République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université M'hamed BOUGARA - BOUMERDES
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

MEMOIRE DE MAGISTER
OPTION : MODELES STOCHASTIQUES

THEME

MODELISATION STOCHASTIQUE EN FINANCE: MODELES DE TAUX ET EVALUATION D'ACTIFS

Présenté par

M^{lle} AIT-HOCINE FADILA

Soutenu publiquement le :

Devant le jury composé de :

Président	**M. Ibazizen**	**M.C**	**UMM – Tizi-Ouzou**
Rapporteur	**N. Abassov**	**M.C**	**UMBB - Boumerdès**
Examinateur	**K. Osmanov**	**Professeur**	**UMBB - Boumerdès**
Examinateur	**K. Khaldi**	**M. C.**	**UMBB - Boumerdès**

- BOUMERDES 2007 -

SOMMAIRE

CHAPITRE III : MODELES DE TAUX ET DE DEFORMATION DE LA COURBE DES TAUX

CHAPITRE IV : EVALUATION DES ACTIFS FINANCIERS

CHAPITRE V : SIMULATION DES TRAJECTOIRES DE PROCESSUS CONTINU

DEDICACES

Je dédie ce modeste travail à mes chers parents, à mes sœurs ainsi qu'à mes deux frères Karim et Mohamed ;

REMERCIEMENTS

Je voudrais exprimer ma reconnaissance tout d'abord à Messieurs Mellal Mouloud et Abassov Assim pour avoir accepter de dirigé ce mémoire.

Je remercie Monsieur Ibazizen, Monsieur Osmanov ainsi que Monsieur Khaldi d'avoir accepté de faire partie du jury.

Mes remerciements vont également à Monsieur Meglouli, Monsieur Benouarab ainsi que Monsieur Ali Ziane pour leur aidet précieuse.

Je remercie en particulier, mon frère Karim pour ses conseils, son aide et ses encouragements.

Je remercie enfin tous les amies et collègues qui ont été très importants pour moi pendant ces deux années de travail.

Résumé :

Ce mémoire traite de la modélisation stochastique en finance. Il faut peut être, dans un premier point, préciser que la modélisation dont on va parler ; touche particulièrement une partie du bilan de la société à savoir l'actif (taux court instantané, obligation zéro coupon). L'évaluation et la modélisation de cet actif passe par une étape de choix et de modélisation de la structure des taux d'intérêt.

Outre les chapitres introductifs, le troisième et le quatrième chapitre porte respectivement sur la modélisation des taux d'intérêt (dynamique des taux à temps discret et à temps continu) et l'évaluation des actifs financiers, tout en introduisant la notion d'absence d'opportunité d'arbitrage.

La modélisation des taux d'intérêt par des processus stochastiques continus, nous a poussé à introduire dans le dernier chapitre, quelques guides méthodologiques qui permettront au praticien d'effectuer de manière efficace des simulations de tels processus : la discrétisation des processus, l'estimation des paramètres et la génération de nombres aléatoires.

Abstract

The resurch paper treats the stochastic modelisation in finance. It must may be, in a first point, precise that the modelisation about which we are going to speak; touch particularly a part of the society's balance sheet to know the asset (short instantaneous rate, the zero coupon bonds). The evaluation and the modelisation of this asset passes by a choice step and modelisation of the interest rate structure.

In addition to the introductive chapters, the third and the fourth ones deal respectively with the modelisation of the interest rates (rates dynamic in a discreet time and a continuous one) and the evaluation of financial assets, by introducing the notion of the arbitrage opportunity absence.

The modelisation of the interest rates by the continuous stochastic processes, push us to introduce in the last chapter some methodological guides which permit the expert to carry out in an efficient manner simulations of such processes. The first guide is the discretisation of these latters, the second is the parameters estimation and the last is the generation of the uncertain numbers.

ملـــخـــص:

نعالج من خلال هذه المذكرة نماذج الستوكاستيك في مجال المالية. لذا بإمكاننا كنقطة أولية تحديد أن النموذجية التي سوف نتحدث عنها تمس بالخصوص جزء من ميزانية المؤسسة وهي الأصول (معدل فوري قصير، سندات القسيمة الصفرية). وتمر هذه الأصول في تقييمها ونموذجيتها بمرحلة اختيار و نموذجية هيكلة نسب الفوائد.

إضافة إلى الفصول التمهيدية، فإن الفصل الثالث والرابع يتمحوران حول معالجة نموذجية نسب الفوائد (حركية معدلات الفوائد ذات الأزمنة المتقطعة والمستمرة) وتقييم الأصول على التوالي، آخذين بعين الاعتبار مفهوم غياب فرصة التحكيم.

إن نموذجية نسب الفوائد عن طريق سيرورة الستوكاستيك المستمر، دفعنا في الفصل الأخير إلى إدماج بعض الدلائل المنهجية التي تسمح للممارس إنجاز عمليات محاكات السيرورات بطريقة فعالة.

Introduction générale:

La finance est un domaine d'une grande actualité. Sans être un spécialiste en la matière, le simple citoyen est chaque jour concerné par le comportement des taux d'intérêt. Taux d'intérêt, si l'on place son épargne ou si l'on emprunte, taux de change, si l'on voyage à l'étranger ou si l'on travaille pour une entreprise qui importe ou exporte. Il ne se passe guère de jours où l'individu, qu'il soit consommateur, voyageur, travailleur ou retraité, ne soit impliqué dans un événement relevant de la finance ou ayant un rapport direct avec elle.

Qu'en est-il de la finance aujourd'hui ? L'évolution se poursuit et la finance s'efforce d'apporter des réponses aux défis du monde. Son champ d'application s'est considérablement enrichi depuis une trentaine d'année, par l'apparition de marchés et produits nouveaux.

Ce bouleversement fait suite à une déréglementation dans les années 1970, rendant volatiles les taux d'intérêt et instables les taux de change. Des marchés organisés ont alors vu le jour et permis à des intervenants comme les entreprises industrielles et commerciales, les compagnies d'assurance et les banques d'intervenir massivement sur un marché unique et liquide. A la suite du premier de ces marchés à Chicago en 1973, la France a emboîté le pas, en créant le MATIF en 1986 (marché à terme international de France) puis le MONEP en 1987 (marché des options négociables).

Le développement spectaculaire de ces activités a été rendu possible grâce aux progrès technologiques, mais aussi grâce aux outils théoriques qui ont permis de valoriser les nouveaux produits financiers. Certains, ayant pour objet d'apporter de nouvelles solutions à de vieux problèmes partiellement résolus, d'autres apportent des réponses plus immédiates à des problèmes plus contemporains. C'est le cas des options et des taux d'intérêt, ces actifs financiers d'une nature particulière qui permettent des prises de décision complexes dans un contexte de plus en plus risqué.

Il y a d'ailleurs, dans ce domaine un exemple tout à fait remarquable de complémentarité entre la théorie et la pratique, dans la mesure où ce n'est qu'à partir du moment où un modèle théorique d'évaluation des options proposé en 1973 par Black & Scholes, qu'on a pu généraliser l'utilisation de cet outil financier nouveau. Puis, viennent par la suite d'autres modèles à savoir celui de Vasicek(1977), de Cox-Ingersoll-Ross (1985) de Heath-Jarrow-Morton (1992) et d'autres pour modéliser l'évaluation de la structure temporelle des taux d'intérêt ; évaluation qui va permettre de reproduire l'évolution des titres du marché obligataire d'une part, et offrir une opportunité d'évaluer le prix d'une obligation sans coupon d'autre part.

Aujourd'hui, les ingénieurs des départements de recherche et développement des institutions financières manipulent au quotidien une large palette d'outils des mathématiques appliquées. Notre contribution dans le cadre de ce mémoire, consiste en l'application de ces derniers dans la modélisation des taux d'intérêt et l'évaluation des actifs financiers, tout en introduisant la notion d'absence d'opportunité d'arbitrage ce qui constituent l'objet de ce travail de recherche qu'on a structuré en cinq chapitres :

Dans le premier chapitre, on introduit quelques notions basiques se rattachant aux vocabulaires du marché financier, ses fonctions ainsi que les instruments qui le composent.

Dans le deuxième chapitre, on se propose de donner la définition des principaux outils des mathématiques appliquées à la finance, en partant des probabilités (mouvements brownien, intégrale stochastique, martingales, …) pour aller vers l'analyse numérique (équation aux dérivées partielles et leur résolution numérique).

Dans le troisième chapitre, nous nous intéresserons à la modélisation de l'actif, cette partie du bilan de la société qui compte parmi ses principales composantes les obligations zéro coupon ; dont l'évaluation et la modélisation passe par une étape de choix et de modélisation de la structure des taux d'intérêt, modélisation que nous allons présenté dans le cas ou la dynamique des taux est à temps continu et discret.

Dans le quatrième chapitre, qui traite de l'évaluation des actifs financiers, nous allons montrer que l'hypothèse d'absence d'opportunité d'arbitrage implique qu'il existe une unique mesure appelée probabilité risque neutre équivalente à la probabilité historique tels que la valorisation des actifs financiers (actifs de base et actifs dérivés) sous cette probabilité sont des martingales. Autrement dit, les différents prix du marché s'établissent par l'espérance, sous cette probabilité des gains actualisés.

Enfin, la fréquence des variations des cotations des actifs financiers évalués précédemment, a conduit les financiers à considérer des processus stochastiques continus pour modéliser les évolutions des taux d'intérêt. La mise en œuvre pratique de tels processus, nous a poussé dans ce dernier chapitre à donner les trois étapes clés, que le praticien pourra suivre pour simuler les trajectoires de tels processus : la discrétisation des processus, l'estimation des paramètres et la génération de nombres aléatoires.

CHAPITRE I : LES MARCHES FINANCIERS

Introduction

Une révolution de grande ampleur a eu lieu depuis une trentaine d'années sur les marchés financiers, suite à une politique affirmée de dérégulation. Ce nouveau paysage financier est né notamment des déséquilibres et des incertitudes qui pèsent sur les relations économiques internationales depuis le début des années 1970 (endettement des pays en voie de développements, instabilité des taux de change).

La modélisation stochastique en finance nous a poussé à introduire dans ce chapitre une étude du marché financier. Après avoir donner la définition du marché financier et ses fonctions, nous allons citer les instruments qui le composent à savoir les actifs de base et les actifs dérivés ainsi que les deux marchés sur lesquels se négocient ces derniers, ensuite nous définissons la volatilité du marché, son rendement et enfin le facteur risque qui joue un très grand rôle dans l'évolution du marché financier.

I- Marchés financiers

1-Définition

Une économie peut en général se financer grâce à la complémentarité des agents, les uns ont des capacités de financement et les autres ont des besoins de financement. Ils investissent plus qu'ils n'épargnent. Ces agents se rencontrent [33] dans un espace appelé marché financier, où sera déterminé le prix appelé cours d'un titre (action, obligation). Autrement dit, le marché financier est le marché sur lequel s'échangent les valeurs mobilières : obligations et titre dérivés (certificat d'investissement, titres participatifs ; …). Ce dernier est constitué du marché primaire et du marché secondaire.

Les transferts des uns vers les autres s'opèrent grâce aux systèmes financiers composées d'institutions financières et d'un marché financier.

2-Vocabulaire des marchés financiers [59]

-Un titre financier est un contrat où les parties s'échangent des flux d'argent.

-Un marché financier est un lieu où l'on achète et vend des titres financiers.

-La valeur d'un titre financier est un montant positif ou négatif, qui représente l'enrichissement ou l'appauvrissement des flux futurs.

-Le prix d'un titre est un montant convenu entre deux parties en échange du titre. Le plus souvent c'est l'acheteur qui verse ce montant.

II- Les fonctions des marchés financiers [44]

1-Le marché primaire :

Appelé aussi « marché du neuf », c'est le marché où sont émises les valeurs mobilières nouvelles par des sociétés commerciales privées, publiques ou semi-publique pour leur financement à long terme, par l'Etat lui-même (pour régularisé le déficit budgétaire), par les institutions financières pour leur financement ou encore par les holdings pour lancer leurs prises de participation.

2-Le marché secondaire :

Appelé aussi le marché de l'occasion. Une fois les titres émis sur le marché primaire, leurs négociations s'organisent sur le marché secondaire, c'est-à-dire un centre de transactions des valeurs déjà en circulation, entre des épargnants qui souhaitent les vendre et ceux qui souhaitent les acquérir.

III- Le marché boursier

Représente la famille traditionnelle des marchés financiers permettant l'émission et le transfert de titres traditionnels comme les actions et les obligations[60]. Jusqu' en 1988 c'étaient les officiers ministériels (les agents de change) qui détiennent le monopole des transactions boursières, cependant le crack de 1987 est venu modifier cette organisation et les agents de change se sont transformés en sociétés de bourse.

1-Les sociétés de bourses [67]

On distingue à l'intérieur :

***Euronext :**

Cette société a pour mission de veiller au bon déroulement de la cotation des valeurs, elle peut intervenir pour interrompre la cotation, notamment dans le cas d'irrégularité ou d'événement propres à engendrer une spéculation injustifiée. Une autre de ses missions est d'assurer le calcul et la cotation des indices (ex : CAC[1] 40). Elle est issue de la fusion de plusieurs bourses européennes (Amsterdam, Paris et Bruxelles), auparavant l'organisme se nommait Paris bourse SBF SA.

***Le conseil des bourses de valeurs (CBV)**

Le CBV tient un rôle d'organisation et de réglementation du marché par le biais de règlement tels que : les conditions d'agrément des sociétés de bourses, les modes d'admission ou de radiation à la cote….

***La société de compensation des marchés conditionnels**

Cette filiale de la SBF organise le marché des options négociables de Paris (MONEP)

***MATIF S.A**

Cette société réalise toutes les opérations de compensation du MATIF (marché à terme International de France)

***La commission des opérations de bourse**

La COB a été crée en 1967 pour surveiller le marché, on entend d'ailleurs couramment dire qu'il s'agit du « gendarme » de la bourse, c'est une autorité administrative indépendante dirigée par six membres. Ses trois principaux rôles sont la protection de l'épargne, l'information des investisseurs et la garantie du bon fonctionnement des négociations.

[1] Cotation assistée en continu

***Le conseil des marchés financiers (CMF)**

Le CMF est une organisation professionnelle dirigé par un collège de seize membres. Il est l'autorité des marchés français et sa compétence s'étend à toute les opérations qu'elles soient effectuées sur un marché réglementé ou de gré à gré. Ces principales attributions sont : la tutelle des marchés réglementés, la gestion des offres publics …

Le marché boursier est composé de deux compartiments : le compartiment action - ou marché des actions – et le compartiment obligations - ou marché des obligations.

2-Le marché des obligations

Sur ce marché, on va distinguer le marché primaire et le marché secondaire. Le marché primaire est celui qui concerne les nouveaux emprunts émis par l'Etat, les collectivités locales et les entreprises, auxquels peuvent souscrire les particuliers. Le marché secondaire est le marché de l'occasion. C'est le marché sur lequel s'échangent les valeurs déjà émises.

3-Le marché des actions

Le marché Français des actions peut lui-même être subdivisé en plusieurs éléments, on distingue :

- Le marché officiel - ou cote officielle – comprenant le marché à règlement mensuel –
- ou RM - et le marché au comptant ou à règlement immédiat – ou RI
- Le second marché
- Le nouveau marché
- Le marché hors cote

a) Le marché officiel

Les entreprises souhaitant s'introduirent sur le marché officiel doivent satisfaire à diverses conditions. Elles doivent entre autres :

- Mettre à la disposition du public vingt cinq pour cent de leur capital ;
- Avoir versé un dividende au cours des trois derniers exercices, lesquels doivent avoir été bénéficiaire ;
- S'engager à publier régulièrement des informations.

b) Le marché à règlement mensuel

C'est sur ce marché que sont cotés les actions des entreprises les plus importantes. Il s'agit d'un marché à terme. Il existe donc un délai entre la conclusion du contrat (achat et vente) et son exécution (livraison des titres et paiement). En effet, toutes les opérations effectuées au cours du mois sont dénouées le jour de liquidation ($6^{ème}$ jour de bourse).

c) Le second marché

Ouvert en 1983, il est destiné à recevoir des entreprises de taille modeste mais dont les perspectives sont attrayantes. Les conditions d'admission sont moins restrictives que sur le Marché officiel. Les entreprises souhaitant s'introduirent au second marché doivent satisfaire les critères suivants :

- Mettre à la disposition du public 10 % au moins du capital;
- Présenter deux années de comptes certifiés.

d) Le nouveau marché

Le nouveau marché, ouvert en Février1996, est un marché autonome, régie par une société propre : la société du nouveau marché (filiale de la SBF). Il s'adresse à des sociétés européennes, jeunes, innovatrices, qui ont un besoin de capitaux pour se développer. Le fonctionnement du nouveau Marché est assurée par des intermédiaires financiers agrées par la société du nouveau Marché.

e) Le marché hors cote

C'est un marché de moindre importance, réservé aux petites entreprises, ou à celles qui ont été rétrogradées du comptant ou du RM. Il s'agit d'un marché étroit, c'est-à-dire que le volume des transactions y est faible .Les conditions d'admission sur ce marché y sont simple puisque n'importe quelle société peut y être admise à condition de présenter les trois derniers bilans.

f) Les marchés dérivés

Ils s'agit des marchés de produits dérivés dont font partie entre autres les contrats à terme et les options. De plus amples explications concernant ces marchés sont données dans la description des instruments financiers.

IV- Les instruments financiers

1-Définition :

Un actif ou instrument financier est un contrat [63] entre deux parties (un « créditeur » et un « débiteur ») aux termes duquel :

- Le créditeur remet une somme d'argent F^0 au débiteur à une date t^0
- Le débiteur s'engage à verser au créditeur des flux Ft dans l'avenir à des dates t, selon un certain échéancier convenu. Les flux Ft peuvent être certains, aléatoires, ou fonction de certains événements.

Un actif financier est donc fondamentalement une convention entre deux agents économiques par laquelle s'échange, dans une certaine proportion « de l'argent d'aujourd'hui » contre « de l'argent de plus tard ».

2-Typologie :

La typologie utilisée habituellement distingue deux grands groupes d'actifs : les actifs de base et les actifs dérivés.

2-1 Actifs de base :

Dans le but de clarifier l'exposé, on se propose tout d'abord de dresser une liste des actifs de base.On distingue 4 types d'actifs de base [3] dont on donnera pour chacun une description.

2-1-1 Actions :

Une action est un titre de participation dans une société de capitaux qui confère à son possesseur la qualité d'associé et sauf exception, lui donne un droit proportionnel sur la gestion de l'entreprise, sur les bénéfices réalisés et sur l'actif social.

2-1-2 Obligations :

Les obligations sont des titres de créances à long terme représentatifs de dettes. Une obligation donne droit au paiement d'un intérêt en général annuel et au remboursement du capital. Le détenteur d'une obligation perçoit un revenu connu à l'avance ou dont la révision se réalise dans les conditions prévues au moment de l'émission. Les obligations peuvent être émises par les entreprises privés ou publiques, par l'Etat, ainsi que par les administrations publiques et les collectivités locales.

a) Vocabulaire [6]

La valeur nominale d'une obligation est celle qui sert de base au calcul de l'intérêt en général annuel versé (coupon). Le coupon est alors égal au taux facial (fixé à l'émission) multiplié par le nominal.

Le prix d'émission est le montant du versement demandé au souscripteur lors de l'émission de l'obligation. Lorsque le prix d'émission est égal à la valeur nominale de l'obligation, l'émission est dite au pair.

On distingue plusieurs catégories [60] d'obligations qui répondent à des attentes différentes :

- **Les obligations ordinaires** sont des obligations à taux fixe dont le coupon versé en général une fois par an est identique sur toute la durée de vie du titre.
- **Les obligations à taux flottant** sont composées des obligations à taux variables ou révisable. Leur particularité est d'offrir une rémunération (taux d'intérêt) qui varie dans le temps en référence à une moyenne de taux constatée sur le marché.

- **Les obligations indexées** sont des titres dont la valeur de remboursement et /ou les intérêts sont liés à l'évolution d'un indice de référence.

Nous citerons d'autres types d'obligations originales [44], mais encore peu utilisées :

- Obligation à coupon zéro,
- Obligation à coupon unique,
- Obligation assimilable du trésor

2-1-3 Absence d'opportunité d'arbitrage (AOA)

Une opportunité d'arbitrage est la possibilité donnée à un intervenant du marché de monter une opération à investissement nul lui rapportant dans le futur des gains toujours positifs et strictement positifs avec une probabilité non nulle.

2-1-4 Change

Un taux de change est le prix d'une devise exprimé en une autre devise. Le prix en Yen d'un dollar était au 22 janvier 2004 de 107. Cette valeur, qui résulte d'un équilibre entre l'offre et la demande fluctue jour après jour. Sur le marché des changes peuvent être aussi considérés comme actifs de base les contrats à terme de change. Il s'agit pour un intervenant d'acheter pour une date future déterminée dans le contrat une certaine quantité de devise à un prix préfixé.

2-1-5 Matières premières

Le marché des matières premières a vu le développement de produits financiers permettant aux acteurs de se couvrir contre les variations de prix. Il s'agit essentiellement de contrat de vente et d'achat à terme. Sur certains marchés ces contrats existent depuis très longtemps (marché à terme de métaux à Amsterdam au 18$^{\text{ème}}$ siècle, marché à terme de céréale au Chicago Board of trade au 19$^{\text{ème}}$ siècle) et sur d'autres, ils sont nouvellement apparus comme sur le marché de l'énergie (pétrole, gaz et électricité).

2-1-6 Marché des produits de crédit

Les Crédit Default Swap ou CDS

Un CDS est un produit financier qui procure une assurance contre un événement de défaut d'une entreprise pré définie. L'acheteur du CDS est l'acheteur de la protection contre le risque de défaut de l'entreprise. En cas de défaut, il recevra une indemnité et en contrepartie il doit payer une prime, généralement tous les 3 mois ou tous les 6 mois jusqu'à la maturité du CDS. Inversement le vendeur de la protection, reçoit la prime et paiera à l'acheteur une indemnité en cas de défaut.

2-1-7 Prix forward d'un actif

Nous sommes en t et l'on considère un actif S (une obligation ou une action) dont on veut déterminer le prix à terme en *T* (>*t*). Pour simplifier on considère que cet actif ne verse pas de coupon ou de dividende entre *t* et *T*.

2-2 Les produits dérivés

A- Présentation des produits dérivés

Définition :

Les actifs dérivés sont de façon générale des contrats de vente ou d'achat d'actifs financiers de base. Ces instruments sont appelés « dérivés » parce qu'ils [25] sont fondés sur le cours d'autres instruments financiers (actions, obligations) ou d'autres biens (matières premières), et qu'ils dérivent donc leur valeur de la valeur de ces autres actions, devises ou matières premières « sous- jacentes ». Ils ont un effet de levier important et peuvent conduire très vite à des gains ou à des pertes considérables.

2-2-1 Les contrats à terme

Ce type de contrat est symétrique, c'est-à-dire que chaque contrepartie a autant de chance de gagner ou de perdre de l'argent.

Définition :

Un contrat à terme [59] est un contrat d'achat ou de vente d'un produit financier, passé entre deux contreparties, dont toutes les caractéristiques sont fixés à l'avance : date de règlement, prix à terme, etc. Le prix conclu est appelé cours à terme, et l'échange se fera à ce prix quelque soit le cours du marché à la date de livraison.

On distingue :

1-Le FRA (forward rate agreement)

C'est un contrat à terme qui permet de garantir immédiatement un taux d'intérêt futur. Le FRA comporte 2 périodes :

-Une période d'attente : pendant cette période, il ne se passe rien l'une ou l'autre des contreparties a toute latitude pour déboucler ou non son opération par quelque arbitrage que ce soit.

-Une période de garantie : c'est sur cette période que porte la garantie de taux. Au départ de cette période, on comparera le taux garanti avec son équivalent (en terme de période) sur le marché. La différence sera réglée d'avance (donc actualisée) par l'une des contreparties.

2-Les futurs et les forward

Les contrats futurs sont des contrats à terme standardisés que l'on traite en bourse, tandis que les forward sont des contrats à terme traités de gré à gré.

3-Les swaps :

Le swap de taux d'intérêt est un contrat de gré à gré par lequel deux parties conviennent de s'échanger, à date fixe, des flux d'intérêts d'un capital, intérêts calculés sur des références de taux. Seul le différentiel d'intérêt est payé, le capital n'est jamais versé.

2-2-2 Les options

Une option [33] est un contrat qui permet à son détenteur d'acheter ou de vendre une certaine quantité d'un bien ou un actif à un cours convenu à l'avance, appelé prix d'exercice à (ou jusqu'à) une date fixée, dite échéance de l'option.

En contrepartie, l'acheteur verse immédiatement au vendeur de l'option une prime qui est le prix de l'option.

1-Catégories d'options [45]

-Les options européennes : l'acheteur ne peut exercer son droit qu'à l'échéance.

-Les options américaines : L'acheteur peut exercer son droit, à tout moment entre la date de création de l'option et la date d'échéance.

Parallèlement aux options classiques, apparaissent depuis les années 90, sur les marchés de gré à gré, des options dites « exotiques » :

- Les options asiatiques, dont le prix d'exercice c'est à dire le cours auquel l'option peut être exercé à l'échéance est fonction de la moyenne des cours des sous jacents enregistrés durant la durée de vie de l'option.
- Les options lookbacks, dont le prix d'exercice à l'échéance est fonction du maximum ou du minimum des cours du sous jacent enregistrés durant la durée de vie de l'option.
- Les options barrières qui peuvent être annulés si le cours franchit un certain seuil.
- Les options parisiennes qui peuvent être annulées ou activées si le cours reste dans une certaine zone plus d'un temps donné.
- Les options d'échange qui permettent d'échanger une action X contre une action Y à une date future.

2-Le bon d'option ou warrant

Le bon d'option est un titre intermédiaire entre le bon de souscription et l'option classique. Emis par un établissement financier, les valeurs sous-jacentes sont des actions, obligations, devises, ….Ils se distinguent des options par leur échéance généralement plus longue.

3-Call et Put européens

Définition 1 :

On appelle option d'achat [24] européenne, ou call européen, le contrat qui confère à son acheteur le droit (mais pas l'obligation) d'acheter un actif risqué à un cours K fixé à la signature du contrat (prix d'exercice), à la date future T appelée échéance. L'actif risqué peut être une action, une obligation, un taux de change ou encore une matière première.

Définition 2 :

On appelle option de vente [16] européenne, ou put européen, le contrat qui donne à son détenteur le droit (mais non l'obligation) de vendre une action à la date $N > 0$ (échéance) au prix K (prix d'exercice ou strike) fixé à l'avance. Ce contrat a un prix ; il est échangé sur le marché.

B- Les marchés des produits dérivés

1-Le MATIF

Le Matif [59] (Marché à Terme International de France) a été crée le 20 février 1986, la même année que le marché des valeurs du trésor. Proposant une large gamme de produits de couverture des risques financiers (taux d'intérêts, indices boursiers, marchandises). Le Matif s'inscrit aujourd'hui parmi les plus grands marchés à terme internationaux. Son rôle est de proposer aux acteurs économiques et financiers, des instruments négociables de gestion des risques liés aux fluctuations des intérêts à long, moyen et court terme, aux variations du cours de certaines matières premières.

2-Le MONEP

Le MONEP [60] (Marché des options Négociables de Paris) a été créé le 10 septembre 1987. Il a pour objet de traiter les options négociables sur actifs (action et indice), alors que les options sur contrat à terme sont traitées sur le marché à terme.

V- Volatilité, Rendement et Risque :

1-Volatilité

Définition :

La volatilité [37] est le paramètre qui mesure l'ampleur et/ou la fréquence des variations d'une série chronologiques, par exemple du prix d'un titre. Autrement dit, la volatilité mesure le risque de marché et c'est un paramètre clé en finance, qui parfois recouvre des notions un peu différentes telles que : volatilité instantanée locale, volatilité moyenne sur une période, etc.…

1-1 La volatilité locale

La volatilité locale [18] est le paramètre qui mesure le risque associé à la variation instantanée du sous-jacent. Elle peut être déterministe comme dans le cas d'un sous-jacent qui suit un brownien géométrique, ou stochastique comme dans le cas des options.

2-Rendement

Définition :

Il y a plusieurs définitions possibles des rendements [18], qui en général sont équivalentes lorsque les phénomènes sont déterministes, mais qui différent dans le cas stochastique. La différence est explicable par la formule d'Itô. Nous supposons que les rendements entre deux périodes sont mesurés par la différence des logarithmes des cours.

L'hypothèse que les rendements entre 0 et t suivent un mouvement brownien de tendance $\mu - \frac{1}{2}\sigma^2$ et de coefficient de diffusion σ, se traduit par les propriétés suivantes du processus des prix $\{ S_t, t \in [0, T]\}$:

- $S_0 = x$
- Les rendements $\log(S_t) - \log(S_s)$ suivent une loi gaussienne de moyenne $(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)(t-s)$ et de variance $\sigma^2(t-s)$.
- Pour tout $0 < t_1 < t_2 \ldots\ldots < t_n$, les accroissements relatifs $\{ \frac{S_{t_{i+1}}}{S_{t_i}},\ 0 \le i \le n-1\}$ sont indépendants, et de même loi.

En d'autres termes, il existe un mouvement brownien W tel que

$$S_t = f(t,W) = x\exp(\mu t + \sigma W - \frac{\sigma^2}{2}t)$$

Par application de la formule d'Itô pour le mouvement brownien et la fonction

$f(t,z) = x\exp(\mu t + \sigma z - \frac{1}{2}\sigma^2 t)$ dont les dérivées valent :

$$f_t'(t,z) = f(t,z)(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2), \quad f_z'(t,z) = f(t,z)\sigma, \quad f_{zz}''(t,z) = f(t,z)\sigma^2$$

Nous voyons que,

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu\, dt + \sigma\, dW_t$$

3-Risque

L'investissement en valeurs mobilières [33] constitue le sacrifice d'un avantage immédiat ou une absence de consommation immédiate en échange d'avantages futurs. Dans la mesure ou le présent est connu avec certitude, l'investissement en valeurs mobilières constitue l'échange d'un avantage certain et immédiat contre un avantage futur et incertain. Ainsi le risque d'un actif financier pour un investisseur peut être défini comme l'incertitude qui existe quant à la valeur de cet actif à une date future. Autrement dit, le risque [56] peut être défini comme la combinaison de l'incertitude et de l'exposition, en l'absence d'incertitude ou d'exposition, il n'y a pas de risque.

Conclusion

Les marchés financiers dans le monde sont en profonde mutation. Nous avons principalement décrit dans ce chapitre les marchés financiers, leurs fonctions ainsi que les sociétés de bourse, là où sont négociés les actions et les obligations. D'autres instruments financiers sont apparus ces dernières années, notamment les contrats à terme et les options.

Ceux-ci sont négociés sur deux marchés : le MATIF (marché à terme international de France) et le MONEP (marché des options négociables de paris). Les instruments financiers classiques et nouveaux constituent un soubassement à la modélisation stochastique en finance, d'où la définition de ceux-ci, leur volatilité et leur rendement étaient d'un intérêt majeur.

CHAPITRE II : INTRODUCTION AUX CALCULS STOCHASTIQUES

INTRODUCTION :

Les applications en finance sont un prétexte à l'introduction des bases de calcul stochastique. On suppose que les marchés offrent des actifs dont les prix dépendent du temps et du hasard, on peut donc les modéliser par des processus stochastiques, on suppose aussi que l'espace des états de la nature, Ω, est infini, que l'on obtient continûment l'information sur les marchés et que les échanges peuvent s'opérer à tout instant. On est ainsi amené à introduire dans ce chapitre un certain nombre d'outils stochastique, à savoir dans un premier temps, le concept général de processus stochastique, et dans un deuxième temps, les propriétés des trajectoires les plus couramment rencontrés dans la littérature financière ainsi que les notions de filtration, processus adapté et processus prévisible.

Nous abordons ensuite les processus de marcov et les processus de diffusion avant de présenter le mouvement brownien (ou processus de Wiener) et nous développerons par la suite les propriétés fondamentales (pour la finance) de ce processus, en particulier celles qui sont reliées à la propriété de martingale,et nous traiterons dans les deux dernières parties les équations différentielles stochastiques et les équations aux dérivées partielles qui sont d'une grande importance dans la résolution des problèmes de finance.

II- Caractéristiques générales [54]

On considère un espace probabilisé *(Ω, A, P)* quelconque ; l'ensemble des dates est noté Γ avec $\Gamma = [0,T]$, $T < \infty$ puisque nous supposons que le temps s'écoule en continu, les agents pouvant intervenir à n'importe quel moment sur le marché.

Définition 1 :

On appelle processus stochastique toute famille de variables aléatoire $X = (X_t, t \geq 0)$ à valeurs dans $(\Re, B\Re)$

Définition 2 :

Un processus stochastique X est dit continu s'il existe un ensemble $\mathcal{N}$ négligeable tel que $\forall\ \omega \notin \mathcal{N}$, L'application : $t \mapsto X_t(\omega)$ soit continue.

X est dit continu à droite et limité à gauche (càdlàg) s'il existe un ensemble $\mathcal{N}$ négligeable tel que $\forall\ \omega \notin \mathcal{N}$, L'application $t \mapsto X_t(\omega)$ soit continue à droite et limité à gauche.

i.e

$$\lim_{s \downarrow t} X_s(\omega) = X_t(\omega) \quad \text{et} \quad \lim_{s \uparrow t} X_s(\omega) \text{ existe et est finie}$$

Définition 3 :

Les applications $t \rightarrow X_t(\omega)$ pour ω fixé dans Ω sont appelés trajectoires du processus *X*.

Trois types de trajectoires sont couramment rencontrés dans les modèles financiers :

1-Hypothèse classique pour décrire la dynamique des prix ou des rentabilités des titres ou encore des taux d'intérêts consiste à supposer que les trajectoires sont continues. C'est le cas par exemple dans le modèle de Black et Scholes (1973) d'évaluation des options ou dans les modèles de taux court comme ceux de Vasicek (1977), Cox-Ingersoll-Ross (1985), ou encore dans le modèle de Heath-Jarrow-Morton (1992) pour les taux forward.

2-Dans certains cas on suppose des trajectoires càdlàg, c'est-à-dire « continues à droite et possédant une limite à gauche ». En effet, les trajectoires continues ne permettent pas toujours une description adéquate, en particulier si les variables modélisées peuvent subir des variations violentes lorsque les marchés sont très agités.

3-Les trajectoires de processus peuvent être càglàd, c'est-à-dire continues à gauche et possédant une limite à droite. Cette hypothèse peut être adaptée à la description des quantités de titres détenus par un agent. En effet, les modifications de portefeuilles s'effectuent à des instants discrets du temps et l'hypothèse de continuité à gauche plutôt qu'à droite est justifié par le fait que si une trajectoire est continue à gauche, $X_t\ (\omega)$ est connu dès que les $X_s\ (\omega\ ),\ s<t$ sont connus.

Définition 4 :

1-Deux processus X et Y sont indistinguables s'ils ont en commun « presque toutes » leurs trajectoires, ce qui s'écrit :

$$\exists\ \Omega^*\in \text{A tel que } P(\Omega^*) = 1 \text{ et } \forall\ \omega \in \Omega^*,\ \forall\, t \in \Gamma,\quad X_t\ (\omega)=Y_t(\omega)$$

2-Un processus Y est une modification de X si pour tout $t\in \Gamma$, l'ensemble $\Omega_t = \{\ X_t = Y_t\ \}$ est de probabilité 1. On dit alors que Y est une version de X.

II-1 Filtrations, processus adaptés et processus prévisibles

Définition 5[61]

1-On appelle filtration sur Ω toute famille croissante (au sens de l'inclusion) $F=\{\ F_{t,}\ t\in \Gamma\ \}$de sous tribu de A

2-F est continue à droite si pour tout $t<T$, $F_t = \bigcap_{s>t} F_s$; elle est dite complète si chaque tribu F_t contient tous les ensembles négligeables c'est-à-dire les ensembles contenues dans F_0.

3-Un processus X est adapté à une filtration F_t si pour tout t, X_t est F_t - mesurable

4-On appelle filtration naturelle d'un processus X et l'on note F^X la plus petite filtration par rapport à laquelle X est adapté ; en d'autre termes, pour tout t, F_t^X est la tribu engendrée par les variables $X_s,\ s\leq t$.

Définition 6 :

X est un processus prévisible s'il est adapté à F et si ses trajectoires sont continues à gauche. Nous avons déjà donné l'intuition de cette définition lorsqu'ont été évoqués les processus càglàd ; si une fonction f est continue à gauche en x_o, on a :

$$\lim\ f(x) = f(x_0)$$

$$x \to x^{-0}$$

Par conséquent si f est connu pour toutes les valeurs inférieures à x_o, elle est connue en x_o. De la même façon, lorsque les trajectoires sont continues à gauche, connaître les valeurs prises par le processus aux dates strictement inférieures à t revient à connaître X_t, d'où le qualificatif de prévisible.

Définition 7 :

Soit X un processus défini sur $(\Omega, \mathrm{A}, \mathrm{P})$;

1-X est à accroissements indépendants si pour tout n-uple $(t_1, \ldots, t_n)$ tel que $t_1 \leq t_2 \leq \ldots \leq t_n$, les variables X_{t_j} - $X_{t_{j-1}}$ sont indépendants.

2-X est à accroissements stationnaires si pour tout $t \in \Gamma$ et tout $h > 0$, la loi de $X_{t+h} - X_t$ ne dépend que de h.

II-2 Processus de diffusion

II-2-1 Processus de Markov

Définition 8 :

Soit X un processus défini sur (Ω, A, P, F), X est un processus de Markov si pour tout $(B_1, \ldots B_n)$ $\in ß_{\Re}^{n}$ et tout $(t_1, \ldots, t_n) \in \Gamma^n$ tel que $t_1 < t_2 < \ldots\ldots < t_n$, on a :

$$P(X_{t_n} \in B_n / X_{t_j} \in B_j, j=1, \ldots n-1) = P(X_{t_n} \in B_n / X_{t_{n-1}} \in B_{n-1})$$

II-2-2 Processus de diffusion et processus d'Itô

Définition 9 :

a- On appelle processus de diffusion tout processus markovien à trajectoires continues

b- Un processus X est appelé Processus d'Îtô si X est un processus de diffusion et s'il existe deux fonctions μ et σ définies sur $\Re \times \Gamma$ à valeurs respectivement dans $\Re \times \Re^+$ définies par :

$$\mu(x,t) = \lim_{h \to 0} \frac{E(X_{t+h} - X_t / X_t = x)}{h} \quad \text{et} \quad \sigma^2(x,t) = \lim_{h \to 0} \frac{V(X_{t+h} - X_t / X_t = x)}{h}$$

Pour interpréter μ et σ financièrement, on considère X_t comme étant le logarithme du prix de date t d'un actif financier, dans ce cas X_{t+h} - X_t est la rentabilité de l'actif sur l'intervalle $[t, t+h]$. μ (x, t) est alors la rentabilité instantanée en t lorsque le processus X est dans l'état x. La division par h implique que μ est exprimé « par unité de temps ». μ est une mesure de tendance du processus mais on garde en général l'appellation anglo-saxonne »drift. σ^2 est, de la même façon, la variance instantanée de la rentabilité, mesuré par unité de temps. Dans la littérature financière on fait rarement la distinction entre processus de diffusion et processus d'Itô car c'est toujours cette dernière catégorie qui est utilisée.

Les processus d'Itô sont relativement bien adaptés à la description de l'évolution des prix, des rentabilités ou des taux d'intérêts. Toutefois, la continuité des trajectoires de ces processus limite parfois leur adéquation aux dynamiques observées, en particulier dans les périodes agités pendant lesquelles on constate de fortes variations dans des intervalles de temps très courts.

On dira aussi que *X* est un processus d'Itô si :

$$X_t = x + \int_0^t b_s ds + \int_0^t \sigma_s dW_s$$

où *b* et σ sont deux processus adaptés tels que :

$$\int_0^t |b_s| ds < \infty \quad \text{et} \quad \int_0^t |\sigma_s|^2 ds < \infty$$

On utilise la notation plus concise suivante

$$\begin{cases} dX_t = b_t dt + \sigma_t dW_t \\ X_0 = x \end{cases}$$

Le coefficient *b* est le drift ou la dérive, σ est le coefficient de diffusion.

II-3 Formule de Itô [38,50]

C'est un outil qui permet du calcul integrodifferentiel que l'on appelle communément « calcul de Itô ».C'est du calcul sur les trajectoires des processus, donc la connaissance de ce qui se passe pour une réalisation ω de l'aléa.

II-3-1 Lemme d'Itô

Le Lemme d'Itô nous donne le processus que suit toute fonction d'une variable qui suit un processus d'Itô et du temps : Ainsi, si *X* suit un processus d'Itô de la forme : $dX = a(t, X)dt + b(t, X)dW$ et si f est une fonction de *X* et du temps t, de classe C^1 par rapport à *t* $\in$ *[0, T]* et de classe C^2 par rapport à $X \in \Re$, alors f suit le processus suivant :

$$\mathrm{d}f = \left[\frac{\partial f}{\partial X} a + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial X^2} b^2\right] dt + \frac{\partial f}{\partial X} b dW$$

III- Espérance conditionnelle [16]

Soit *(Ω ,F, P)* un espace de probabilité et Ģ une sous tribu de *F* et soit *X* une variable aléatoire positive intégrable $(E\,X := \int_\Omega X\,dP < +\infty)$

Définition :

Soit *Ģ* une sous tribu de *F*, l'espérance conditionnelle d'une variable aléatoire (v.a) intégrable *X* sachant Ģ est la v.a. *E [X / Ģ]* définie par les deux propriétés suivantes :

i) $E[X / \mathcal{G}]$ est $\mathcal{G}$ – mesurable,

ii) Pour tout $A \in \mathcal{G}$, $\int_A XdP = \int_A E(X / \mathcal{G})\, dP$

Propriétés de l'espérance conditionnelle [41]

a- $E(\alpha X + \beta Y / \mathcal{G}) = \alpha\, E(X/ \mathcal{G}) + \beta\, E(Y/ \mathcal{G})$, α, β deux constantes

b- $E(E(X/ \mathcal{G}))= E(X)$

c- $E(X/ \mathcal{G}) = X$ si X est $\mathcal{G}$- mesurable

d- $E(X/ \mathcal{G}) = E(X)$ si X est indépendante de $\mathcal{G}$

e- $E(X .Y / \mathcal{G}) = Y. E(X / \mathcal{G})$ si Y est $\mathcal{G}$- mesurable

f- Si $\mathcal{G}$ et H sont deux tribus telle que $H \subset \mathcal{G}$ $E(X /H) = E(E(X/H)/\mathcal{G}) =E(E(X/ \mathcal{G})/H)$

g- Positivité- monotonie : $X \geq Y$ *p.s* $\Rightarrow E(X / \mathcal{G}) \geq E(Y / \mathcal{G})$ p.s (presque sûrement)

h- Si $|X_n| \leq Y$ ou Y est intégrable et si X_n converge *p.s* vers X alors $E(X_n /\mathcal{G})$ converge *p.s* vers

$E(X/ \mathcal{G})$

III-1 Martingales [35]

III-1-1 Cas discret

On se donne une filtration, c'est-à-dire une famille de sous tribu F_n croissante(telle que $F_n \subset F_{n+1}$).

Définition 1:

Une suite da variables aléatoires $(X_n, n \in N)$ est une martingale si :

-X_n est intégrable, $\forall\ n \in N$

-X_n est F_n - mesurable

-$E(X_{n+1} / F_n) = X_n$, $\forall\ n \in N$

III-1-2 Cas continu

On se donne une filtration, c'est-à-dire une famille de sous tribu F_t croissante (tel que $F_s \subset F_t$)

$\forall\ s \leq t$

Définition 2 :

Une famille da v.a $(X_t, t \geq 0)$ est une martingale par rapport à la filtration F_t si :

-X_t est F_t - mesurable et intégrable pour tout t

-$E(X_t / F_s) = X_s$, $\forall\ s \leq t$

Propriétés

-Si X_t est une martingale $E(X_t) = E(X_0), \forall\ t$

-Si $(X_t,\ t \leq T)$ est une martingale, le processus est complètement déterminé par sa valeur terminale : $X_t = E(X_T / \mathcal{F}_t)$ .Cette dernière propriété est d'un usage très fréquent en finance.

Définition 3 :

Une famille de variables aléatoires $(X_t,\ t \geq 0)$ est une sur martingale (respectivement sous martingale) par rapport à la filtration $\mathcal{F}_t$ si :

-X_t est mesurable et intégrable pour tout t

-$E(X_t / \mathcal{F}_s) \leq X_s,\ \forall\ s \leq t$ (resp. $E(X_t / \mathcal{F}_s) \geq X_s$)

III-2 Martingales locales

Définition :

Soit X un processus càdlàg adapté. On dit que c'est une martingale locale [28] s'il existe une suite de temps d'arrêt T_n croissant vers l'infini telle que pour tout n le processus arrêté X^{T_n} soit une martingale.

IV- Mouvement Brownien :

Bref Historique [38,50]

Historiquement, il s'agit du mouvement de particules de pollen en suspension dans l'eau, observé par Robert Brown 1828. Il en résulte une dispersion des microparticules dans l'eau, on dit aussi une « diffusion » du pollen dans l'eau. De fait, ce modèle sert actuellement à beaucoup d'autres modélisations de phénomènes dynamiques :

-Particules microscopiques en suspension

-Prix d'actions en bourse

-Comportement asymptotique de files d'attente

-Tout comportement dynamique avec part aléatoire (équation différentielle stochastique).

1-Définition et propriétés générales :

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace probabilisé, on appelle mouvement brownien (ou processus deWiener) standard un processus Z vérifiant :

1- $Z_0 = 0$ P.p.s

2- Z est à accroissements indépendants et stationnaires

3- $\forall\ (s, t) \in \Re^+ \times \Re^+, s<t,\ Z_t - Z_s \sim \mathcal{N}(0, \sqrt{t-s})$

4- Z est à trajectoires continues

L'idée intuitive qui conduit au mouvement brownien est la même qui rend la loi normale aussi importante en statistique; en termes non techniques, lorsqu'un phénomène résulte de l'addition d'un grand nombre de causes indépendantes, sa mesure suivra une loi normale du fait du théorème central- limite. L'interprétation financière est que, sur un marché continu, les variations de prix sont causées par un flot incessant d'informations qui sont reflétées immédiatement dans les prix. En conséquence, une évolution de prix entre deux instants *s* et *t* est indépendante des évolutions précédentes car, si ce n'était pas le cas, les opérateurs en tiendraient compte dans leurs offres et demandes, ce qui aurait pour conséquence d'annuler cet effet de « mémoire ».

2- Processus de Wiener général

Le processus de Wiener standard vérifie $E(Z_t) = 0$ et $V(Z_t) = t$; la généralisation naturelle consiste à introduire des paramètres μ et σ ; μ représente le drift, c'est-à-dire l'espérance de variation par unité de temps et σ^2 la variance de cette variation par unité de temps.

Définition :

Un processus W est appelé mouvement brownien général de paramètre μ et σ si W s'écrit :

$$W_0 = 0$$

$$W_t = \mu\, t + \sigma\, Z_t$$

Les propriétés de W se déduisent directement de celles de Z

2-1 Propriétés des trajectoires du mouvement brownien

-Processus gaussien :

Définition :

Un processus X est dit gaussien si $\forall d$, $\forall (t_1,\ldots\ldots t_d)$ réels positifs, le vecteur $(X_{t_1}, X_{t_2},\ldots\ldots X_{t_d})$ suit une loi gaussienne. Si la loi de $(X_{t+t_i},\ i=1\ldots d)$ ne dépend pas de t, on dit que le processus est stationnaire.

On appelle covariance du vecteur X la matrice ρ (s, t) = E $[(X_s - EX_s)(X_t - EX_t)]^T$ s, t ≥ 0

-Proposition :

Le mouvement brownien est un processus gaussien stationnaire de covariance : $\rho(s, t) = s \wedge t$

-Réciproquement, tout processus continu gaussien de covariance $\rho(s, t) = s \wedge t$ est un mouvement brownien.

-Le mouvement brownien converge « en moyenne » vers zéro presque sûrement quand t tend vers l'infini.

$$\lim_{t\to\infty} \frac{B_t}{t} \to 0$$

2-2 Temps d'arrêt

Soit (Ω, F, F_t, P) un espace probabilisé filtré; on appelle temps d'arrêt toute variable aléatoire τ à valeurs dans $\Gamma \cup \{+\infty\}$ telle que pour tout t, l'évènement $\{\tau \leq t\}$ est dans la tribu F_t.

3- Le brownien géométrique [53]

Définition :

Soit W un mouvement brownien, b et σ deux constantes.

Le processus $X_t = X_o \, exp \left\{ (b - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma W_t \right\}$ est appelé mouvement brownien géométrique. On l'appelle aussi processus « log normal ». En effet, dans ce cas

$$ln\, X_t = (b - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma W_t + ln\, x$$

4- Processus de Ornstein-Uhlenbech [19]

Proposition: l'équation de Langevin

$$X_t = -\int_0^t aX_s ds + \sigma W_t + X_0 \qquad (1)$$

a pour unique solution

$$X_t = e^{-at} X_0 + \int_0^t e^{-a(t-s)} \sigma \, dW_s \qquad (2)$$

On écrit l'équation (1) sous forme condensée

$$\mathrm{d}X_t + aX_t dt = \sigma \, \mathrm{d}W_t, \qquad X_0 \text{ donné}$$

Les données du problème sont la variable aléatoire X_0, le brownien W et les constantes a et σ

Démonstration :

Nous allons vérifier que (2) est solution de l'équation (1), en posant $Y_t = e^{at} X_t$ et en appliquant la formule d'intégration par parties :

$$d\,Y_t = e^{at}\, d\,X_t + a\, e^{at}\, X_t dt = e^{-at} \sigma\, dW_t$$

dont la solution est $Y_t = Y_o + \int_0^t e^{as} \sigma \, dW_s$

V- Intégrale stochastique [35]

On se donne un espace (Ω, F, P) et un mouvement brownien W sur cet un espace. On désigne par $F_t = \sigma(W_s, s \leq t)$ la filtration naturelle du mouvement Brownien.

1-Définition :

On veut généraliser l'intégrale de Wiener et définir ($\int_0^t \theta_s dW_s \ , t \in [0,T]$) pour des processus stochastiques θ . En mathématiques financière, T représente l'horizon du marché, (W_t) représente l'évolution du prix d'un actif, (θ_t) la stratégie d'investissement sur cet actif et $\int_0^t \theta_s dW_s$ le gain réalisé au temps t par la stratégie θ .

1-1 Cas de processus étagés

On dit qu'un processus θ est étagé (ou élémentaire) s'il existe une suite de réels t_j , $0 \le t_0 \le t_1 \le \ldots\ldots \le t_n$ et une suite de variables aléatoires θ_j telles que θ_j soit F_{t_j} -mesurable, appartienne à $L^2(\Omega)$ et que $\theta_i = \theta_j$ pour tout $t \in]t_j \ , \ t_{j+1}]$, soit $\theta_s(\omega) = \sum_{j=0}^{n-1} \theta_j(\omega)\, 1_{]t_j \ , \ t_{j+1}]}(s)$

On définit alors
$$\int_0^\infty \theta_s dW_s = \sum_{j=0}^{n-1} \theta_j \ (W(t_{j+1}) - W(t_j))$$

On a :
$$E\,(\int_0^\infty \theta_s dW_s\,) = 0 \qquad \text{et} \qquad Var\,(\int_0^\infty \theta_s dW_s\,) = E\,(\int_0^\infty \theta_s^2 ds)$$

On obtient
$$\int_0^t \theta_s dW_s = \sum_{j=0}^{n-1} \theta_j ((W(t_{j+1} \Lambda t) - W(t_j \Lambda t))$$

1-2 Cas général

On définit les processus càglàd de carré intégrable comme l'ensemble Γ des processus θ adaptés continus à gauche et limité à droite, (F_t) adapté tels que :

$$\|\theta\|^2 \overset{def}{=} E\,[\int_0^\infty \theta_t^2 dt\,] < \infty$$

Les processus étagés appartiennent à Γ . On dit aussi que θ_n converge vers θ dans $L^2(\Omega\, x\, \Re^+)$ si :

$$\| \ \theta - \theta_n \ \| \to 0 \text{ quand } n \to \infty$$

On peut définir $\int_0^\infty \theta_s dW_s$ pour tous les processus θ de Γ : on approche θ par des processus étagés, soit $\theta = \lim \theta_n$ quand $n \to \infty$ ou $\theta_n = \sum_{j=1}^{k(n)} \tilde{\theta}_j^n 1_{]t_j, t_{j+1}]}$, avec $\tilde{\theta}_j^n \in F_{t_j}$, la limite étant au sens de $L^2(\Omega x \Re)$.

L'intégrale $\int_0^\infty \theta_s dW_s$ est alors la limite dans $L^2(\Omega)$ des sommes $\sum_{j=1}^{k(n)} \tilde{\theta}_j^n (W(t_{j+1}) - W(t_j))$ dont l'espérance est 0 et la variance $E\left| \sum \tilde{\theta}_j^2 (t_{j+1} - t_j) \right|$.

On a alors $E(\int_0^\infty \theta_s dW_s) = 0$ et $E(\int_0^\infty \theta_s dW_s)^2 = E(\int_0^\infty \theta_s^2 ds)$.

déf

On note $\int_0^t \theta_s dW_s = \int_0^\infty \theta_s 1_{[0,t]}(s)\, dW_s$. Si θ est étagé $\int_0^t \theta_s dW_s = \sum_i \theta_i (W_{t_{i+1} \wedge t} - W_{t_i \wedge t})$.

2- Propriétés

On note Λ l'ensemble $L^2(\Omega x \Re^+)$ des processus θ adaptés càglàd vérifiant: $E(\int_0^t \theta_s^2(\varpi) ds) \prec \infty, \forall t$

2-1 Linéarité

Soit a et b des constantes et $(\theta^i, i=1,2)$ deux processus de Λ. On a

$$\int_0^t (a\theta_s^1 + b\theta_s^2)\, dW_s = a \int_0^t \theta_s^1 dW_s + b \int_0^t \theta_s^2 dW_s$$

2-2 Propriétés de martingale

Proposition:

Soit $M_t = \int_0^t \theta_s dW_s$, ou $\theta \in \Lambda$.

a/ Le processus M est une martingale, à trajectoires continues.

b/ Soit $N_t = (\int_0^t \theta_s dW_s)^2 - \int_0^t \theta^2_s ds$. Le processus $(N_t, t \geq 0)$ est une martingale.

Démonstration :

La propriété de martingale s'écrit :

$$E(\int_0^t \theta_u dW_u / F_s) = \int_0^s \theta_u dW_u, \ \forall t \geq s$$

où $E(\int_s^t \theta_u dW_u / F_s) = 0$ ceci implique en particulier que $E(\int_s^t \theta_u dW_u) = 0$

La propriété *b/* équivaut à $E\,[(\int_s^t \theta_u\, dW_u)^2 / F_s] = E\,[\int_s^t \theta_u^2\, du / F_s]$.

3-Théorème de Girsanov [49]

1- Changement de probabilité

Proposition :

Soient P et Q deux probabilités sur (Ω, F_T). On suppose P et Q équivalentes. Alors il existe $(L_t\,,\, t \leq T)$ P- F_t martingale strictement positive telle que $Q = L_T P$ sur F_T et $Q_{/Ft} = L_t\, P_{/Ft}$, c'est-à-dire telle que $E_Q(X) = E_P\,(X\, L_t)$ pour toute variable X Q- intégrable F_t –mesurable pour $t \leq T$ De plus $L_0 = 1$ = 1 et $E_P\,(L_t) = 1$, $\forall\ t \leq T$

Démonstration

Si la restriction de P et Q à F_T sont équivalentes, il existe une variable aléatoire L_T F_T -mesurable telle que $Q = L_T P$ sur F_T .On dit que L_T est densité de Q par rapport à P et $E_Q\,(X) = E_P\,(L_T X)$ pour toute variable X- F_T mesurable et Q- intégrable. En particulier, L_T est strictement positive et $E_P\,(L_T)=1$. Soit $L_t = E_P\,(L_T / F_t)$. Par construction $(L_t\,,\, t \leq T)$ est une martingale et est la densité F_t- mesurable de Q par rapport à P sur F_t . En effet, si X est F_t mesurable et Q intégrable

$E_Q(X) = E_P\,(L_T X) = E_P\,[E_P(X\, L_T / F_t)] = E_P\,[X E_P\,(L_T / F_t)] = E_P\,(X\, L_t)$.

2-Théorème de Girsanov

Soit $(W(t), t \geq 0)$ un mouvement brownien sur un espace (Ω, F, P) et F_t sa filtration. Soit L_t un processus défini comme suit : $L_t = exp(\int_0^t \theta(s) dW_s - \frac{1}{2}\int_0^t \theta^2(s) ds$ $, t \leq T$

où θ est un processus F_t - adapté

-Si $E^P\,(L_T) = 1$, le processus L_T est une martingale

-Si $Q = L_T .P$, i.e si $E^Q\,(X) = E^P\,(X\, L_T)$ pour toutes variables X F_T – mesurables, alors

$$\tilde{W}(t) = [\ W(t) - \int_0^t \theta(s) ds\ ] \text{ est un } Q\text{- mouvement brownien}$$

4- La transformé de Laplace

Soit X une variable aléatoire [49] qui suit une loi normale d'espérance $E(X)$ et de variance $V(X)$. La transformé de Laplace de X s'écrit

$$E(e^{\lambda X}) = e^{\lambda E(X) + \frac{1}{2}\lambda^2 V(X)}$$

VI- Probabilité historique et probabilité risque neutre [58]

Les probabilités sont très utiles en finance pour modéliser des grandeurs incertaines, pricer des produits, ou encore mesurer les risques. Cependant, il existe plusieurs probabilités, on dit aussi plusieurs mesures, les plus célèbres sont la probabilité historique et la probabilité risque neutre.

1-La probabilité historique :

Comme son nom l'indique, la probabilité historique affecte à un événement donné une probabilité, ou une vraisemblance d'occurrence, égale à sa fréquence au sens probabiliste. Elle est d'une certaine manière, une mémoire du temps et aucune anticipation n'est prise en compte.

2-La probabilité risque neutre

Quand Black & Scholes ont écrit l'équation différentielle permettant de pricer une option, ayant comme sous jacent une grandeur V_t, suivant un mouvement stochastique, ils se sont rendu compte qu'elle ne dépendait pas de son rendement, mais seulement du taux d'intérêt sans risque, de sa volatilité, de son niveau de prix actuel et du temps. En un mot, le prix de l'option est indépendant des préférences du risque des agents. Par exemple, prenant des agents qui ont une grande aversion au risque, alors pour qu'ils acceptent d'investir dans un actif risqué, dans le sens ou son revenu est incertain, nos agents exigent un rendement -i.e un drift plus élevé pour compenser leur prise de risque. On voit en cela, que l'aversion au risque des agents affectera le prix de l'option.

$$\frac{dV_t}{V_t} = \mu \ dt + \sigma dW_t$$

Mais comme l'équation différentielle du pricing ne dépend pas du drift, alors pour qu'un calcul soit possible, on se placera dans un monde ou les agents sont neutres au risque, et accepteront d'investir dans un actif risqué tant que son rendement est égal à l'actif sans risque. Dans ce cadre, le prix de n'importe quel actif, est égal à l'espérance des gains actualisés au taux d'intérêt sans risque.

Mathématiquement parlant, en absence d'opportunité d'arbitrage, une telle probabilité existe, et si de plus le marché est complet, alors elle est unique. Le passage d'une probabilité à l'autre, s'appelle : un changement de probabilité de Girsanov.

VII- Equations différentielles stochastiques

1-Définition

Une équation différentielle stochastique [40] est une équation de la forme

$$X_t = x + \int_0^t b(s, X_s)ds + \int_0^t \sigma(s, X_s)dW_s \qquad (1)$$

Ou sous forme condensé

$$\begin{cases} dX_t = b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dW_t \\ X_0 = x \end{cases}$$

La solution *(X (t), t≥ 0)* de l'équation (1) est appelée « processus de diffusion » ou diffusion, avec : $b : \Re \rightarrow \Re$, $\sigma :\ \Re \rightarrow \Re$, et $(W(t), t \geq 0)$ est un mouvement brownien par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_t\ ,\ t \geq 0)$. Trouver une solution de l'équation (1) signifie trouver un processus stochastique $(X(t), t \geq 0)$ continu, tel que pour tout t, $X(t)$ est $\mathcal{F}_t$ mesurable et qui vérifie :

-pour tout $t \geq 0$, les intégrales $\int_0^t b(s, X_s)\, ds$ et $\int_0^t \sigma(s, X_s)\, dW_s$ ont un sens, soit :

$$\int_0^t b(s, X_s)ds < \infty \quad \text{et} \quad \int_0^t \left|\sigma(s, X_s)\right|^2 ds < \infty \ \text{p.s}$$

-pour tout $t \geq 0$:

$$X_t = x + \int_0^t b(s, X_s)ds + \int_0^t \sigma(s, X_s)dW_s\ , \quad \text{p.s}$$

Dans le cas ou les fonctions b et σ ne dépendent pas de t, le processus de diffusion correspondant est dit homogène [66]. Le théorème ci-dessous donne les conditions suffisantes sur b et σ pour avoir un résultat d'existence et d'unicité pour (1).

2- Théorème d'existence [13]

Si b et σ sont des fonctions, telles qu'il existe $K < \infty$, avec :

$$\left\{\begin{array}{l} i)\left|b(t,x)\right|^2 + \left|\sigma(t,x)\right|^2 \leq K^2(1+\left|x\right|^2) \\ ii)\left|b(t,x)-b(t,y)\right| + \left|\sigma(t,x)-\sigma(t,y)\right| \leq K\left|x-y\right| \end{array}\right\}$$

, alors, pour tout $T \geq 0$, l'équation (1) admet une solution unique dans l'intervalle *[0, T]*. De plus cette solution vérifie :

$$E\left(\sup_{0 \leq t \leq T} \left|X(t)\right|^2 \right) < \infty$$

L'unicité [38] signifie que si $(X(t))_{0 \leq t \leq T}$ et $(Y(t))_{0 \leq t \leq T}$ sont deux solutions de (1), alors p.s $\forall 0 \leq t \leq T$, $X(t) = Y(t)$.

VIII- Equations aux dérivées partielles [35]

On se donne deux fonctions b et σ de *[0, T]* x $\Re$ dans $\Re$, vérifiant les hypothèses du théorème (2) concernant l'existence de solution d'EDS[٢]. Soit A l'opérateur défini sur les fonctions de $C^{1,2}$ par

$$\mathrm{A}\, f(t,x) = f_t'(t,x) + f_x'(t,x)b(t,x) + \frac{1}{2} f_{xx}''(t,x)\sigma^2(t,x)$$

Soit $(X_u^{x,t}, u \geq t)$ le processus d'Itô défini par

$$X_u^{x,t} = X_t^{x,t} + \int_t^u b(s, X_s^{x,t})ds + \int_t^u \sigma(s, X_s^{x,t})dW_s, u \succ t \qquad (2)$$

avec une condition initiale en t : $X_t^{x,t} = x$

1-Problème parabolique

On cherche les solutions du problème parabolique suivant, avec une « condition terminale », c'est-à-dire une fonction g de $\Re$ dans $\Re$ qui va préciser la valeur de la solution de l'équation aux dérivées partielles en *T*.

$$Af(t,x) = 0, \forall x \in \Re,\ \forall\ t\ \in\ [0, T]$$
$$f(T,x) = g(x) \qquad \forall\, x \in \Re \qquad (3)$$

Si f est solution du problème parabolique (3) et X une solution de (2), la formule d'Itô conduit à :

$$f(t, X_u^{x,t}) = f(t,x) + \int_t^u f_x'(s, X_s^{x,t})\sigma(s, X_s^{x,t})dW_s$$

En particulier en T , on a : $f(T, X_T^{x,t}) = g(X_T^{x,t}) = f(t,x) + \int_t^T f_x'(s, X_s^{x,t})\sigma(s, X_s^{x,t})dW_s$ et si l'intégrale est une martingale on en déduit $f(t,x) = E(g(X_T^{x,t}))$.

Théorème :

La solution du problème parabolique

$$Af(t,x) = 0, \forall x \in \Re,\ \forall\, \mathrm{t} \in\ [0, T]$$
$$f(T,x) = g(x) \quad \forall\, \mathrm{x} \in \Re$$

est donné par $f(t,x) = E(g(X_T^{x,t}), où$ $X^{x,t}$ est le processus d'Itô défini par

$$X_u^{x,t} + \int_t^u b(s, X_s^{x,t})ds + \int_t^u \sigma(s, X_s^{x,t})dW_s, u \succ t$$

avec une condition initiale en t : $X_t^{x,t} = x$

[٢] Équation différentielle stochastique

Ce résultat est écrit souvent sous la forme équivalente suivante :

$f(t,x) = E_{x,t}(g(X_T))$, où X est le processus d'Itô défini par

$$dX_s = b(s, X_s)ds + \sigma(s, X_s)dW_s$$

L'espérance étant prise sous la probabilité P qui est telle que le processus X prend la valeur x à l'instant t.

2- Généralisation

Soit α une constante positive. On cherche les solutions du problème parabolique suivant :

$$\mathrm{A}\, f(t,x) = \alpha\, f(t,x), \quad \forall x \in \Re, \ \forall\, t \in [0, T] \qquad (4)$$

$$f(T,x) = g(x) \qquad \forall x \in \Re \qquad (5)$$

Si f est solution de (4), et X une solution de (2), la formule d'Itô entre t et T conduit à

$$f(T, \mathrm{X}_T^{x,t})\, \exp^{-\alpha T} = f(t,x)\exp^{-\alpha t} + \int_t^T f_{\mathrm{x}}'(\mathrm{s}, \mathrm{X}_s^{x,t})\, [\exp^{-\alpha s}]\; \sigma(\mathrm{s}, \mathrm{X}_s^{x,t})\, dW_s,$$

et si l'intégrale est une martingale (condition d'intégrabilité sur f_{x}' et σ) on en déduit

$f(t,x) = E[\exp^{-\alpha(T-t)}\, g(X)]$. En exploitant le caractère Markovien, on a aussi :

$f(t,x) = E(\exp^{-\alpha(T-t)}\, g(X_T) \,/\, X_t = x)$

où

$$X_s = X_0 + \int_0^s b(u, X_u)du + \int_0^s \sigma(u, X_u)dW_u$$

Conclusion

Nous avons essayé d’introduire dans ce chapitre les notions de bases de calcul stochastique. La définition des processus stochastiques, des processus prévisibles, des martingales, du processus d’Itô et du mouvement brownien sont d’un usage très utile en finance.

L’utilisation de quelques théorèmes et propositions a été d’un grand apport dans le sens ou ils apportent des éclaircissements concernant la résolution de quelques problèmes de modélisation en finance et plus particulièrement les modèles d’évaluation de la structure temporelle des taux d’intérêt et de déformation de la courbe des taux qui feront l’objet du chapitre III.

CHAPITRE III : LES MODELES DE TAUX ET DE DEFORMATION DE LA COURBE DES TAUX

INTRODUCTION :

L'incertitude sur les mouvements futurs des taux d'intérêt est un point important en théorie de la décision financière. La plupart des agents sont averses au risque, et ce risque est lié en particulier au taux d'intérêt. L'étude de la structure par terme des taux d'intérêts est d'une grande importance pratique, qui révèle les anticipations des agents sur les risques à venir. En particulier, la compréhension des déformations de la courbe des taux permet d'asseoir une stratégie de gestion de trésorerie (choix de la durée de placement, spéculation sur la structure des taux …). La volatilité accrue des taux d'intérêt rend techniquement très important tout progrès allant dans le sens d'une plus grande maîtrise de ces problèmes.

Pour étudier les déformations futures de la courbe des taux et les contraintes qui pèsent sur ces derniers, on a jugé utile d'introduire dans ce chapitre, la notion de taux d'intérêt et leur formation, la modélisation stochastique à temps discret et à temps continu, ainsi que la notion d'absence d'opportunité d'arbitrage et enfin, nous présenterons les principaux modèles de taux utilisés en finance à savoir le modèle de Vasicek, de Cox-Ingersoll-Ross, de Heath-Jarrow-Morton …. , où les solutions sont données d'une façon numérique.

III-1 Intérêt et taux d'intérêt

Définition :

L'intérêt est la rémunération du capital prêté [25] que l'emprunteur verse au prêteur. Son taux dépend des conditions du marché, de la longueur du prêt (taux longs, taux courts) et de la réputation de l'emprunteur. Ce taux est une fonction :

-Du temps

-Du risque (le taux d'intérêt sera une fonction croissante du risque; plus l'emprunteur fait prendre de risque, plus le taux est élevé).

-Des conditions économiques en général (si le prêteur à la possibilité de placer son argent à 4,5%, il n'acceptera pas de prêter à moins).

III-2 La formation des taux d'intérêt :

1- L'importance de la banque centrale

La Banque Centrale [18] est un établissement financier public, qui à le monopole de l'émission de monnaie. Une banque centrale est donc associée à une monnaie, la BCE (Banque Centrale Européenne pour l'Euro ou Fédéral Réserve pour le Dollar).Toutes les autres banques ont des comptes à la banque centrale, qui servent notamment pour les mécanismes de compensation interbancaire.

Les banques se refinancent en permanence auprès de la banque centrale. Celle-ci a pour objectif la stabilité des prix, et celle des taux de change, tandis que le gouvernement doit veiller sur la croissance et sur l'emploi.

2- Formation des taux longs

Les taux à long terme sont des taux négociés, c'est-à-dire qu'ils résultent de l'équilibre de l'offre et de la demande [59] des capitaux à long terme. Notons que les emprunteurs les plus importants sont les Etats. Ils quantifient en particulier le compromis entre le placement financier à long terme et l'investissement dans un projet industriel.

Les taux longs ont souvent été vus comme la moyenne géométrique des taux courts anticipés, par définition de ces derniers. On dit que les taux longs sont « le juge de paix ». D'une part, ils reflètent la santé économique d'un pays et d'autre part, ils sont influencés par les anticipations des agents économiques, anticipation sur l'inflation certes, mais aussi sur la politique économique, voire sur la politique ; en bref sur tous ce qui peut modifier l'économie.

Les taux d'intérêts à long terme sont déterminés par le marché financier

3- Formation des taux courts

Ils se forment de manière différente [59]. Certes, sur le marché monétaire, l'offre et la demande de capitaux se confrontent, mais les acteurs ne sont pas les mêmes. Ce sont essentiellement des banques commerciales, des investisseurs institutionnels (assurances ou fonds de pension) et des grandes entreprises sous le contrôle de la banque centrale.

La banque centrale intervient sur le marché monétaire en injectant plus ou moins de monnaie centrale pour refinancer les banques commerciales qui, en fonction de leur activité de crédit bancaire, peuvent, temporairement manquer de monnaie centrale pour faire face aux retraits en liquide de leurs clients ou aux fuites de son propre réseau.

Logiquement, les taux courts doivent être inférieurs aux taux longs (de l'ordre de 2 à 3 points) puisque l'argent est engagé pour moins longtemps. Mais quand les banques centrales interviennent beaucoup, il peut se produire une « inversion des taux (Etats- Unis d'Amérique en 2000), phénomène pervers qui consiste à mieux rémunérer l'argent placé à court terme que l'argent investi à long terme.

Les taux d'intérêt à court terme sont déterminés par la banque centrale

(En Europe, la BCE).

Celle-ci agit dans le cadre de sa politique monétaire, en fonction de considérations internes et externes.

Au niveau interne, elle doit :

-En priorité veiller à lutter contre l'inflation

-Optimiser la croissance économique

-Favoriser l'emploi

Au niveau externe, elle doit cherché à

-Maintenir un taux de change acceptable vis-à-vis du $ et du yen

4-Le taux de base bancaire (TBB) ou prime rate

Comme nous l'avons vu ci-dessus, les particuliers n'ont pas accès aux marchés financiers. Pour placer leur argent ou pour emprunter, ils passent généralement, par l'intermédiaire d'une banque. Le taux de base bancaire correspond alors au meilleurs taux que chaque banque peut accorder à ses meilleurs clients. Le taux de base bancaire s'applique à 4% des crédits aux particuliers et à 15% des prêts aux entreprises, principalement les crédits de trésoreries et d'équipement.

5-Les principaux taux fixes et taux variables du marché français

***Les taux fixes [18]**

T.M.P : le taux moyen pondéré. Il est calculé par la banque de France qui recense toutes les opérations de prêts effectués le jour J et d'une durée de 1 jour.

T.M.M : le taux moyen mensuel du marché monétaire est la moyenne arithmétique des T.M.P du mois civil considéré.

T.A.M : le taux annuel monétaire correspond aux taux de rendement d'un placement mensuel à intérêt composés, renouvelé chaque fin du mois au T.M.M, sur les 12 derniers mois écoulés.

T.H.E : c'est le taux hebdomadaire de rendement des emprunts d'Etat à long terme sur le marché secondaire. Il s'agit de la moyenne des taux de rendement actuariels nets achetés avec frais unitaires, calculé à partir du premier cours de bourse des emprunts d'Etat faisant partie d'un échantillon mis à jour quotidiennement.

T.H.O : Le taux hebdomadaire obligataire sur le marché primaire est calculé à partir des taux actuariels bruts (unitaires et sans frais) des émissions obligataires à taux fixe d'une semaine.

T.M.O : Le taux mensuel obligataire sur le marché primaire est calculé à partir des émissions intervenant dans les THO de tous les jeudis appartenant au mois considéré.

***Les taux variables [34]**

Taux PIBOR et EURIBOR

-Les taux Pibor (Paris InterBank Offered Rate) sont des taux moyens pratiqués sur le marché français par certaines banques et pour 12 échéances de 1 à 12 mois.

-Les Euribor sont les homologues des taux Libor cotés à Londres depuis les années 70 et sont les successeurs du Pibor coté depuis les années 80 à Paris.

III-3 Modélisation stochastique

L'avenir est incertain, mais il existe des modèles de son évolution (modèles à temps discret et modèles à temps continus). Ces modèles prennent en compte [23] l'aspect aléatoire du futur, ils sont donc dits stochastiques (en opposition à déterministes). Il est considéré que le marché financier peut suivre différentes évolutions, chacune de ses évolutions ayant une certaine probabilité d'avoir effectivement lieu. Par exemple, deux paramètres clefs pour décrire l'évolution du cours d'une action sont sa tendance (haussière ou baissière) et sa volatilité (« nervosité » du marché).

1- Modèles à temps discret

Nous nous plaçons dans un modèle ou les transactions ont lieu sans coût à des instants indexés par des entiers, et nous travaillons [16] sous hypothèse d'absence d'opportunité d'arbitrage. Une personne empruntant 1 Euro à la date n devra rembourser $F(n,N)$ euro à la date N, date d'échéance du prêt. On dit que $F(n,N)$ est le prix forward de 1 Euro.

Si $S(n)$ est le prix d'un produit financier exprimé en unités de la date n, le prix forward de S est exprimé en unités de la date N par $S_F(N) = S(n)F(n,N)$

Définition

Un zéro coupon de maturité N est un titre versant 1 Euro à la date N et ne générant aucun flux avant N. Le prix à la date n d'un zéro coupon de maturité N (n≤ N) est noté $P(n,N)$. C'est le prix de 1 euro payé à la date N. On a $P(N,N) = 1$. Le prix forward de 1 euro et le prix d'un zéro coupon sont liés par la relation $F(n,N) = \left[P(n,N)\right]^{-1}$, sous hypothèse d'absence d'opportunité d'arbitrage. On définit le taux forward instantané par :

$$f(n,N) = \log \frac{P(n,N)}{P(n,N+1)}$$

et le taux spot par $r(n) = f(n,n)$. On a $P(n,n+1) = \exp(-r(n))$

La structure par terme des taux est l'étude de la famille $P(n,.)$ ou de la famille $f(n,.)$. Une des approches consiste à étudier la déformation de la courbe des taux, c'est-à-dire à exprimer $f(n,N)$ en fonction de la courbe des taux aujourd'hui $f(0,N)$.

2- Modèles à temps continu

Les modèles à temps continus [22] considèrent des périodes qui ne sont pas de l'ordre de l'année ou du mois, mais de la journée, de l'heure, à savoir de la seconde, d'où différentes approches sont utilisés en temps continu pour étudier la structure par terme des taux d'intérêts. La première consiste à modéliser le prix des zéro coupons en respectant l'hypothèse d'absence d'opportunité d'arbitrage, et en déduire l'expression du taux spot. La deuxième utilise le taux spot comme variable explicative. Nous allons évoquer dans ce qui suit comment un changement de probabilité permet de valoriser facilement des produits sur taux.

Définition

On donne les mêmes définitions qu'en temps discret.

-On appelle zéro coupon de maturité T un titre versant 1 euro à la date T, et ne donnant aucun flux entre 0 et T. On suppose que pour tout T, il existe un zéro coupon de maturité T.

- On appelle maturité d'une obligation sa durée de vie résiduelle, c'est-à-dire la durée qui sépare la date actuelle de la date de remboursement.

-Le prix à la date t d'un zéro coupon de maturité T est noté $P(t,T)$ .On a $P(T,T)=1$

Désignons par $P(t,T)$ le prix d'une obligation zéro coupon à l'instant t, avec maturité T.

Cette obligation nous assume de recevoir une unité d'argent [68] à la date de maturité T. Nous avons donc $P(T,T)=1$. Si $R(t,T)$ désigne le rendement à l'échéance T (valeur moyenne du taux instantané) nous avons :

$$P(t,T) = \exp(-(T-t)R(t,T))$$

La courbe des taux sera la courbe $\theta \mapsto R(t,\theta)$. Nous voulons étudier le comportement de cette courbe en fonction de la courbe à l'instant initial c'est-à-dire, $\theta \mapsto R(0,\theta)$.

On remarque que :

$$R(t,T) = -\frac{1}{T-t} \log(P(t,T))$$

Le taux d'intérêt instantané [5] est donné par

$$\begin{aligned} r(t) &= \lim_{T\to t} R(t,T) \\ &= -\lim_{T\to t} \frac{1}{T-t} \log P(t,T) \\ &= -\left[\frac{\partial \log(P(t,T))}{\partial T} \right]_{T=t} \end{aligned}$$

Dans un modèle déterministe on doit avoir

$$P(t,T) = P(t,u)P(u,T) \ , \ \forall \ t \le u \le T \qquad (1)$$

pour éviter les opportunités d'arbitrage. On en déduit sous l'hypothèse d'absence d'opportunité d'arbitrage l'existence d'une fonction r telle que :

$$P(t,T) = \exp\left(-\int_t^T r(s)\,ds\right) \qquad (2)$$

On vérifie comme dans le cas discret que

$$R(t,T) = \frac{1}{T-t}\int_t^T r(s)\,ds \qquad (3)$$

Si nous nous plaçons dans le cas de modèles stochastiques pour lesquels les formules (1), (2) et (3) ne sont pas valables, les quantités $P(t,T)$ et $r(t)$ seront des variables mesurables par rapport à une filtration $\{ (F_t,\ t \geq 0 \}$ qui est une famille de sous tribu de F croissante et qui représente l'information ce dont on dispose à chaque instant. Dans le cas continu on envisage deux types de modèles :

1-Modèles d'équilibre, qui donnent la dynamique de $r(t)$ et l'expression du prix $P(t,T)$ des obligations zéro coupons.

2-Modèles sans arbitrage, qui modélisent directement les courbes $P(t,T)$ ou bien $R(t,T)$

III-4 Absence d'arbitrage et modélisation des taux

1- Les modèles déterministes

Si les taux d'intérêt sont déterministes, l'absence d'arbitrage dit que les prix des zéro coupons, qui correspondent au prix de 1 euro payé dans le futur doivent vérifier

$$\frac{dP(t,T)}{P(t,T)} = r_t dt$$

Soit encore puisque $P(T,T) = 1$

$$P(t,T) = exp\ (-\int_t^T r(s)\ ds) \qquad\qquad P(t,T) = P(0,T)\ exp\ (-\int_0^t r(s)\ ds)$$

2- Les modèles aléatoires

L'absences d'opportunité d'arbitrage entre les pris $P(t,T)$ des zéro coupon de différentes maturités conduit à des résultats très similaires à ceux du cas déterministes. Cette hypothèse permet encore de reconstruire le prix des zéro coupon à partir de la dynamique du taux court.

Pour décrire cette liaison, nous supposons que toutes les maturités T, les prix des zéro coupons suivent des processus d'Itô. L'absence d'opportunité d'arbitrage se traduit par l'existence d'un vecteur λ_t appelé prime de risque tel que les prix des zéro coupon évoluent comme :

$$\frac{dP(t,T)}{P(t,T)} = r(t)\ dt + \Gamma(t,T) d\tilde{W}_t, \qquad P(T,T) = 1$$

où $d\tilde{W}_t = dW_t - \lambda_t dt$ est un Q- mouvement Brownien et $\Gamma(t,T)$ est la volatilité locale

III-5 Modèles d'équilibre avec un facteur

Dans ces modèles [16] le taux d'intérêt instantané $r(t)$ est connu et nous souhaitons décrire la courbe des taux à long terme. Supposons que $r(t)$ satisfait une équation différentielle stochastique de la forme :

$$dr(t) = f(t, r(t))dt + g(t, r(t))dW_t$$

où $W = \{ W_t, \; t \in [0, T] \}$ est un mouvement brownien définit sur un espace de probabilité(Ω, F, P). Supposons que$\{ F_t, \; t \in [0,T] \}$ est une famille croissante de sous tribu, qui représente en pratique l'information disponible en t, et que $F_t = F$. Supposons que les coefficient f et g satisfont les conditions de croissance linéaire et la propriété de lipschits. Le facteur d'actualisation appelé aussi fonction d'actualisation est donnée par :

$$A_t = \exp\left(- \int_0^t r(s)\, ds\right)$$

L'ingrédient principal dans la modélisation de $P(t, T)$ sera l'hypothèse (H) suivante :
Il existe une probabilité Q équivalente à P qui rend les prix actualisés

$$\tilde{P}(t,u) = A_t P(t,u)$$

des martingales par rapport à la filtration $\{ F_t, \; t \in [0,u] \}$ pour tout $u \in [0,T]$.
Cette hypothèse nous permettra de calculer le prix $P(t,T)$ du zéro coupon de la manière suivante :

$$\begin{aligned} P(t,u) &= E_Q\left(\frac{A_u}{A_t} / F_t\right) \\ &= E_Q\left(\exp\left(- \int_t^u r(s)\, ds\right) / F_t\right) \end{aligned}$$

En général la probabilité Q sera de la forme $Q(A) = E(1_A \; L_T)$

$$L_T = \exp\left(\int_0^T q_s \, dW_s - \frac{1}{2}\int_0^T q_s^2 \, ds\right)$$

où $\{ q_s, \; s \in [0,T] \}$ est un processus adapté tel que $E(\int_0^T q_s^2 \, ds < \infty)$. Le théorème de Girsanov nous donne dans ce cas $\{ \tilde{W}_t = W_t - \int_0^t q_s \, ds, \; t \in [0,T] \}$qui est un mouvement brownien par rapport à Q. Ce théorème nous permet [52] de changer d'univers : on passe de l'univers historique (Ω ,F_t, P) à l'univers d'évaluation (Ω ,F_t, Q) où Q est la nouvelle mesure de probabilité, appelé probabilité risque neutre .

Sous cette hypothèse le prix du zéro coupon peut se calculer comme on la cité précédemment de la façon suivante :

$$P(t,u) = E_Q\left(\exp\left(-\int_t^u r(s)\,ds\right) / F_t\right)$$

valeur qui constitue en fait la véritable fonction d'actualisation.

III-6 Modélisation des taux d'intérêt

Avant de présenter les différents modèles de taux en temps continu, il faut préalablement préciser les principales hypothèses [27] retenues pour leur détermination :

- Pas de coût de transaction ;
- Titres parfaitement divisibles ;
- Les agents sont rationnels et disposent du même niveau d'information ;
- Les marchés sont efficients : ils ne permettent pas de possibilité d'arbitrage ;
- Les taux d'emprunts et de prêts sont identiques

1- Dynamique des taux en temps continu

A une date donnée t, on fait l'hypothèse que le taux instantané r suit un processus de diffusion caractérisé par l'équation suivante :

$$dr(t) = \mu(r,t)dt + \sigma(r,t)dW_t$$

avec :

dr : Variation du taux r au cours de l'instant dt

$\mu(r,t)$: Moyenne des changements instantanés du taux par unité de temps (ou coefficient de dérive)

$\sigma(r,t)$: Écart type des changements instantanés du taux par unité de temps (ou coefficient de diffusion ou encore la volatilité)

dW_t : Un processus standard de Gauss-Weiner

Cette formule est la structure de base qui permet de retrouver les principales dynamiques continues de taux.

A- Equation différentielle d'un zéro coupon

L'équation différentielle régissant le prix d'un zéro coupon [1] est obtenue de manière classique en utilisant en premier lieu le lemme d'Itô, puis le théorème de Girsanov.

Soit $P(t,T)$ le prix du zéro coupon qu'on souhaite évaluer. L'application du lemme d'Itô fournit l'équation vérifiée par le prix du zéro coupon :

$$dP = [\,P_t + \mu(r,t)\;P_r + \frac{1}{2}\,\sigma^2(r,t)\;P_{rr}\,]\,dt \;+\; \sigma(r,t)\;P_r\;dW$$

P_t, P_r, P_{rr} désignent respectivement la dérivée partielle première par rapport à t, la dérivé partielle première par rapport à r et la dérivé du second ordre par rapport à r.

En appliquant le théorème de Girsanov avec $d\tilde{W} = dW_t$ - λ(r, t) dt (λ correspondant au prix de marché du risque), la formule précédente devient :

$$dP = [\mathrm{P}_t + \mu(r,t)\;P_r + \frac{1}{2}\,\sigma^2(r,t)\;P_{rr} + \lambda(\mathrm{r},\mathrm{t})\,\sigma(r,t)\;P_r\,]\,dt + \sigma(r,t)\;P_r\,\mathrm{d}\tilde{W}$$

Or dans un univers risque neutre la relation $dP = rPdt$ doit être vérifiée. Cette remarque nous conduit donc à poser :

$$P_t + [\,\mu(r,t) + \lambda(\mathrm{r},\mathrm{t})\,\sigma(r,t)\,]\;P_r \;+\; \frac{1}{2}\,\sigma^2(r,t)\;P_{rr} - rP = 0$$

Cette relation est primordiale dans la mesure ou elle permet (lorsqu'elle est complété par une condition aux limites) la détermination de la valeur du taux r modélisé par différentes dynamiques.

B- Modèle de Vasicek

1- L'équation des taux

Un seul facteur est à l'origine de la déformation de la courbe des taux [21] dans le modèle de Vasicek. Cet unique facteur est le taux court instantané qui est modélisé sous la forme d'un processus d'Ornstein Uhlenbeck :

$$dr(t) = a\,(b - r\,(t))\;dt\;+\sigma\;\;dW_t$$

où les paramètres *a, b* et σ sont constants. Il convient aussi d'indiquer que le taux du marché λ est supposé constant et que W_t correspond à un processus de Wiener standard.

Cette modélisation permet de prendre en compte l'effet de retour à la moyenne (mean-reverting) [11] constaté sur les taux d'intérêts. Des valeurs élevées des taux ont tendance à être suivies plus fréquemment de baisses que par des hausses. L'effet inverse est également constaté pour des niveaux de taux inhabituellement bas.

-Lorsque $r(t) < b$ l'espérance de variation de $r(t)$ est positive, dans ce cas, le taux court à tendance à augmenter, se rapprochant de la moyenne sur long terme d'autant plus intensément qu'en s'en est écarté et que le paramètre a est grand.

-A l'inverse, si $r(t) > b$, l'espérance instantané de $r(t)$ est négative et $r(t)$ diminue dans le temps pour se rapprocher de *b*.

La forme explicite de la solution est :

$$r(t) = r_0\, e^{-at} + b\,(1- e^{-a\,t}) + \sigma\, e^{-at} \int_0^t e^{as} dW_s$$

avec comme paramètre :

r_0 : Taux instantané sans risque à la date 0

b : Niveau moyen du taux qui est supposé constant

a : La vitesse de retour à la moyenne

σ : Variance du changement instantané de r

dW_t : Un mouvement brownien

Propriétés :

Les variables aléatoires $r(t)$ ont une loi normale de paramètres :

- $E(\,r(t)\,) = r(0)\, e^{-at} + b(\,1- e^{-at}\,)$
- $Var\,(\,r(t)\,) = \dfrac{\sigma^2(1-e^{-2at})}{2a}$

2-Proposition [35]

La variable $\int_0^t r_s ds$ est une variable gaussienne de moyenne

$$E\,(\int_0^t r_s ds) = bt + (r_0 - b)\frac{1-e^{-at}}{a} \qquad \text{et de variance} -\frac{\sigma^2}{2a^3}(1-e^{-at})^2 + \frac{\sigma^2}{a^2}(t - \frac{1-e^{-at}}{a})$$

Démonstration :

Par définition $r_t = r_0 + abt - a\int_0^t r_s ds + \sigma W_t$. D'où

$$\int_0^t r_s ds = \frac{1}{a}(-r_t + r_0 + abt + \sigma W_t\,) = \frac{1}{a}\left[-(\,r_0 - b\,)e^{-at} - b - \sigma\int_0^t e^{-a(t-u)} dW_u + r_0 + abt + \sigma W_t\ \right]$$

Plus généralement, on a, pour $t \geq s$

$$E\left(\int_s^t r_u du / F_s\right) = b\tau + (r_s - b)\frac{1-e^{-a\tau}}{a} = M(t,s)$$

$$V\left(\int_s^t r_u du\right) = \frac{\sigma^2}{2a^3}(1-e^{-a\tau})^2 + \frac{\sigma^2}{a^2}\left(\tau - \frac{1-e^{-a\tau}}{a}\right) = V(t,s)$$

La variable $\int_s^t r_u du$ est une variable gaussienne dont on connaît, conditionnellement à F_s l'espérance et la variance. On en déduit

$$E\left(\exp - \int_s^t r_u du / F_s\right) = \exp\left(-M(t,s) + \frac{1}{2}V(t,s)\right)$$

3- Structure des zéro coupons dans Vasicek

Dans le modèle de Vasicek le prix d'un zéro coupon de maturité *T*, noté $P(t,T)$ est donné par la formule :

$$P(t,T) = E\left(\exp\left[\ -\int_t^T r_u du\ \right] / F_t\right)$$

En utilisant les calculs précédents et en exploitant les propriétés de la transformé de Laplace, la formule du zéro coupon devient :

$$P(t,T) = \exp\left\{\frac{1}{a}(1-e^{-a\tau})\left[R(\infty) - r(t)\ \right] - \tau R(\infty) - \frac{\sigma^2}{4a^3}(1-e^{-a\tau})^2\right\}$$

avec :

$$\begin{cases} \tau = T - t \\ R(\infty) = b + \dfrac{\lambda\sigma}{a} - \dfrac{\sigma^2}{2a^2} \\ \lambda \text{indépendant.de.}r \end{cases}$$

qui est solution de l'équation aux dérivées partielles [20] suivante:

$$\frac{\partial P}{\partial t} + (a(b-r) + \sigma\lambda)\frac{\partial P}{\partial r} + \frac{1}{2}\sigma^2\frac{\partial^2 P}{\partial r^2} - rP = 0\ , \quad P(T,T) = 1$$

où a, b, σ, λ sont des constantes positives

La relation $r(t,T) = -\frac{1}{T-t}\ln P(t,T)$ conduit finalement à la valeur de r :

$$r(t,\tau) = \mathrm{R}(\infty) + [r(t) - \mathrm{R}(\infty)]\frac{1}{a\tau}(1-e^{-a\tau}) + \frac{\sigma^2}{4a^3\tau}(1-e^{-a\tau})^2$$

Ce modèle permet d'obtenir la plupart des formes [27] de la courbe des taux :

- Structure ascendante si $r(t) \leq R(\infty) - \frac{\sigma^2}{4a^2}$
- Structure inversée si $r(t) \geq R(\infty) + \frac{\sigma^2}{2a^2}$
- Structure bosselée si $R(\infty) + \frac{\sigma^2}{2a^2} \leq r(t) \leq R(\infty) - \frac{\sigma^2}{4a^2}$

Ce modèle dit de déport normal présente néanmoins des inconvénients :

- Les différents paramètres du processus de diffusion sont constants
- Il n'est pas possible d'obtenir une courbe de taux sous forme de cuvette
- Les valeurs négatives du taux d'intérêt ne sont pas censurées

3- La courbe des taux issue du modèle de Vasicek

Le modèle de Vasicek donne la forme analytique [18] de la courbe des taux aujourd'hui et plus généralement de n'importe quelle date.

Le graphe de la fonction $\theta \longrightarrow R(t,\theta)$ ressemble effectivement à de nombreuses courbes de taux observés sur le marché. Toutefois, certaines d'entre elles, notamment les courbes dites « inversées », ou le taux court est plus haut que le taux long ne peuvent être atteintes par un modèle de ce genre.

C- Modèle de Cox-Ingersoll-Ross

Ce modèle, établi en 1985, introduit un processus en racine carrée [9] qui interdit à un taux initialement positif de prendre des valeurs négatives, tout en conservant la simplicité du processus d'Ornstein Uhlenbeck. Il présente comme différentielle du taux spot :

$$dr(t) = a\,(b - r(t))\,dt + \sigma\sqrt{r(t)}\,dW_t\,, \quad r(0) = r \quad (1)$$

où a, b et σ sont des constantes positives et W_t un processus de Wiener standard.

Ce modèle présente [14] des propriétés réalistes :

- ✓ Les taux d'intérêt négatifs sont exclus
- ✓ La variance du processus croît avec r
- ✓ Les taux d'intérêt se rapprochent à long terme de la valeur b, quand a détermine la vitesse d'ajustement.

La fonction $\sqrt{r(t)}$ n'étant pas une fonction lipschitzienne, la solution de l'équation différentielle stochastique (1) est non explicite, on sait qu'il existe une solution positive mais on ne peut pas la trouver explicitement, il faut utiliser des procédures numériques pour la trouver. Dans ce modèle, les variables $r(t)$ n'ont pas une loi normale (comme dans le cas du modèle de Vasicek) et sont toujours positives.

1- Structure du zéro coupon dans CIR

La valeur du zero-coupon est déterminée par la formule suivante:

$$P(r,t,T) = A(t,T)\exp(-B(t,T)r(t))$$

avec

$$\begin{cases} t \prec T \\ A(t,T) = \dfrac{2\gamma e^{(\gamma+a+\lambda)\frac{T-t}{2}}}{(\gamma+a+\lambda)(e^{\gamma(T-t)}-1)+2\gamma} \\ B(t,T) = \dfrac{2(e^{\gamma(T-t)}-1)}{(\gamma+a+\lambda)(e^{\gamma(T-t)}-1)+2\gamma} \\ \gamma = \sqrt{(a+\lambda)^2+2\sigma^2} \\ \lambda(r,t) = \dfrac{\lambda}{\sigma}\sqrt{r} \end{cases}$$

qui est solution d'une équation aux dérivées partielles.

2- Calcul des prix zéro coupon

Equation aux dérivées partielles d'évaluation

On utilise l'équation aux dérivées partielles ci-dessous qui permet d'obtenir les formules de prix comme solution de celle-ci.

$$\frac{\partial P}{\partial t} + (a(b-r)+\lambda r)\frac{\partial P}{\partial r} + \frac{1}{2}\sigma^2 r\frac{\partial^2 P}{\partial r^2} - rP = 0, \quad P(T,T)=1$$

La relation $R(r,t,T) = -\dfrac{1}{T-t}\ln P(r,t,T)$ permet d'aboutir à la structure par terme des taux :

$$R(r,t,T) = \frac{B(t,T)r(t) - \ln A(t,T)}{T-t}$$

Comme pour le modèle de Vasicek, il est possible d'obtenir plusieurs [27] formes pour la courbe des taux :

- Structure ascendante si $r(t) \leq R(r,t,\infty)$
- Structure inversée si $r(t) \geq \dfrac{ab}{a+\lambda}$
- Structure bosselée si $\dfrac{ab}{a+\lambda} \leq r(t) \leq R(r,t,\infty)$

D- Modèle de Heath-Jarrow-Morton

Le modèle de HJM [28] qui date de 1992 se propose de modéliser l'ensemble de la structure à terme des taux d'intérêt du point de vue de la théorie d'arbitrage. HJM ne propose pas une structure dynamique spécifique, mais plutôt un cadre de travail.

Après avoir présenter la structure générale de la méthodologie de HJM, nous nous intéresserons à deux modèles [27] qui répondent aux caractéristiques de l'approche HJM : Les modèles de Ho& Lee et de Vasicek généralisé.

a) Notations :

IL est indispensable d'introduire certaines notations avant de se concentrer sur la méthodologie HJM.

- $P(t,T)$: prix d'une obligation sans coupon définie par la valeur en t de un euro qui sera payé en T
- $R(t,T) = -\frac{1}{T-t}\ln P(t,T)$: le taux de rendement continu
- $r(t) = lim_{T\to t} R(t,T)$: le taux sans risque instantané
- $f(t,T) = \frac{-\partial}{\partial T}\ln P(t,T)$: le taux forward instantané. $f(t,T)$ représente le taux d'intérêt sans risque pour un prêt contracté au temps t débutant à T pour une période infinitésimale.
- Ces diverses définitions conduisent à poser deux relations : $P(t,T) = e^{-\int_t^T f(t,s)ds}$ et $r(t) = f(t,t)$

b) La méthodologie

On suppose que la dynamique du taux forward instantané [31] est donnée par l'équation différentielle stochastique suivante :

$$df(t,T) = \mu(t,T)dt + \sigma(t,T)dW_t$$

dW_t étant un processus de Wiener standard sous la probabilité historique P

La forme intégrée donne $f(t,T) = f(0,T) + \int_0^t \mu(s,T)ds + \int_0^t \sigma(s,T)dW_s$

Il faut également préciser l'hypothèse initiale de la méthodologie HJM : $f(0,T) = f^*(0,T)$ où $f^*(0,T)$ représente le taux forward instantané observable sur le marché.

D'autre part, l'hypothèse d'absence d'opportunité d'arbitrage impose une condition sur *μ (.,.)* et sur *σ(.,.).* Plus précisément si $\lambda(t,T)$ est le processus vérifiant la relation :

$\mu(t,T) = \sigma(t,T)\ [\ \int_t^T \sigma(t,s)ds - \lambda(t,T)\ ]$, la condition d'absence d'arbitrage s'exprime par l'indépendance de $\lambda(t,T)$ vis-à-vis de T et donc $(\lambda(t,T) = \lambda(t))$.

Mais la complexité d'estimation de la prime de risque $\lambda(t)$ à partir du marché des titres obligataires pose problème. Pour contourner ce problème, HJM propose de faire appel à la mesure risque neutre *Q*. Sous cette mesure, l'évaluation du prix d'une obligation ne fait pas intervenirλ (t). Dorénavant on suppose que la dynamique du taux forward instantané dans l'univers risque neutre est donné par :

$$df(t,T) = \mu(t,T)dt + \sigma(t,T)d\widetilde{W}_t$$

L'hypothèse d'absence d'arbitrage impose également une relation entre *μ (.,.)* et *σ (.,.),* néanmoins celle-ci ne fait plus apparaître la prime de risque: $\mu(t, T)=\sigma (t, T)\int_t^T \sigma(t,s)ds$. Ainsi, pour déterminer la valeur d'une obligation sans risque de défaut, il suffit de suivre les différentes étapes détaillées ci-après :

1- On observe sur le marché la courbe des taux forward instantanés $f^*(0,T)$

2- On choisit un processus de volatilité $\sigma(t,T)$

3- En vertus de la relation donnée plus haut, on en déduit la valeur de $\mu(t,T)$

4- On détermine le taux forward instantané dans l'univers risque neutre :

$$\begin{cases} f(t,T) = f(0,T) + \int_0^t \mu(s,T)ds + \int_0^t \sigma(s,T)d\widetilde{W}_s \\ avec f(0,T) = f^*(0,T) \end{cases}$$

5- On retrouve le taux court terme en utilisant la relation suivante

$$\begin{cases} r(t) = f(t,t) \\ soit r(t) = f(0,t) + \int_0^t \mu(s,t)ds + \int_0^t \sigma(s,t)d\widetilde{W}_s \end{cases}$$

6- Finalement, l'expression du prix d'une obligation sans coupon et sa ns risque de défaut s'écrit comme suit :

$$P(t,T) = exp\left\{ -(\int_t^T f(0,u)du + \int_0^t\int_t^T \mu(s,u)duds + \int_0^t(\int_t^T \sigma(s,u)du)d\widetilde{W}(s)) \right\}$$

Le grand avantage de la méthodologie HJM est d'introduire comme paramètre de départ la courbe des taux forward instantané au temps 0. Les parties suivantes sont des illustrations [27] de cette méthodologie ; nous allons choisir un modèle pour $\sigma(t,T)$ (Ho&Lee, Vasicek généralisé), puis appliqué la méthodologie décrite antérieurement.

c) Modèle de Ho&Lee

Ce modèle est l'application la plus connue de la méthodologie de HJM. L'hypothèse de base de ce modèle consiste à considérer le coefficient de diffusion comme constant :

$$\sigma(t,T) = \sigma$$

La relation $\mu(t,T) = \sigma(t,T)\int_t^T \sigma(t,s)ds$, nous permet d'obtenir le coefficient de dérive :

$$\mu(t,T) = \sigma^2(T-t)$$

L'équation différentielle stochastique régissant la valeur du taux forward instantané s'écrit alors :

$$df(t,T) = \sigma^2(T-t)dt + \sigma d\tilde{W}_t$$

Après intégration, cette relation devient :

$$f(t,T) = f(0,T) + \sigma^2 t(T-\frac{t}{2}) + \sigma d\tilde{W}_t$$

La valeur du taux à court terme s'en déduit aisément :

$$r(t) = f(t,t) = f(0,t) + \frac{\sigma^2 t^2}{2} + \sigma\tilde{W}_t$$

Et la relation $P(t,T) = \mathrm{e}^{-\int_t^T f(t,s)ds}$ permet d'aboutir à la valeur de l'obligation sans coupon :

$$P(t,T) = exp\,(-\int_t^T (f(0,s) + \sigma^2 t(s-\frac{t}{2}) + \sigma\tilde{W}(t))ds)$$

$$= \frac{P(0,T)}{P(0,t)}\exp(-\frac{\sigma^2}{2}Tt(T-t) - \sigma(T-t)\tilde{W}(t))$$

d) Modèle de Vasicek généralisé

Dans ce modèle, le processus de volatilité vérifie la relation suivante, ou k est une constante positive :

$$\sigma(t,T) = \sigma e^{-k(T-t)}$$

Cette forme est facilement interprétable ; plus on se rapproche de l'échéance, plus la volatilité diminue. Comme pour le modèle de Ho-Lee, le processus de dérive se déduit de l'expression de $\sigma(t,T)$:

$$\mu(t,T) = \sigma(t,T) \int_t^T \sigma(t,s)ds = \frac{\sigma^2}{k}(e^{-k(T-t)} - e^{-2k(T-t)})$$

On retrouve ensuite l'équation stochastique forward instantané :

$$df(t,T) = \frac{\sigma^2}{k}(e^{-k(T-t)} - e^{-2k(T-t)})\ dt + \sigma\ \mathrm{e}^{-k(T-t)}\ d\tilde{W}_t$$

L'intégration de cette équation donne:

$$f(t,T) = f(0,T) - \frac{\sigma^2}{2k^2}(1-e^{-k(T-t)})^2 + \frac{\sigma^2}{2k^2}(1-e^{-kT})^2 + \sigma\int_0^t e^{-k(T-s)}d\tilde{W}_s$$

On déduit ensuite la valeur du taux court terme à partir de la valeur du taux forward :

$$r(t) = f(0,t) + \frac{\sigma^2}{2k^2}(1-e^{-kt})^2 + \sigma\int_0^t e^{-k(t-s)}d\tilde{W}_s$$

Comme dans le point précédent, la relation $P(t,T) = \mathrm{e}^{-\int_t^T f(t,s)ds}$ permet d'aboutir à la valeur de l'obligation sans coupon :

$$P(t,T) = \frac{P(0,T)}{P(0,t)} exp\left\{-\frac{K^2(t,T)}{2}L(t) + K(t,T)(f(0,t) - r(t))\right\}$$

avec :

$$K(t,T) = \frac{1-e^{-k(T-t)}}{k} \qquad\qquad L(t) = \int_0^t \sigma^2 e^{-2k(T-s)}ds$$

2-Dynamique des taux en temps discret

Dans le cas continu, la dynamique des taux est représentée par des équations différentielles, ce qui est différent du cas discret où ces derniers sont représentés par des treillis par des nœuds. Nous allons dans ce qui suit présenter deux modèles à temps discret à savoir le modèle de Ho&Lee et le modèle de Hull&White

A- Modèle de Ho&Lee

a) Présentation

Les travaux de Ho et Lee [29] qui date de 1986 marquent une avancée dans le domaine des modèles de valorisation des options de taux. Leur modèle prend en compte les phénomènes discrets et sa mise en oeuvre est simple.

$P_i\,(t,T)$ représente le prix d'une obligation zéro coupon de maturité $T-t$ (ou l'indice i représente le nombre de mouvements à la hausse). Ce modèle utilise la loi binomiale [10] pour étudier la valeur des obligation zéro coupon. On construit un «treillis binomial» de l'évolution des $P_i\,(t, T)$, qui à chaque stade du treillis peuvent suivre une évolution à la hausse ou à la baisse.

L'organigramme suivant illustre cette logique pour un treillis comportant trois mouvements successifs.

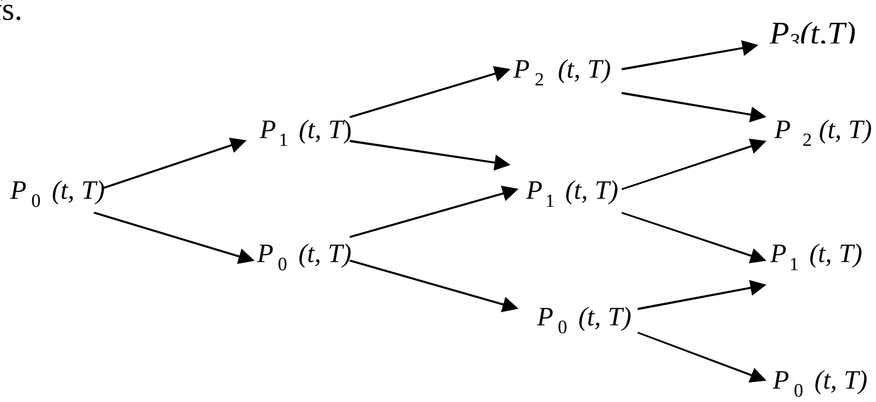


Illustration de l'évolution de la valeur de zéro coupon dans le cadre de Ho &Lee discrétisé

L'évolution dans le treillis [7] se fait à partir de fonction de perturbations non identique sur tous le treillis (peuvent dépendre du temps t) définies ci-après :

- $P_{i+1}(t,T) = \dfrac{P_i(t-1,T)}{P_i(t-1,t)}h(t,T-t)$ pour une évolution à la hausse.
- $P_{i+1}(t,T) = \dfrac{P_i(t-1,T)}{P_i(t-1,t)}h^*(t,T-t)$ pour une évolution à la baisse.

Avec $h^*(0) = 1$ et $h(0) = 1$

b) Indépendance du chemin suivi

La courbe des taux résultant d'un mouvement haut puis d'un mouvement bas est la même que celle résultant d'un mouvement bas puis haut (Up Down = Down Up). Il s'agit en fait de l'hypothèse d'indépendance du chemin suivi :

$$h(t,T-t+1)h^*(T-t)h^*(1) = h^*(t,T-t+1)h(T-t)h(1)$$

c) Absence d'opportunité d'arbitrage

La démarche consiste à créer un portefeuille comportant un zéro coupon d'échéance T et α[٣] zéro coupon d'échéance T'.

[٣] α étant choisi de façon à ce que la valeur du portefeuille soit la même dans un état haut ou dans un état bas

La condition d'absence d'opportunité d'arbitrage se matérialise alors par la relation suivante :

$$\frac{1-h^*(T-t)}{h(T-t)-h^*(T-t)}=\frac{1-h^*(T^{'}-t)}{h(T^{'}-t)-h^*(T^{'}-t)}$$

Si π (t) désigne la probabilité d'arbitrage du modèle, la condition d'absence d'opportunité d'arbitrage peut s'écrire d'une autre façon en imposant à $\pi(t)$ d'être indépendante de t :

$$\pi h(T-t)+(1-\pi)\,h^*(T-t)=1 \text{ pour tout } t, T-t$$

Les fonctions de perturbations sont obtenues en combinant les deux relations précédentes et donc on aura : $h(T-t)=\dfrac{1}{\pi+(1-\pi)\delta^{T-t}}$ et $h^*(T-t)=\dfrac{\delta^{T-t}}{\pi+(1-\pi)\delta^{T-t}}$

d**) Prix du zéro coupon**

La valeur de l'obligation zéro coupon à l'état i et à la date t est donnée par :

$$\mathrm{P}_i(t,T)=\frac{P_0(0,t+T)xh(T+t-1)xh(T+t-2)x.......xh(T)}{P_0(0,t)xh(t-1)xh(t-2)x........xh(1)}\delta^{T(t-i)},\ \text{Avec}\ \ \delta=\frac{h^*(1)}{h(1)}$$

B- Modèle de Hull et White

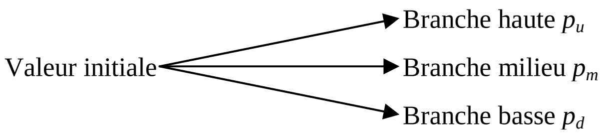
Ils supposent que la structure du taux court peut être modélisée par la dynamique suivante:

$$\Delta r=(\theta(t)-ar)\Delta t+\sigma\Delta W$$

Les différents paramètres retenus pour cette modélisation sont listés ci-après :

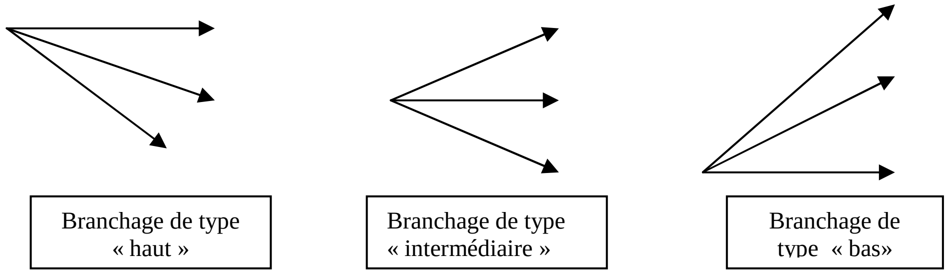
- Δr correspond à l'accroissement du taux entre t et $t+\Delta t$.
- θ est une fonction positive de t.
- a (positif) représente la vitesse de retour à la valeur moyenne.
- σ (positif) est la volatilité.
- W est la fonction aléatoire associée au mouvement brownien.

L'évolution du taux ne s'effectue pas selon un branchage binomial (comme pour le modèle de Ho et Lee), mais selon un schéma trinomial. A chacune des trois branches du treillis de taux est associée une probabilité de changement d'état, comme indiqué ci-dessous.



- p_u : probabilité de passer par la branche haute
- p_m : probabilité de passer par la branche du milieu
- p_d : probabilité de passer par la branche basse

D’autre part, il faut préciser que plusieurs types de branchage peuvent apparaître dans le treillis de taux :



Pour plus d’information sur l’algorithme retenu par Hull et White dans la détermination des valeurs définitives pour chaque type de branchage voir [30].

III-7 Modèles de déformation de la courbe des taux [18]

1- Le modèle en absence d’opportunité d’arbitrage

Lorsqu’on s’intéresse aux problèmes liés aux taux d’intérêts en absence d’opportunité d’arbitrage, ce ne sont pas les taux eux-mêmes sur lesquels on va à priori écrire les contraintes, mais sur les prix des opérations financières auxquels ils sont associés. La référence sera donc les prix des zéro coupons, même si pour des maturités supérieures à un an.

1-1- Le modèle pour les zéro- coupon

Nous supposons un marché qui traite en temps continu les zéro coupons de toutes les maturités, sans arbitrage. L’incertain du marché s’exprime à travers k mouvements browniens, notés W, non corrélés, définis sur l’ensemble de probabilité[ٔ] $(\Omega, (F_t)_{t\geq 0}, P)$.

Le marché est caractérisé par le processus de taux court r_t et le vecteur des primes de risque λ_t. Les prix négociés sont alors uniquement différenciés par leur vecteur de volatilité, et leur valeur d’aujourd’hui. Nous faisons les hypothèses suivantes :

La dynamique des prix $P(t,T)$ des zéro coupon est représentée par

$$\frac{dP(t,T)}{P(t,T)} = r(t)dt + \Gamma(t,T)dW_t, \qquad P(T,T) = 1 \qquad (1)$$

-Fonction de volatilité

Où $\Gamma(t,T)$ est la famille des volatilités locales, éventuellement aléatoire des zéro coupons, paramétrée par les dates d’échéance T. Comme à l’échéance, le prix du zéro coupon est égal à 1Euro, il est donc connu avec certitude. Nous supposons que $\Gamma(T,T) = 0$, et plus généralement pour toutes les dates postérieures à l’échéance T.

[ٔ] La famille de tribu $(F_t)_{t\geq 0}$ représente la structure d’information disponible au cours du temps aux agents

- **Probabilité risque neutre**

Tous les prix des titres du marché dépendent du processus $\tilde{W}_t$. En absence d'opportunité d'arbitrage, celui-ci est défini par :

$$d\tilde{W}_t = dW_t - \lambda_t dt$$

$\{ W_t ,\ t \in [0, T] \}$ est un mouvement brownien sous la probabilité P.

Nous annulons l'effet de la prime de risque λ_t en introduisant la probabilité risque neutre Q pour laquelle $\{ \tilde{W}_t ,\ t\in [0,T] \}$ est un Q mouvement brownien.

Dans ce contexte l'équation des zéro coupons devient

$$\frac{dP(t,T)}{P(t,T)} = r(t)dt + \Gamma(t,T)d\tilde{W}_t \qquad (2)$$

2- Equation structurelle des taux

2-1 Taux zéro coupon et conditions initiales

L'équation différentielle donnant les prix des zéro coupons admet une solution explicite, fonction de leur condition initiale, du taux spot r_t et de leur vecteur de volatilité. Les prix des zéro coupons à la date t dépendent alors des conditions initiales, constitués par la famille des prix zéro coupons aujourd'hui et de la structure des volatilités locales. D'où :

La dynamique des taux n'est fonction que de la courbe des taux aujourd'hui et de la structure des volatilités locales des prix zéro coupon.

2-2 Prix des zéro coupons

Le prix en t d'un zéro coupon d'échéance T est donné par :

$$P(t,T) = P(0,T)\exp\left[\int_0^t r_s ds + \int_0^t \Gamma(s,T)d\tilde{W}_s - \frac{1}{2}\int_0^t \left|\Gamma(s,T)\right|^2 ds\right]$$

qui représente la solution de l'équation différentielle stochastique (2)

Conclusion :

Nous avons présenté dans ce chapitre quelques modèles d'évaluation de la structure temporelle des taux d'intérêt qui peuvent être classés en trois catégories selon l'approche utilisée :

- Les modèles d'équilibre partiel reposant sur un raisonnement d'arbitrage. Citons, celui de Vasicek (1977) qui comporte une seule variable d'état.
- Les modèles d'équilibre général, tel que celui de Cox-Ingersoll et Ross (1985) basé sur une description globale de l'économie.
- Les modèles de déformation qui partent de la structure des taux d'intérêt observée et lui font subir des chocs. Citons, par exemple celui de Ho&Lee (1986).

CHAPITRE IV : EVALUATION DES ACTIFS FINANCIERS

INTRODUCTION :

Les actifs financiers sont régis par des comportements aléatoires qui traduisent la complexité du monde économique et politique. L'évaluation de ceux-ci, est devenu un enjeu majeur pour les opérateurs des marchés financiers, et intéressent les chercheurs du laboratoire de probabilités et modèles aléatoires.

L'intérêt porté aux actifs financiers qu'ils soient de bases ou des actifs dérivés nous a poussé dans ce chapitre à introduire la notion d'évaluation des actifs financiers: évaluation à temps discret et à temps continu.

Le chapitre sera divisé en deux grandes parties, dans la première nous allons présenté la valorisation des actifs financiers (actifs de base et actifs dérivés) dans un univers discret à une période et deux états du monde, et dans la deuxième partie, nous allons donné la valorisation de ces derniers dans le cas continu.

A- Evaluation à temps discret

IV- Valorisation des actifs financiers dans un univers discret à une période

IV-1 Produits dérivés

Les produits dérivés sont de façon générale des contrats de vente ou d'achat d'actifs financiers de base. L'actif de base est alors appelé actif sous-jacent. Il s'agit d'évaluer ici un actif dérivé simple à savoir : l'option d'achat ou de vente. La méthode d'évaluation utilisé repose sur :

- Une hypothèse d'absence d'opportunité d'arbitrage
- Une modélisation de l'évolution du cours du sous-jacent

1- Call et Put sur actif

Un call sur un actif [51] donne à son détenteur la possibilité d'acheter, mais non l'obligation à une date fixée l'actif à un prix K (prix d'exercice) convenu à l'avance. Il va permettre à un intervenant qui veut acquérir cet actif à une date future de se couvrir contre une hausse éventuelle du cours. A la date T d'acquisition, le détenteur de l'option veut débourser $\text{MAX}(S_T, K)$ pour acheter l'actif. La probabilité pour que l'état du monde « haut » (resp. « bas ») se réalise est P_h (resp. P_b).

Si $\{S_t, t \in [0,T]\}$ désigne le prix d'un actif sous jacent dans un marché financier à l'instant t, alors il y a deux possibilités [36] :

- Si $S_T > K$ alors le détenteur de l'option va acheter cet actif avec le prix K et le vendre immédiatement dans le marché avec le prix S_T. Il a donc un profit (payoff) $S_T - K$
- Si $S_T \leq K$ alors le détenteur ne va pas exercer cette option et son profit est donc nul i.e (payoff) est 0.

Autrement dit, pour avoir l'assurance de ne payer que $\text{MAX}(S_T, K)$, l'agent qui désire se couvrir, achète un produit financier (un call), qui lui versera 0 si l'actif sous-jacent vaut moins que K et $S_T - K$ sinon.

2- Valorisation dans un univers à deux dates et deux états du monde

2-1 Contexte de valorisation :

Nous sommes en t et notre univers de valorisation est représenté par deux dates t et T et deux états du monde en T, un état « haut « et un état « bas ». Dans cet univers de valorisation nous disposons de deux actifs de base : un actif sans risque et un actif risqué.

- L'actif sans risque est un placement zéro coupon au taux r, sa valeur est normalisée de telle sorte qu'en t, il vaudra 1. En T il vaudra $(1+r)^{T-t}$ et ce quel que soit l'état du monde.

- L'actif risqué qui vaut S en t, vaudra S_h dans l'état haut et S_b dans l'état bas avec $S_h > S_b$.

2-2 Valorisation du call [3]

Pour valoriser le call, nous allons évaluer un prix de réplication puis utiliser l'hypothèse d'absence d'opportunité d'arbitrage pour conclure. Le payoff du call est défini par les contraintes suivantes:

$$\alpha_1 * (1+r) + \alpha_2 * S_h = MAX(S_h - K, 0)$$
$$\alpha_1 * (1+r) + \alpha_2 * S_b = MAX(S_b - K, 0)$$

Notons

- $C_h = MAX(S_h - K, 0)$
- $C_b = MAX(S_b - K, 0)$

Soit

$$C_h = \alpha_1 * (1+r) + \alpha_2 * S_h$$

$$C_b = \alpha_1 * (1+r) + \alpha_2 * S_b$$

Le système se résout de la façon suivante :

$$\alpha_2 = (C_h - C_b) / S_h - S_b)$$

$$\alpha_1 = \left[C_h - S_h * (C_h - C_b)/(S_h - S_b)\right]/1 + r = (C_b S_h - C_h S_b)/(S_h - S_b) * (1+r)$$

Le prix de réplication de l'option est donné par :

$$C = \alpha_1 * 1 + \alpha_2 * \mathrm{S}$$
$$= \left[C_b S_h - C_h S_b\right] / \left[(S_h - S_b) * (1+r)\right] + (C_h - C_b)/(S_h - S_b) * S$$

Que l'on peut réécrire en fonction des payoffs C_h et C_b et de coefficients pondérateurs Π_h et Π_b :

$$C = [\ \Pi_h * C_h + \ \Pi_b * C_b\ ] / \ (1+r) \qquad (1)$$

avec

- $\Pi_h = \left[S * (1+r) - S_b\right]/(S_h - S_b)$
- $\Pi_b = \left[S * (1+r) - S_h\right]/(S_h - S_b)$

L'hypothèse d'absence d'opportunité d'arbitrage permet de conclure : le prix du call est son prix de réplication, soit donc C.

Par ailleurs on a :

$$S = [\,\Pi_h * S_h + \Pi_b * S_b\,] / (1+r) \qquad (2)$$

2-3 Propriétés des coefficients pondérateurs :

- $\Pi_b = 1 - \Pi_h$
- $\Pi_{i=h,b} \in \left]0,1\right[$

2-4 Probabilité risque neutre :

$\Pi_{i=h,b}$ peut s'interpréter comme une probabilité. Cette probabilité est appelée probabilité risque neutre notée Q. $\Pi_{i=h,b} \in \left]0,1\right[$ entraîne que Q est équivalente à la probabilité historique P et qu'on a caractérisé précédemment par $P_{i=h,b}$.

Sous cette nouvelle probabilité l'équation (1) et (2) s'écrivent :

$$S_t = E^Q\left(\frac{S_T}{1+r}\right)$$

$$C_t = E^Q\left(\frac{C_T}{1+r}\right)$$

On vient de montrer que sous l'hypothèse d'absence d'opportunité d'arbitrage (AOA) les différents prix de notre marché s'établissent par l'espérance, sous une probabilité Q équivalente à P, des gains actualisés. Ou encore, que les prix actualisés de nos actifs sont des martingales sous Q.

IV-2 les actifs de base

Il s'agit dans cette partie d'évaluer le prix forward d'un actif. Pour cela, nous allons nous placer sous l'hypothèse d'absence d'opportunité d'arbitrage et raisonner en deux étapes :

- Etablir un prix de réplication
- Conclure sur ce prix en utilisant l'hypothèse d'AOA

1- Réplication

Considérons que nous sommes une banque et qu'un client s'adresse à nous pour une vente à terme. Nous effectuons donc un achat à terme d'un actif S. Pour répliquer de tels flux, la banque va mettre en place une stratégie à base d'actifs de base « actif 'spot' » et une opération de « repurchase agreement » dite aussi opération repo.

1-1 Repurchase agreement

Une opération de « repo » ou « repurchase agreement » consiste en l'achat (ou la vente) d'un actif assorti de la revente (resp.rachat) de cet actif. La revente ou le rachat s'effectue à une date pour une valeur qui est fixée au moment de la mise en place de l'opération.

Si l'on note S_t le prix d'achat/vente de l'actif, P_{repo} le prix de revente/rachat, le taux repo, noté r_{repo}, dans ce cas nous avons l'égalité suivante :

$$P_{repo} = S_t * (1 + r_{repo})$$

l'opération globale qu'effectue la banque est une opération qui en t ne lui génère aucun flux, donc aucun investissement et qui en T lui rapporte :

$$P^f - S_t(1 + r_{repo})$$

Sous AOA une opération à investissement nul ne peut que rapporter 0. On a donc :

$$P^f = S_t(1 + r_{repo})$$

B- Evaluation à temps continu

IV-Valorisation des actifs financiers dans un univers continu monodimensionnel

1- Contexte de valorisation

Nous sommes en temps continu et l'on se place dans un univers à horizon fini T. Nous sommes en t. Sur le marché coexistent deux actifs liquides (actifs de base): l'actif sans risque M et un actif risqué *S.* On travaille sur un intervalle de temps [t, T] et un espace de probabilité(Ω , F, P). Les prix de ces deux actifs suivent, sous la probabilité P, dite probabilité historique, les diffusions suivantes :

$$\frac{dM_\tau}{M_\tau} = r d\tau$$

$$\frac{dS_\tau}{S_\tau} = \mu d\tau + \sigma dW_\tau$$

où W_τ est un brownien sous P et dont F est la filtration naturelle. μ, r et σ sont des paramètres constants. On introduit les notions de portefeuille autofinançant, d'opportunité d'arbitrage et de prix de réplication de la façon suivante :

1-1 Portefeuille autofinançant

Définition 1:

On appelle portefeuille de marché [64] un portefeuille de titres qui reproduit la composition en valeur du marché financier. La composition de ce portefeuille est susceptible de varier en fonction du temps. La valeur des actifs financiers étant des fonctions aléatoires du temps (processus stochastique). La valeur du portefeuille est elle-même un processus stochastique.

Définition 2 :

Un portefeuille autofinançant [3] est un couple $(\alpha_\tau, \beta_\tau)_{t\leq\tau\leq T}$ de processus F_τ - adaptés tels que :

1/ $\int_t^T |\alpha_s| ds < +\infty$ et $\int_t^T \beta_s^2 ds < +\infty$, p.s

2/ $\forall \tau \in [t, T]$

$$\alpha_\tau M_\tau + \beta_\tau S_\tau = \alpha_t M_t + \beta_t S_t + \int_t^\tau \alpha_s dM_s + \int_t^\tau \beta_s dS_s \qquad (1)$$

qui s'écrit également

$$d(\alpha_s M_s + \beta_s S_s) = \alpha_s dM_s + \beta_s dS_s$$

Les conditions 1) permet d'assurer une existence au processus définit par : $\int_t^\tau \alpha_s dM_s + \int_t^\tau \beta_s dS_s$

En effet pour que $\int_t^\tau \beta_s dS_s$ ait un sens il faut que $\int_t^\tau \beta_S S_s \mu ds + \int_t^\tau \beta_s S_s \sigma dW_s$ soit définit. Or pour que $\int_t^\tau \beta_s S_s \mu ds$ soit définit, il suffit que $\int_t^T (\beta_s S_s \mu)^2 ds < +\infty$ p.s. Puisque pour tout $\omega \in \Omega$ la fonction $s \rightarrow S_s(\omega)$ est continu sur *[t, T]*, alors $S_.(\omega)$ est borné sur *[t, T]*.

Ainsi $\int_t^T (\beta s\, S_s \mu)^2\, ds < +\infty$ p.s $\Leftrightarrow \int_t^T \beta_s^2 ds < +\infty$ p.s, ce qui est assuré par le premier point.

En posant $\tilde{S}_\tau = \dfrac{S_\tau}{M_\tau}$ on peut réécrire la deuxième condition en une condition équivalente

$\forall \tau \in [t, T]$

$$\alpha_\tau + \beta_\tau\, \tilde{S}_\tau = \alpha_t + \beta_t\, \tilde{S}_t + \int_t^\tau \beta_s d\tilde{S}_s \qquad (2)$$

qui s'écrit également

$$d\,(\alpha_s + \beta_s\,\tilde{S}_s\,) = \beta_s\, d\tilde{S}_s$$

1-2 Opportunité d'arbitrage

Une opportunité d'arbitrage est une stratégie d'investissement construite à base d'un portefeuille autofinançant et telle que :

- $\mathrm{Pr}\,oba^{P}\,(\alpha_t M_t + \beta_t S_t = 0) = 1$
- $\mathrm{Pr}\,oba^{P}\,(\alpha_T M_T + \beta_T S_T \prec 0) = 0$
- $\mathrm{Pr}\,oba^{P}\,(\,\alpha_T M_T + \beta_T S_T \succ 0) \succ 0$

1-3 Prix de réplication

Soit un actif C payant $h(S_T)$ en T . On appelle prix de réplication le prix d'un portefeuille autofinançant dont la valeur est égale à $h(S_T)$ en T .

2- Théorème [3]

2-1 Valorisation des actifs de base :

Il existe une probabilité Q équivalente à P telle que :

$M_t = E^{Q}\left[\exp(-r(T-t))M_T \,/\, F_t\right]$

$S_t = E^{Q}\left[\exp(-r(T-t))S_T \,/\, F_t\right]$

2-2 Valorisation des actifs dérivés

Soit un actif C payant $h(S_T)$ en T et tel que $E^{Q}\left[h^2(S_T)/F_t\right] \prec +\infty$. Alors sous l'hypothèse d'absence d'opportunité d'arbitrage, le prix de réplication de C est unique et, par ailleurs, si l'on note C_t ce prix, on a :

$$C_t = E^{Q}\left[\exp(-r(T-t)h(S_T)/F_t\right]$$

C_t est appelé prix d'arbitrage de l'actif C.

3- Démonstration

3-1 Valorisation des actifs de base

On montre tout d'abord par le théorème de Girsanov qu'il existe une probabilité Q équivalente à la probabilité historique P telle que sous Q

$$\frac{dS_\tau}{S_\tau} = r d\tau + d\tilde{W}_\tau$$

où $\tilde{W}_\tau$ est un brownien sous Q

Partons de

$$\frac{dS_\tau}{S_\tau} = \mu\, d\tau + \sigma\, dW_\tau$$

que l'on réécrit en

$$\frac{dS_\tau}{S_\tau} = (r + \mu - r)\, d\tau + \sigma\, dW_\tau \qquad (3)$$

Définissons le processus $\tilde{W}$ par

$$d\tilde{W}_\tau = (r + \mu - r)\, d\tau + \sigma dW_\tau$$

soit

$$\tilde{W}_\tau = W_\tau + \int_t^\tau \theta ds,$$

avec $\theta = \dfrac{\mu - r}{\sigma}$ et

$$L_\tau = \exp\left[-\int_t^\tau \theta dW_s - \frac{1}{2}\int_t^\tau \theta^2 ds \right]$$

L_τ est une martingale sous P car

$$E^P\left[\exp\left(\frac{1}{2}\int_t^T \theta^2 ds\right) / F_t \right] = \exp\left[\frac{1}{2}\theta^2 (T-t) \right] < +\infty$$

Alors sous la probabilité Q de densité L_T équivalente a P , $\tilde{W}_\tau$ est un mouvement brownien standard. On peut alors réécrire l'équation (3) en :

$$\frac{dS_\tau}{S_\tau} = r d\tau + \sigma\, d\tilde{W}_\tau \qquad (4)$$

En intégrant l'équation (4) on obtient

$$S_T = S_t \exp\left[r(T-t) - \frac{1}{2}\sigma^2 (T-t) + \sigma(\tilde{W}_T - \tilde{W}_t) \right]$$

D'où

$$E^Q\left[\exp(-r(T-t))S_T / F_t\right] = E^Q\left[\exp(-r(T-t))S_t \exp\left[r(T-t) - \frac{1}{2}\sigma^2 (T-t) + \sigma(\tilde{W}_T - \tilde{W}_t) \right] \right]$$

$$= S_t \exp(-\frac{1}{2}\sigma^2 (T-t)) E^Q\left[\exp \sigma(\tilde{W}_T - \tilde{W}_t) / F_t\right]$$

$$= S_t$$

Ce qui nous permet de conclure que :

$$S_t = E^Q\left[\exp(-r(T-t)) S_T / F_t\right]$$

Sous Q la diffusion du prix de M est inchangé soit :

$$\frac{dM_\tau}{M_\tau} = rd\tau$$

On a donc :

$$M_t = E^Q\left[\exp(-r(T-t)) M_T / F_t\right]$$

$$S_t = E^Q\left[\exp(-r(T-t)) S_T / F_t\right]$$

3-2 Valorisation des actifs dérivés

Existence du portefeuille répliquant

Posons $\quad A_\tau = E^Q\left[\frac{\exp(-r(T-t)}{M_t} h(S_T) / F_\tau\right)$

Par construction A est une martingale sous Q qui vaut $\frac{\exp(-r(T-t)}{M_t} h(S_T)$ en T. Le théorème [12] de représentativité des martingales nous permet de dire qu'il existe un processus F -adapté° $(K_\tau)_{t \le \tau \le T}$ tel que :

$$A_\tau = A_t + \int_t^\tau K_s d\tilde{W}_s \qquad (5)$$

avec $\int_t^T K_s^2 \, ds < +\infty$ p.s. L'équation (5) se réécrit

$$A_\tau = A_t + \int_t^\tau \beta_s d\tilde{S}_s \qquad (6)$$

° La filtration naturelle de W^Q est aussi la filtration naturelle de W^P

avec $\beta_s = \dfrac{K_s}{\tilde{S}_s \sigma}$. Posons $\alpha_\tau = A_\tau - \beta_\tau \tilde{S}_\tau$. On remarque alors que l'équation (6) s'écrit encore

$$\alpha_\tau + \beta_\tau \ \tilde{S}_\tau = \alpha_t + \beta_t \ \tilde{S}_t + \int_t^\tau \beta_s d\tilde{S}_s$$

et que donc $(\alpha_\tau, \beta_\tau)_{t\leq\tau\leq T}$ vérifie les conditions d'autofinancement 2/. Par ailleurs la valeur en τ du portefeuille définit par $(\alpha_\tau, \beta_\tau)$ vaut :

$$V_\tau = (\alpha_\tau + \beta_\tau \ \tilde{S}_\tau)\ M_\tau = A_\tau M_\tau = E^Q \left[\exp^{-r(T-\tau)} h(S_T)/F_\tau\right]$$

Montrons pour conclure sur l'existence d'un portefeuille autofinançant répliquant C en T , que les conditions d'intégrabilité 1/ sont vérifiées.

Puisque $\int_t^T K_s^2\, ds < +\infty$ p.s alors $\int_t^T \beta_s^2\, \sigma^2\ \tilde{S}_s^{\ 2}\, ds < +\infty$ p.s. ou encore $\int_t^T \beta_s^2 S_s^2\, ds < +\infty$ p.s.

Par ailleurs $(S_\tau)_{t\leq\tau\leq T}$ étant continu sur $[t, T]$ p.s, $(S_\tau)_{t\leq\tau\leq T}$ est borné sur $[t, T]$ p.s et donc

$$\int_t^T \beta_s^{\ 2} ds < +\infty \text{ p.s}$$

Par ailleurs $\int_t^T |\alpha_s| ds \leq \int_t^T |A_s| ds + \int_t^T \left|\beta_s \tilde{S}_s\right| ds$. $(A_\tau)_{t\leq\tau\leq T}$ étant continu sur $[t, T]$ p.s, $(A_\tau)_{t\leq\tau\leq T}$ est borné sur $[t, T]$ p.s et donc $\int_t^T |A_s| ds$ l'est également.

Enfin par $\int_t^T \left|\beta_s \tilde{S}_s\right| ds \leq \sqrt{\int_t^T \beta_s^{\ 2} ds}\sqrt{\int_t^T \tilde{S}_s^{\ 2} ds}$ et du fait que $\int_t^T \beta_s^2 ds < +\infty$ p.s, ainsi que $\int_t^T \tilde{S}_s^{\ 2} ds < +\infty$ p.s car $(S_\tau)_{t\leq\tau\leq T}$ est borné sur $[t, T]$ p.s, on a :

$$\int_t^T |\alpha_s| ds < +\infty \text{ p.s}$$

3-3 Conclusion

L'absence d'opportunité d'arbitrage [8] implique qu'il existe une probabilité Q dite « risque neutre » équivalente à la probabilité historique P sous laquelle les prix actualisés des actifs, actifs de base et actifs dérivés, sont des martingales. En d'autre terme :

$\forall \tau \in [t, T]$

$$C_\tau = E^Q\left[\exp(-r(T-t))C_T / F_\tau\right]$$

$$S_\tau = E^Q\left[\exp(-r(T-t))S_T / F_\tau\right]$$

$$M_\tau = E^Q\left[\exp(-r(T-t))M_T / F_\tau\right]$$

4- Analogies avec le modèle discret à une période

- Dans les deux cas, la construction du portefeuille répliquant mène à la mise en relief d'une probabilité risque neutre sous laquelle les prix de l'actif sans risque, l'actif risqué et l'actif C une fois discountés sont des martingales.
- Dans les deux cas, la probabilité risque neutre est équivalente à la probabilité historique.

4-1 Différences

- Dans le cas discret on parle du « prix » de l'actif dérivé alors qu'en temps continu on parle de « prix d'arbitrage ».
- La stratégie de couverture n'est plus statique mais dynamique : le portefeuille répliquant est construit lors de la vente ou de l'achat au temps t de l'actif C, mais il subira au cours du temps des réarrangements. La stratégie mise en place est autofinançante, ce qui signifie que les réarrangement de portefeuille au cours du temps se font à coût nul.

5- Formule de Black & Scholes [4]

Dans la modélisation classique de Black& Scholes (1973), l'évolution du prix de l'actif financier S_t est gouverné par un mouvement brownien géométrique :

$$dS_t = S_t(\mu dt + \sigma dW_t)$$

où S_t est le prix de l'actif financier à l'instant t, μ est le taux de rendement attendu, σ est la volatilité de l'actif financier et W_t un processus de Wiener.

5-1 Prix du call

Le prix du call est donné par : $C_{BS}(t,T,r,S_t,K,\sigma) = S_t N(d_1) - \exp^{-r(T-t)} KN(d_2)$ (7)

avec:

- $d_1 = \dfrac{\ln(S_t/K) + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$
- $d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t} = \dfrac{\ln(S_t/K) + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$
- N désigne la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite

- t est la date de valorisation de l'option
- T est la date d'exercice de l'option
- $(T-t)$ est la maturité résiduelle de l'option
- K est le strike de l'option
- S_t est la valeur de l'action en t
- σ est la volatilité du sous-jacent

Introduisons les notions suivantes

- $\dfrac{\partial C}{\partial S_t}$ est appelé delta de l'option. Dans le cas d'un call, on a $\dfrac{\partial C}{\partial S_t} = N(d_1)$
- $\dfrac{\partial C}{\partial t}$ est appelé thêta de l'option
- $\dfrac{\partial^2 C}{\partial S_t^{\,2}}$ est appelé gamma de l'option

5-2 Prix du put

Le prix du put est donné par : $P_{BS}(t,T,r,S_t,K,\sigma) = \exp^{-r(T-t)} KN(-d_2) - S_t N(-d_1)$ (8)

Et son delta par

$$\frac{\partial P}{\partial S_t} = -N(-d_1)$$

5-3 Prix forward d'un actif

On se place dans la situation d'une banque s'engageant à t à vendre en T un actif S au prix P^f. Pour cela, la banque doit monter une stratégie à base d'actif sans risque et d'actif risqué qui lui délivre des flux futurs.

Autrement dit, la banque achète en t l'actif S au prix S_t et finance cet achat par un emprunt d'un montant S_t sur la durée $(T-t)$. L'opération est donc neutre en t, la banque se portant acquéreur de l'actif en empruntant. En T elle aura dans son portefeuille l'actif S et devra rembourser $S_t * \exp^{r(T-t)}$ (emprunt au taux sans risque *r*). En *T* elle aura donc dans son portefeuille l'actif que pourra céder à son client en contrepartie de P^f qui, somme qui permettra à la banque de rembourser son emprunt.

D'où

$$P^f = S_t * \exp^{r(T-t)}$$

Une autre façon de valoriser la valeur forward de l'actif est d'utiliser la formule de valorisation suivante :

$$E^Q\left[\exp^{-r(T-t)} P^f / F_t \quad\right] = E^Q\left[\exp^{-r(T-t)} S_T / F_t \quad\right]$$

où encore

$$P^f = S_t * \exp^{r(T-t)}$$

5-4 Prix BS du call et du put comme fonction du prix forward de l'actif

Les formules de valorisations peuvent aussi s'exprimer en fonction du prix forward de l'actif. On a dans le cas du call :

$$C(t,T,r,S_t^T,K,\sigma) = \exp^{-r(T-t)}\left[S_t^T N(d_1) - KN(d_2)\right]$$

avec :

- $d_1 = \dfrac{\ln(S_t^T / K) + \frac{1}{2}\sigma^2 (T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$
- $d_2 = \dfrac{\ln(S_t^T / K) - \frac{1}{2}\sigma^2 (T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$
- $S_t^T = S_t \, exp^{r\,(T-t)}$: prix forward de l'actif

Conclusion

Nous avons présenté dans ce chapitre deux cadres d'évaluations des actifs financiers : évaluation à temps discret et à temps continu. Evaluation qui sera d'un grand apport aux opérateurs des marchés financiers quand à leur prise de décision.

Pour cela, on a utilisé l'hypothèse d'absence d'opportunité d'arbitrage qui implique dans les deux cadres, l'existence d'une probabilité risque neutre (qui permet d'actualiser le prix d'un flux futur) équivalente à la probabilité historique sous laquelle l'évaluation des actifs, actifs de base et actifs dérivés sont des martingales.

CHAPITRE V : SIMULATION DES TRAJECTOIRES DE PROCESSUS CONTINUS

INTRODUCTION :

Les processus stochastiques continus sont des outils largement employés en finance, notamment pour modéliser les taux d'intérêts et les cours d'actions. De nombreuses problématiques amènent à la simulation de tels processus. La mise en œuvre pratique de ces simulations nécessite trois étapes clés.

Nous nous proposons dans ce chapitre, de donner l'explication de ces trois étapes et qui permettent d'effectuer de manières efficaces des simulations de processus continus, plus particulièrement dans le cadre des problématiques de la finance; à savoir : la discrétisation des processus (discrétisation exacte et discrétisation approximative), l'estimation des paramètres et la génération de nombres aléatoires.

I- Discrétisation de processus continu

Prenons le cas d'un processus défini par l'EDS suivante :

$$\begin{cases} dX_t = \mu(X_t, t)dt + \sigma(X_t, t)dW_t \\ X_0 = x \end{cases} \qquad (1)$$

où W est un mouvement brownien standard

La mise en œuvre pratique de ce processus nécessite la discrétisation de celui-ci. Pour cela on met l'équation (1) sous la forme intégrale :

$$X_t = x + \int_0^t \mu(X_s, s)ds + \int_0^t \sigma(X_s, s)dW_s \qquad (2)$$

Si le processus considéré ne dispose pas d'une discrétisation exacte, un développement d'Itô Taylor de l'équation (2) nous permet de disposer d'une version discrétisée approximative (cf point I.2 ci-dessous). Cette approximation est d'autant plus précise que le développement intervient à un ordre élevé.

I-1 Discrétisation exacte

Pour certains processus, on dispose d'une discrétisation exacte, c'est le cas du processus d'Ornstein-Uhlenbeck retenu par Vasicek [62] pour modéliser le taux d'intérêt instantané r :

$$dr_t = a(b - r_t)dt + \sigma dW_t \qquad (3)$$

La solution de (3) est donnée par :

$$r_t = r_0 e^{-at} + b(1 - e^{-at}) + \sigma e^{-at} \int_0^t e^{as} dW_s \qquad (4)$$

La discrétisation exacte de celle-ci est :

$$r_{t+\delta} = r_t e^{-a\delta} + b(1 - e^{-a\delta}) + \sigma \sqrt{\frac{1 - e^{-2a\delta}}{2a}} \varepsilon \qquad (5)$$

où :

- ε est une variable aléatoire de loi normale centre réduite
- δ est le pas de discrétisation retenu

I-2 Discrétisation approximative

Lorsque la discrétisation exacte n'existe pas, il convient de se tourner vers des approximations discrètes du processus continu sous-jacent. Les schémas d'Euler et de Milstein sont des procédées de discrétisation les plus répondus. Tous deux sont des développements d'Itô Taylor de l'équation (2) à des ordres différents (ordre 1 pour Euler, ordre 2 pour Milstein).

Dans la suite, nous ferons référence au critère de convergence forte pour classer les procédés de discrétisation.

-Critère de convergence forte

Une discrétisation approximative $\tilde{X}$ converge fortement vers le processus continu X si l'erreur commise en approchant la dernière donnée observée X_T par la dernière donnée simulée notée $\tilde{X}_T^{\delta}$ est en moyenne négligeable [21].

$$\forall\, T>0,\ \lim_{\delta \to 0} E\left[\left| \tilde{X}_T^{\delta} - X_T \right|\right] = 0 \qquad (6)$$

La vitesse de convergence de l'équation (6) nous permet d'introduire un ordre entre les procédés de discrétisation. Ainsi le processus discrétisé $\tilde{X}$ converge fortement à l'ordre γ vers le processus $\tilde{X}$ si :

$$\exists K>0,\ \exists \delta_0>0,\ \forall \delta \in]0, \delta_0]\quad E\left[\left| \tilde{X}_T^{\delta} - X_T \right|\right] \leq K\delta^{\gamma} \qquad (7)$$

Ainsi, pour un pas de discrétisation δ fixé, plus le coefficient γ sera élevé, plus précise sera l'approximation. Kloeden & Platen [39] prouvent que sous certaines conditions le procédé d'Euler Mayurama possède un ordre de convergence de 0.5.

2-1 Schéma d'Euler-Mayurama

La version discrète de (1) la plus simple est le procédé de discrétisation d'Euler-Mayurama [2] qui consiste en l'approximation du processus continu X par le processus discret $\tilde{X}$ défini, avec les même notations que précédemment, par :

$$\tilde{X}_{t+\delta} = \tilde{X}_t + \mu(\tilde{X}_t, t)\delta + \sigma(\tilde{X}_t, t)\sqrt{\delta}\,\varepsilon \qquad (8)$$

Dans le modèle de Cox -Ingersoll et Ross (CIR) [9], le taux d'intérêt instantané est solution de l'EDS :

$$dr_t = a(b - r_t)dt + \sigma\sqrt{r_t}\,dW_t \qquad (9)$$

Le processus discret $\tilde{r}$ déterminé par le schéma d'Euler peut s'écrire:

$$\tilde{r}_{t+\delta} = \tilde{r}_t + a(b - \tilde{r}_t)\delta + \sigma\sqrt{\tilde{r}_t * \delta}\,\varepsilon \qquad (10)$$

Dans ces conditions, simuler un taux d'intérêt revient à calculer récursivement r_t, pour tout t, en simulant à chaque stade une réalisation d'une loi $\mathcal{N}(0, 1)$. Les paramètres a, b et σ doivent être judicieusement choisis afin de ne pas simuler un taux négatif.

2-2 Schéma de Milstein

De nombreux schémas d'ordre supérieur à celui d'Euler [57] ont été proposés pour les équations différentielles stochastiques, mais ils sont difficiles à mettre en œuvre, le plus immédiat est celui de Milstein [43], qui s'obtient comme une version corrigée du précédent. Cette correction s'obtient en effectuant un développement d'Itô Taylor au second ordre. Le processus discret $\tilde{X}$ est alors défini par :

$$\tilde{X}_{t+\delta} = \tilde{X}_t + \mu(\tilde{X}_t, t)\,\delta + \sigma(\tilde{X}_t, t)\sqrt{\delta}\,\varepsilon + \frac{\sigma_x(\tilde{X}_t, t)\sigma(\tilde{X}_t, t)}{2}\,\delta\,(\varepsilon^2 - 1) \qquad (11)$$

où $\sigma_x(\tilde{X}_t, t)$ désigne la dérivée par rapport au premier argument de la fonction $\sigma(.\,,.)$ évaluée en $(\tilde{X}_t, t)$. Ce procédé de discrétisation présente, en général, un ordre de convergence [21] forte plus élevé que celui d'Euler, ce qui signifie que pour un δ fixé, la discrétisation de Milstein permet d'atteindre un certain niveau de précision mieux que celui d'Euler. Autrement dit, à δ fixé, il existe un gain de temps de calcul à utiliser ce procédé de discrétisation lors des étapes de simulation.

En appliquant ce procédé de discrétisation sur le modèle de CIR [48], il vient :

$$\tilde{r}_{t+\delta} = \tilde{r}_t + a(b - \tilde{r}_t)\delta + \sigma\sqrt{\tilde{r}_t * \delta}\,\varepsilon + \frac{\sigma^2}{4}\delta(\varepsilon^2 - 1) \qquad (12)$$

En développant l'équation (2) à des degrés supérieurs, il est possible d'obtenir des processus discrétisés d'ordre de convergence plus élevé. Toutefois ils nécessiteront des calculs plus nombreux et peuvent faire intervenir plus d'une variable aléatoire ce qui signifie des temps de simulation plus importants.

Le graphique suivant (voir p.84) permet de comparer les évolutions moyennes [46] de la diffusion définie par (4) selon le schéma de discrétisation retenu pour les paramètres :

$r_0 = 4\%$ $\quad$ b=5% $\quad$ a=0.5 $\quad$ $\sigma = 10\%$

Fig1

II- Estimation des paramètres

L'estimation des paramètres [15] d'un modèle est une étape délicate dans la simulation des trajectoires d'un processus continu car elle peut être l'origine d'un biais. En effet, le praticien peut se voir confronté à deux problèmes :

- le processus n'admet pas forcément de discrétisation exacte,
- la variable modélisée n'est pas toujours directement observable

En effet, si le processus considéré n'admet pas de discrétisation exacte, il sera impossible d'estimer les paramètres du modèle par la méthode de maximum de vraisemblance. Il faudra se tourner vers des méthodes simulées telles que l'inférence indirecte pour estimer les paramètres.

1- Estimation par inférence indirecte

Cette méthode dont le principe général a été introduit par Gouriéroux et al. [26] est utilisée lorsque le processus n'admet pas de discrétisation exacte, ou que sa vraisemblance, trop complexe, ne permet pas d'implémenter la méthode du maximum de vraisemblance. Cette méthode consiste à choisir le paramètre $\hat{\theta}$ qui minimise la distance entre l'estimation d'un modèle auxiliaire sur les données observées et l'estimation de ce même modèle sur les données simulées à partir du modèle de base pour $\theta = \hat{\theta}$. Le modèle auxiliaire étant une discrétisation approximative de (1), le schéma d'Euler est souvent utilisé pour servir de modèle auxiliaire.

2-Estimateurs au maximum de vraisemblance

1- Estimateur

Définition 1:

Soit n>0 un entier. Nous appellerons n-échantillon d'une loi $\mathcal{L}$ toute suite $X_1,\ldots,X_n$ de variables aléatoires indépendantes de loi $\mathcal{L}$.

Nous nous intéressons ici à la statistique paramétrique, où la loi $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\theta)$ est caractérisée par un paramètre θ, qui est un nombre ou un vecteur. Ainsi, si $X_i \rightarrow \mathcal{B}(1,p)$, alors $\theta = p$ est un nombre, mais si $X_i \rightarrow \mathcal{N}(\mu, \sigma)$, alors $\theta = (\mu, \sigma)$ est un vecteur.

Définition 2 :

On dit que $\hat{\theta} : (x_1,\ldots x_n) \rightarrow \hat{\theta}_n = \hat{\theta}(x_1,\ldots x_n)$ est un estimateur convergent vers θ si et seulement si, en loi, on a $\theta = \lim_{n\to\infty} \hat{\theta}(X_1,\ldots X_n)$ pour toute suite de variables aléatoires X_i indépendantes, de loi $\mathcal{L}(\theta)$.

2- Vraisemblance

Principe de la méthode

Si un échantillonnage a produit la suite finie ($\hat{x}_1,\ldots.\hat{x}_n$) de nombres et qu'on a choisit de modéliser cette situation par un échantillon $X_1,\ldots.X_n$ de variables aléatoires indépendantes de loi $\mathcal{L}(\theta)$, et si le choix de la valeur du paramètre θ est le problème auquel on est confronté, on peut considérer l'évènement $E^* = \{X_1 = \hat{x}_1,\ldots..X_n = \hat{x}_n\}$, et plus généralement

$$E\,(x_1,\ldots.x_n) = \{X_1 = x_1,\ldots., X_n = x_n\} = \{X_1 = x_1\} \cap \ldots\ldots \cap \{X_n = x_n\}$$

et sa probabilité

$$L(x_1,\ldots.. ;x_n\ ;\ \theta) = P_\theta(E(x_1,\ldots.. ;x_n)) = P_\theta(\{X_1 = x_1\} \cap \ldots\ldots \cap \{X_n = x_n\})$$

$$= P_\theta(\{X_1 = x_1\}\ldots\ldots P_\theta\{X_n = x_n\}),$$

cette dernière égalité résultant de l'hypothèse d'indépendance des variables aléatoires X_i. L'idée est alors de choisir θ^* qu'il convient pour θ, de telle sorte que cette probabilité soit maximale pour les valeurs $\hat{x}_1,\ldots..\hat{x}_n$ obtenues, et donc de poser

$$\theta^* = \text{Argmax}_\theta \{L(\hat{x}_1,\ldots.,\hat{x}_n;\theta\ \};$$

c'est-à-dire la valeur de θ pour laquelle la fonction $\theta \mapsto L(\hat{x}_1,\ldots..\hat{x}_n\ ;\ \theta)$ est maximale. Ceci peut se ramener à résoudre en θ l'équation $\dfrac{\partial\, ln}{\partial\theta} L(\hat{x}_1,\ldots..\hat{x}_n\,;\theta) = 0$

Définition :

La fonction $L_n : (x_1,\ldots..,x_n\ ;\ \theta) \mapsto L_n(x_1,\ldots..,x_n\ ;\ \theta) = \prod_{i=1}^n P_\theta(\{X_i = x_i\})$ pour des $X_i \to \mathcal{L}(\theta)$ s'appelle la vraisemblance de la loi $\mathcal{L}$. La variable aléatoire obtenue en appliquant la fonction $(x_1,\ldots, x_n) \to \text{Argmax}_\theta \{L(x_1,\ldots., x_n;\theta\ \}$ appliqué au n-échantillon $(X_1,\ldots.X_n)$ s'appelle l'estimateur au maximum de vraisemblance du paramètre θ de la loi discrète $\mathcal{L}(\theta)$.

3- Cas d'une loi continue

Définition :

Si la loi $\mathcal{L}(\theta)$ des X_i est une loi continue de densité f_θ, on appelle vraisemblance de l'échantillon $(x_1,\ldots,x_n)$ pour la loi continue $\mathcal{L}(\theta)$ la fonction :

$$L_n(x_1,\ldots..,x_n\ ;\ \theta) = \prod_{i=1}^n f_\theta(x_i)$$

3- Le biais associé à la procédure d'estimation [46]

Le schéma de discrétisation retenu va conditionner l'estimation des paramètres. En effet, il va s'agir d'estimer les paramètres à partir du processus discrétisé par la méthode de maximum de vraisemblance.

Considérons le modèle de Vasicek : $dr_t = a(b - r_t)dt + \sigma dW_t$

La discrétisation exacte, comme la discrétisation selon le schéma d'Euler du modèle nous amène à considérer une équation du type :

$$Y = \alpha + \beta X + \sigma \varepsilon \qquad (13)$$

La méthode des moindres carrés nous donne des estimateurs sans biais de α, β et σ^2 :

$$\hat{\beta} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})(x_i - \bar{x})}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}, \qquad \hat{\alpha} = \bar{y} - \bar{x}\beta , \qquad \hat{\sigma}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i - y^*_i)^2}{n-2} \qquad \text{où} \quad y^*_i = \bar{y} - \hat{\beta}(x_i - \bar{x})$$

L'estimation des paramètres du modèle : $Y = \alpha + \beta X + \sigma \varepsilon$ par maximum de vraisemblance donne dans le cas de la :

-Discrétisation d'Euler :

$$\hat{a}_{euler} = 1 - \hat{\beta}, \qquad \hat{b}_{euler} = \frac{\hat{\alpha}}{\hat{a}} = \frac{\hat{\alpha}}{1-\hat{\beta}}, \qquad \hat{\sigma}_{euler}{}^2 = \hat{\sigma}^2$$

-Discrétisation exacte :

$$\hat{a}_{exact} = -\ln \hat{\beta}, \qquad \hat{b}_{exact} = \frac{\hat{\alpha}}{1-\hat{\beta}}, \qquad \hat{\sigma}_{exact}{}^2 = \hat{\sigma}^2 \frac{2\ln\hat{\beta}}{\hat{\beta}^2 - 1}$$

mais ces estimateurs sont pour certains biaisés.

4- Estimation « Ad hoc »

L'approche ad hoc à pour objectif d'estimer les paramètres du modèle en minimisant une distance (par exemple la distance quadratique) entre les prix prédits par le modèle et les prix observés sur le marché.

5- Illustration dans le cas du modèle de Vasicek

Nous allons illustrer l'application de quelques méthodes d'estimation (méthode de maximum de vraisemblance et la méthode ad hoc) sur le modèle de Vasicek à partir d'une étude de la courbe des taux publiée par l'institut des actuaires [47]. Les résultats sont donnés dans le tableau ci-dessous. Dans le modèle de Vasicek, la densité de transition[1] du taux spot $f(r_{t+1}/r_t)$ est connu avec certitude : il s'agit d'une loi normale [42] de moyenne et de variance :

$$r_{t+\delta}/r_t \sim \mathcal{N}\left(b(1-e^{-a\delta})+e^{-a\delta}r_t,\ \frac{\sigma^2}{2a}(1-e^{-2a\delta})\right),$$

avec δ : pas de discrétisation

- **Maximum de vraisemblance** : Il a été considéré des taux zéro coupon à chaque échéance mensuelle de 1 mois à 20 ans.
- **L'approche « ad hoc »** : Il a été reconstitué des prix zéro coupons d'échéance de 6 mois à 20 ans avec un pas de 6 mois, l'écart à minimiser étant l'écart quadratique entre les prix des zéro coupons observés et les prix reconstitués à partir des taux générés par le modèle.

	Maximum de vraisemblance	Estimation ad hoc		
Paramètres estimés	a, b et σ	a, b et σ	a et b	a et b
$\hat{a}=$	0.1112	0.2337	0.2349	0.5210
$\hat{b}=$	0.0531	0.0569	0.0748	0.0667
$\hat{\sigma}=$	0.0289	0.0000	0.0500	0.1000
$r_0=$	0.0207	0.0207	0.0207	0.0207

Tab1 : paramètres du modèle de Vasicek estimés selon les techniques d'estimation des paramètres

L'estimation des paramètres du modèle de Vasicek (tab1) donne des résultats très differents selon l'approche retenue.

[1] $\mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$ distribution de la loi normale de moyenne μ et de variance σ^2

En pratique, l'estimation simultanée des paramètres a, b et σ conduit à une courbe des taux quasi déterministe (σ est petit), ce qui peut apparaître irréaliste, ce qui a conduit les praticiens à fixer arbitrairement σ, puis à estimer les 2 paramètres restants (voir tab.1).

La figure 2, qui indique le prix des zéro coupon (voir p.90), en fonction de leur échéance selon les différentes méthodes d'estimation des paramètres, nous permet de voir que la méthode de maximum de vraisemblance peut s'avérer inadaptée puisqu'elle s'éloigne des autres courbes.

Fig. 2

En revanche, cette technique d'estimation des paramètres permet de générer des taux instantanés nettement plus proches en espérance de la courbe des taux originels que ceux obtenus par la méthode « ad hoc » voir fig 3 ci après.

Fig3

III- Génération de nombres aléatoires

Le problème de la génération de nombres aléatoires se ramène généralement à celui de la génération de bits aléatoires suivant une distribution uniforme, c'est-à-dire d'une suite de valeurs valant 1 ou 0, les 0 et les 1 apparaissent comme tirés indépendamment les uns des autres et uniformément distribués.

Pour générer des trajectoires de processus continu, il est nécessaire de passer par la génération de nombres aléatoires. Il s'agit en pratique de générer des réalisations de variables aléatoires de loi uniforme sur le segment $[0, 1]$. Si u est une telle réalisation, $F^{-1}(u)$ peut s'apparenter à une réalisation d'une variable aléatoire de fonction de répartition F. Mais pour simuler des variables aléatoires d'une loi donnée, on dispose principalement de deux moyens :

1- L'inversion de la fonction de répartition [55]

Si la fonction de répartition de la loi est F et U une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0, 1]$. Alors la loi de $X = F^{-1}(U)$ a comme fonction de répartition F. F^{-1} est ici l'inverse de F. La technique d'inversion de la fonction de répartition permet ainsi à partir de réalisation de variables uniformes, d'obtenir des réalisations d'autres variables. Lorsqu'on ne dispose pas de formule explicite pour F^{-1} on utilise des algorithmes d'approximation de cette fonction ou des algorithmes spécifiques à la loi que l'on souhaite traiter, à contrario si l'on connaît la densité f on utilise :

2- La méthode de rejet [17]

Dans le cas où la fonction de répartition ne s'inverse pas bien et qu'on connaît la densité f, on utilise la méthode de rejet.

-Principe de la méthode :

On veut simuler une variable aléatoire de loi de densité f , et soit g une fonction de densité simulable facilement telle que pour toute valeur de X : $f(X) \leq ag(X)$ où a est une constante positive. On suppose que $g(X)$ est telle que la fonction de répartition associée $G(X)$ est analytiquement connue ainsi que son inverse $G^{-1}(X)$

-Algorithme général :

١. Générer U_1 de distribution uniforme $U[0,1]$

٢. Calculer $X = G^{-1}(U_1)$

٣. Générer U_2 de distribution uniforme $U[0,1]$

٤. Si $U_2 \leq \dfrac{f(X)}{ag(X)}$ on garde X comme donnée générée sinon on la « rejette » et on recommence à l'étape 1.

Les modélisations retenues en finance faisant souvent intervenir des mouvements browniens, il est nécessaire de simuler des réalisations de variables aléatoires $\mathcal{N}(0,1)$, mais on ne dispose pas de formule exacte de l'inverse de la fonction de répartition inverse de la loi normale centrée réduite, d'où l'algorithme de Box-Muller qui, à partir de deux variables uniformes indépendantes sur *[0, 1]* a permet de générer deux variables indépendantes de loi $\mathcal{N}(0, 1)$. En effet si U_1 et U_2 sont deux variables aléatoires indépendantes de loi uniforme *U [0, 1],* alors en posant :

$$\begin{cases} X_1 = \sqrt{-2\ln U_1}\cos(2\pi U_2) \\ X_2 = \sqrt{-2\ln U_1}\sin(2\pi U_2) \end{cases}$$

X_1 et X_2 sont indépendants et suivent une loi gaussienne centrée réduite. Cette technique est toutefois longue à mettre en œuvre et nécessite l'indépendance des réalisations uniformes générées.

On distingue deux familles de générateurs [46] de nombres aléatoires :

- Les générateurs pseudo aléatoires (la fonction Rnd d'Excel)
- Les générateurs quasi-aléatoires (l'algorithme du tore)

1- Les générateurs pseudo aléatoires :

Le générateur implémenté dans Excel (Rnd) est un générateur congruentiel, c'est-à-dire un générateur périodique issu d'une valeur initiale[v] qui doit être fournie par l'utilisateur**.** Changer de valeur initiale permet de changer de suite de nombres. Le principe du générateur congruentiel est la génération d'une suite de nombres par une formule tout à fait déterministe de manière à obtenir une suite qui semble aléatoire (indépendance et distribution uniforme dans l'intervalle de variation). Générer des nombres aléatoires sur ordinateur [32] revient à créer une suite d'entiers :

$$I_{n+1} = f(I_n)$$

où f est une fonction qui doit être choisie judicieusement pour que la répartition des nombres I_n ne puisse pas être distinguée de ce que donnerait le hasard. On parle alors de nombres pseudo aléatoires.

- Formule du générateur congruentiel [65]

Soit X_0 un nombre entier positif. La suite de nombres est définie par :

$X_i = (aX_{i-1} + c) \bmod ulo\, m$ où *a, c* et *m* sont des entiers positifs.

[v] On parle également de « graine » du générateur

Propriétés :

- ✓ $X_i < m$
- ✓ Le nombre maximum de valeurs possibles de la suite est m
- ✓ Dès qu'un nombre est répété toute la séquence recommence

2-Les générateurs quasi aléatoires

Ce générateur multidimensionnel donne à la n-ème réalisation de la d-ème variable aléatoire uniforme à simuler la valeur u_n :

$$u_n = n\sqrt{p_d} - \left[n\sqrt{p_d}\right]$$

où :

- p_d est le *d*-ème nombre premier,
- $[.]$ désigne l'opérateur partie entière

Les valeurs générées par le tore ne sont pas indépendantes terme à terme et ceci peut générer des erreurs non négligeables. Pour contourner le problème posé à savoir la dépendance des valeurs générées par l'algorithme du tore, il a été proposé une autre famille de générateur dite mixte « tore mélangé » qui est obtenu en mélangeant par un générateur pseudo aléatoire les valeurs obtenues par un générateur quasi-aléatoire.

3- Générateur du tore mélangé

Descriptif de l'algorithme :

Notons (u_n) la suite générée par le nombre premier *p*. Au lieu d'utiliser le nombre u_n lors du *n*-ème tirage de la loi uniforme sur *[0, 1]*, nous proposons d'utiliser u_m où *m* est choisi de manière aléatoire dans *N*.

Le générateur ainsi obtenu présente les mêmes bonnes caractéristiques globales que l'algorithme du tore sans la dépendance terme à terme. Il nécessite toutefois d'avantage de temps de simulation du fait du tirage de l'indice *m*.

Conclusion :

Dans ce chapitre nous avons présenté les trois étapes clés quant à la génération pratique des trajectoires de variables modélisées par des processus continus : la discrétisation de processus, l'estimation des paramètres et la génération de nombres aléatoires.

L'étape de discrétisation conduit à arbitrer entre précision et temps de calcul à moins qu'une discrétisation exacte soit disponible. Lorsque ce n'est pas le cas on préfèrera le schéma de Milstein au schéma d'Euler parce qu'il permet de fournir des données simulées plus précises que celle obtenues par le procédé d'Euler.

L'estimation des paramètres est une étape délicate du fait des biais qu'elle pourra engendrer et cela en fonction des différentes méthodes d'estimation utilisées. D'autres méthodes d'estimation des paramètres ont été proposées et permettent d'estimer de manière plus efficace les paramètres des modèles à savoir la méthode par inférence indirecte.

Enfin, l'utilisation de l'algorithme du tore mélangé est plus efficace que les deux autres (l'algorithme du tore et la fonction Rnd d'Excel) et permet la construction pas à pas de trajectoires.

Conclusion générale :

Dans l'étude que nous avons proposé, l'actif (obligation zéro coupon, taux court instantané) à été modélisé en vue de tirer des conclusions relatives quant à la gestion et la régulation des institutions financières et donc du marché financier.

Le développement présenté dans l'avant dernière partie, principalement basé sur l'évaluation des actifs financiers (actifs de base et actifs dérivés) à temps discret et à temps continu a permet de montrer qu'en absence d'opportunité d'arbitrage, il existe une probabilité Q dite « risque neutre » équivalente à la probabilité historique P, sous laquelle les prix actualisés de ces produits financiers sont des martingales.

Dans la dernière partie, nous avons présenté les trois étapes indispensables à la génération pratique de trajectoires de variables modélisées par des processus continus : la discrétisation des processus, l'estimation des paramètres et la génération de nombres aléatoires.

L'étape de discrétisation conduit à arbitrer entre précision et temps de calcul à moins qu'une discrétisation exacte soit disponible. L'estimation des paramètres doit faire l'objet d'une attention particulière du fait des biais qu'elle pourra engendrer. Enfin, nous recommandons l'utilisation du tore mélangé pour toute construction pas à pas de trajectoires.

En Algérie, les opérateurs des marchés financiers devront songer à créer une banque de données, qui leur permettra de faire des simulations sur des variables modélisées par des processus continus.

Bibliographie

[1] Augros J.C, Les options sur taux d'intérêt: dynamique des taux et évaluation, Economica 1989

[2] Bally.V et Talay D, The law of the Euler scheme for stochastic differential equation: convergence rate of the distribution function, probability theory and related fields, 104 p.43-60, 1995

[3] Véronique Berger, Introduction à la valorisation des produits financiers, Université d'Evry Val d'Essonne, 2005

[4] Black F et M.Scholes, The pricing of options and corporate liabilities, Journal of Political Economy, 81 (3), p.637-654, 1973

[5] Christophe Bisière, La structure à terme des taux d'intérêts, 2003

[6] Marie Boissonnade et Daniel Fredon, Mathématiques financières, Dunod, 2000

[7] Marc Bonnassieux et Vincent Brunel, Un modèle de Ho& Lee généralisé, 1993

[8] Luciano Campi, Marchés financiers avec une infinité d'actifs, couverture quadratique et délits d'initiés, Thèse, 2004

[9] Cox J.C, Ingersoll J.E, Ross S.A, A theory of the term structure of interest rates,Econometrica Vol 53, N.02, p.385- 407, 1985

[10] Cox.J, Ross.S, Rubinstein.M, Option pricing:a simplified approach, Journal of Financial Economics, 7, p.229-263, 1979

[11] Dalquist M, On alternative interest rate processes, Journal of Baking & Finance, vol.20, p1033-1119, 1996

[12] Rose Anne Dana et Monique Jean blanc, Marché financier en temps continu, Economica, 2003

[13] Robert Dautry, Méthodes probabilistes pour les équations de la physique, 1989

[14] Griselda Deelstra, Long term returns in stochastic interest rate models: applications, Astin Bulletin, 30(1), p.711, 2000

[15] Dell' Aquila, Ronchetti, E.et Trojani, Robust GMM analysis of models for the short rate process, Journal of Empirical finance, 10, p.373-397, 2003

[16] M'hamed Eddahbi, Marché financier et modèles des taux d'intérêts en temps discret et continu, 2003

[17] Laure Elie et Bernard Lapeyre, Introduction aux méthodes de Monte-Carlo, 2001

[18] Nichole El Karoui, Couverture des risques dans les marchés financiers, 2003-2004

[19] V. Genou-Catalot, Statistique des processus: application aux finances, 2001-2002

[20] Patrick Georges, The Vasicek and CIR models and the expectation hypothesis of the interest rate term structure, Working Paper 17, 2003

[21] Ludovic Giet, Estimation par inférence indirecte des équations de diffusion : l'impact du choix du procédé de discrétisation, GREQAM, Working Paper N^0.03A15, 2003

[22] Edith Ginglinger, Jean-Marie Hasquenoph, Mathématiques financières, Economica, 1995

[23] Christophe Giraud, Processus stochastique: introduction à la détermination du prix des options par la théorie des martingales, 2004

[24] Emmanuel Gobet, Les mathématiques appliquées au cœur de la finance, In images des mathématiques, 2004

[25] Charles Goldfinger, Finance: nouvelle finance planétaire, 2005

[26] Gouriéroux, C., Monfort.G & Renault.E, Indirect inférence, Journal of applied econometric 8, p.85-118, 1993

[27] Sadek Hami, Les modèles DFA: Présentation, Utilité et Application, Mémoire ISFA, 2004

[28] Heath. D, R. A.Jarrow et A.Morton, Bond pricing and the term structure of interest rates: A new methodology for contingent claims valuation, Econometrica, 60, p.77-106, 1992

[29] Ho.T et S. Lee, Term structure movements and pricing interest rate contingent claims, Journal of Finance 41, p.1011-1029, 1986

[30] John Hull et A. White, Numerical procedures for implementing term structure models I: Single-Factor Models, Journal of Derivatives, 2, 1, p.7-16, 1994

[31] Chuang I-Yuan, Empirical tests on caplets and volatility hump structures: A further Evidence, Journal of Financial Studies vol.10 N_0.2, p.43-45, 2002

[32] Jacquemin J et Planchet F, Méthodes de simulation, Bulletin Français d'Actuariat, à paraître, 2004

[33] Bertrand Jacquillat, Bruno Solnik, Marchés financiers : gestion de portefeuille et des risques, 1990

[34] J. P. Javaillard, Décision financière à court terme, gestion du risque de taux, DESS CNAM, 2005

[35] Monique Jean Blanc, Cours de calcul stochastique, DESS IM, Option finance, 2002

[36] Elyès Jouini, Le prix des options financières, 2002

[37] Michel Jura, Technique financière internationale, 2ème édition, 2003

[38] I.Karatzas et S.E Shreve, Brownian motion and stochastic calculus. Springer- Verlag, 1988

[39] Kloeden & Platen, Numerical solution of stochastic differential equations, applications of mathematics, stochastic modelling and applied probability, 3 rd Ed, Springer-Verlag, 1999

[40] Bernard Lapeyre, Etienne Pardoux, Remi Sentis, Méthodes de Monte-Carlo pour les équations de transport et de diffusion, 1998

[41] Olivier Levêque, Cours de probabilités et calcul stochastique, EPFL, 2004-2005

[42] Ingrid Lo, An evaluation of MLE in a model of the nonlinear continuous-time short term interest rate, Working Paper (45), 2005

[43] Milstein.G, A method of second order accurancy integration of stochastic differential equations, Theory of probability and its applications 23, p.396-401, 1978

[44] Paul Monier, Les marchés boursiers, édition de Verneuil, 1995

[45] Martial Phélippé-Guinvarch, Les options négociables sur actions : évaluation et gestion, EURIA, 2004

[46] Frédéric Planchet, DFA-Evaluez les options cachées de votre bilan, EFE, 2004

[47] Planchet. F, Therond. P, Stochastic processes simulation, ISFA, 2004

[48] Planchet.F, Therond.P, Financial risk management of a defined benefit plan, ISFA, 2004

[49] Philippe Priaulet, Modèles de la courbe des taux d'intérêt, Evry- DESS, 2003

[50] Ph.Protter, Stochastic integration and differential equation, Springer-Verlag, 1990

[51] Ph. Protter, Stochastic processes and their applications (91), p.169-203, 2001

[52] François Quittard-Pinon, Evaluation de produits dérivés de taux d'intérêt par arbitrage dans l'approche martingale, 1993

[53] Francois-Eric Racicot et Raymond Theoret, Calibrage économétrique de processus stochastiques avec application aux données boursières, bancaires et cambiales canadiennes, cahier de recherche (13), p.6-10, 2005

[54] Patrick Roger, Processus stochastiques en temps continu, 2004

[55] G.Saporta, Probabilités, Analyse des données et Statistique, édition téchnip, 1990

[56] Sergio B, Arvizu Trevino, La gestion du risque au sein du portefeuille, 2005

[57] D. Talay, Simulation and numerical analysis of stochastic differential systems: a review. dans P. Kree et W. Wedig, Probabilistic Methods in applied Physics, volume 451 de lecture Notes in Physics, chapter 3, p.54-96, 1995

[58] Aimad Taleb, Modèles à intensité et copules appliqués à la détermination des probabilités de défaut d'un portefeuille, 2002

[59] E. Temmam, Mathématiques financières, Université de Paris 7, 2004

[60] Jacques Teulié, Patrick Topsacalian, Finance, Vuibert, 1994

[61] Ciprian Tudor, Mathématiques appliquées à l'économie et à la finance, Université de Panthéon -Sorbonne, 2005

[62] Vasicek.O, An equilibrium characterisation of the term structure, Journal of Financial Economics, 5, p.177-188, 1977

[63] M.Vial, Politique économique « rappels utiles pour la compréhension des marchés financiers », 2004

[64] Pascale Viala, Eric Briys, Eléments de théorie financière, 1995

[65] Bernard Vuilleumier, Construire un générateur de nombres aléatoires, CPTIC, 1999

[66] B.Ycart, Introduction aux équations différentielles stochastiques, 1998

[67] Yebka.D et Mazari.L, Marché financier, Mémoire de licence, UMMT, 1998

[68] José Zemmour, Un modèle d'équilibre partiel d'arbitrage multifactoriel: l'écueil des primes de risque des facteurs, décembre 2003