l'équation $Z'' = 0$ nous donne comme résultat :

$$Z(z) = Az + B$$

Où : A et B – constantes à déterminer dont les valeurs peuvent être déterminées au moyen des conditions aux limites :

$$Z(0) = 0 ; Z(2H) = 0$$

D'où :

$$B = 0 \text{ et } A(2H) = 0$$

Puisque $H \neq 0$, il résulte que :

$$A = B = 0; Z(z) = 0 \text{ et par suite } u(z, t) = 0.$$

Pour le troisième cas, si $\lambda < 0$, alors nous pouvons écrire :

$$\lambda = -\alpha^2 ; \alpha > 0$$

L'équation caractéristique sera donc :

$$r^2 + \alpha^2 = 0$$

En portant les racines complexes de cette équation algébrique dans (II.14), nous obtenons une solution générale sous la forme suivante :

$$Z(z) = A \cos(\alpha z) + B \sin(\alpha z)$$

A et B sont des constantes d'intégration qui peuvent être obtenues en appliquant les conditions aux limites comme suit :

$$Z(0) = 0 ; Z(2H) = 0$$

Ce qui nous donne :

$$A = 0 \text{ et } B \sin(2\alpha H) = 0$$

Pour cette dernière égalité, il est possible de considérer deux cas possibles :

Le cas où $B = 0$, Ceci implique que :

$$u(z, t) = 0.$$

Et le second cas où $B \neq 0$ qui se traduit par :

$$\sin(2\alpha H) = 0$$

D'où il s'ensuit que :

$$\alpha = \frac{n\pi}{2H} ; n = 1, 2, 3, \dots \infty$$

Et ainsi, nous obtenons finalement :

$$Z_n(z) = B_n \sin\left(\frac{n\pi}{2H} z\right) \quad \text{avec } n = 1, 2, 3, \dots \quad (\text{II.15})$$

Puisque $\lambda = -\alpha^2$, alors nous aurons :

$$\lambda_n = -\left(\frac{n\pi}{2H}\right)^2$$

En remplaçant dans II.13 on trouve :

$$T_n(t) = k e^{-\left(\frac{n\pi}{2H}\right)^2 c_v t} \quad \text{avec } n = 1, 2, 3, \dots \quad (\text{II.16})$$

D'où :

$$u_n(z, t) = Z_n(z) \cdot T_n(t) = \left[B_n \sin\left(\frac{n\pi}{2H} z\right) \right] \cdot \left[k e^{-\left(\frac{n\pi}{2H}\right)^2 c_v t} \right]$$

Ou sous une autre forme :

$$u_n(z, t) = a_n \sin\left(\frac{n\pi}{2H} z\right) e^{-\left(\frac{n\pi}{2H}\right)^2 c_v t}; \quad a_n = B_n \cdot k$$

Enfin, la solution analytique générale de l'équation de consolidation doit être égale à la superposition de l'ensemble des solutions obtenues ci-dessus :

$$u(z, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(z, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\left(\frac{n\pi}{2H} z\right) \exp\left(-c_v \left(\frac{n\pi}{2H}\right)^2 t\right)$$

Afin de déterminer le coefficient a_n , nous allons nous servir de la condition initiale suivante :

$$u(z, 0) = q$$

L'application de cette condition initiale à la solution générale obtenue ci-dessus nous permet d'obtenir l'expression de q suivante :

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\left(\frac{n\pi}{2H} z\right) = q$$

Cette somme est une série de Fourier impaire, alors il résulte que :

$$n = 2m + 1, \quad m = 0, 1, 2, \dots, \infty.$$

Dans ce cas, coefficient a_n peut être exprimé par :

$$a_n = \frac{1}{H} \int_0^{2H} q \sin\left(\frac{(2m+1)\pi}{2H} z\right) dz$$

Pour une période π , nous écrivons :

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} q \sin\left(\frac{(2m+1)\pi}{\pi} z\right) dz = a_n = \frac{4q}{(2m+1)\pi};$$

Alors, la solution analytique finale du problème a la forme suivante :

$$u(z, t) = \frac{4q}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)} \sin\left(\frac{(2m+1)\pi}{2H} z\right) \exp\left(-c_v \left(\frac{(2m+1)\pi}{2H}\right)^2 t\right) \quad (\text{II.17})$$

Cas d'une couche de sol drainée sur une seule face : nous allons suivre les mêmes démarches utilisées pour le cas des deux faces drainantes, en utilisant bien sur d'autres conditions aux limites :

Pour tout $t > 0$ nous avons :

$$u(0, t) = Z(0) T(t) = 0$$

$$\frac{\partial u(z, t)}{\partial z} = T(t) \frac{\partial Z(z)}{\partial z} = 0 \text{ si } z = H$$

Ce qui implique que :

$$Z(0) = 0 \text{ ou } T(t) = 0 ;$$

$$T(t) = 0 \text{ ou } \frac{\partial Z(z)}{\partial z} = 0.$$

Comme la solution doit être non triviale, alors $T(t)$ doit être différente de zéro, pour au moins un $t = t_0$. Et par conséquent nous pouvons écrire :

$$Z(0) = 0$$

$$\frac{\partial Z(z)}{\partial z} = 0 \text{ si } z = H$$

Cela veut dire qu'il nous faut résoudre les équations différentielles ordinaires suivantes :

$$Z'' - \lambda Z = 0 \text{ avec } Z(0) = 0 \text{ et } \frac{\partial Z(z)}{\partial z} = 0 \text{ pour } z = H$$

$$T' - \lambda c_v T = 0 ; t > 0$$

Où λ est une constante.

Pour la première équation du second ordre :

En suivant les mêmes démarches utilisées précédemment nous obtenons pour le cas de :

1) $\lambda > 0$:

$$Z(z) = A e^{\alpha z} + B e^{-\alpha z}$$

A et B sont deux constantes d'intégration. En se servant des conditions aux limites :

$$Z(0) = 0, \text{ et } \frac{\partial Z(z)}{\partial z} = 0, \text{ pour } z = H$$

Nous obtenons :

$$u(z, t) = 0$$

2) $\lambda = 0$:

$Z'' = 0$ Implique que : $Z(z) = Az + B$

A et B – constantes d'intégration.

L'utilisation des conditions aux limites : $Z(0) = 0$ et $\frac{\partial Z(z)}{\partial z} = 0$, pour $z = H$, nous donne :

$$u(z, t) = 0.$$

3) $\lambda < 0$:

$$Z(z) = A \cos(\alpha z) + B \sin(\alpha z)$$

Avec A et B sont les constantes d'intégration qui peuvent être déterminées en appliquant les conditions aux limites suivantes :

$$Z(0) = 0 \text{ et } \frac{\partial Z(z)}{\partial z} = 0, \text{ pour } z = H$$

Ces conditions nous permettent d'obtenir les résultats suivants :

$$A = 0; u(z, t) = 0 \text{ et } \alpha = \frac{n\pi}{2H}; n = 1, 2, 3, \dots$$

Et Finalement on retrouve la même solution obtenu précédemment :

$$u(z, t) = \frac{4q}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)} \sin\left(\frac{(2m+1)\pi}{2H} z\right) \exp\left(-c_v \left(\frac{(2m+1)\pi}{2H}\right)^2 t\right) \quad (II.18)$$

4.3. Différence entre drainage simple et double :

La figure II.9(a) montre la direction de l'écoulement pendant le phénomène de consolidation d'une couche doublement drainée, on voit que par raison de symétrie, tout se passe comme dans le cas d'une couche simplement drainée (voir figure II.9 (b)).

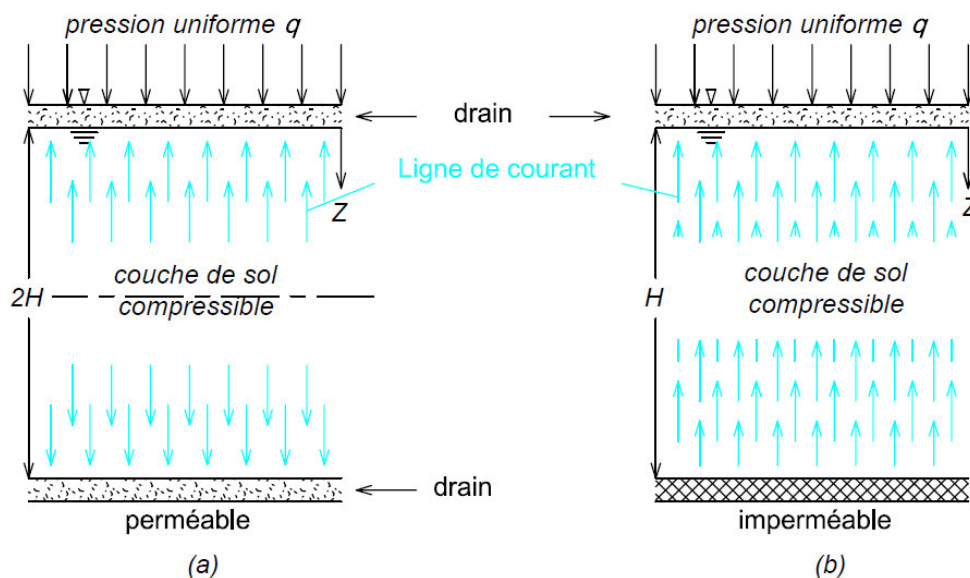


Figure II.9 : la direction de l'écoulement vers les drains, cas d'un drainage simple et double.

Pour la couche doublement drainée, la moitié supérieure de la couche compressible s'évacue par le drain supérieur et la moitié inférieure par le drain de bas. C'est-à-dire dans les deux cas, le chemin de drainage est de longueur H .

Et nous avons démontré par le calcul que la solution obtenue pour le cas ayant deux faces drainantes est la même que celle obtenue pour le cas d'une couche simplement drainante, en considérant seulement la demi-épaisseur de la couche. En effet, comme le montre la figure II.10, la ligne médiane de la couche correspond à une vitesse d'écoulement nulle. Autrement dit, nous pouvons considérer cette ligne médiane comme une ligne qui correspond à une face non drainante.

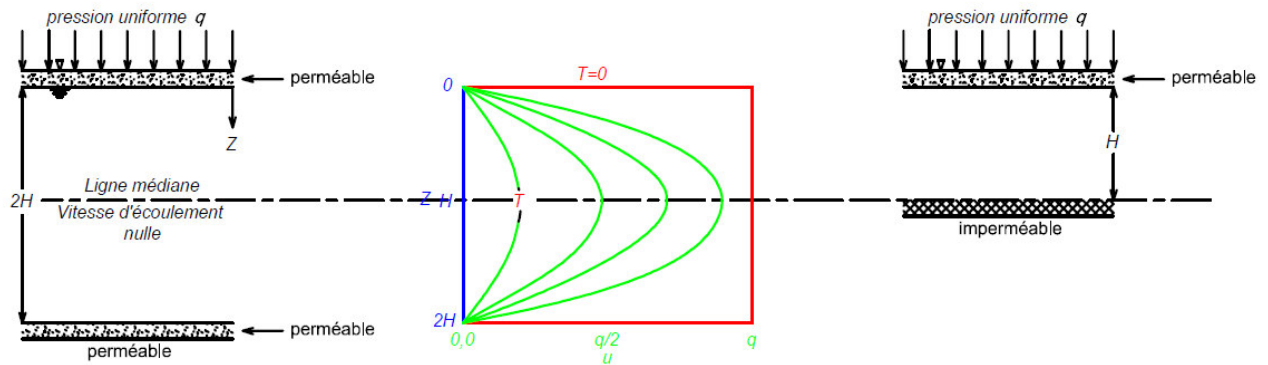


Figure II.10 : solution obtenue pour un drainage simple et double.

Alors, les solutions trouvées précédemment (II.17) et (II.18) peuvent être généralisées en définissant la distance de drainage d (c'est le plus long parcours vertical qu'une particule d'eau que doit parcourir pour atteindre une frontière perméable) comme étant égale à l'épaisseur ou à la demi-épaisseur selon que la couche est simplement ou doublement drainante :

$$u(z, t) = \frac{4q}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m + 1)} \sin\left(\frac{(2m + 1)\pi}{2d} z\right) \exp\left(-c_v \left(\frac{(2m + 1)\pi}{2d}\right)^2 t\right) \quad (II.19)$$

4.4. La méthode de transformation de Fourier :

Cette partie de ce chapitre sera consacrée à la résolution de l'équation aux dérivées partielles de consolidation au moyen de la méthode de la transformée de Fourier, schématisé comme le montre la figure II.11.

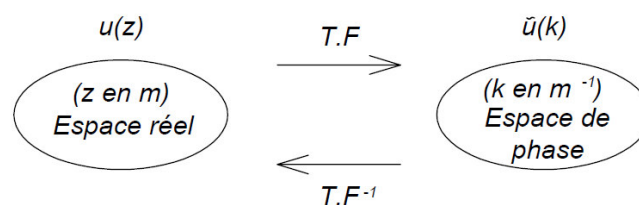


Figure II.11 : L'idée de base de la transformation de Fourier.

L'idée est simple, dans l'espace réel le problème se modélise par l'équation de consolidation, nous appliquons alors une transformation de Fourier pour passer à un espace de phase et ainsi l'équation initiale devient plus simple.

Alors la transformée de Fourier de l'équation aux dérivées partielles de consolidation, revient à l'appliquer à chaque terme ou membre de cette équation :

$$\mathcal{F} \left(c_v \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) = \mathcal{F} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right) \quad (II.20)$$

$$\mathcal{F} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial u}{\partial t} e^{-ikz} dz$$

La permutation entre l'opération de dérivation et celle d'intégration permet d'écrire :

$$\mathcal{F} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} u e^{-ikz} dz \right) = \frac{\partial}{\partial t} (\mathcal{F}(u))$$

D'où :

$$\mathcal{F} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right) = \frac{\partial \tilde{u}}{\partial t}$$

D'un autre côté, selon les propriétés des transformées de Fourier, nous pouvons écrire :

$$\mathcal{F} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) = -k^2 \tilde{u}$$

Ainsi l'application de la transformée de Fourier à notre équation de consolidation :

$$c_v \mathcal{F} \left(\frac{\partial^2 u(z, t)}{\partial z^2} \right) = \mathcal{F} \left(\frac{\partial u(z, t)}{\partial t} \right)$$

à permet la transformer à une équation différentielle du premier ordre par rapport au temps :

$$-c_v k^2 \tilde{u}(k, t) = \frac{\partial \tilde{u}(k, t)}{\partial t} \quad (II.21)$$

Cette dernière qui dépend du paramètre de Fourier est plus simple à résoudre. Son intégration a permis l'expression suivante en fonction du paramètre de Fourier :

$$\tilde{u}(k, t) = A(k) e^{-c_v k^2 t} \quad (II.22)$$

Avec :

$A(k) = \tilde{u}(k, t = 0)$ – Constante d'intégration.

Le résultat obtenu est défini dans un espace de phase (l'espace de k). Pour revenir à l'espace réel nous devons appliquer une transformation de Fourier inverse comme suit.

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{-1}(\tilde{u}(k, t)) &= \mathcal{F}^{-1}(\tilde{u}(k, t = 0) e^{-c_v k^2 t}) \\ u(z, t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathcal{F}^{-1}[\tilde{u}(k, t = 0)] \otimes \mathcal{F}^{-1}[e^{-c_v k^2 t}]; \end{aligned}$$

D'où, nous aurons :

$$u(z, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} u(z, t = 0) \otimes \mathcal{F}^{-1}[e^{-c_v k^2 t}];$$

Il nous reste à calculer $\mathcal{F}^{-1}[e^{-c_v k^2 t}]$:

$$\mathcal{F}^{-1}[e^{-c_v k^2 t}] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-c_v t k^2 + i z k} dk$$

Il s'agit ici d'une fameuse intégrale qui est celle de Gauss :

L'intégrale de Gauss :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2 + bx} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{\frac{b^2}{4a}}$$

Alors, en appliquant cette fameuse intégrale, nous obtenons :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-c_v t k^2 + i z k} dk = \sqrt{\frac{\pi}{c_v t}} e^{\frac{(iz)^2}{4c_v t}}$$

Par conséquent :

$$\mathcal{F}^{-1}[e^{-c_v k^2 t}] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\frac{\pi}{c_v t}} e^{\frac{-z^2}{4c_v t}} = \frac{1}{\sqrt{2c_v t}} e^{\frac{-z^2}{4c_v t}}$$

Et finalement nous aurons :

$$u(z, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} u(z, t = 0) \otimes \frac{1}{\sqrt{2c_v t}} e^{\frac{-z^2}{4c_v t}}$$

Dans ce qui suit, nous allons nous débarrasser du produit de convolution :

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} u(z, t = 0) \otimes \frac{1}{2\sqrt{\pi c_v t}} e^{\frac{-z^2}{4c_v t}} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} u(y, t = 0) \frac{1}{\sqrt{2c_v t}} e^{\frac{-(z-y)^2}{4c_v t}} dy$$

Alors notre solution est :

$$u(z, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(y, t = 0) \frac{1}{2\sqrt{\pi c_v t}} e^{\frac{-(z-y)^2}{4c_v t}} dy$$

Puisque $u(y, t = 0) = q \quad \forall y$, cette dernière aura la forme suivante :

$$u(z, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} q \frac{1}{2\sqrt{\pi c_v t}} e^{\frac{-(z-y)^2}{4c_v t}} dy$$

Ou encore

$$u(z, t) = \frac{q}{2\sqrt{\pi c_v t}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{-(z-y)^2}{4c_v t}} dy \quad (II.23)$$

Application 1 :

On cherche à calculer la consolidation d'une couche de sol saturé de 8 m d'épaisseur ayant une base perméable et une surface supérieure drainante, sur laquelle on applique instantanément une pression uniformément répartie $q = 100 \text{ kPa}$. La figure II.12 présente le problème à étudié.

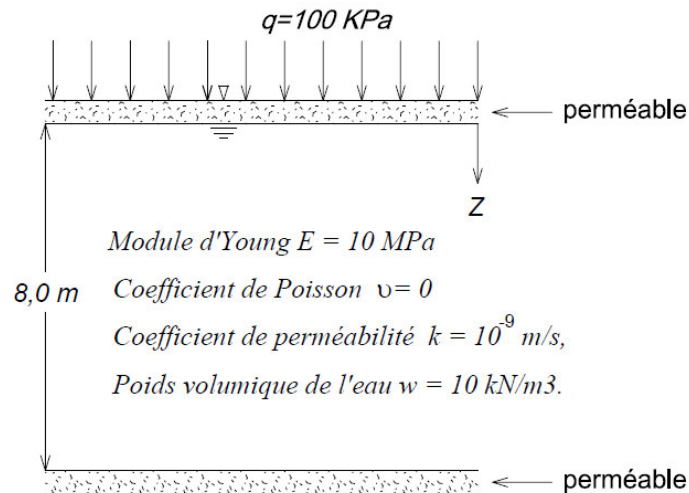


Figure II.12 : Le problème à étudié.

Les propriétés mécaniques du sol élastique isotrope sont les suivantes :

- Module d'Young $E = 10 \text{ MPa}$,
- Coefficient de Poisson $\nu = 0$,
- Coefficient de perméabilité $k = 10^{-9} \text{ m/s}$,
- Poids volumique de l'eau $\gamma_w = 10 \text{ kN/m}^3$.

Ces données correspondent à un coefficient de consolidation :

$$c_v = \frac{k}{\gamma_w \left[\frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{E(1+\nu)} \right]} = 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$$

Donc, on a :

- $H = 8 \text{ m}$ (la profondeur de la couche de sol).
- $q = 100 \text{ kPa}$ (la surcharge)
- $T = 3 \times 10^7 \text{ s}$ (une année environ).
- $c_v : 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ (coefficient de consolidation).
- $M = 100$ (nombre de discrétisation en temps).
- $N = 10$ (nombre de discrétisation en espace).

Nous allons présenter les résultats d'un calcul manuel à l'instant $t = 0 \text{ s}$ de $u(z, t)$:

$$u(z, t) = \frac{4q}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)} \sin\left(\frac{(2m+1)\pi}{2d} z\right) \exp\left(-c_v \left(\frac{(2m+1)\pi}{2d}\right)^2 t\right)$$

Les résultats suivants correspondent à la prise en considération de deux termes seulement de cette somme :

Pour $z=0m$: $u = 00 \text{ kPa}$

Pour $z=1m$: $u = 111,46 \text{ kPa}$

Pour $z=2m$: $u = 102,03 \text{ kPa}$

Pour $z=3m$: $u = 91,64 \text{ kPa}$

Pour $z=4m$: $u = 110,34 \text{ kPa}$

Pour $z=5m$: $u = 91,64 \text{ kPa}$

Pour $z=6m$: $u = 102,03 \text{ kPa}$

Pour $z=7m$: $u = 111,46 \text{ kPa}$

Pour $z=8m$: $u = 4,70 \text{ kPa}$

Pour augmenter la précision des résultats, il est nécessaire de prendre en considération dans un calcul, nombre suffisant de termes. Si le nombre de termes de la somme à prendre en considération est suffisamment grand, le calcul manuel devient très difficile et nécessite beaucoup de temps. Dans ce cas, il est préférable et plus facile d'utiliser des programmes. A cet effet, nous avons élaboré un environnement MATLAB, permettant de prendre dans les calculs un nombre de termes de la somme aussi grand que nous voulons. Le texte de ce programme est présenté ci-dessous :

Function $[u]=\text{solexact}(T,N, M,cv,H,n,q)$

$dt=T/M$;

$t=0 : dt : T$;

$dz=H/N$;

$z=[0 : dt : T]$;

$A=0$;

for $i=0 : 1 : n$

$I=((2 *i)+1)*pi /H$;

$A=A+(1 /(2*i+1)). *sin(I.*z). *exp((-cv). *(I^2). *t)$;

end

$u=(4*q/pi). *A$

plot(u,z)

xlabel('u')

```
ylabel('z')
title('solution analytique')
end
```

```
solexact.m x conso.m x Untitled* x +
1 function [u]=solexact(T,N,M,cv,H,n,q)
2 dt=T/M;
3 t=0:dt:T;
4 dz=H/N;
5 z=[0:dz:H]';
6 A=0;
7 for i=0:1:n
8 I=((2*i)+1)*pi/(H);
9 A=A+(1/(2*i+1)).*sin(I.*z).*exp((-cv).*(I^2).*t);
10 end
11 u=(4*q/pi).*A
12 plot(u,z)
13 xlabel('u')
14 ylabel('z')
15 title('Solution analitique')
16 end
```

Figure II.13 : Le code MATLAB, pour le calcul de la solution analytique.

Une partie des résultats numériques obtenus par ce programme est présentée ci-dessous :

$u =$

Columns 1 through 12

```
0.00000 0.00000 0.00000 0.00000 0.00000 0.00000 0.00000 0.00000 0.00000 0.00000 0.00000 0.00000
99.1662 69.8300 53.4791 44.9015 39.4420 35.5801 32.6566 30.3305 28.4043 26.7560 25.3067 24.0048
99.8309 96.1133 85.5873 76.6960 69.8264 64.4169 60.0182 56.3245 53.1316 50.3032 47.7479 45.4039
100.1190 99.8054 97.1540 92.6332 87.8364 83.2919 79.0934 75.2149 71.6093 68.2349 65.0592 62.0578
100.2678 99.9964 99.6501 98.2581 95.9187 92.9745 89.6898 86.2408 82.7414 79.2641 75.8543 72.5395
100.3152 100.0000 99.9479 99.4262 98.0353 95.8157 92.9970 89.8076 86.4222 82.9617 79.5061 76.1064
100.2678 99.9964 99.6501 98.2581 95.9187 92.9745 89.6898 86.2408 82.7414 79.2641 75.8543 72.5395
100.1190 99.8054 97.1540 92.6332 87.8364 83.2919 79.0934 75.2149 71.6093 68.2349 65.0592 62.0578
99.8309 96.1133 85.5873 76.6960 69.8264 64.4169 60.0182 56.3245 53.1316 50.3032 47.7479 45.4039
99.1662 69.8300 53.4791 44.9015 39.4420 35.5801 32.6566 30.3305 28.4043 26.7560 25.3067 24.0048
0.00000 0.00000 0.00000 0.00000 0.00000 0.00000 0.00000 0.00000 0.00000 0.00000 0.00000 0.00000
```

Columns 13 through 24

```
0.00000 0.00000 0.00000 0.00000 0.00000 0.00000 0.00000 0.00000 0.00000 0.00000 0.00000 0.00000
22.8155 21.7154 20.6884 19.7233 18.8119 17.9485 17.1285 16.3485 15.6056 14.8977 14.2225 13.5785
43.2289 41.1939 39.2784 37.4676 35.7505 34.1190 32.5664 31.0875 29.6777 28.3331 27.0502 25.8260
59.2125 56.5093 53.9373 51.4874 49.1521 46.9250 44.8003 42.7727 40.8375 38.9903 37.2270 35.5435
69.3356 66.2507 63.2884 60.4488 57.7302 55.1296 52.6434 50.2675 47.9976 45.8295 43.7587 41.7811
72.7941 69.5879 66.4977 63.5282 60.6804 57.9531 55.3436 52.8485 50.4638 48.1854 46.0089 43.9302
69.3356 66.2507 63.2884 60.4488 57.7302 55.1296 52.6434 50.2675 47.9976 45.8295 43.7587 41.7811
59.2125 56.5093 53.9373 51.4874 49.1521 46.9250 44.8003 42.7727 40.8375 38.9903 37.2270 35.5435
43.2289 41.1939 39.2784 37.4676 35.7505 34.1190 32.5664 31.0875 29.6777 28.3331 27.0502 25.8260
22.8155 21.7154 20.6884 19.7233 18.8119 17.9485 17.1285 16.3485 15.6056 14.8977 14.2225 13.5785
0.00000 0.00000 0.00000 0.00000 0.00000 0.00000 0.00000 0.00000 0.00000 0.00000 0.00000 0.00000
```

Columns 97 through 101

0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.4635	0.4425	0.4225	0.4034	0.3852
0.8816	0.8418	0.8037	0.7674	0.7327
1.2135	1.1586	1.1062	1.0562	1.0085
1.4265	1.3620	1.3004	1.2416	1.1855
1.4999	1.4321	1.3674	1.3055	1.2465
1.4265	1.3620	1.3004	1.2416	1.1855
1.2135	1.1586	1.1062	1.0562	1.0085
0.8816	0.8418	0.8037	0.7674	0.7327
0.4635	0.4425	0.4225	0.4034	0.3852
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

La présentation graphique tridimensionnelle de la solution $u(z, t)$ est présentée à la figure II.14 ci-dessous.

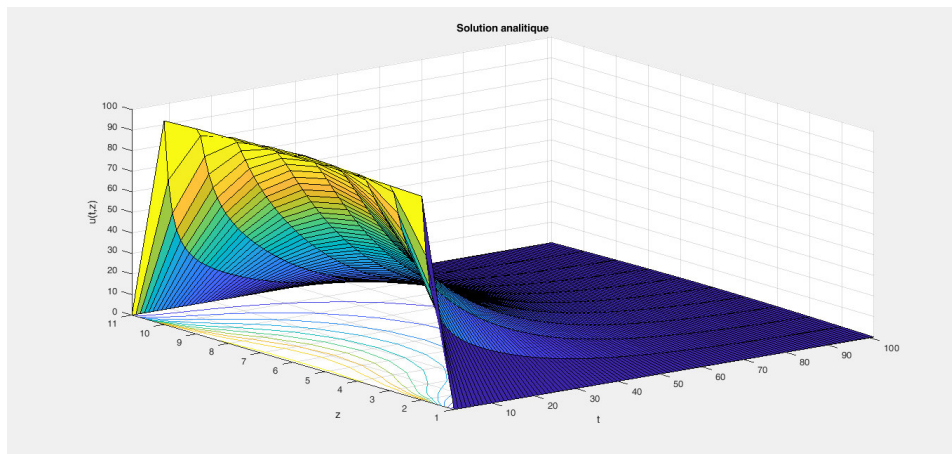


Figure II.14: Représentation graphique tridimensionnelle de la solution analytique.

La présentation graphique des isochrones pour 100 valeurs de t est illustrée par la figure II.15 :

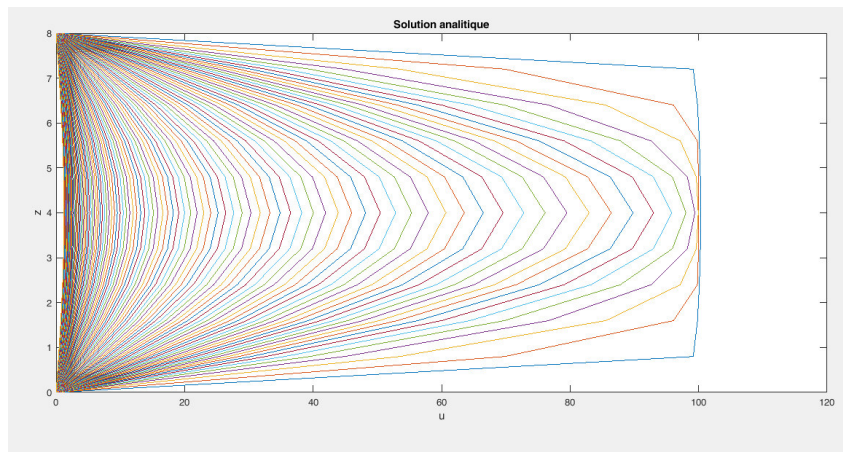


Figure II.15: Représentation graphique des isochrones.

*Chapitre III : Analyse
numérique du problème.*

1- Introduction :

La plupart des phénomènes physiques, chimiques ou biologiques issus de la technologie moderne sont régis par des systèmes complexes d'équations aux dérivées partielles. L'étude mathématique de ces systèmes d'équations n'est pas une tâche facile et des fois elle est même impossible. D'où l'intérêt de la simulation ou l'approximation numérique qui se présente comme un remède qui remplace très souvent l'étude analytique compliquée qui ne permet d'aboutir à la solution que pour des problèmes mathématiques et des conditions aux limites simples ainsi que la simulation expérimentale qui est plus coûteuse.

Les équations aux dérivées partielles peuvent être répertoriées par type. Ainsi, les équations de type elliptiques décrivent les phénomènes de diffusion stationnaire, les équations de type parabolique décrivent les phénomènes de diffusion évolutif et les équations de type hyperbolique décrivent les phénomènes de transport à vitesse finie.

Les modèles mathématiques des phénomènes physiques réels sont souvent représentés par des équations aux dérivées partielles de façon générale non-linéaires dont les solutions analytiques sont généralement très difficiles ou impossible à obtenir. Il est alors nécessaire de faire recours à l'utilisation des méthodes numériques de discrétisation telles que la méthode des éléments finis, des différences finies, des volumes finis, les méthodes spectrales et variationnelles ainsi que des méthodes numériques de l'analyse mathématique. De telles méthodes permettent de transformer le modèle mathématique continu à un modèle discret représenté par des équations algébriques dont la solution devient facile à obtenir en utilisant les outils de l'algèbre linéaire. Dans ce mémoire, nous nous intéressons à l'étude analytique et l'approximation numérique par la méthode de différence finies du problème de consolidation des sols.

Le processus de discrétisation de l'équation de consolidation par exemple est schématisé par la figure III.1

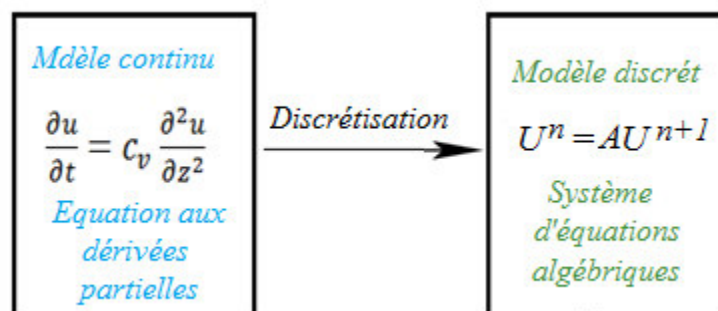


Figure III.1: principe des méthodes de discrétisation.

Dans ce qui suit nous allons nous servir de la méthode et techniques des différences finies afin d'obtenir une solution approximative de notre problème.

2- Principe de la méthode des différences finies :

L'objectif de toutes les méthodes de résolution numérique des équations aux dérivées partielles est l'obtention de valeurs numériques discrètes qui approchent la solution analytique

La résolution d'un problème par la méthode des différences finies se déroule selon les étapes suivantes :

- 1- Définir un maillage couvrant le domaine spatio-temporel et sa frontière (discrétisation de domaine).
- 2- En tout nœud du domaine considéré, exprimer les dérivées à l'aide des différences finies (Approximation des dérivées par des différences finies).
- 3- Exprimer les valeurs de la fonction en tout point sur la frontière en tenant compte des conditions initiales et aux limites.
- 4- Obtention du système d'équations algébriques du problème.
- 5- Vérification de la convergence.

Le système des équations algébriques obtenu peut être résolu en utilisant une des méthodes de l'algèbre linéaire à savoir une méthode directe comme celle de Gauss ou Cholesky, ou une méthode itérative comme celle de Jacobi ou Gauss-Seidel.

2.1. Elaboration d'un maillage:

Afin d'appliquer la méthode des différences finies, et pour discrétiser le domaine spatio-temporel continu $\Omega = [0, H] \times [0, T]$, nous introduisons un pas d'espace $\Delta z > 0$ et un pas de temps $\Delta t > 0$.

Le domaine spatial $[0, H]$ doit être divisé en N intervalles de longueur $\Delta z = H/N$, et le domaine temporel $[0, T]$ est aussi subdivisé en M intervalles de pas $\Delta t = T/M$. Le domaine Ω est donc découpé suivant un maillage où chaque point $(z_i, t_n)_{\substack{n=0,1,\dots,M \\ i=0,1,\dots,N}}$ est repéré sur l'axe z par sa position $z_i = i\Delta z$ et sur l'axe t par : $t_n = n\Delta t$ comme le montre la figure III.2.

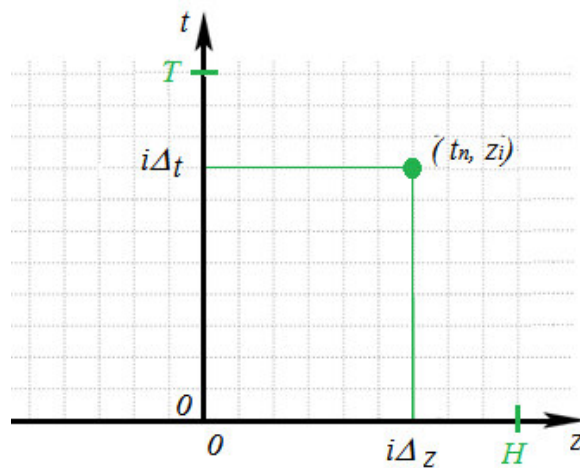
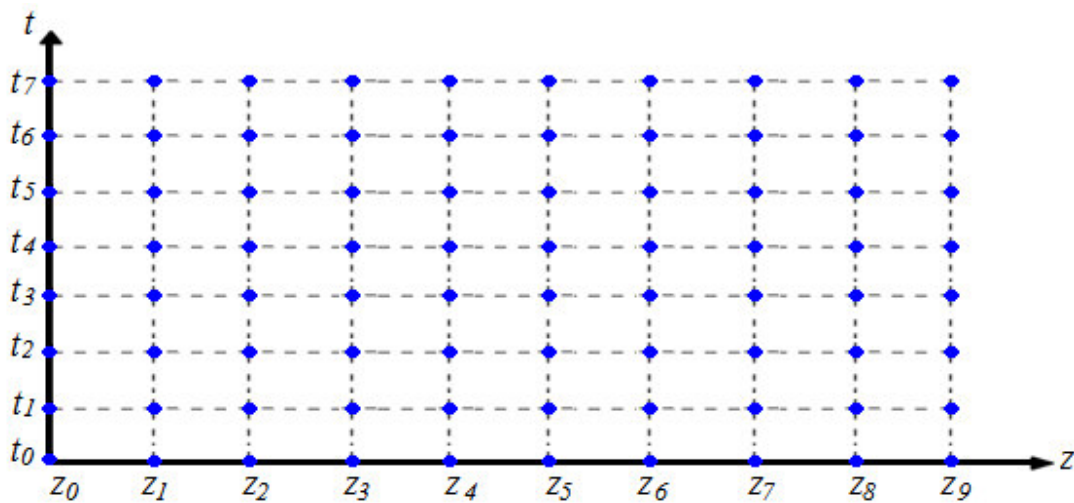


Figure III.2: Maillage en différences finies.

Nous notons par u_i^n la valeur d'une solution discrète approchée au point (z_i, t_n) et $u(z, t)$ la solution exacte inconnue.

Les couples de points (z_i, t_n) , points bleus sur la figure III.3, forment un maillage espace-temps et sont appelés les nœuds du maillage.

Figure III.3 : Représentation d'une grille espace-temps avec $N=9$ et $M=7$.

2.2.Approximation des dérivées par différences finies:

En utilisant Le développement en série de Taylor, Nous pouvons écrire les approximations ci-dessous :

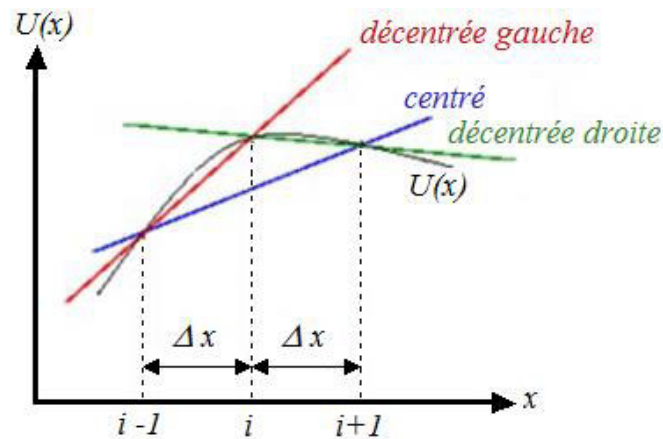


Figure III.4: Représentation d'approximation centrée et décentrée.

Différenciation de la dérivée première :

Différenciation décentrée avancée :

$$\left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_i^n = \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta_t}$$

Différenciation décentrée retardée :

$$\left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_i^n = \frac{u_i^n - u_i^{n-1}}{\Delta_t}$$

Différenciation centrée :

$$\left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_i^n = \frac{u_i^{n+1} - u_i^{n-1}}{2\Delta_t}$$

Différenciation de la dérivée seconde :

$$\left. \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right|_i^n = \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{\Delta_z^2}$$

2.3. Les conditions initiales et les conditions au bord :

Les valeurs approchées au bord du domaine et en $t=0$ peuvent être données comme des valeurs exactes de la fonction u :

$$u_0^n = u_N^n = 0 \quad \forall n \in \{0, 1, \dots, M\}$$

$$u_i^0 = q \quad \forall i \in \{0, 1, \dots, N\}$$

Ceci laisse $M(N-1)$ inconnues à déterminer (les u_i^n pour $1 \leq i \leq N-1$ et $1 \leq n \leq M$) (voir figure III.5). L'utilisation des conditions aux limites permettent de déterminer les valeurs de la fonction aux points fictifs situés hors le domaine considéré du problème.

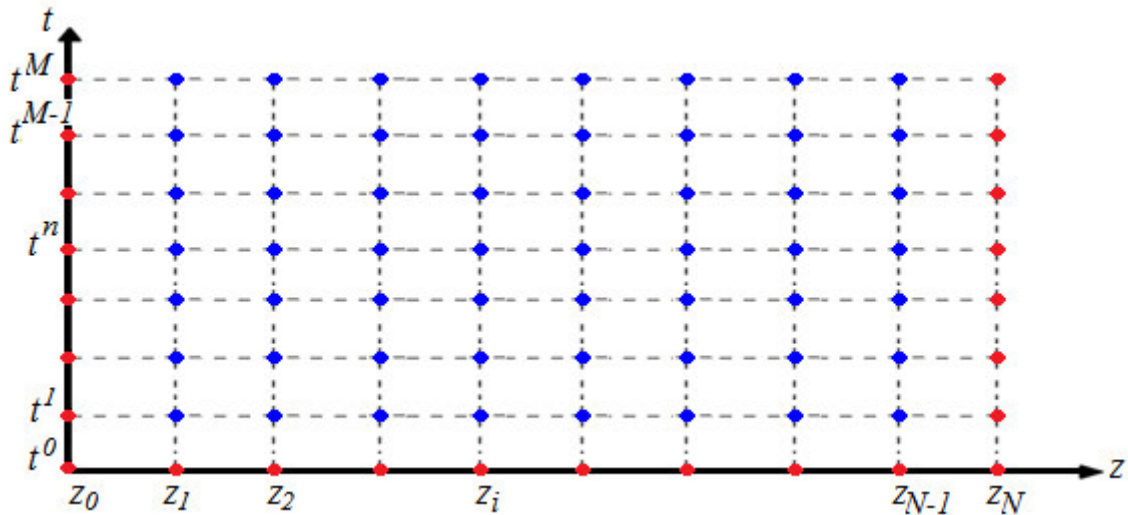


Figure III.5: Les $M(N-1)$ inconnues des nœuds intérieurs et les valeurs connues sur la frontière.

2.4. Les schémas implicites, explicites et le schéma de Richardson :

La méthode des différences finies offre plusieurs techniques d'approximation des dérivées. Chacune d'elles conduit à une famille de schémas différents. Dans ce qui suit, nous allons en présenter les schémas les plus fameux et les plus utilisés :

Schéma explicite : la première possibilité est d'utiliser l'approximation décentrée avancée à droite. Pour ce cas d'approximation, l'équation de consolidation aura la forme suivante :

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta_t} = c_v \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{\Delta_z^2} \quad \forall i \in (1, \dots, N-1), \quad n \in (0, \dots, M-1)$$

Ou bien :

$$u_i^{n+1} = u_i^n + c_v \frac{\Delta_t}{\Delta_z^2} (u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n)$$

Avec $\lambda = c_v \frac{\Delta_t}{\Delta_z^2}$, à l'itération $(n+1)$, l'équation de consolidation discrète précédente se transforme à :

$$u_i^{n+1} = \lambda u_{i-1}^n + (1 - 2\lambda)u_i^n + \lambda u_{i+1}^n \quad (III.1)$$

Cette formule est explicite en temps. En fait pour déterminer u_i^{n+1} , il suffit de connaître les trois valeurs u_{i-1}^n , u_i^n et u_{i+1}^n comme l'illustre la figure III.6(a). Il faut toutefois noter comme l'illustre la figure III.6(b) que l'on ne peut pas utiliser ce schéma pour déterminer les valeurs aux limites (u_0^{n+1} et u_N^{n+1})

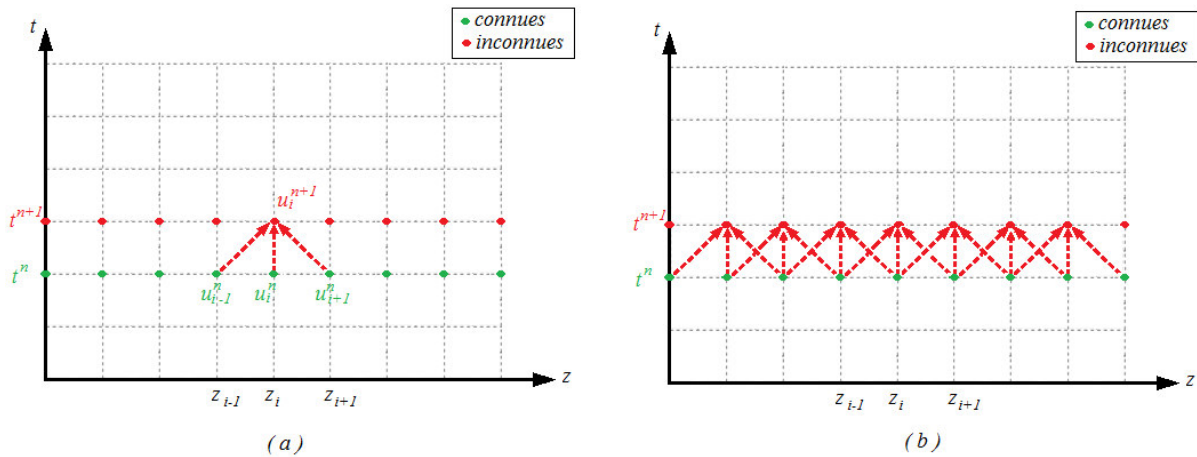


Figure III.6: représentation graphique du schéma explicite de calcul de u_i^{n+1} .

Sous forme matricielle, les équations algébriques résultant de l'application de la formule (III.1) peuvent être écrites sous la forme :

$$u^{n+1} = Au^n$$

Où A une matrice d'itération.

Sous forme développée, cette dernière relation aura la forme suivante :

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{N-2} \\ u_{N-1} \end{bmatrix}^{n+1} = \begin{bmatrix} (1-2\lambda) & \lambda & 0 & \dots & 0 \\ \lambda & (1-2\lambda)\lambda & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \lambda(1-2\lambda) & \lambda & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \lambda & (1-2\lambda) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{N-2} \\ u_{N-1} \end{bmatrix}^n + \lambda \begin{bmatrix} u_0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ u_N \end{bmatrix}^n \quad (III.2)$$

Si nous appliquons les conditions :

$$u_0^n = u_N^n = 0 \quad \forall n \in (0, 1, \dots, M)$$

Alors, le système (III.2) devient :

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{N-2} \\ u_{N-1} \end{bmatrix}^{n+1} = \begin{bmatrix} (1-2\lambda) & \lambda & 0 & \dots & 0 \\ \lambda & (1-2\lambda)\lambda & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \lambda(1-2\lambda) & \lambda & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \lambda & (1-2\lambda) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{N-2} \\ u_{N-1} \end{bmatrix}^n$$

Ce système justifie le nom de schéma explicite, puisqu'il permet de calculer la valeur approchée au temps t_{n+1} par un simple produit d'une matrice connue par le vecteur des valeurs approchées relatives à t_n (ce schéma donne immédiatement les valeurs u_i^{n+1} en fonction des u_i^n). En particulier, aucune inversion de matrice ou résolution du système linéaire n'est nécessaire dans ce cas.

Schéma implicite : Nous aurions pu approcher la dérivée partielle par rapport au temps par une approximation décentrée à gauche (retardée), nous obtiendrions alors par un tel schéma la forme discrète suivante de l'équation de consolidation :

$$\frac{u_i^n - u_i^{n-1}}{\Delta_t} = c_v \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{\Delta_z^2} \quad \forall i \in (1, \dots, N-1), \quad n \in (0, \dots, M-1)$$

Le décalage d'unité sur l'indice n n'est évidemment qu'apparent puisque nous pouvons réécrire de manière équivalente l'équation précédente sous la forme :

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta_t} = c_v \frac{u_{i+1}^{n+1} - 2u_i^{n+1} + u_{i-1}^{n+1}}{\Delta_z^2}$$

D'où :

$$u_i^{n+1} - u_i^n = c_v \frac{\Delta_t}{\Delta_z^2} (u_{i+1}^{n+1} - 2u_i^{n+1} + u_{i-1}^{n+1})$$

Avec $\lambda = c_v \frac{\Delta_t}{\Delta_z^2}$, l'équation de la consolidation à l'itération $(n+1)$ prend la forme suivante :

$$\boxed{(1 + 2\lambda)u_i^{n+1} - \lambda(u_{i-1}^{n+1} + u_{i+1}^{n+1}) = u_i^n} \quad (\text{III.3})$$

Ici, nous constatons que les inconnues à l'itération $(n+1)$ sont reliées entre elles par une relation implicite (d'où le nom de la méthode) figure III.7

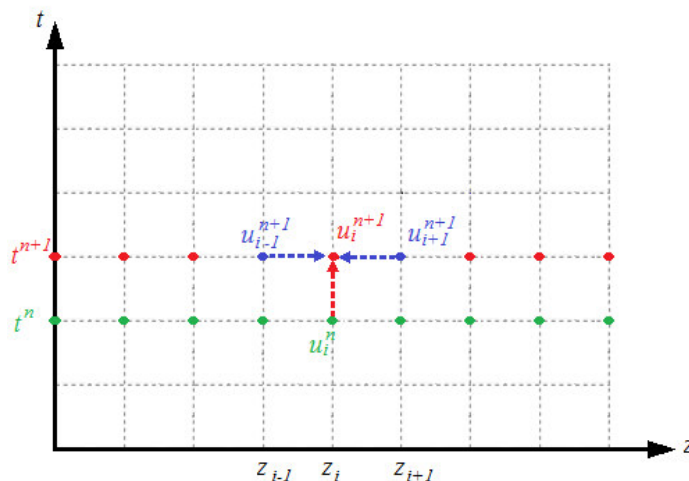


Figure III.7: Graphes de dépendance pour les calculs de u_i^{n+1} par le schéma implicite.

Sous forme matricielle, les équations algébriques résultant de l'application de la formule (III.3) peuvent être écrites sous la forme :

$$Au^{n+1} = u^n$$

Où A est la matrice d'itération (opérateur discret linéaire).

Sous forme développée, cette dernière relation aura la forme suivante :

$$\begin{bmatrix} (1+2\lambda) & -\lambda & 0 & \cdots & 0 \\ -\lambda & (1+2\lambda) & -\lambda & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & -\lambda(1+2\lambda) & -\lambda & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & -\lambda & (1+2\lambda) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{N-2} \\ u_{N-1} \end{bmatrix}^{n+1} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{N-2} \\ u_{N-1} \end{bmatrix}^n + \lambda \begin{bmatrix} u_0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ u_N \end{bmatrix}^n \quad (III.4)$$

Cette forme schéma, contrairement à la forme explicite, exige la résolution d'un système d'équations linéaires pour chaque pas en l'inverse de la matrice du système. Sa résolution est donc plus coûteuse que le schéma explicite. Cependant, ce coût en temps de calcul est largement compensé par la meilleure stabilité du schéma.

Si nous appliquons les conditions :

$$u_0^n = u_N^n = 0 \quad \forall n \in (0, 1, \dots, M)$$

Alors, le système (III.4) devient :

$$\begin{bmatrix} (1+2\lambda) & -\lambda & 0 & \cdots & 0 \\ -\lambda & (1+2\lambda) & -\lambda & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & -\lambda(1+2\lambda) & -\lambda & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & -\lambda & (1+2\lambda) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{N-2} \\ u_{N-1} \end{bmatrix}^{n+1} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{N-2} \\ u_{N-1} \end{bmatrix}^n$$

Schéma centrée (schéma saute-mouton ou schéma de Richardson) : Nous pourrions chercher à améliorer la précision de différentiation par rapport au temps en utilisant l'approximation centrée de la dérivée en temps. Dans ce cas, la forme discrète de l'équation de consolidation serait :

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^{n-1}}{2\Delta_t} = c_v \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{\Delta_z^2} \quad \forall i \in (1, \dots, N-1), \quad n \in (0, \dots, M-1)$$

Ou bien :

$$u_i^{n+1} - u_i^{n-1} = 2c_v \frac{\Delta_t}{\Delta_z^2} (u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n)$$

Si nous posons $\lambda = c_v \frac{\Delta_t}{\Delta_z^2}$, l'équation de consolidation à l'itération $(n+1)$ aura la forme :

$$\boxed{u_i^{n+1} = 2\lambda(u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n) + u_i^{n-1}} \quad (III.5)$$

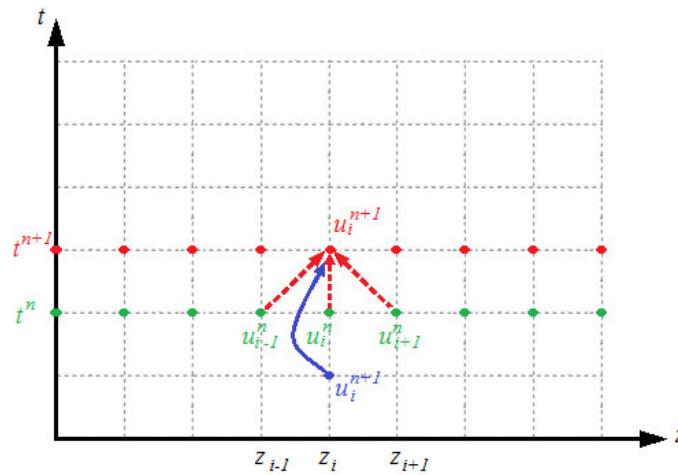


Figure III.8 : Représentation graphique du schéma centré pour le calcul de u_i^{n+1}

Sous forme matricielle, les équations algébriques résultant de l'application de la formule (III.5) sont de la forme :

$$u^{n+1} = Au^n + Iu^{n-1}$$

Où :

A est une matrice dite d'itération et I une matrice unitaire.

Sous forme développée, cette dernière relation aura la forme suivante :

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{N-2} \\ u_{N-1} \end{bmatrix}^{n+1} = \lambda \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 2 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & \cdots & 0 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{N-2} \\ u_{N-1} \end{bmatrix}^n + 2\lambda \begin{bmatrix} u_0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ u_N \end{bmatrix}^n + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{N-2} \\ u_{N-1} \end{bmatrix}^{n-1}$$

L'application des conditions :

$$u_0^n = u_N^n = 0 \quad \forall n \in (0, 1, \dots, M)$$

Transforme le système d'équations précédent au système suivant :

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{N-2} \\ u_{N-1} \end{bmatrix}^{n+1} = \lambda \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 2 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & \cdots & 0 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{N-2} \\ u_{N-1} \end{bmatrix}^n + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{N-2} \\ u_{N-1} \end{bmatrix}^{n-1}$$

2.5. Fiabilité des schémas (Convergence des schémas):

Pour assurer la convergence des schémas numériques précédents aux différences finies, on applique le théorème de Lax qui affirme que pour un schéma linéaire, la consistance et la stabilité implique la convergence du processus itératif.

Théorème de LAX :

$$\text{Convergence} = \text{consistance} + \text{stabilité}$$

comportement
numérique
proche du réel

absence
d'oscillations
parasites

Figure III.9 : Théorème de Lax.

Consistance :

On définit tout d'abord l'erreur de troncature ou de consistance τ comme étant, l'ensemble des termes tronqués lors de la discrétisation d'une équation différentielle ou équation aux dérivées partielles, en effet cela peut être exprimé par l'égalité suivante :

$$\text{Équation continue} = \text{Équation discrète} + \tau$$

Un schéma est dit consistant si son erreur de troncature tend vers 0 lorsque Δz et Δt tendent vers 0 indépendamment.

Comme notre problème dépend de t et z , alors l'erreur de troncature peut être exprimée par :

$$\tau = \tau_t - c_v \tau_z$$

Un développement de Taylor permet d'avoir :

$$\begin{aligned} \rightarrow \text{Pour le schéma explicite : } \tau_t &= \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} - \frac{\partial u_i^n}{\partial t} = \frac{\Delta t}{2} \left(\frac{\partial^2 u_i^n}{\partial t^2} \right) + o(\Delta t^2) \\ \rightarrow \text{Pour le schéma implicite : } \tau_t &= \frac{u_i^n - u_i^{n-1}}{\Delta t} - \frac{\partial u_i^n}{\partial t} = -\frac{\Delta t}{2} \left(\frac{\partial^2 u_i^n}{\partial t^2} \right) + o(\Delta t^2) \\ \rightarrow \text{Pour le schéma centré : } \tau_t &= \frac{u_i^{n+1} - u_i^{n-1}}{2\Delta t} - \frac{\partial u_i^n}{\partial t} = o(\Delta t^2) \end{aligned}$$

Concernant τ_z nous avons :

$$\tau_z = \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{\Delta z^2} - \frac{\partial^2 u_i^n}{\partial z^2} = \frac{\Delta z^2}{12} \left(\frac{\partial^4 u_i^n}{\partial z^4} \right) + o(\Delta z^4)$$

Nous constatons que pour les trois schémas $\lim_{\Delta t, \Delta z \rightarrow 0} \tau = 0$, et par conséquent ils sont bien consistants.

Stabilité :

En analyse numérique, la stabilité d'un schéma numérique aux différences finies est une propriété globale de l'algorithme qui en découle. Elle concerne essentiellement le comportement numérique qui se manifeste lorsque les pas de discrétisation ($\Delta z, \Delta t$) tendent tous vers zéro. Sous certaines hypothèses, le théorème de Lax montre que la stabilité est une

condition nécessaire et suffisante pour assurer la convergence. Bien qu'un schéma numérique soit conçu pour tenter de résoudre un problème décrit par des équations aux dérivées partielles, la stabilité du schéma n'a aucun lien avec la solution exacte du problème. La stabilité d'un schéma ne doit pas être confondue avec la stabilité de la solution du problème d'origine. Concrètement, l'instabilité se manifeste par des oscillations parasites non bornées (changement du signe de la pente d'un nœud à l'autre voir figure III.10).

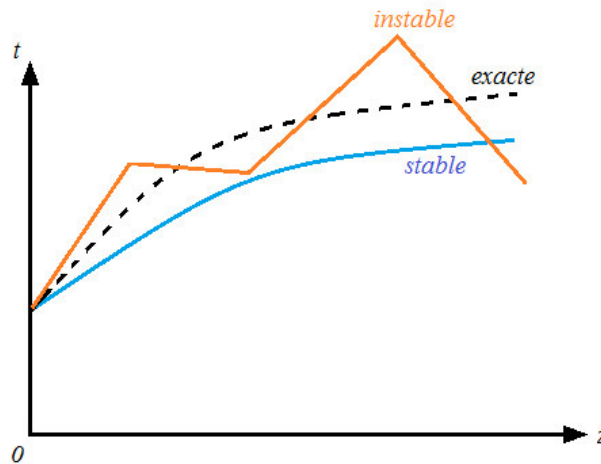


Figure III.10: Exemples d'un schéma stable et autre instable.

Un schéma explicite est conditionnellement stable, c'est-à-dire stable si et seulement si la condition CFL (R.Courant, K.Friedrichs, and H.Lewy en 1928) suivante est satisfaite :

$$c_v \frac{\Delta t}{\Delta z^2} \leq \frac{1}{2}$$

Le schéma implicite est inconditionnellement stable, c'est-à-dire stable quel que soit les pas d'espace Δz et de temps Δt . Concernant le schéma centré, il est inconditionnellement instable, c'est-à-dire la stabilité n'est jamais vérifiée. Un tel schéma est évidemment inutilisable.

Remarque :

Le schéma implicite nécessite un travail numérique supplémentaire par rapport au schéma explicite (l'inversion de la matrice A). En contrepartie, il n'impose aucune condition sur le choix de Δt et Δz . Cet avantage est si tellement important que l'approximation par schéma de différences finies implicite est presque toujours préférée à l'approximation par différences finies de type explicite dans les cas pratiques.

Le schéma de Richardson est totalement instable ! Un tel schéma doit être rejeté car il n'est pas convergent.

3- Résolution numérique du problème:

Dans ce qui suit, nous allons présenter la résolution numérique de l'équation de consolidation unidimensionnelle conventionnelle en se servant de la méthode des différences finies. La technique explicite des différences finies peut être appliquée conformément à l'équation itérative suivante :

$$u_i^{n+1} = \lambda u_{i-1}^n + (1 - 2\lambda)u_i^n + \lambda u_{i+1}^n$$

Pour initialiser le processus itératif, nous nous servons de la condition initiale :

$$u_i^0 = q \quad \forall i \in (0, \dots, N)$$

Dans le but d'effectuer les calculs nécessaires et réaliser ce processus itératif, nous avons élaboré l'algorithme formel suivant :

- 1) $u_i^0 = q \quad \forall i \in \{0, \dots, N\}$
- 2) Pour $n : 0$ à $M-1$ faire :
- 3) Calculer $u_i^{n+1} \quad \forall i \in \{0, \dots, N\}$
- 4) Calculer u_0^{n+1} et $u_N^{n+1} \quad \forall i \in \{0, \dots, N\}$
- 5) Fin pour.

Le résultat cherché est une matrice de dimensions $(N + 1), (M + 1)$ contenant les valeurs de u . La figure III.11 est une matrice $(N+1) \times (M+1)$ de réels tel que :

$$U(i + 1, n + 1) = u_i^n \quad \forall i \in (0, \dots, N) \text{ et } \forall n \in (0, \dots, M)$$

colonnes

	1	2	3	...	M-1	M	M+1
1	u_0^0	u_0^1	u_0^2	...	u_0^{M-2}	u_0^{M-1}	u_0^M
2	u_1^0	u_1^1	u_1^2	...	u_1^{M-2}	u_1^{M-1}	u_1^M
3	u_2^0	u_2^1	u_2^2	...	u_2^{M-2}	u_2^{M-1}	u_2^M
...
N	u_{N-1}^0	u_{N-1}^1	u_{N-1}^2	...	u_{N-1}^{M-2}	u_{N-1}^{M-1}	u_{N-1}^M
N+1	u_N^0	u_N^1	u_N^2	...	u_N^{M-2}	u_N^{M-1}	u_N^M

lignes

Figure III.11: La matrice résultat $(N+1) \times (M+1)$.

Pour résoudre le problème, il est nécessaire d'introduire les données suivantes :

H - profondeur de la couche du sol considérée

T - temps.

C_v - coefficient de consolidation (réel strictement positif).

M - nombre d'intervalles de temps.

N - nombre d'intervalles de l'épaisseur de la couche.

L'algorithme du problème est réalisé sous forme d'une fonction dont l'exécution retourne les valeurs numériques de u ainsi que les coordonnées z et t des nœuds sous forme de vecteurs comme le montre la figure III.12. les valeurs des éléments de ces vecteurs sont telles que :

$$z(i + 1) = z_i \quad \forall i \in (0, \dots, N) \quad \text{et} \quad t(i + 1) = t_i \quad \forall n \in (0, \dots, M)$$

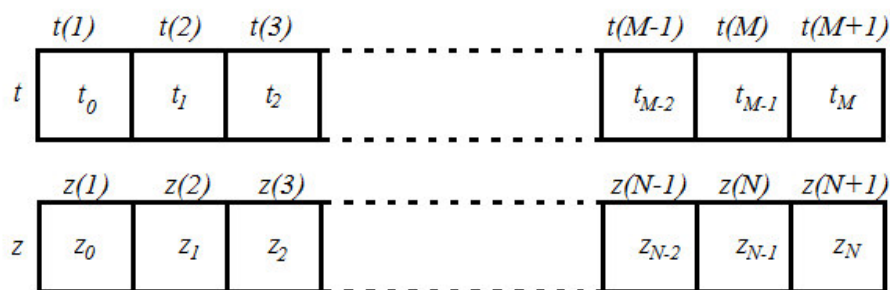


Figure III.12 : Les vecteurs z et t .

L'algorithme complet de résolution du problème est :

- 01) Fonction $[t, x, U] \leftarrow (H, T, cv, N, M)$.
- 02) $\Delta t = T/M$
- 03) $t \leftarrow (0, \Delta t, T)$
- 04) $\Delta z = H/N$
- 05) $z \leftarrow (0, \Delta z, N)$
- 06) $\lambda = C_v (\Delta t / (\Delta z)^2)$
- 07) $U(:, 1) \leftarrow q \leftarrow$ Conditions initiales
- 08) $I \leftarrow [2 : N] \leftarrow$ Indices des points intérieurs
- 09) Pour $n \leftarrow 1$ à M faire \leftarrow Boucle relative au temps
- 10) $U(I, n+1) \leftarrow (1-2\lambda) * U(I, n) - \lambda * (U(I+1, n) + U(I-1, n))$
- 11) $U(1, n+1) \leftarrow 0$
- 12) $U(N+1, n+1) \leftarrow 0$ } \leftarrow Conditions aux limites
- 13) Fin pour
- 14) Fin Fonction.

Application 1 :

Dans ce qui suit, nous allons résoudre numériquement par la méthode des différences finies la même application, résolu analytiquement dans le chapitre précédent en se servant de la méthode de séparation des variables et de la transformée de Fourier

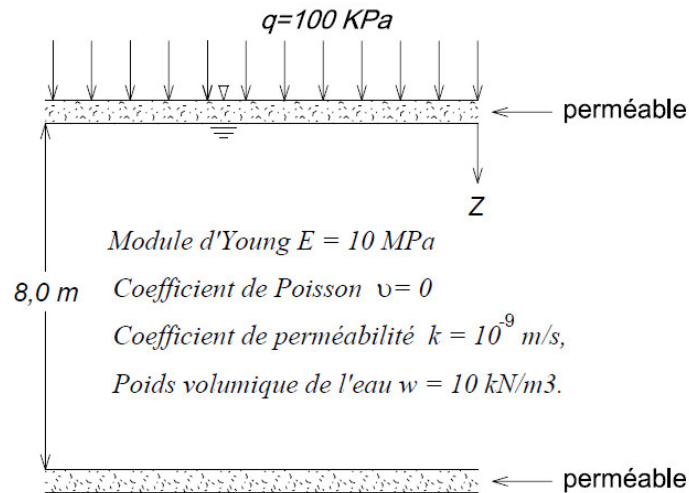


Figure III.13: Problème à étudié pour l'application 1.

Données du problème :

Module d'Young $E = 10 \text{ MPa}$.

Coefficient de Poisson $\nu = 0$.

Coefficient de perméabilité $k = 10^{-9} \text{ m/s}$.

Poids volumique de l'eau $\gamma_w = 10 \text{ KN/m}^3$.

$H = 8 \text{ m}$ (la profondeur de la couche de sol).

$q = 100 \text{ kPa}$ (la surcharge).

$T = 3 \times 10^7 \text{ s}$ (une année environ).

$M = 100$ (nombre d'intervalles de temps).

$N = 10$ (nombre d'intervalles de l'épaisseur de la couche).

A partir de ces données, nous calculons le coefficient de consolidation :

$$c_v = \frac{k}{\gamma_w \left[\frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{E(1+\nu)} \right]} = 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$$

Vérification de la condition de stabilité :

$$\lambda = c_v \frac{\Delta_t}{\Delta_z^2} ; \Delta_z = \frac{H}{N} \text{ et } \Delta_t = \frac{T}{M}$$

$$\lambda = 10^{-6} \times \frac{\frac{3 \times 10^7}{100}}{\left(\frac{8}{10}\right)^2} = 0,46875$$

$\lambda < \frac{1}{2}$, donc la condition de stabilité est vérifiée.

En utilisant la formule et la condition initiale suivantes :

$$u_i^{n+1} = \lambda u_{i-1}^n + (1 - 2\lambda)u_i^n + \lambda u_{i+1}^n$$

$$u_i^0 = 100 \text{ kPa} \quad \forall i \in (0, \dots, 10)$$

Nous présentons un exemple d'illustration de calcul manuel pour obtenir quelques valeurs nodales de la pression interstitielle qui correspondent au maillage adopté :

$$u_1^1 = 0,46875(100) + (1 - 2 \times 0,46875)100 + 0,46875(100) = 100 \text{ kPa} ;$$

De la même façon nous obtenons les valeurs suivantes :

$$u_2^1 = 100 \text{ kPa} ;$$

$$u_1^2 = 53,125 \text{ kPa}.$$

Afin d'automatiser ce calcul pour un nombre de nœud pratiquement suffisant pour obtenir une solution approchée avec une précision aussi grande que nous voulons, nous avons élaboré le code MATLAB suivant :

Fonction[t,z,U]=conso (H,T, C_v,N,M,q)

dt=T/M ;

T=0 : dt : T ;

dz=H /N ;

z=[0 : dt : T] ;

U=zeros (N+1, M+1) ;

E=C_v*dt/(dz^2);

c=1-2*E;

I=2: N;

U (: 1) =q;

For n=1: M;

U(I,n+1)=c*U(I,n)+E*(U(I+1,n)+U(I-1,n));

U (N+1, n+1) =0;

U (1, n+1) =0;

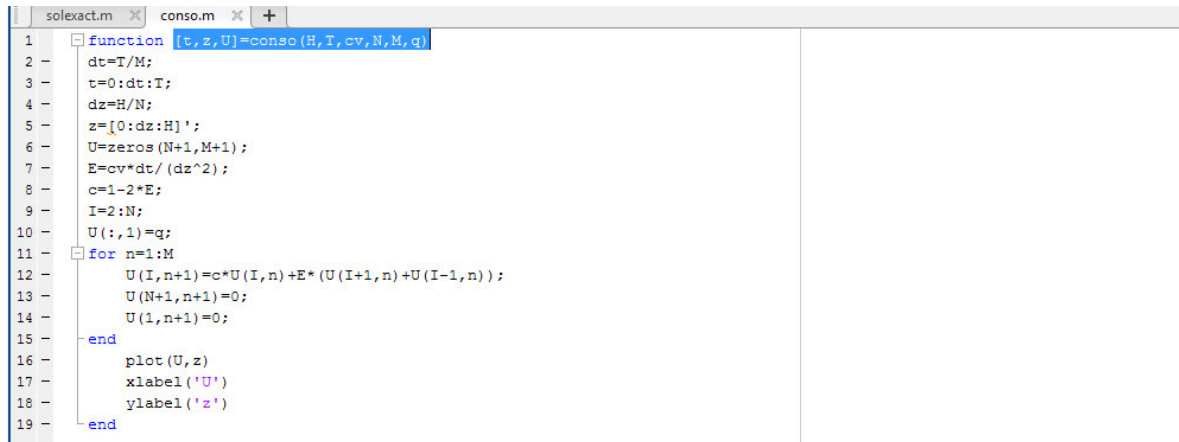
end

Plot (U, z)

xlabel ('U')

```
ylabel('z')
```

```
end
```



```

1  function [t, z, U] = conso(H, T, cv, N, M, q)
2  dt=T/M;
3  t=0:dt:T;
4  dz=H/N;
5  z=[0:dz:H]';
6  U=zeros(N+1, M+1);
7  E=cv*dt/(dz^2);
8  c=1-2*E;
9  I=2:N;
10 U(:, 1)=q;
11 for n=1:M
12     U(I, n+1)=c*U(I, n)+E*(U(I+1, n)+U(I-1, n));
13     U(N+1, n+1)=0;
14     U(1, n+1)=0;
15 end
16 plot(U, z)
17 xlabel('U')
18 ylabel('z')
19 end

```

Figure III.14: Code MATLAB réalisant la solution numérique du problème.

Une partie des résultats numériques obtenus par ce programme est présentée ci-dessous :

$u =$

Columns 1 through 12

100.0000	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
100.0000	100.0000	53.1250	50.1953	39.7125	37.7699	33.0015	31.5619	28.8080	27.6814	25.7656	24.7922
100.0000	100.0000	100.0000	78.0273	75.2808	65.3673	62.9319	57.2488	55.2125	51.2758	49.4546	46.3918
100.0000	100.0000	100.0000	100.0000	89.7003	87.7691	80.7384	78.5916	73.2187	70.9850	66.6096	64.3557
100.0000	100.0000	100.0000	100.0000	100.0000	95.1720	93.9650	88.4723	86.4596	81.3601	78.9564	74.4493
100.0000	100.0000	100.0000	100.0000	100.0000	100.0000	95.4738	94.0593	88.8215	86.6072	81.6880	79.1271
100.0000	100.0000	100.0000	100.0000	100.0000	95.1720	93.9650	88.4723	86.4596	81.3601	78.9564	74.4493
100.0000	100.0000	100.0000	100.0000	89.7003	87.7691	80.7384	78.5916	73.2187	70.9850	66.6096	64.3557
100.0000	100.0000	100.0000	78.0273	75.2808	65.3673	62.9319	57.2488	55.2125	51.2758	49.4546	46.3918
100.0000	100.0000	53.1250	50.1953	39.7125	37.7699	33.0015	31.5619	28.8080	27.6814	25.7656	24.7922
100.0000	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Columns 13 through 24

0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
23.2957	22.4033	21.1581	20.3222	19.2510	18.4658	17.5270	16.7923	15.9603	15.2766	14.5339	13.9007	13.2675
44.6876	42.1502	40.5330	38.3592	36.8270	34.9288	33.4867	31.8097	30.4620	28.9687	27.7170	26.3799	25.1428
60.6665	58.4471	55.2704	53.1274	50.3535	48.3153	45.8688	43.9521	41.7781	39.9906	38.0477	36.3911	34.8442
71.9107	67.9670	65.4361	61.9780	59.5319	56.4826	54.1619	51.4565	49.2808	46.8676	44.8442	42.6818	40.7907
74.7417	72.0876	68.2245	65.6103	62.2050	59.6990	56.6836	54.3195	51.6355	49.4280	47.0277	44.9807	42.6818
71.9107	67.9670	65.4361	61.9780	59.5319	56.4826	54.1619	51.4565	49.2808	46.8676	44.8442	42.6818	40.7907
60.6665	58.4471	55.2704	53.1274	50.3535	48.3153	45.8688	43.9521	41.7781	39.9906	38.0477	36.3911	34.8442
44.6876	42.1502	40.5330	38.3592	36.8270	34.9288	33.4867	31.8097	30.4620	28.9687	27.7170	26.3799	25.1428
23.2957	22.4033	21.1581	20.3222	19.2510	18.4658	17.5270	16.7923	15.9603	15.2766	14.5339	13.9007	13.2675
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Columns 97 through 101

0	0	0	0	0
0.4502	0.4295	0.4098	0.3910	0.3731
0.8563	0.8170	0.7795	0.7438	0.7096
1.1786	1.1245	1.0729	1.0237	0.9767
1.3855	1.3219	1.2613	1.2034	1.1482
1.4568	1.3900	1.3262	1.2653	1.2073
1.3855	1.3219	1.2613	1.2034	1.1482
1.1786	1.1245	1.0729	1.0237	0.9767
0.8563	0.8170	0.7795	0.7438	0.7096
0.4502	0.4295	0.4098	0.3910	0.3731
0	0	0	0	0

La présentation graphique tridimensionnelle de la solution $u(z, t)$ est présentée à la figure.

III.15 ci-dessous :

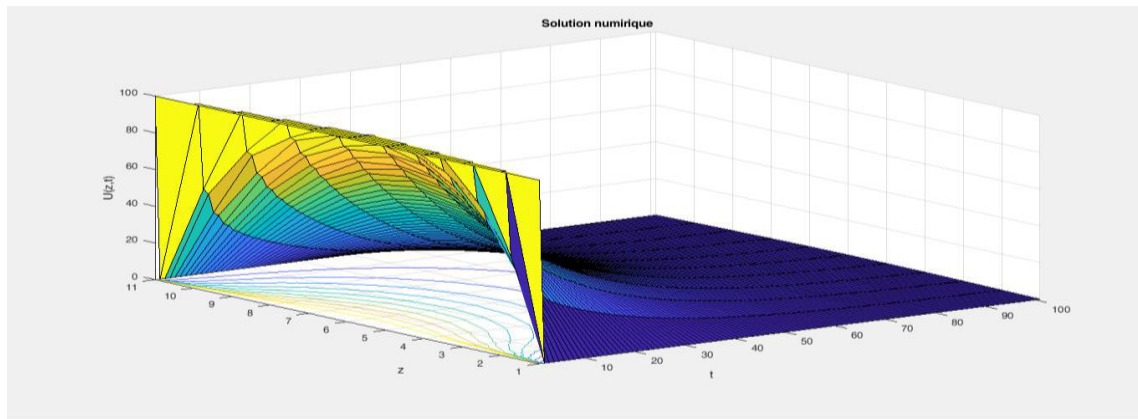


Figure III.15 : Représentation tridimensionnelle de la solution numérique.

La représentation graphique des isochrones pour 100 valeurs de t est représentée sur la figure III.16.

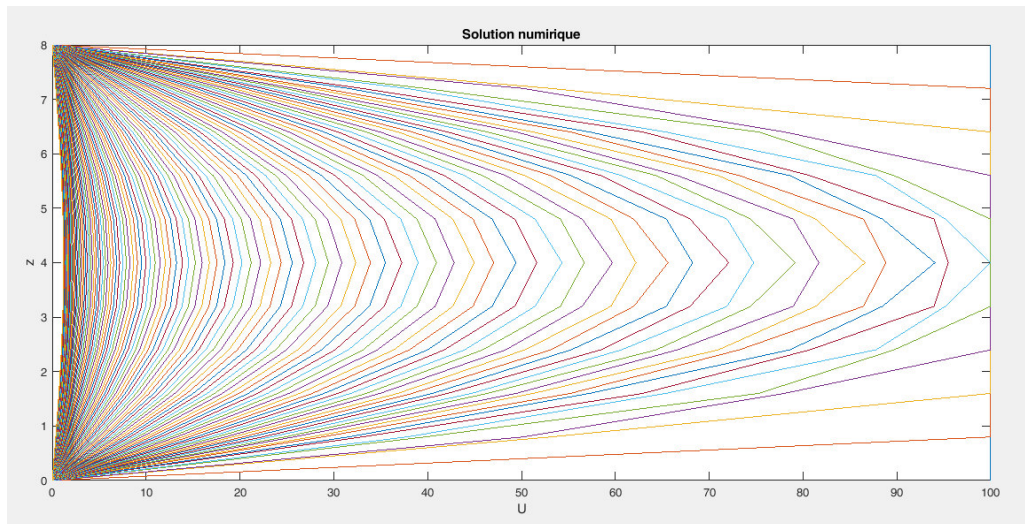


Figure III.16 : Représentation graphique des isochrones.

Application 2 :

Soit une couche d'argile de 10 m d'épaisseur dont la surface supérieure est perméable et inférieure imperméable avec une répartition initiale de l'excès de la pression interstitielle représentée sur la figure III.17. Les valeurs initiales de cette pression en fonction de différentes valeurs de la profondeur sont données dans le tableau ci-dessous. Le coefficient de consolidation est donné par $C_v = 7.9 \text{ m}^2/\text{an}$.

Profondeur (m)	0	2	4	6	8	10
Pression (kN/m^2)	60	54	41	29	19	15

Tableau III.1 : Les valeurs initiales de la pression interstitielle en fonction de la profondeur.

En utilisant vingt pas de temps pour une durée d'une année, nous aurons :

$$\Delta t = \frac{1}{20} = 0.05$$

Afin d'obtenir une bonne précision des résultats, nous utilisons un maillage uniforme de huit intervalles. Alors :

$$\Delta z = \frac{10}{8} = 1.25 \text{ m} = 125 \text{ cm}$$

Par conséquent, le paramètre β sera :

$$\beta = \frac{C_v \Delta t}{(\Delta z)^2} = \frac{(7.9)(0.05)}{(1.25)^2} = 0.2528 < 0.5$$

Conformément à la relation (III.1) :

$$u_{i,n+1} = u_{i,n} + \beta(u_{i-1,n} - 2u_{i,n} + u_{i+1,n})$$

avec $\beta = 0,2528$, l'excès de la pression interstitielle à la fin du premier pas temporel sera :

$$u_{0,1} = 0 \text{ (condition à la frontière)}$$

$$u_{1,1} = u_{0,1} + 0.2528(u_{0,0} - 2u_{0,1} + u_{2,0}) = 40.64 \text{ kN/m}^2$$

$$u_{2,1} = u_{2,0} + 0.2528(u_{1,0} - 2u_{2,0} + u_{3,0}) = 50.09 \text{ kN/m}^2$$

.....

$$u_{6,1} = u_{6,0} + 0.2528(u_{5,0} - 2u_{6,0} + u_{7,0}) = 22.07 \text{ kN/m}^2$$

$$u_{7,1} = u_{7,0} + 0.2528(u_{6,0} - 2u_{7,0} + u_{8,0}) = 17.88 \text{ kN/m}^2$$

$$u_{8,1} = u_{8,0} + 0.2528(u_{7,0} - 2u_{8,0} + u_{9,0}) = 16.264 \text{ kN/m}^2$$

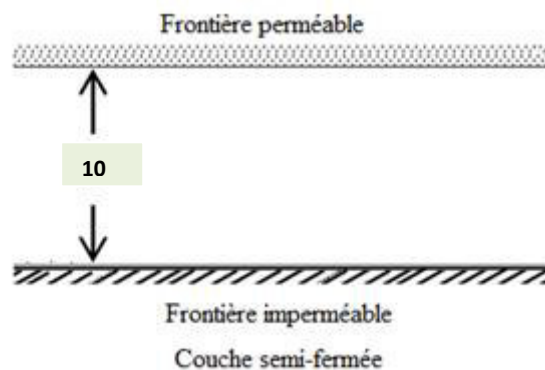


Figure III.17 : Problème à étudié pour l'application 2.

NB : Dans les buts d'enrichir les contenus de mémoire, notre encadreur a préparé des programmes en **QuickBasic** et **MathCad** en plus de notre programme développé en **Matlab**

Un programme informatique en langage **QuickBasic** est élaboré pour effectuer les calculs nécessaires concernant la résolution numérique du problème de consolidation unidimensionnel par la méthode des différences finies sous sa forme explicite en satisfaisant les conditions aux limites représentées par la figure ci-dessus

PROGRAMME :

```

10 REM*****RESOLUTION DU PROBLEME UNIDIMENSIONNEL*****
20 REM *****DE CONSOLIDATION PAR LA METHODE EXPLICITE *****
30 REM ***DES DIFFERENCES FINIESD'UNE COUCHE D'ARGILE HOMOGENE ***
40 REM *****POUR UNE SURFACE SUPERIEURE PERMEABLE*****
50 REM *****ET INFERIEURE IMPERMEABLE *****
60 DIM IN (30), VA (30), FI (30), K(30)
70 INPUT " EPAISSEUR DE LA COUCHE " ; H
80 INPUT " NOMBRE DES INTERVALLES DU MAILLAGE " ; N

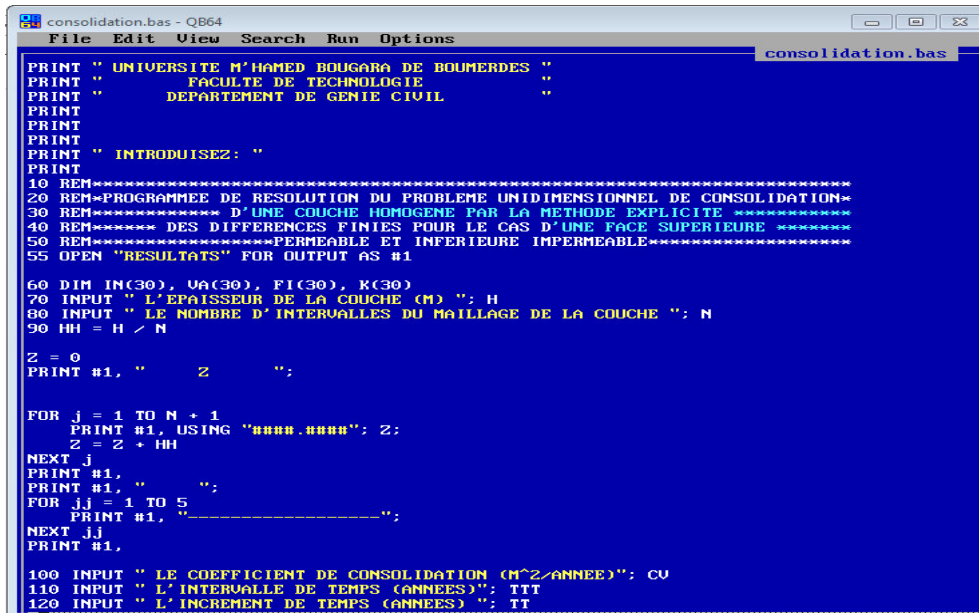
```

```
90 HH=H/N
100 INPUT "COEFFICIENT DE CONSOLIDATION DE LA COUCHE" ; CV
110 INPUT "INTERVALLE DE TEMPS" ; TTT
120 INPUT "INCREMENT DE TEMPS"; TT
130 BETA= (CV*TT)/(HH^2)
140 IF BETA >.5 THEN 120
150 M=N+1
160 TIME=0
170 FOR I=1 TO M
180 READ IN (I)
190 VA (I) = IN (I)
200 PRINT VA (I)
210 NEXT I
220 TIME = TIME+TT
230 IF TIME > TTT THEN 430
240 FOR I=2 TO M
250 IF I=M THEN 290
260 FI (I) = BETA*(VA (I-1) +VA (I+1)-2*VA (I)) +VA (I)
270 K (I) = FI (I)
280 GOTO 320
290FI (I) = BETA*(2*VA (I-1)-2*VA (I)) +VA (I)
300 K (I) =FI (I)
310 GOTO 330
320 NEXT I
330 PRINT "TIME INCREMENT="; TIME
340 FOR I=1 TO M
350 PRINT FI (I)
360 NEXT I
370 FOR I=1 TO M
380 VA (I) =K (I)
390 NEXT I
400 GOTO 220
410 REM ENTER VALUES OF INITIAL EXCESS PORE WATER PRESSURE
DISTRIBUTION
```

420 DATA 0, 56, 25, 50, 75, 42.63, 35, 27.75, 21.5, 17.5 ,15

430 END

Pour effectuer les calculs nécessaires, nous avons compilé le programme présenté ci-dessus dans l'environnement QB64 (voir figure III.18). Ce dernier nous a permis d'obtenir un fichier exécutable susceptible d'être utilisé indépendamment de l'environnement QuickBasic



```

consolidation.bas - QB64
File Edit View Search Run Options
consolidation.bas
PRINT " UNIVERSITE M'HAMED BOUGARA DE BOUMERDES "
PRINT "          FACULTE DE TECHNOLOGIE          "
PRINT "          DEPARTEMENT DE GENIE CIVIL        "
PRINT
PRINT
PRINT " INTRODUISEZ: "
PRINT
10 REM*****
20 REM=PROGRAMMEE DE RESOLUTION DU PROBLEME UNIDIMENSIONNEL DE CONSOLIDATION=
30 REM***** D'UNE COUCHE HOMOGENE PAR LA METHODE EXPLICITE *****
40 REM***** DES DIFFERENCES FINIES POUR LE CAS D'UNE FACE SUPERIEURE *****
50 REM*****PERMEABLE ET INFERIEURE IMPERMEABLE*****
55 OPEN "RESULTATS" FOR OUTPUT AS #1

60 DIM IN(30), UA(30), FI(30), K(30)
70 INPUT " L'EPAISSEUR DE LA COUCHE (M) ": H
80 INPUT " LE NOMBRE D'INTERVALLES DU MAILLAGE DE LA COUCHE ": N
90 HH = H / N

Z = 0
PRINT #1, "      Z      ";

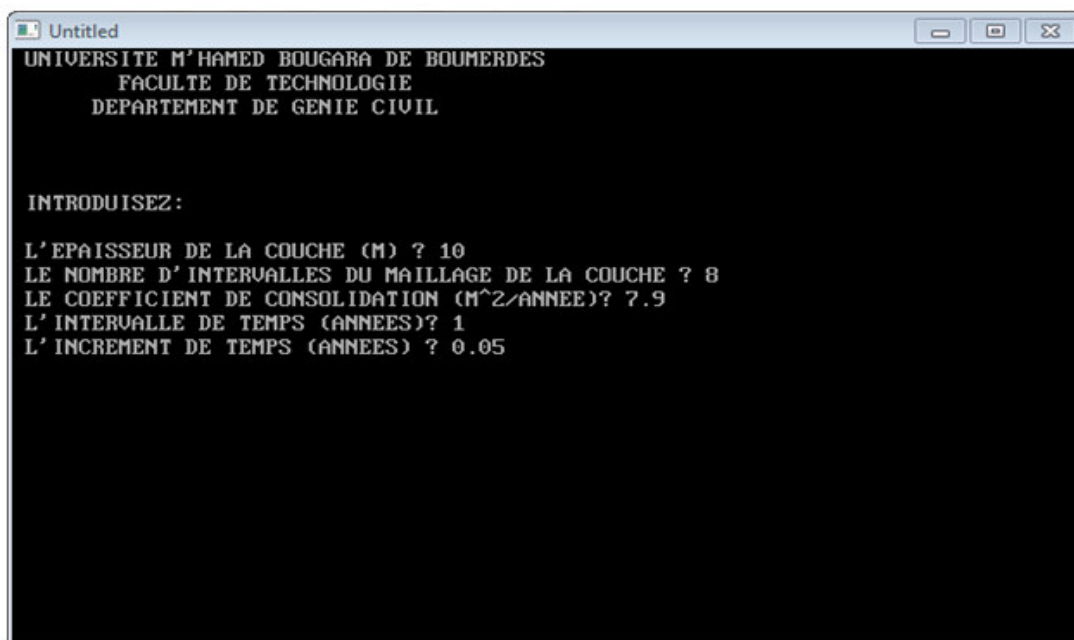
FOR j = 1 TO N + 1
  PRINT #1, USING "####.####": Z;
  Z = Z + HH
NEXT j
PRINT #1,
PRINT #1, "      ";
FOR jj = 1 TO 5
  PRINT #1, "-----";
NEXT jj
PRINT #1,

100 INPUT " LE COEFFICIENT DE CONSOLIDATION (M^2/ANNEE)": CU
110 INPUT " L'INTERVALLE DE TEMPS (ANNEES)": TTT
120 INPUT " L'INCREMENT DE TEMPS (ANNEES) ": TT

```

Figure III.18 : programme dans l'environnement QB64

L'exécution de ce programme affiche la fenêtre suivante permettant de saisir les données utilisées par le programme pour effectuer les calculs et afficher les résultats obtenus :



```

Untitled
UNIVERSITE M'HAMED BOUGARA DE BOUMERDES
FACULTE DE TECHNOLOGIE
DEPARTEMENT DE GENIE CIVIL

INTRODUISEZ :

L'EPAISSEUR DE LA COUCHE (M) ? 10
LE NOMBRE D'INTERVALLES DU MAILLAGE DE LA COUCHE ? 8
LE COEFFICIENT DE CONSOLIDATION (M^2/ANNEE)? 7.9
L'INTERVALLE DE TEMPS (ANNEES)? 1
L'INCREMENT DE TEMPS (ANNEES) ? 0.05

```

Figure III.19 : La fenêtre d'exécution du programme QB64

Les résultats obtenus sont affichés automatiquement par le programme sous forme d'un tableau comme le montre la figure III.20 :

Z	T=	0.0000	1.2500	2.5000	3.7500	5.0000	6.2500	7.5000	8.7500	10.0000
1:	T= 0.00	0.0000	56.2500	50.7500	42.6250	35.0000	27.7500	21.5000	17.5000	15.0000
2:	T= 0.05	0.0000	40.6396	50.0864	42.7514	35.0948	28.0028	22.0688	17.8792	16.2640
3:	T= 0.10	0.0000	32.7541	45.8440	42.6701	35.2375	28.2955	22.5098	18.5300	17.0806
4:	T= 0.15	0.0000	27.7830	41.7325	41.5935	35.3615	28.5878	22.9663	19.1697	17.8134
5:	T= 0.20	0.0000	24.2859	38.1709	40.0532	35.2246	28.8791	23.4277	19.7866	18.4992
6:	T= 0.25	0.0000	21.6565	35.1366	38.3567	34.8411	29.1051	23.8853	20.3816	19.1501
7:	T= 0.30	0.0000	19.5895	32.5429	36.6539	34.2798	29.2356	24.3192	20.9560	19.7728
8:	T= 0.35	0.0000	17.9119	30.3075	35.0145	33.6048	29.2679	24.7118	21.5071	20.3710
9:	T= 0.40	0.0000	16.5174	28.3638	33.4682	32.8648	29.2125	25.0535	22.0301	20.9454
10:	T= 0.45	0.0000	15.3366	26.6594	32.0253	32.0940	29.0844	25.3405	22.5202	21.4938
11:	T= 0.50	0.0000	14.3219	25.1535	30.6862	31.3158	28.8988	25.5740	22.9737	22.0127
12:	T= 0.55	0.0000	13.4396	23.8139	29.4467	30.5456	28.6693	25.7572	23.3881	22.4986
13:	T= 0.60	0.0000	12.6647	22.6153	28.3005	29.7935	28.4074	25.8945	23.7621	22.9483
14:	T= 0.65	0.0000	11.9786	21.5370	27.2407	29.0657	28.1226	25.9907	24.0955	23.3598
15:	T= 0.70	0.0000	11.3667	20.5625	26.2602	28.3659	27.8220	26.0505	24.3886	23.7318
16:	T= 0.75	0.0000	10.8179	19.6782	25.3521	27.6961	27.5117	26.0782	24.6427	24.0639
17:	T= 0.80	0.0000	10.3230	18.8727	24.5103	27.0569	27.1959	26.0777	24.8593	24.3565
18:	T= 0.85	0.0000	9.8747	18.1365	23.7289	26.4483	26.8781	26.0524	25.0402	24.6107
19:	T= 0.90	0.0000	9.4670	17.4617	23.0026	25.8695	26.5607	26.0052	25.1875	24.8278
20:	T= 0.95	0.0000	9.0948	16.8414	22.3266	25.3195	26.2455	25.9389	25.3033	25.0097
21:	T= 1.00	0.0000	8.7540	16.2697	21.6965	24.7970	25.9339	25.8557	25.3898	25.1581

Figure III.20 : Les résultats obtenus sous forme d'un tableau.

DEGRE MOYEN DE CONSOLIDATION :

Pour un élément de sol à une profondeur z dans une couche de sol, l'avancement du processus de consolidation sous un incrément de contrainte peut être exprimé par l'expression suivante :

$$U = 1 - \frac{\int_0^d u_e dz}{\int_0^d u_i dz}$$

Ou :

$\int_0^d u_e dz$ = Aire sous une isochrone à l'instant t en question.

$\int_0^d u_i dz$ = Aire sous l'isochrone initiale.

U est définie comme le degré moyen de consolidation. Pour calculer ce dernier à la fin de chaque pas de temps, il est nécessaire de calculer les aires se trouvant sous les isochrones. Cela revient à effectuer des intégrations numériques en utilisant les résultats contenus dans le tableau précédent. Pour ce faire, nous allons nous servir de la méthode de Simpson.

Méthode de Simpson:

L'aire comprise entre la courbe $y = f(x)$, l'axe des x et les abscisses x_0 et x_n (l'entier n doit être pair) est exprimée mathématiquement par l'intégrale simple suivante :

$$\text{Aire} = \int_{x_0}^{x_n} f(x) dx$$

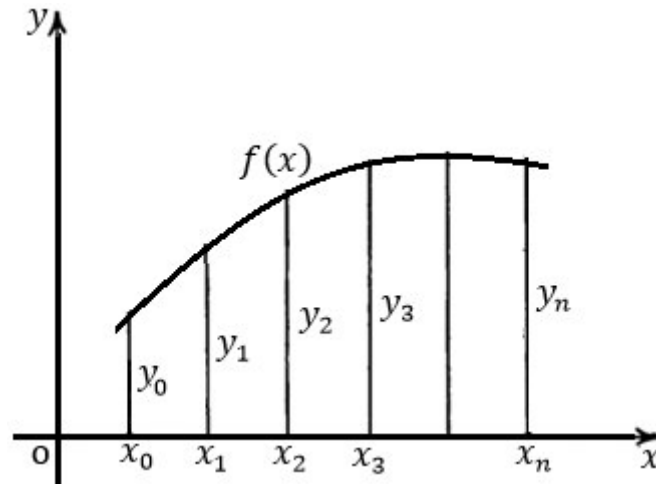


Figure III.21 : Principe de méthode d'intégration de Simpson.

Une valeur numérique approximative de cette intégrale peut être obtenue avec la précision exigée en se servant de la formule de suivante de Simpson :

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x) dx \approx \frac{\Delta x}{3} (y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + \dots + y_n)$$

Ou de façon générale :

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x) dx \approx \frac{\Delta x}{3} \left(y_0 + 4 \sum y_{\text{impairs}} + 2 \sum y_{\text{pairs}} + y_n \right)$$

Dans le but de calculer ces intégrales pour les différentes isochrones, nous avons élaboré le programme MathCad suivant:

```

SIMPSON(U,DELTA,NN) :=
  SP ← 0
  SI ← 0
  for k ∈ 2..NN - 1
    | SP ← SP + Uk·4 if Trunc(k,2) = k
    | SI ← SI + Uk·2 if Trunc(k,2) ≠ k
  S ← (SP + SI + U1 + UNN)·DELTA / 3
  S

```

Figure III.22 : programme MathCad pour le calcul des intégrales.

L'utilisation de ce programme nécessite l'introduction du tableau précédent contenant comme résultats les pressions intertitielles obtenus au moyen d'un programme QuickBasic. Par suite, le tableau précédent doit être converti au format MathCad. Le résultat de cette conversion est:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	60.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
2	56.250	40.640	32.754	27.783	24.286	21.657	19.590	17.912	16.517	15.337
3	50.750	50.086	45.844	41.733	38.171	35.137	32.543	30.308	28.364	26.659
4	42.625	42.751	42.670	41.593	40.053	38.357	36.654	35.014	33.468	32.025
U = 5	35.000	35.095	35.237	35.361	35.225	34.841	34.280	33.605	32.865	32.094
6	27.750	28.003	28.296	28.578	28.879	29.105	29.236	29.268	29.212	29.084
7	21.500	22.069	22.510	22.966	23.428	23.885	24.319	24.712	25.053	25.430
8	17.500	17.879	18.530	19.170	19.787	20.382	20.956	21.507	22.030	22.520
9	15.000	16.264	17.081	17.813	18.499	19.150	19.773	20.371	20.945	21.494

	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
1	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
2	14.322	13.440	12.665	11.979	11.367	10.818	10.323	9.875	9.467	9.095	8.754
3	25.154	23.814	22.615	21.537	20.563	19.678	18.873	18.137	17.462	16.841	16.270
4	30.686	29.447	28.300	27.241	26.260	25.352	24.510	23.729	23.003	22.327	21.697
5	31.316	30.546	29.794	29.066	28.366	27.696	27.057	26.448	25.869	25.320	24.797
6	28.899	28.669	28.407	28.123	27.822	27.512	27.196	26.878	26.570	26.245	25.934
7	25.574	25.757	25.895	25.991	26.050	26.078	26.078	26.052	26.005	25.939	25.856
8	22.974	23.388	23.762	24.096	24.389	24.643	24.859	25.940	25.188	25.303	25.390
9	22.013	22.499	22.948	23.360	23.732	24.964	24.357	24.611	24.828	25.010	25.158

Figure III.23 : conversion du tableau résultat de format QuickBasic au format MathCad.

Le programme SIMPSON ci-dessus, basé sur la formule d'intégration numérique de Simpson est appliqué pour chaque colonne de ce tableau pour calculer l'aire sous chaque isochrone. Les résultats ainsi obtenus pour toutes les isochrones sont :

DELTA = 1.25

NN = 9

Int01 := SIMPSON(U¹, DELTA, NN) = 360.833	Int02 := SIMPSON(U², DELTA, NN) = 311.607	Int03 := SIMPSON(U³, DELTA, NN) = 297.193
Int04 := SIMPSON(U⁴, DELTA, NN) = 286.012	Int05 := SIMPSON(U⁵, DELTA, NN) = 276.735	Int06 := SIMPSON(U⁶, DELTA, NN) = 268.698
Int07 := SIMPSON(U⁷, DELTA, NN) = 261.582	Int08 := SIMPSON(U⁸, DELTA, NN) = 255.177	Int09 := SIMPSON(U⁹, DELTA, NN) = 249.343
Int10 := SIMPSON(U¹⁰, DELTA, NN) = 244.053	Int11 := SIMPSON(U¹¹, DELTA, NN) = 239.009	Int12 := SIMPSON(U¹², DELTA, NN) = 234.378
Int13 := SIMPSON(U¹³, DELTA, NN) = 230.039	Int14 := SIMPSON(U¹⁴, DELTA, NN) = 225.957	Int15 := SIMPSON(U¹⁵, DELTA, NN) = 222.100
Int16 := SIMPSON(U¹⁶, DELTA, NN) = 218.819	Int17 := SIMPSON(U¹⁷, DELTA, NN) = 214.969	Int18 := SIMPSON(U¹⁸, DELTA, NN) = 213.155
Int19 := SIMPSON(U¹⁹, DELTA, NN) = 208.503	Int20 := SIMPSON(U²⁰, DELTA, NN) = 205.454	Int21 := SIMPSON(U²¹, DELTA, NN) = 202.542

Un sous-programme MathCAD DMC sous forme d'une fonction utilisant le programme SIMPSON, est élaboré pour calculer le degré moyen de consolidation à la fin de chaque pas temporel :

$$DMC(DELTA, N) := \begin{cases} \text{for } k \in 2..21 \\ D_k \leftarrow \left(1 - \frac{SIMPSON(U^{(k)}, DELTA, N)}{SIMPSON(U^{(1)}, DELTA, N)} \right)^{100} \\ D \end{cases}$$

Figure III.24 : sous-programme MathCAD pour calculer le degré moyen de consolidation.

Avant d'exécuter ce programme, il est nécessaire de préparer le tableau des pressions interstitielles, calculées précédemment et lui transmettre à l'appel le pas Δz et le nombre de subdivisions de l'épaisseur de la couche de sol considérée.

L'exécution de ce programme nous a donné les degrés moyens de consolidation pour tous les pas temporels. Les résultats sont affichés par le programme sous forme d'un vecteur comme suit :

DMC(9) ^T =		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	1	13.642	17.637	20.736	23.307	25.534	27.506	29.281	30.898	32.364	33.762

DMC(9) ^T =		11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
	1	35.045	36.248	37.379	38.448	39.357	40.424	40.927	42.216	43.061	43.868

Figure III.25 : Le vecteur résultat contenant les degrés moyens de consolidation pour tous les pas temporels

Conclusion générale

Les résultats analytiques obtenus par la méthode de séparation des variables ou la méthode de Fourier sont très proches des résultats obtenus numériquement par la méthode des différences finies en résolvant le même problème au moyen des programmes élaborés dans ce travail. D'un autre côté les résultats obtenus par le programme réalisant la méthode des différences finies, sont en bonne concordance avec les résultats publiés par Craig. Ce qui permet de conclure également que le programme développé sur la base de la méthode de la différence finie peut être utilisé pour résoudre numériquement le problème unidimensionnel de consolidation avec une bonne précision. Nous avons constaté en plus que le degré de consolidation d'une couche d'argile dépend de l'excès initial de la pression interstitielle et des conditions aux limites de la couche. La comparaison des résultats avec ceux de Craig montre qu'un raffinement du maillage pourrait améliorer considérablement la précision des résultats. Les résultats numériques obtenus montrent également que le degré de consolidation et l'excès de la pression interstitielle dépendent fortement du coefficient de consolidation et de l'épaisseur de la couche.

Références Bibliographiques

Références Bibliographiques :

- [1] A. BOUHERAOUA et Jean-Pierre MAGNAN. *Analyse probabiliste de la consolidation unidimensionnelle des sols. REVUE FRANÇAISE DE GÉOTECHNIQUE*, 1996. 13 pages.
- [2] Craig R.F.(2007), "Soil Mechanics", Van Nostrand Reinhold(UK), CO.Ltd. Sixth Edition
- [3] Eric GONCALVÈS. *Résolution numérique, discrétisation des EDP et EDO. Institut national polytechnique de Grenoble*, 2005. 57 pages.
- [4] Eric GONCALVÈS da Silva. *Méthodes et Analyse Numériques. Institut national polytechnique de Grenoble*, 2007. 99 pages.
- [5] Francois CUVELIER. *Méthodes numérique II. Université paris, Paris 2019*. 103 pages.
- [6] Jean-Louis MERRIEN. *Analyse numérique avec MATLAB.DUNOD, Paris 2007*. 217 pages.
- [7] Jean-Pierre MAGNAN. *GÉOTECHNIQUE ET CATHÉDRALES. Institut français des sciences et technologies des transports de l'aménagement et des réseaux, France, 2012*. 61 pages.
- [8] Jean-Pierre MAGNAN. *Déformabilité des sols. Tassements. Consolidation. Techniques de l'Ingénieur, France*. 23 pages.
- [9] J. L. Justo, M. Bustamante, A. Jaramillo, P. Durand, R. Romero, C. Soriano. *Pathologie des fondations superficielles et travaux de réparation. Université de Séville, Espagne et Laboratoire Central des Ponts et Chaussées, Paris, France, 2003*. 306 pages.
- [10] Khaled MEFTAH. *COURS ET EXERCICES DE MECANIQUE DES SOLS. Algérie, 2008*. 97 pages.
- [11] Leila, Arabet. *Modélisation numérique du tassement et de la consolidation des sols sous l'oedomètre. Université 20 aout 1955 Skikda, 2011*. 8 pages.
- [12] Mehri, Allaoua. *Méthode des différences finies pour les équations aux dérivées partielles. Université 08 MAI 1945 Guelma, 2018*. 85 pages.
- [13] Mohamed KHEMISSA. *CONSOLIDATION DES MASSIFS DE SOLS MULTICOUCHES. Centre Universitaire Mohamed Boudiaf M'Sila, 2001*. 9 pages
- [14] Nicolas CHAMPAGNAT. *Différences finies et analyse numérique matricielle. IMAFA, 2010*. 51 pages.
- [15] NOUALI, Abdelhafid. *Contribution à l'analyse numérique de la consolidation des sols saturés. Université AboubakrBelkaid Tlemcen, 2013*. 100 pages.
- [16] Robert Bédard. *Equations aux dérivées partielles. Université du Québec à Montréal, 2007*. 226 pages.
- [17] Verya NASRI et Jean-Pierre MAGNAN. *Comportement numérique des éléments finis dans l'analyse des problèmes de consolidation des sols. LABORATOIRES DES PONTS ET CHAUSSÉE, JUILLET-AOÛT 1997*. 13 pages.