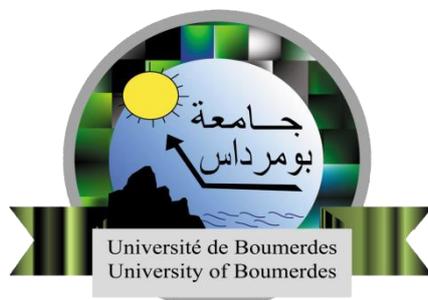


République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITE M'HAMED BOUGARA-BOUMERDES



Faculté des Sciences de l'Ingénieur

Mémoire de Master

Présenté par :

Mr HAFHOUF Bellal

En vue de l'obtention du diplôme de **Master** en

Génie Electrique

Option : Signal et Communication

Thème :

Modélisation et simulation par la méthode des différences finies d'onde électromagnétique

Président	Mr HAMEL	UMBB
Rapporteurs	Mr KHALFI	UMBB
Examineurs	Mr BOURKACHE	UMBB
	Mr MOUATSI	UMBB

- Promotion Juin 2017 -

REMERCIEMENTS

Je remercie tout d'abord **ALLAH le tout puissant** qui ma donné le courage et la volonté de terminer ce travail.

Je remercie vivement mon promoteur, Monsieur KHALFI, pour son suivi, et ses conseils.

Je tiens à adresser mes sincères remerciements aux membres du jury : Mr HAMEL, Mr BOURKACHE et Mr MOUATSI d'avoir acceptés de juger ce modeste travail.

Dédicaces

Je dédie ce modeste travail à :

Ma mère, mon père, mes frères et ma sœur.

Mes tantes et mes oncles.

Mes cousins et mes cousines.

Mes amis.

يُعتبر نمذجة الظواهر الكهرومغناطيسية رهان في مختلف المجالات التطبيقية. هذا العمل يعرض نمذجة ومحاكاة اهتزاز الموجة الكهرومغناطيسية في مختلف الوسائط (الفراغ، الناقل، النحاس، البلازما)، وذلك بتطبيق طريقة الفروق المتناهية في المجال عالي التواتر (الميكروموجة) وكذا تأثير التردد الأعلى المطبق على مسافة ووقت المحاكاة.

الكلمات المفتاحية: النمذجة الكهرومغناطيسية، معادلات ماكسويل، معادلات الإهتزاز، الفروق المتناهية، المحاكاة، التشتت الرقمي، التوازن، الميكروموجة.

RESUME

Ce travail expose la modélisation et la simulation d'une onde électromagnétique dans trois milieux différents (vide, conducteur, plasma) en utilisant la méthode des différences finies dans le domaine micro-ondes, ainsi que l'effet de la fréquence de discrétisation sur la durée et la distance de la simulation.

Mots clés : modélisation électromagnétique, équations de Maxwell, équations de propagation, Différence finie, simulation, dispersion numérique, stabilité, micro-onde.

ABSTRACT

This work describe the modeling and the simulation of an electromagnetic wave in three different mediums (vacuum, copper, plasma) by using the finite differences method in the microwaves field, as well as the effect of the frequency of discretization on the duration and the distance of simulation.

Key words: electromagnetic modeling, Maxwell's equation, propagation's equation, finite difference, simulation, numerical dispersion, stability, microwave.

Principales notations et constantes

Célérité dans le vide : $c = 3.10^8 \text{ m/s}$

Pulsation (rad/s): ω

Pulsation plasma (rad/s): ω_p

Permittivité diélectrique (Faraday/m) : ε

Permittivité diélectrique relative : ε_r

Permittivité diélectrique dans le vide : $\varepsilon_0 = 8,854.10^{-12} \text{ F.m}^{-1}$

Perméabilité magnétique (Henry/m): μ

Perméabilité magnétique relative : μ_r

Perméabilité magnétique dans le vide $\mu_0 = 4\pi.10^{-7} \text{ H.m}^{-1}$

Conductivité électrique (Siemens/m) : σ

Champ électrique (Volt/m) : \vec{E}

Champ magnétique (Ampère/m): \vec{H}

Induction électrique (Coulomb/m^2) : \vec{D}

Induction magnétique (Webber/m^2) : \vec{B}

Fréquence (Hz): f

Longueur d'onde (m) : λ

Densité de courant (Ampère/m^2) : \vec{j}

Densité de charge (kg/m^3): ρ

Constante d'atténuation (Np/m) : α

Constante de phase (rad/m) : β

Épaisseur de peau (m): δ_p

Impédance intrinsèque (Ω) : $\bar{\eta}$

Constante de propagation (m^{-1}): $\bar{\gamma}$

Produit vectoriel : \times

L'opérateur Gradient : $\overrightarrow{grad}(\cdot)$

L'opérateur Rotationnel : $\overrightarrow{Rot}(\cdot)$

L'opérateur Divergence : $Div(\cdot)$

L'opérateur Laplacien : $\Delta = Div(\overrightarrow{grad}(\cdot))$

LHI(Linéaire, Homogène, Isotrope)

Liste des Tableaux

Tableaux III.1 : les différents paramètres calculés (cas du vide).....	42
Tableaux III.2 : les différents paramètres calculés (cas du cuivre).....	48

Liste des figures

Figure I.1: front d'onde.....	4
Figure I.2 : Type d'onde.....	4
Figure I.3 : Type de polarisation.....	5
Figure I.4 : spectre électromagnétique.....	5
Figure I.5 : Structure d'une onde électromagnétique plane.....	7
Figure I.6 : Interface entre deux milieux LHI.....	11
Figure II.1 : Approximation de la différence finie	26
Figure II-2 : front d'onde plane suivant la direction x'	29
Figure II.3 : discrétisations pour les différences finies.....	32
Figure II.4 : erreur numérique de phase en degré par longueur d'onde en fonction de La direction de propagation de l'onde.....	37
Figure II .5 : représentation de l'algorithme de la méthode des différences finies.	38
❖ Cas du vide à $f_{max}=300\text{MHZ}$:	
Figure III .1 : simulation à $t_0=0$	42
Figure III.2 : simulation à $t = 100\Delta t$	43
Figure III.3 : simulation à $t = 220\Delta t$	43
Figure III.4 : simulation à $t = 400\Delta t$	44
❖ Cas du vide à $f_{max}=1\text{GHZ}$:	
Figure III.5 : simulation à $t = 0$	44

Figure III.6 : simulation à $t = 100\Delta t$	45
Figure III.7 : simulation à $t = 400\Delta t$	45
❖ Cas du vide à $f_{max}=1.5\text{GHZ}$:	
Figure III.8 : simulation à $t = 0$	46
Figure III.9 : simulation à $t = 200\Delta t$	46
Figure III.10 : simulation à $t = 400\Delta t$	47
❖ Cas d'un conducteur : cuivre à $f_{max}=300\text{MHZ}$:	
Figure III.11 : simulation à $t = 0$	48
Figure III.12 : simulation à $t = 100\Delta t$	49
Figure III.13 : simulation à $t = 200\Delta t$	49
Figure III.14 : simulation à $t = 400\Delta t$	50
❖ Cas d'un conducteur : cuivre à $f_{max}=1\text{GHZ}$:	
Figure III.15 : simulation à $t = 0$	50
Figure III.16 : simulation à $t = 200\Delta t$	51
Figure III.17 : simulation à $t = 400\Delta t$	51
❖ Cas d'un conducteur : cuivre à $f_{max}=1.5\text{GHZ}$:	
Figure III.18 : simulation à $t = 0$	52
Figure III.19 : simulation à $t = 200\Delta t$	52
Figure III.20 : simulation à $t = 400\Delta t$	53
❖ Cas d'un plasma à $f_{max}=300\text{MHZ}$:	
Figure III.21 : simulation à $t = 0$	54
Figure III.22 : simulation à $t = 100\Delta t$	54
Figure III.23 : simulation à $t = 220\Delta t$	55
Figure III.24 : simulation à $t = 400\Delta t$	55
❖ Cas d'un plasma à $f_{max}=1\text{GHZ}$:	
Figure III.25 : simulation à $t = 0$	56
Figure III.26 : simulation à $t = 100\Delta t$	56

Figure III.27: simulation à $t = 400\Delta t$57

❖ **Cas d'un plasma à $f_{max}=1.5$ GHz :**

Figure III.28 : simulation à $t = 0$57

Figure III.29 : simulation à $t = 200\Delta t$58

Figure III.30: simulation à $t = 400\Delta t$58

Sommaire

Introduction générale

Introduction	1
---------------------------	---

Chapitre I : Généralités sur les ondes électromagnétiques

Introduction	3
I.1 Quelques propriétés des ondes électromagnétiques	3
I.1.1 Fréquence	3
I.1.2 Longueur d'onde.....	3
I.1.3 Front d'onde.....	3
I.1.4 La polarisation	4
I.2 Classification des ondes électromagnétiques	5
I.3 Onde plane uniforme	6
I.4 Propagation des ondes électromagnétiques en espace libre	7
I.4.1 Equation de Maxwell.....	7
I.4.1.a) Equation de Maxwell-Faraday	8
I.4.1.b) Equation de Maxwell-Ampère	8
I.4.1.c) Loi de Gauss pour le champ électrique	8
I.4.1.d) Loi de Gauss pour le champ magnétique	8
I.4.2 Equation constitutive	8
I.5 Grandeurs caractéristiques du milieu	9
I.5.1 Les milieux sans pertes.....	9
I.5.2 Les milieux avec pertes	10
I.5.2.1 Définition d'une permittivité équivalente d'un milieu diélectrique à Perte.....	10

I.5.2.1.a milieu sans pertes.....	10
I.5.2.1.b milieu avec pertes	10
I.6 Classification des milieux.....	11
I.7 Equations de l'interface entre deux milieux.....	11
I.8 Equations et paramètres de propagation.....	12
I.8.1 Cas particulier d'un diélectrique sans pertes.....	13
I.8.1.1 Solution à l'équation d'onde temporelle.....	15
I.8.2 Onde sinusoïdale dans un milieu quelconque.....	16
I.8.2.1 Caractéristique de l'onde plane.....	18
I.9 Paramètres de propagation des milieux.....	19
I.10 Propagation dans les plasmas.....	22
Conclusion.....	24
 Chapitre II : Modélisation par la méthode des différences finies	
II.1 Principe de la méthode des différences finies.....	25
II.1.1 Notation indicielle - cas 1D.....	25
II.1.2 Généralisation de la notation indicielle.....	28
II.2 propagation dans une direction arbitraire.....	28
II.3 Equations de propagation.....	30
II.4 Conditions aux limites et conditions initiales.....	31
II.5 Equations de propagation aux différences finies centrées.....	31
II.6 Choix des pas de discrétisation –Stabilité et dispersion.....	36
II.6.1 Stabilité du schéma.....	36

II.6.2 Dispersion numérique.....	36
II.7 Algorithme principal de la méthode des différences finies.....	37
Conclusion.....	39
Chapitre III : Résultats de simulation et commentaires	
III.1 Paramètres de la simulation.....	40
III.1.1 Choix de la fréquence.....	40
III.1.2 Pas de discrétisation (spatiale et temporelle).....	40
III.2 cas d'un diélectrique : vide.....	41
III.2.1 Conditions initiales	41
III.2.2 Conditions aux limites	41
III.2.3 Les résultats	42
III.2.4 Commentaires.....	47
III.3 Cas d'un bon conducteur : le cuivre.....	47
III.3.1 Les résultats	48
III.3.2 Commentaires.....	53
III .4 Cas d'un plasma	53
III.4.1 Les résultats	53
III .4.2 commentaires	59
Conclusion.....	59
Conclusion générale	
Conclusion.....	60

Introduction générale

La modélisation des phénomènes naturels et plus particulièrement la modélisation de phénomènes électromagnétiques constitue un enjeu dans des nombreux domaines d'application. En vue de traiter les problèmes les plus divers, de nombreux modèles ont été développés.

Un modèle n'est qu'une certaine représentation, pour se rapprocher au mieux et ce dans une certaine limite, de la réalité. Il repose sur un ensemble d'hypothèses qui vont permettre de reformuler plus simplement un problème initial. Un modèle se base donc sur des approximations et possède par conséquent un certain domaine de validité

Prévue théoriquement dès l'établissement des équations de Maxwell en 1876, la propagation des ondes électromagnétiques n'a été étudiée expérimentalement qu'en 1888 par H.Hertz [1].

La connaissance de la propagation des ondes électromagnétiques est aujourd'hui un point clef de la prédiction de la performance des systèmes électromagnétiques. Elle est nécessaire pour améliorer leur conception, mais également pour aider à la prise de décision en contexte opérationnel.

Une bonne modélisation de la propagation des ondes est donc requise car des nombreux systèmes y sont sensibles. On peut citer par exemple : les radars, les systèmes électromagnétiques passifs pour l'écoute militaire, les systèmes de brouillage ainsi que l'ensemble des systèmes de communication.

L'objectif de ce mémoire est de modéliser et simuler la propagation bidimensionnelle d'une onde électromagnétique en espace libre (domaine infini) dans les différents milieux (vide, conducteur, plasma) en appliquant une méthode numérique (**la méthode des différences finies**) dans la **gamme des fréquences micro-ondes [300MHZ – 300GHZ]**.

On s'intéresse à l'évolution de la propagation d'une onde électromagnétique dans le milieu où elle se propage. Nous examinerons les effets des différents milieux (vide, conducteur, plasma) sur le comportement de l'onde électromagnétique. L'étude de la propagation d'une onde dans le milieu nécessite la description de l'onde [1], et du milieu dans lequel elle évolue.

Ce mémoire se compose de trois chapitres :

Dans le premier, nous présentons quelques rappels sur les ondes électromagnétiques et ses propriétés, nous rappellerons ensuite les équations de Maxwell, les grandeurs caractéristiques du milieu de propagation et une description rapide du comportement des ondes électromagnétiques dans les différents milieux (diélectrique : vide, bon conducteur : cuivre, et plasma). Nous le ferons pour des géométries simplifiées (celle de l'onde plane) et pour des milieux à comportement simple : les milieux linéaires, homogènes, isotropes.

Dans le deuxième chapitre de ce mémoire, nous exposons la méthode des différences finies pour la modélisation de la propagation d'une onde électromagnétique dans les trois milieux, nous appliquons cette méthode en deux dimensions (2D), ensuite nous présentons la condition de stabilité et dispersion numérique du schéma, ainsi que l'algorithme principale de la méthode.

Quand au dernier chapitre il présente les résultats trouvés dans les différents milieux (lors de la variation de la fréquence de discrétisation et leurs effets sur l'étude de la propagation des ondes électromagnétiques).

Ce mémoire se termine par une conclusion générale.

Généralités sur les ondes électromagnétiques

Introduction :

Dans ce chapitre nous allons donner un aperçu des différentes notions utilisées dans le domaine de l'électromagnétisme.

On appelle "onde" le phénomène de propagation dans un milieu sans transport de matière :

-une onde se propage à partir d'une source dans toutes les directions de l'espace.

-la perturbation se transmet de proche en proche avec un transfert d'énergie sans transport de matière.

-ce phénomène dépend du temps.

I.1 Quelques propriétés des ondes électromagnétiques :

Nous rappelons dans cette partie quelques propriétés associées à la propagation des ondes électromagnétiques en espace libre :

I.1.1 Fréquence :

La fréquence d'une OEM est la fréquence des champs \vec{E} et \vec{B} qui la composent.

I.1.2 Longueur d'onde :

La longueur d'onde λ est le trajet parcouru par l'onde durant une période T:

$$\lambda = \frac{c}{f} = cT \quad (\text{I.1})$$

I.1.3 Front d'onde :

Le front d'onde est défini comme un ensemble d'ondes observées sur un plan finie placée a une distance \vec{r} d'une source électromagnétique. Afin d'illustrer cette définition, nous considérons une source ponctuelle isotrope (s) (figure I.1) par conséquent, son rayonnement est caractérisé par une sphère.

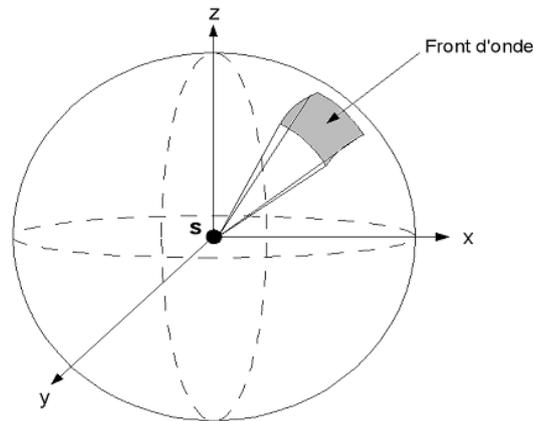


Figure I.1: front d'onde

Pour une valeur \vec{r} , le front d'onde est dite sphérique : les ondes récoltées ne parviennent pas au même instant sur la surface d'observation et présente donc un déphasage entre elles. A l'inverse, lorsque la valeur de \vec{r} est élevée (généralement supérieur 10λ), la surface de la sphère rayonnante est telle que le front d'onde assimilable à une surface localement plane, les ondes récoltées sont alors équiphases.

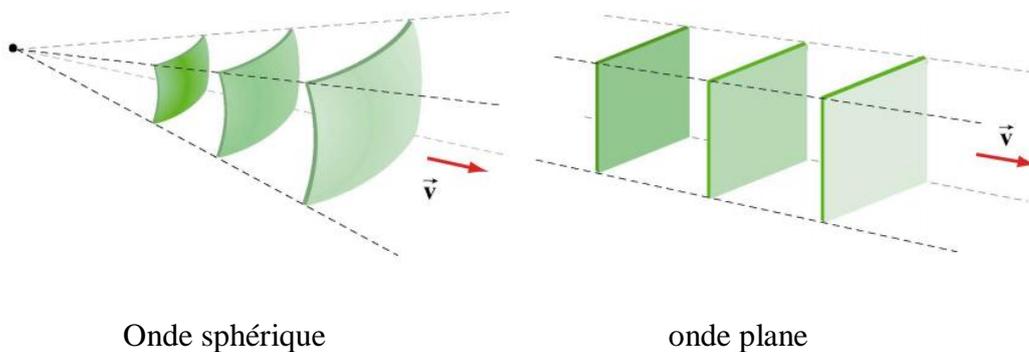


Figure I.2 : Type d'onde

I.1.4 La polarisation :

La polarisation est une propriété importante de l'onde électromagnétique. La polarisation décrit l'alignement et la régularité des champs électriques et magnétiques de l'onde dans le plan transverse à sa propagation. Par convention, on s'intéresse à la composante électrique des champs de l'onde puisque, selon les équations de Maxwell, elle précède le champ magnétique orthogonal. (Le champ magnétique est directement

lié au champ électrique et on peut toujours le calculer à partir de ce dernier.) C'est pourquoi on peut représenter l'onde électromagnétique en décrivant seulement la variation du champ électrique en fonction du temps. La polarisation d'une OEM est la direction de son champ électrique \vec{E} . Si \vec{E} garde une direction constante, on dit que la polarisation est rectiligne : \vec{E} est horizontal (polarisation horizontale) ou vertical (polarisation verticale) Il existe aussi des polarisations circulaire et elliptique.

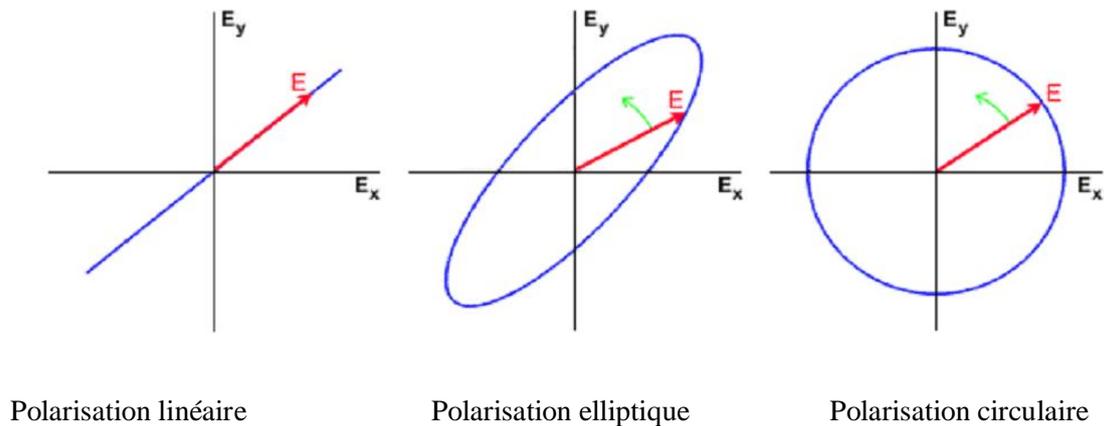


Figure I.3 : Type de polarisation

I.2 Classification des ondes électromagnétiques :

Un spectre électromagnétique est la décomposition d'un rayonnement électromagnétique en fonction de la longueur d'onde ou bien de la fréquence. La figure (I.4) indique les valeurs des longueurs d'ondes du spectre électromagnétique.

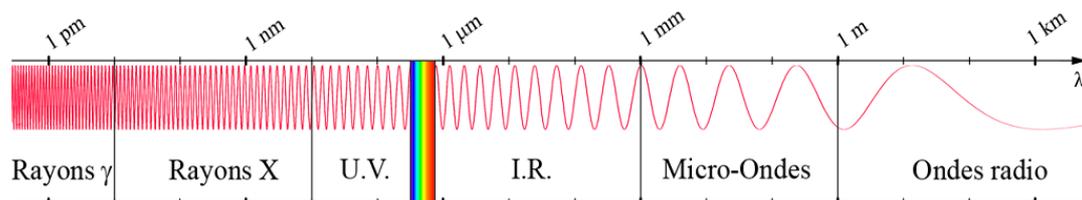


Figure I.4 : spectre électromagnétique

On s'intéresse dans ce mémoire au domaine des hyperfréquences (micro-ondes) [300MHZ-300GHZ], ce qui correspond a des longueurs d'ondes d'1mm à 1m.

I.3 Onde plane uniforme :

L'onde plane uniforme est la solution globale la plus simple des équations de Maxwell. Malheureusement une telle onde n'existe pas dans la réalité car il faudrait une source infiniment grande pour la produire et la puissance d'une telle source serait aussi infinie. Néanmoins, l'onde plane présente des caractéristiques intéressantes qui se retrouvent localement sur des ondes provenant des sources réelles [2].

L'onde émise par une source dans un milieu uniforme et isotrope est normalement sphérique : l'onde propage à la même vitesse dans toutes les directions, donc chaque point d'un front d'onde doit être, pour un temps fixe, à égale distance de la source.

L'équivalent dans le plan est le caillou jeté dans l'eau qui produit une onde circulaire s'éloignant de l'endroit où est tombé le caillou. La sphère en grandissant présente une surface qui devient de plus en plus plane. On peut faire l'analogie avec le fait que la terre a été longtemps assumée comme plane car la région de visibilité de chaque être humain est trop petite pour que la courbure de sol soit importante. La terre est donc localement plane, une planète plus imposante posséderait une région assumée plane encore plus grande.

La simplicité des calculs et l'analogie qui peut être faite pour les ondes réelles, font qu'il vaut la peine de s'attarder à l'onde plane et, pour commencer, à l'onde plane uniforme. Elle est à la base des mécanismes de la propagation libre autant que guidée par une ligne de transmission.

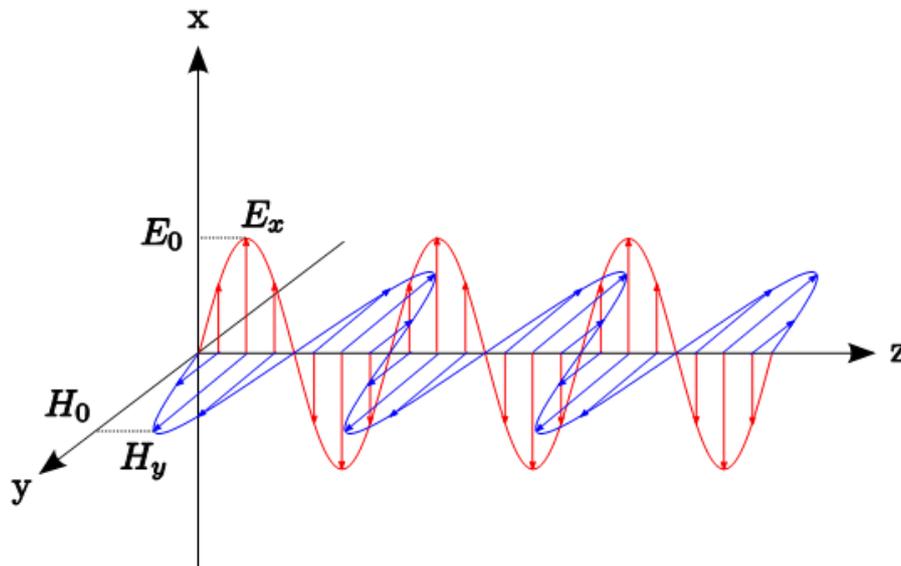


Figure I.5 : Structure d'une onde électromagnétique plane.

I.4 Propagation des ondes électromagnétiques en espace libre :

I.4.1 Equations de Maxwell:

Ces équations sont la base de tout problème électromagnétique, elle aboutissent au calcul de la valeur des champs en tout point de l'espace \vec{r} et a tout instant t . [3]

C'est vers la fin du 19eme siècle que MAXWELL a proposé un ensemble de quatre équations en regroupant les équations de Faraday, Ampère et Gauss. Ces équations relient le champ électrique \vec{E} (ou l'induction électrique \vec{D}) et le champ magnétique \vec{H} (ou l'induction magnétique \vec{B}) a leurs sources (densité de charge ρ et densité de courant \vec{j}) par l'intermédiaire des trois paramètres : **la conductivité électrique σ** , **la perméabilité magnétique μ** , **la permittivité électrique ϵ** . Ces trois paramètres apparaissent dans les équations de Maxwell et peuvent :

- Prendre la forme de tenseur afin de décrire l'anisotropie du milieu.
- disposer d'une partie complexe pour décrire l'absorption du milieu.
- dépendre de la fréquence afin décrire le caractère dispersif du milieu.

Les équations de Maxwell peuvent s'écrire sous la forme différentielle ou intégrale dans le domaine temporel ou fréquentiel, elles sont données par :

a) Equation de Maxwell-Faraday :

Elle décrit comment la variation d'un champ magnétique peut engendrer un champ électrique. L'équation de Maxwell-Faraday s'écrit :

$$\overrightarrow{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (I. 2)$$

b) Equation de Maxwell-Ampère :

Cette équation énonce que les champs magnétiques peuvent être générés de deux manières : par les courants électriques et par la variation du champ électrique. Elle est donnée par :

$$\overrightarrow{rot} \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{j} \quad (I. 3)$$

c) Loi de Gauss pour le champ électrique :

Elle décrit comment un champ électrique est généré par des charges électriques. Elle s'écrit sous la forme :

$$Div \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0 \varepsilon_r} \quad (I. 4)$$

d) Loi de Gauss pour le champ magnétique :

Cette équation montre que le flux magnétique total à travers n'importe quelle surface de Gauss est nul. Elle s'écrit :

$$Div \vec{B} = 0 \quad (I. 5)$$

I.4.2 Equation constitutive :

Les équations de Maxwell précédentes sont complétées par les deux équations constitutives caractérisant les différents milieux matériels constituant le domaine considéré.

Pour un milieu linéaire, isotrope et homogène, les relations liant les champs électromagnétiques aux inductions sont données par :

$$\vec{B} = \mu \vec{H} = \mu_0 \mu_r \vec{H} \quad (I.6)$$

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{E} \quad (I.7)$$

$$\vec{J} = \sigma \vec{E} \quad (I.8)$$

μ_r et ε_r sont respectivement la perméabilité et permittivité relative du milieu.

μ_0 et ε_0 sont respectivement la perméabilité et permittivité du vide elle sont reliées a la vitesse de la lumière c par la relation :

$$\mu_0 \varepsilon_0 c^2 = 1 \quad (I.9)$$

Avec :

$$c = 3.10^8 \text{ m/s} , \varepsilon_0 = 8,854.10^{-12} \text{ F.m}^{-1} , \mu_0 = 4\pi.10^{-7} \text{ H.m}^{-1}$$

I.5 Grandeurs caractéristiques du milieu :

Les milieux sont les supports de la propagation des ondes tels que les milieux diélectriques ou conducteurs. Ce sont principalement des objets constitués de matériaux diélectriques ou conducteurs, avec ou sans pertes. Ils sont caractérisés par un ensemble des paramètres et propriétés qui sont très bien définis dans le domaine fréquentiel.

Un milieu diélectrique est caractérisé principalement par :

-sa permittivité relative $\varepsilon_r = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}$, avec ε la permittivité du milieu et ε_0 la permittivité du vide

-Sa perméabilité relative $\mu_r = \frac{\mu}{\mu_0}$, avec μ la perméabilité du milieu et μ_0 la perméabilité du vide. Tandis qu'un milieu conducteur est caractérisé principalement par sa conductivité σ .

Dans la suite, les milieux sont considérés non-magnétiques ($\mu_r = 1$). La perméabilité d'un matériau s'exprime alors par $\mu = \mu_0 \mu_r = \mu_0$.

I.5.1 Les milieux sans pertes :

Dans le vide ($\varepsilon_r = 1$) ou dans un milieu matériel diélectrique quelconque ($\varepsilon_r \geq 1$) et sans pertes, la permittivité du milieu est purement réelle et s'écrit :

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r .$$

Dans un milieu matériel conducteur sans pertes, la conductivité σ est infinie ($\sigma \rightarrow \infty$) Le traitement de tels milieux est relativement simple. Un matériau de ce type est Caractérisé par un ensemble des paramètres qui ne dépendent pas de la fréquence d'excitation.

I.5.2 Les milieux à pertes :

I.5.2.1 Définition d'une permittivité équivalente d'un milieu diélectrique à perte:

Nous allons faire l'étude de l'équation de Maxwell-Ampère écrite en régime sinusoïdal (la dérivé par rapport au temps peut être remplacée par $j\omega$). Dans un milieu sans perte ($\sigma = 0$) et un milieu a perte (σ :finie). [4]

a) milieu sans pertes ($\sigma = 0$) :

L'équation (I.3) s'écrit :

$$\overrightarrow{rot} \vec{H} = j\omega\varepsilon\vec{E} \quad (I.9)$$

b) milieu avec pertes (σ : *finie*) :

L'équation (I.3) s'écrit :

$$\overrightarrow{rot} \vec{H} = \sigma\vec{E} + j\omega\varepsilon\vec{E} \quad (I.10)$$

$$\overrightarrow{rot} \vec{H} = j\omega \left(\varepsilon - j\frac{\sigma}{\omega} \right) \vec{E} = j\omega\varepsilon_e\vec{E} \quad (I.11)$$

Dans ces milieux, le calcul de la permittivité équivalente qui est complexe dépend de ε et σ :

$$\varepsilon_e = \varepsilon - j\frac{\sigma}{\omega} \quad (I.12)$$

La permittivité relative équivalente dépend de ε_r et σ :

$$\varepsilon_{er} = \varepsilon_r - j\frac{\sigma}{\varepsilon_0\omega} \quad (I.13)$$

I.6 Classification des milieux :

On peut regrouper les milieux dans différentes catégories :

-homogène : si ε et μ sont indépendants des coordonnées spatiales (sont des constantes, hétérogènes sinon : le milieu est alors composé d'un mélange d'au moins deux constituants).

-isotrope : si ε et μ sont indépendants de la direction du champ appliqué (sont des scalaires, anisotrope sinon : (ε et μ : sont des tenseurs), ils sont exprimés sous forme matricielle.

-Linéaire : lorsque les relations entre deux composantes quelconques du champ électromagnétique sont linéaires.

I.7 Equation a l'interface entre deux milieux (conditions aux limites) :

Tout milieu est par nature fini, borné par au moins un milieu différent. Il est donc important de caractériser le comportement des ondes à la frontière des deux milieux [4]. Pour cela, des nouvelles équations valides au niveau de l'interface avec un autre milieu doivent être établies. Ces équations, obtenues à partir des équations de Maxwell, sont les conditions aux limites. Considérons la scène présentée sur la figure (I.6) Une surface S sépare un milieu (1) d'un milieu(2) et \vec{n} la normale à S , est orientée de (2) vers(1).

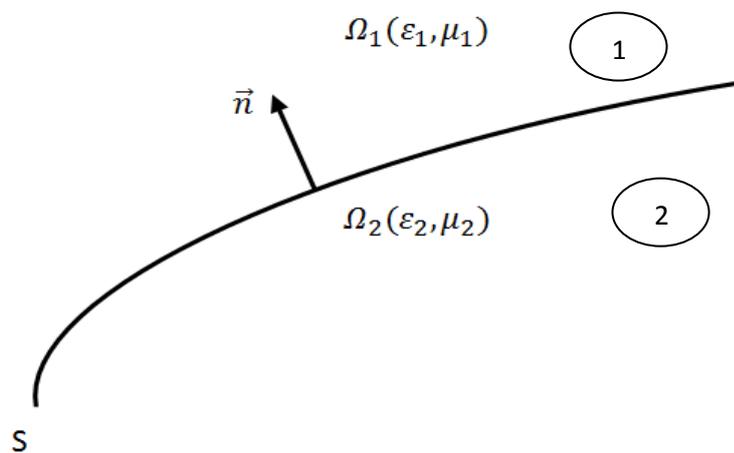


Figure I.6 : Interface entre deux milieux LHI semi-infinis Ω_1 (milieu incident) et Ω_2

$$\vec{n} \cdot (\vec{B}_1 - \vec{B}_2) = 0 \quad (\text{I. 14})$$

$$\vec{n} \cdot (\vec{D}_1 - \vec{D}_2) = \rho_s \quad (\text{I. 15})$$

$$\vec{n} \cdot (\vec{E}_1 - \vec{E}_2) = 0 \quad (\text{I. 16})$$

$$\vec{n} \cdot (\vec{H}_1 - \vec{H}_2) = \vec{J}_s \quad (\text{I. 17})$$

Où \vec{J}_s est le vecteur de la densité surfacique de courant électrique et ρ_s la densité surfacique de charge électrique. Ces équations imposent la continuité de la composante tangentielle du champ électrique \vec{E} et de la composante normale de l'induction magnétique \vec{B} . Elles imposent également la discontinuité de la composante normale de l'induction électrique \vec{D} (mesurée par ρ_s) et de la composante tangentielle du champ magnétique \vec{H} (mesurée par \vec{J}_s). Si les milieux 1 et 2 sont des diélectriques parfaits alors $\vec{J}_s = 0$ et $\rho_s = 0$. Si le milieu inférieur est parfaitement conducteur, les conditions aux limites deviennent :

$$\vec{n} \cdot \vec{H}_0 = 0 \quad (\text{I. 18})$$

$$\vec{n} \cdot \vec{E}_0 = \frac{\rho_s}{\epsilon_0} \quad (\text{I. 19})$$

$$\vec{n} \cdot \vec{E}_0 = 0 \quad (\text{I. 20})$$

$$\vec{n} \cdot \vec{H}_0 = \vec{J}_s \quad (\text{I. 21})$$

I.8 Equation et paramètre de propagation:

Si l'on souhaite cependant effectuer une étude directe de \vec{E} et \vec{B} , on peut transformer les équations de Maxwell, qui mélangent ces deux champs, en des équations où ne figurent plus soit \vec{B} , soit \vec{E} , autrement dit des équations résolues en \vec{E} ou \vec{B} [5]

Partons de la Loi de Maxwell- Faraday :

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (\text{I. 1})$$

En prenant le rotationnel des deux membres, on obtient :

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E}) = \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div} \vec{E}) - \Delta \vec{E} \quad (\text{I. 22})$$

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E}) = -\overrightarrow{\text{rot}}\left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right) \quad (\text{I. 23})$$

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E}) = -\frac{\partial}{\partial t}(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{B}) \quad (\text{I. 24})$$

Loi de Maxwell – Ampère permet alors de transformer le deuxième membre de (I. 24) en : $-\frac{\partial}{\partial t}(\mu_0 \mu_r \vec{j} + \varepsilon_0 \varepsilon_r \mu_0 \mu_r \frac{\partial \vec{E}}{\partial t})$

En regroupant, et avec Loi de Gauss – électrique :

$$\text{Div} \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0 \varepsilon_r} \quad (\text{I. 3})$$

Il vient finalement :

$$\Delta \vec{E} - \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \frac{1}{\varepsilon} \overrightarrow{\text{grad}} \rho + \mu \frac{\partial \vec{j}}{\partial t} \quad (\text{I. 25})$$

De la même manière, nous écrirons :

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{B}) = \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div} \vec{B}) - \Delta \vec{B} \quad (\text{I. 26})$$

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{B}) = -\Delta \vec{B} \quad (\text{I. 27})$$

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{B}) = \overrightarrow{\text{rot}}(\mu_0 \mu_r \vec{j} + \varepsilon_0 \varepsilon_r \mu_0 \mu_r \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}) \quad (\text{I. 28})$$

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{B}) = \mu \overrightarrow{\text{rot}} \vec{j} + \varepsilon \mu \frac{\partial}{\partial t}(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E}) \quad (\text{I. 29})$$

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{B}) = \mu \overrightarrow{\text{rot}} \vec{j} + \varepsilon \mu \frac{\partial}{\partial t}\left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right) \quad (\text{I. 30})$$

$$\Delta \vec{B} - \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = -\mu \overrightarrow{\text{rot}} \vec{j} \quad (\text{I. 31})$$

I.8.1 Cas particulier d'un diélectrique sans perte :

Les champs électrique et magnétique sont interdépendants lorsque l'un ou l'autre varie temporellement. Ce couplage des champs est responsable du phénomène de propagation de l'onde électromagnétique.

Comme il s'agit de champs, chacun d'eux peut avoir plusieurs composantes fonction des coordonnées. Cependant le problème est réduit avec les suppositions suivantes :

- ✓ Les champs sont uniformes dans un plan :ici $z = cte$, donc toutes les dérivées Par rapport à x et à y sont nulles.
- ✓ Les champs n'ont qu'une composante-on choisit l'axe x pour le champ électrique.

La première supposition correspond à l'onde plane uniforme ; la seconde découle d'un alignement des axes judicieux. Ainsi on a :

$$\vec{E} = E_x(z, t)\vec{e}_x \tag{I.32}$$

$$\vec{H} = H_y(z, t)\vec{e}_y \tag{I.33}$$

Dans un milieu diélectrique parfait ou il n'y a ni charges ($\rho = 0$), ni courants ($\vec{j} = 0$) : Le développement des deux premiers équations de Maxwell, à savoir l'équation de Faraday et celle d'Ampère conduit à :

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} = -\mu \frac{\partial H_y}{\partial t} \tag{I.34}$$

$$-\frac{\partial H_y}{\partial z} = \varepsilon \frac{\partial E_x}{\partial t} \tag{I.35}$$

Les équations de propagation deviennent :

$$\Delta \vec{E} - \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \mathbf{0} \leftrightarrow \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} - \varepsilon \mu \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} = 0 \tag{I.36}$$

$$\Delta \vec{H} - \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = \mathbf{0} \leftrightarrow \frac{\partial^2 H_y}{\partial z^2} - \varepsilon \mu \frac{\partial^2 H_y}{\partial t^2} = 0 \tag{I.37}$$

L'étude de ces équations de propagation montre que l'onde se propage avec une vitesse :

$$v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon \mu}} \tag{I.38}$$

Dans l'air ou dans le vide :

$$v = c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}} = 3.10^8 \text{ m/s} \tag{I.39}$$

Sachant que $\mu_r = 1$, sauf dans les milieux magnétiques.

$$v = \frac{c}{\sqrt{\mu_r \epsilon_r}} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r}} = \frac{c}{n} \quad (\text{I. 40})$$

n est l'indice de réfraction du milieu,

ϵ_r est sa permittivité électrique relative ou constante diélectrique.

I.8.1.1 Solution à l'équation d'onde temporelle :

On vérifie que la solution générale de l'équation d'onde – laquelle est une équation aux différences partielles du deuxième ordre-est [5] :

$$E_x(z, t) = E^+ f(t - z\sqrt{\mu\epsilon}) + E^- g(t + z\sqrt{\mu\epsilon}) \quad (\text{I. 41})$$

Ou $f(\cdot)$ et $g(\cdot)$ représentent deux fonctions quelconques- appelées fonction spatio-temporelle-des variables t et z . Ces fonctions de même que les constantes E^+ et E^- dépendent de la source qui génère l'onde. Il est logique que la forme de l'onde soit celle de la source avec plus ou moins de retard ou d'atténuation dans l'espace : avec une antenne qui émet un signal carré, on devrait observer une onde carrée de même fréquence à la réception.

Quant aux constantes E^+ et E^- , elles sont liées à la puissance de la source.

Remarque :

Le signe $(-)$ devant z correspond à une onde se propageant dans le sens des z croissants (E^+ est surmontée d'indice $+$: onde positive), le signe $(+)$ à une onde se propageant en sens contraire (E^- est surmontée d'indice $-$: onde négative).

La solution correspondante pour $H_y(z, t)$ est déduite en substituant (I. 41) dans (I. 34) :

$$\frac{\partial H_y}{\partial t} = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} (E^+ f'(t - z\sqrt{\mu\epsilon}) - E^- g'(t + z\sqrt{\mu\epsilon})) \quad (\text{I. 42})$$

Donc :

$$H_y(z, t) = H^+ f(t - z\sqrt{\mu\epsilon}) + H^- g(t + z\sqrt{\mu\epsilon}) \quad (\text{I. 43})$$

$$H_y(z, t) = \frac{1}{\sqrt{\mu/\epsilon}} (E^+ f(t - z\sqrt{\mu\epsilon}) - E^- g(t + z\sqrt{\mu\epsilon})) \quad (\text{I. 44})$$

Le terme $\sqrt{\mu/\varepsilon}$ possède les unités d'une impédance-en Ω - ce qui explique son appellation d'**impédance intrinsèque η** du milieu.

I.8.2 Onde sinusoïdale dans un milieu quelconque :

Pour pousser l'étude de l'onde plane uniforme un peu plus loin, il est avantageux de travailler avec les phaseurs dans le régime sinusoïdal permanent. La raison est double :

- ❖ Les équations aux différentielles partielles deviennent plus simples à solutionner ;
- ❖ On sait qu'avec la transformée de Fourier tout signal peut se décomposer en une somme des composantes sinusoïdales à des fréquences différentes, avec des déphasages et des amplitudes spécifiques.

On peut maintenant analyser le comportement de l'onde électromagnétique dans un milieu général. Dans un milieu dont la conductivité n'est pas nécessairement nulle.

Pour débiter dans le mode sinusoïdale permanent, il faut prendre les fonctions spatio-temporelles suivantes (on rappelle que dans le milieu ayant $\sigma = 0$ comme celui de la section précédente, $\sqrt{\varepsilon\mu} = \frac{1}{v}$) :

$$\left. \begin{matrix} f(\cdot) \\ g(\cdot) \end{matrix} \right\} = \cos \left(\omega \left(t \mp \frac{z}{v} \right) \right) \quad (\text{I. 45})$$

$$= \cos (\omega t \mp \beta z) \quad (\text{I. 46})$$

Ou on défini :

$$\beta = \frac{\omega}{v} = \frac{2\pi}{\lambda} \quad (\text{I. 47})$$

β : Nombre d'onde

On reprend les équations de Maxwell avec les différences suivantes :

- Le courant de conduction existe dans le milieu ; on conserve donc le terme de densité volumique de courant $\vec{J} = \sigma \vec{E}$

- Les quantités temporelles sont remplacées par leur phaseur respectif et des constantes complexes peuvent en découler.

Les nouvelles équations correspondant aux équations (I.34) et (I.35) s'écrivent :

$$\frac{d\overline{E}_x}{dz} = -j\omega\mu \overline{H}_y \quad (I.48)$$

$$\frac{d\overline{H}_y}{dz} = -(\sigma + j\omega\varepsilon) \overline{E}_x \quad (I.49)$$

On note que \overline{E}_x est le phaseur du champ électrique tel que :

$$E_x(z, t) = \text{Re}\{\overline{E}_x(z)e^{j\omega t}\}$$

Et de façon similaire pour \overline{H}_y . L'équation d'onde en régime sinusoïdal permanent dans un milieu quelconque devient alors :

$$\frac{d^2\overline{E}_x}{dz^2} = \overline{\gamma}^2 \overline{E}_x \quad (I.50)$$

Où $\overline{\gamma}$ est appelé **la constante de propagation** et est défini ainsi :

$$\overline{\gamma} = \sqrt{j\omega\mu(\sigma + j\omega\varepsilon)} \quad (I.51)$$

Les expressions des champs qui solutionnent l'équation d'onde (I.50) sont :

$$\overline{E}_x(z) = \overline{E}^+ e^{-\overline{\gamma}z} + \overline{E}^- e^{+\overline{\gamma}z} \quad (I.52)$$

$$\overline{H}_y(z) = \overline{H}^+ e^{-\overline{\gamma}z} + \overline{H}^- e^{+\overline{\gamma}z} \quad (I.53)$$

$$\overline{H}_y(z) = \frac{1}{\overline{\eta}} (\overline{E}^+ e^{-\overline{\gamma}z} - \overline{E}^- e^{+\overline{\gamma}z}) \quad (I.54)$$

Où $\overline{\eta}$ est l'impédance intrinsèque du milieu en Ω et est définie ainsi :

$$\overline{\eta} = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\sigma + j\omega\varepsilon}} \quad (I.55)$$

À moins que le milieu soit sans perte ($\sigma = 0$), l'impédance intrinsèque est alors un nombre complexe :

$$\bar{\eta} = \eta e^{j\zeta}. \quad (I.56)$$

On peut voir la grande similitude des expressions des champs avec celles obtenues auparavant en prenant :

Les fonctions exponentielles $e^{\mp\bar{\gamma}z}$ pour $f(\cdot)$ et $g(\cdot)$;

Les amplitudes complexes $\bar{E}^+ = E^+ e^{j\xi^+}$ et $\bar{E}^- = E^- e^{j\xi^-}$ pour ajuster à la fois le module et la phase de chaque composante.

$$\text{Le terme } \bar{\gamma} \text{ peut s'écrire sous forme complexe } \bar{\gamma} = \alpha + j\beta \quad (I.57)$$

$$\begin{aligned} \bar{E}_x &= \mathbf{E}^+ e^{j\xi^+} e^{-\alpha z} e^{-j\beta z} + \mathbf{E}^- e^{j\xi^-} e^{\alpha z} e^{j\beta z} \\ &= \mathbf{E}^+ e^{-\alpha z} e^{-j\beta z + j\xi^+} + \mathbf{E}^- e^{\alpha z} e^{j\beta z + j\xi^-} \end{aligned} \quad (I.58)$$

Il apparait clairement que la partie réelle α de la constante de propagation affecte le module du champ. la première onde du membre de droite de (I.58) correspond à l'onde positive qui s'en va dans la direction $z +$. Donc $e^{-\alpha z}$ décroît lorsque z augmente ce qui fait dire que l'onde s'affaiblit en se propageant. La seconde onde se déplace dans la direction $z -$, et comme pour l'onde positive $e^{\alpha z}$ décroît car z diminue en fonction du temps. Dans les deux cas, α est le responsable de la baisse de l'amplitude de l'onde d'où son appellation, **constante d'atténuation ou d'affaiblissement**.

La partie imaginaire β , qui n'intervient que dans le terme de phase, est appelée **le paramètre de phase**, qui est directement relié à la longueur d'onde λ :

$$\beta = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\omega}{v} \quad (I.59)$$

Le développement de (I.53) pour le champ magnétique donne cette fois :

$$\bar{H}_y = H^+ e^{-\alpha z} e^{-j\beta z + j\xi_h^+} + H^- e^{\alpha z} e^{j\beta z + j\xi_h^-} \quad (I.60)$$

$$= \frac{E^+}{\eta} e^{-\alpha z} e^{-j\beta z + j\xi^+ - j\zeta} - \frac{H^-}{\eta} e^{\alpha z} e^{j\beta z + j\xi^- - j\zeta} \quad (I.61)$$

I.8.2.1 Caractéristique de l'onde plane :

Etant donnée l'importance de l'onde plane dans les mécanismes de propagation il est bon de rappeler et de regrouper dans une section l'ensemble des principale caractéristique de l'onde plane.

- la forme de l'onde dans l'espace ou dans le temps est déterminée à partir de celle de la source dans le temps. La notion d'espace existe car l'onde se déplace. D'ailleurs la primitive de la relation spatio-temporelle est de genre : $(t \mp \frac{z}{v})$
- Pour une onde se déplaçant dans la direction $z \pm$. la constante v représente la vitesse de propagation de l'onde dans le milieu.
- Avec des phaseurs, la fonction spatio-temporelle est un cosinus ce qui fait que :

$$f(t, z) = \cos(\omega t \mp \beta z) \tag{I.62}$$

- lorsque le milieu possède une conductivité non nulle, l'onde s'atténue en se propageant. Le milieu est dit à pertes. L'amplitude des champs diminue suivant une exponentielle : $e^{\mp \alpha z}$ Pour une onde se déplaçant dans la direction \pm .
- Dans le régime sinusoïdal permanent la constante d'atténuation et la constante de phase forme respectivement la partie réelle et la partie imaginaire de la constante de propagation
- Les champs électriques et magnétiques sont perpendiculaires entre eux et par rapport à la direction de propagation de l'onde \vec{e}_p : $\vec{E} \perp \vec{H} \perp \vec{e}_p$
- Pour déterminer la direction de propagation, il suffit de faire le produit vectoriel suivant : $\vec{e}_E \times \vec{e}_H = \vec{e}_p$, dans lequel les vecteurs unitaires \vec{e}_E et \vec{e}_H indique l'orientation des champs en question.
- Pour chaque constituante de l'onde, le rapport de l'amplitude de champ électrique à l'amplitude du champ magnétique est constant et équivaut à l'impédance intrinsèque du milieu η dans laquelle se trouve l'onde.

Avec les phaseurs, on écrit :

$$\frac{\bar{E}^+}{\bar{H}^+} = -\frac{\bar{E}^-}{\bar{H}^-} = \pm \eta \tag{I.63}$$

I.9 Paramètres de propagation des milieux :

On considère la constante de propagation et l'impédance intrinsèque comme étant les paramètres de propagation du milieu dans lequel se propage une onde plane. On désire obtenir ici des expressions simplifiées pour des cas bien précis :

- Le diélectrique parfait ($\sigma = \mathbf{0}$);
- Le diélectrique à faibles pertes ou très faibles pertes ($\sigma \ll \omega \varepsilon$);
- Le bon conducteur ($\sigma \gg \omega \varepsilon$);
- Le conducteur parfait ($\sigma \rightarrow \infty$).

Avant tout, il serait intéressant de faire l'opération inverse (récupérer les paramètres électrique du milieu connaissant à la fois les paramètres de propagation et l'impédance intrinsèque). À partir des expressions (I.55) et (I.51) on voit tout de suite que :

$$\bar{\eta} \bar{\gamma} = j\omega\mu \quad (\text{I.64})$$

$$\frac{\bar{\gamma}}{\bar{\eta}} = \sigma + j\omega\varepsilon \quad (\text{I.65})$$

De là, il est facile de déduire les trois paramètres électriques du milieu :

$$\sigma = \text{Re} \left\{ \frac{\bar{\gamma}}{\bar{\eta}} \right\} \quad (\text{I.66})$$

$$\varepsilon = \frac{1}{\omega} \text{Im} \left\{ \frac{\bar{\gamma}}{\bar{\eta}} \right\} \quad (\text{I.67})$$

$$\mu = \frac{1}{j\omega} \bar{\eta} \bar{\gamma} \quad (\text{I.68})$$

➤ Diélectrique parfait :

Le diélectrique parfait est caractérisé par $\sigma = \mathbf{0}$, ainsi la constante de propagation est purement imaginaire :

$$\bar{\gamma} = \sqrt{(j\omega\mu)(j\omega\varepsilon)} = j\omega\sqrt{\mu\varepsilon} \quad (\text{I.69})$$

Et l'onde se déplace sans atténuation –on dit sans perte-car :

$$\alpha = 0 \quad (\text{I.70})$$

$$\beta = \omega\sqrt{\mu\varepsilon} \quad (\text{I.71})$$

$$v = \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}} \quad (\text{I.72})$$

De plus l'impédance intrinsèque est purement réelle :

$$\bar{\eta} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \quad (\text{I.73})$$

➤ **Diélectrique à faibles pertes :**

$\sigma \ll \omega\varepsilon$: Nous pouvons faire l'approximation suivante (voir Annexe 1) :

$$\alpha \approx \frac{\sigma}{2} \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \quad (\text{I.74})$$

$$\beta \approx \omega \sqrt{\mu\varepsilon} \quad (\text{I.75})$$

$$v \approx \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}} \quad (\text{I.76})$$

$$\bar{\eta} \approx \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \quad (\text{I.77})$$

➤ **Bon conducteur (conducteur a faible perte) :**

$\sigma \gg \omega\varepsilon$: L'approximation à effectuer est la suivante (voir Annexe 2) :

$$\alpha = \beta \approx \sqrt{\omega\mu\sigma/2} = \sqrt{\pi\mu\sigma f} \quad (\text{I.78})$$

$$\text{Re}\{\bar{\eta}\} = \text{Im}\{\bar{\eta}\} = \sqrt{\omega\mu/2\sigma} \quad (\text{I.79})$$

Cas général :

Le calcul de α et β s'effectue a partir de :

$$\bar{\gamma}^2 = j\omega\sigma\mu - \omega^2\varepsilon\mu \quad (\text{I.80})$$

$$\bar{\gamma}^2 = \alpha^2 - \beta^2 + 2j\alpha\beta \quad (\text{I.81})$$

On tire les deux équations :

$$\alpha^2 - \beta^2 = -\omega^2\varepsilon\mu = -A \quad (\text{I.82})$$

$$2\alpha\beta = \omega\sigma\mu = B \quad (\text{I.83})$$

Et finalement les expressions de α et β [4] :

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[-A + \sqrt{A^2 + B^2} \right]^{1/2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \omega \sqrt{\varepsilon\mu} \left[\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\omega\varepsilon} \right)^2} - 1 \right]^{1/2} \quad (\text{I.84})$$

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{2}} [A + \sqrt{A^2 + B^2}]^{1/2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \omega \sqrt{\epsilon \mu} \left[\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\omega \epsilon}\right)^2} + 1 \right]^{1/2} \quad (\text{I.85})$$

- **Effet de peau :**

On se pose la question quel est l'intérêt de présenter les paramètres de propagation dans un bon conducteur puisque l'onde ne peut exister. En réalité l'onde électromagnétique s'atténue très rapidement dans un conducteur de sorte que les champs ne peuvent apparaître que très près de la surface.

L'épaisseur de peau noté δ_p , représente la distance que parcourt l'onde avant de subir une atténuation correspondant à $1Np$ ou encore $8.686db$ [6]. Il suffit donc que $\alpha \delta_p = 1$ ou encore :

$$\delta_p = \frac{1}{\sqrt{\frac{\omega \mu \sigma}{2}}} = \sqrt{\frac{2}{\omega \mu \sigma}} = \sqrt{\frac{1}{\pi \mu \sigma f}} \quad (\text{I.86})$$

- **Conducteur parfait :**

Il est facile de voir que, pour un conducteur parfait ou $\sigma \rightarrow \infty$, l'épaisseur de peau indiquée par (I.86) est nulle ; en conséquence, il y a absence de champs électromagnétiques dans un conducteur parfait.

I.10 Propagation dans les plasmas:

Un plasma est un gaz ionisé (totalement ou partiellement) constitué d'ions de masse M , de charge $+e$ et d'électrons de masse $m \ll M$, de charge $(-e)$. Il est neutre électriquement. Un plasma est un milieu dilué, avec des grandes distances entre chaque atome. [7,8]

Exemple :

Dans l'ionosphère, entre 60km et 300km d'altitude, le rayonnement du soleil provoque l'ionisation des molécules.

Autre exemple :

Dans les lampes à fluorescence, la décharge électrique crée un plasma.

Lorsqu'un plasma est soumis a une onde électromagnétique ($\rho = 0$), les équations de propagation deviennent :

$$\Delta \vec{E} - \epsilon\mu \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \mu \frac{\partial \vec{j}}{\partial t} \quad (I.87)$$

$$\Delta \vec{B} - \epsilon\mu \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = -\mu \overrightarrow{rot} \vec{j} \quad (I.88)$$

Il reste à exprimer $\frac{\partial \vec{j}}{\partial t}$ en fonction de \vec{E}

Le plasma étant dilué, on néglige les interactions entre charges. De plus les forces magnétiques sont négligeables devant les forces électriques. Enfin le courant du aux ions plus lourds est négligé par rapport aux courant du aux électrons.

Le principe fondamental appliqué à un électron s'écrit alors :

$$-e\vec{E} = m \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \quad (I.89)$$

Avec $\vec{j} = n(-e)\vec{v} \quad (I.90)$

On obtient alors :

$$\frac{\partial \vec{j}}{\partial t} = \frac{ne^2}{m} \vec{E} \quad (I.91)$$

e et m : La charge et la masse de l'électron ($e = 1,6 \cdot 10^{-19}c$, $m = 9,1 \cdot 10^{-31}kg$)

n : La densité volumique d'électron dans le plasma.

Le développement de (I.87) et (I.88) donne :

$$\Delta \vec{E} - \frac{\mu ne^2}{m} \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \quad \leftrightarrow \quad \Delta \vec{E} - \frac{\omega_p^2}{c^2} \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \quad (I.92)$$

$$\Delta \vec{H} - \frac{\mu ne^2}{m} \vec{H} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = 0 \quad \leftrightarrow \quad \Delta \vec{H} - \frac{\omega_p^2}{c^2} \vec{H} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = 0 \quad (I.93)$$

ω_p : Pulsation plasma, $\omega_p = \sqrt{\frac{ne^2}{m\epsilon_0}} = 56.8\sqrt{n}$ SI

En régime harmonique :

$$\Delta \vec{E} = \left(\frac{\omega_p^2}{c^2} - \frac{\omega^2}{c^2} \right) \vec{E} \quad \leftrightarrow \quad \Delta \vec{E} = -\beta^2 \vec{E} \quad (\text{I. 94})$$

$$\Delta \vec{H} = \left(\frac{\omega_p^2}{c^2} - \frac{\omega^2}{c^2} \right) \vec{H} \quad \leftrightarrow \quad \Delta \vec{H} = -\beta^2 \vec{H} \quad (\text{I. 95})$$

La relation de dispersion est donc :

$$\beta^2 = \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2} = \frac{\omega^2}{c^2} \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \right) \quad (\text{I. 96})$$

On remarque que la pulsation plasma sépare le domaine fréquentiel en deux régions :

Bande 1 : basses fréquences. Pour $\omega \ll \omega_p$, la relation de dispersion est $\beta^2 = \frac{-\omega_p^2}{c^2}$ ce qui implique $\beta = \frac{j\omega_p}{c}$, il n'y a donc pas de propagation d'onde dans cette région.

Bande 2 : hautes fréquences. Pour $\omega \gg \omega_p$, la relation de dispersion est identique à la relation de dispersion du vide $\beta = \frac{\omega}{c}$ et la propagation est non dispersive.

Un gaz ionisé agit donc comme un filtre passe-haut : il n'autorise pas la propagation d'ondes de fréquence inférieure à la fréquence plasma.

Conclusion

Dans ce chapitre, on a introduit les notions de base utilisées dans le domaine de l'électromagnétisme, on a présenté aussi les caractéristiques des différents milieux de propagation des ondes électromagnétiques tels que le vide, le conducteur et le plasma.

Modélisation par la méthode des différences finies

Dans ce chapitre nous exposerons la méthode des différences finie appliqué aux équations de propagation du champ électromagnétique dans les différents milieux.

II.1 Principe de la méthode des différences finies:

La méthode des différences finies consiste à approximer les dérivées des équations de la physique au moyen des développements de Taylor et se déduit directement de la définition de la dérivée. [9,10]

Soit $u(x, y, z, t)$ une fonction de l'espace et du temps. Par définition de la dérivée, on a:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x+\Delta x, y, z, t) - u(x, y, z, t)}{\Delta x} \quad (\text{II.1})$$

Si Δx est petit, un développement de Taylor de $u(x + \Delta x, y, z, t)$ au voisinage de x donne :

$$u(x + \Delta x, y, z, t) = u(x, y, z, t) + \Delta x \frac{\partial u}{\partial x}(x, y, z, t) + \frac{\Delta x^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y, z, t) + \frac{\Delta x^3}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(x, y, z, t) + \dots \quad (\text{II.2})$$

En tronquant la série au premier ordre en Δx , on obtient :

$$\frac{u(x+\Delta x, y, z, t) - u(x, y, z, t)}{\Delta x} = \frac{\partial u}{\partial x}(x, y, z, t) + O(\Delta x) \quad (\text{II.3})$$

L'approximation de la dérivée $\frac{\partial u}{\partial x}(x)$ est alors **d'ordre 1** indiquant que l'erreur de troncature $O(\Delta x)$ tend vers zéro comme la puissance première de Δx .

Définition: la puissance de Δx avec laquelle l'erreur de troncature tend vers zéro est appelée **L'ordre de la méthode**.

II.1.1 Notation indicielle - cas 1D :

Considérons un cas monodimensionnel où l'on souhaite déterminer une grandeur $u(x)$ sur l'intervalle $[0, L_x]$. La recherche d'une solution discrète de la grandeur u amène à constituer un maillage de l'intervalle de définition. On considère

un maillage (ou grille de calcul) composé de $N+1$ points x_i pour $i = 0 \dots N$ régulièrement espacés avec un pas Δx .

Les points $x_i = i\Delta x$ sont appelés les nœuds du maillage. Le problème continu de départ de détermination d'une grandeur sur un ensemble de dimension infinie se ramène ainsi à la recherche de N valeurs discrètes de cette grandeur aux différents nœuds du maillage.

Notation: on note u_i la valeur discrète de $u(x)$ au point x_i , soit $u_i = u(x_i)$. De même pour la dérivée de $u(x)$ au nœud x_i , on note $(\frac{\partial u}{\partial x})_{x=x_i} = (\frac{\partial u}{\partial x})_i = u'_i$. Cette notation s'utilise de façon équivalente pour toutes les dérivées d'ordre successif de la grandeur. Le schéma aux différences finies d'ordre 1 présenté au-dessus s'écrit, en notation indicielle :

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_i = \frac{u_{i+1} - u_i}{\Delta x} + O(\Delta x) \quad (\text{II.4})$$

Ce schéma est dit "avant" ou "décentré avant" ou upwind. Il est possible de construire un autre schéma d'ordre 1, appelé "arrière" :

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_i = \frac{u_i - u_{i-1}}{\Delta x} + O(\Delta x) \quad (\text{II.5})$$

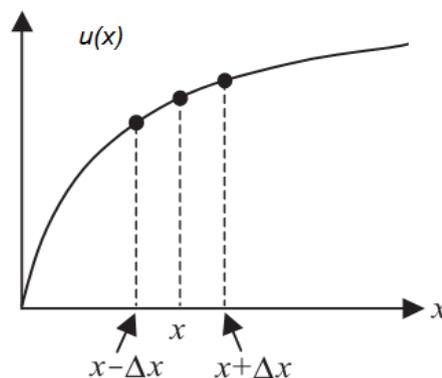


Figure II.1 : Approximation de la différence finie

➤ **Schéma d'ordre supérieur :**

Des schémas aux différences finies d'ordre supérieur peuvent être construits en manipulant des développements de Taylor au voisinage de x_i . On écrit :

$$u_{i+1} = u(x_i + \Delta x) = u_i + \Delta x \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_i + \frac{\Delta x^2}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_i + O(\Delta x^3) \quad (\text{II.6})$$

$$u_{i-1} = u(x_i - \Delta x) = u_i - \Delta x \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_i + \frac{\Delta x^2}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_i + O(\Delta x^3) \quad (\text{II.7})$$

La soustraction de ces deux relations donne :

$$u_{i+1} - u_{i-1} = 2\Delta x \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_i + O(\Delta x^3) \quad (\text{II.8})$$

Ce qui permet d'obtenir le schéma **d'ordre deux** dit "centré" pour approximer la dérivée première de u :

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_i = \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2\Delta x} + O(\Delta x^2) \quad (\text{II.9})$$

Pour obtenir des ordres supérieurs, il faut utiliser plusieurs nœuds voisins de x_i .

➤ **Dérivée d'ordre supérieur :**

Le principe est identique et repose sur les développements de Taylor au voisinage de x_i . Par exemple pour construire un schéma d'approximation de la dérivée seconde de u , on écrit :

$$u_{i+1} = u_i + \Delta x \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_i + \frac{\Delta x^2}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_i + \frac{\Delta x^3}{6} \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right)_i + O(\Delta x^4) \quad (\text{II.10})$$

$$u_{i-1} = u_i - \Delta x \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_i + \frac{\Delta x^2}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_i - \frac{\Delta x^3}{6} \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right)_i + O(\Delta x^4) \quad (\text{II.11})$$

En faisant la somme de ces deux égalités, on aboutit à :

$$u_{i+1} + u_{i-1} - 2u_i = \Delta x^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_i + O(\Delta x^4) \quad (\text{II.12})$$

Ce qui permet d'obtenir le schéma d'ordre deux dit "centré" pour approximer la dérivée seconde de u :

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_i = \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{\Delta x^2} + O(\Delta x^2) \quad (\text{II.13})$$

Il existe aussi une formulation "avant" et "arrière" pour la dérivée seconde, toute deux d'ordre 1 :

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_i = \frac{u_{i+2} - 2u_{i+1} + u_i}{\Delta x^2} + O(\Delta x) \quad (\text{II.14})$$

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_i = \frac{u_i - 2u_{i-1} + u_{i-2}}{\Delta x^2} + O(\Delta x) \quad (\text{II.15})$$

Il est également possible de construire, par le même procédé, des schémas aux différences finies d'ordre supérieur pour les dérivées deuxième, troisième, etc...

II.1.2 Généralisation de la notation indicielle :

Dans le cas 1D instationnaire, considérons l'évolution d'une grandeur $u(x, t)$ en fonction de l'espace et du temps. Le domaine de définition de u est décomposé en N Nœuds x_i répartis régulièrement avec un pas d'espace Δx . De même, le temps est décomposé en intervalle élémentaire de pas constant Δt ($t_n = n\Delta t$). On notera u_i^n la valeur discrète de la grandeur $u(x, t)$ au nœud x_i et au temps $n\Delta t$.

Dans le cas 2D, considérons une grandeur $u(x, y)$ définie sur un certain domaine. Ce dernier est décomposé en $M \times N$ nœuds (x_i, y_j) répartis régulièrement avec un pas d'espace Δx dans la direction x et Δy dans l'autre direction. ($x_i = i\Delta x, y_j = j\Delta y$). On notera u_{ij} la valeur discrète de la grandeur $u(x, y)$ au nœud (x_i, y_j) .

De façon similaire, dans le cas 2D instationnaire, on notera u_{ij}^n la valeur discrète de la grandeur $u(x, y, t)$ au nœud (x_i, y_j) et au temps $n\Delta t$.

II.2 propagation dans une direction arbitraire(en deux dimensions) :

Dans le chapitre précédent, l'onde plane se propageait suivant l'un des axes du système de coordonnées (oz). Elle pourrait bien se déplacer dans une direction tout à fait arbitraire. Dans ce chapitre on s'intéresse au cas de 2D.

Pour commencer on considère une onde plane voyageant dans une direction x'

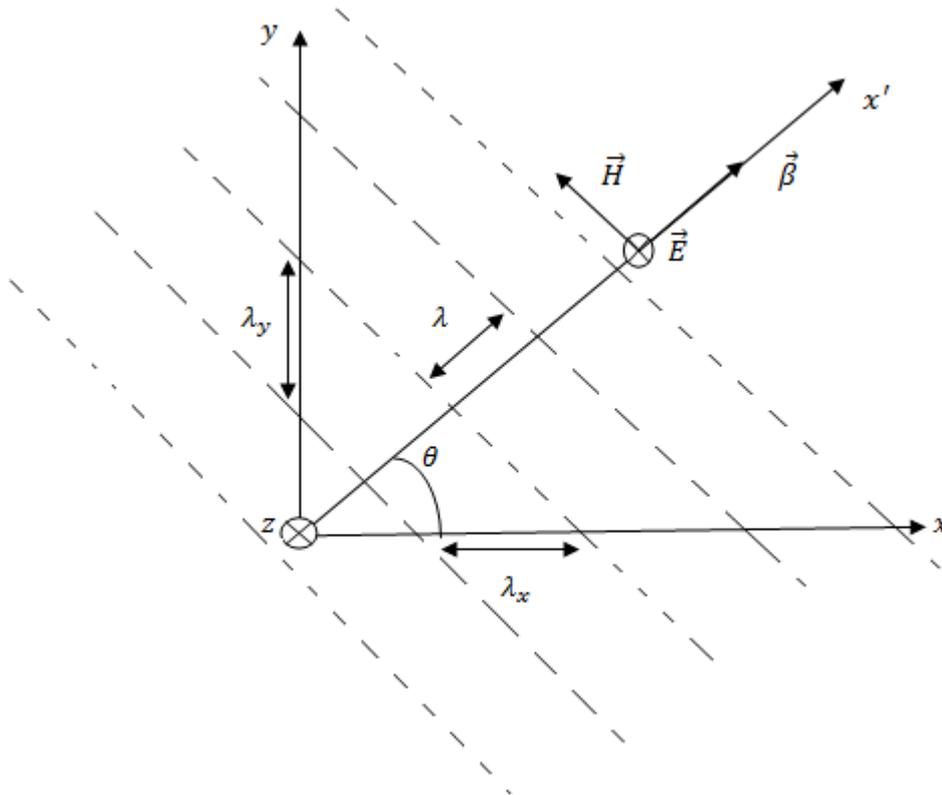


Figure II-2 : front d'onde plane suivant la direction x'

Ce nouvel axe fait un angle θ par rapport à x dans le plan xy (figure II-2). Les champs électrique et magnétique doivent être transverses à cette direction x' . En étant orthogonaux entre eux, ils peuvent être n'importe où dans le plan. On peut écrire :

$$\vec{E} = E_0 \cos(\omega t - \beta x') \vec{e}_E \quad (\text{II.16})$$

$$\vec{H} = H_0 \cos(\omega t - \beta x') \vec{e}_H \quad (\text{II.17})$$

Avec : $\vec{e}_E \times \vec{e}_H = \vec{e}_{x'}$

On comprend que le taux de variation de la phase selon x' correspond à β . En effet on mesure la longueur d'onde le long de cet axe en un temps fixe, pour déduire ensuite la vitesse de propagation de l'onde dans le milieu.

L'étape suivante consiste à décomposer x' sur le système de coordonnées $, y, z$. Ici on a simplement (voir figure II-2) :

$$x' = x \cos(\theta) + y \sin(\theta)$$

Qui, lorsque placé dans (II.15) pour le champ électrique –le champ magnétique se déduit de la même manière–donne :

$$\vec{E} = E_0 \cos(\omega t - \beta(x \cos(\theta) + y \sin(\theta))) \vec{e}_E \quad (\text{II.18})$$

$$\vec{H} = H_0 \cos(\omega t - \beta(x \cos(\theta) + y \sin(\theta))) \vec{e}_H \quad (\text{II.19})$$

II.3 Equations de propagation :

D'après la figure (II-2):

$$\vec{E} = E_z(x, y, t) \vec{e}_z \quad (\text{II.20})$$

$$\vec{H} = H_x(x, y, t) \vec{e}_x + H_y(x, y, t) \vec{e}_y \quad (\text{II.21})$$

$$\left(\frac{\partial \vec{E}}{\partial z} = 0 ; \frac{\partial \vec{H}}{\partial z} = 0 \right)$$

Les équations de propagation deviennent :

❖ Cas d'un diélectrique sans perte :

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial y^2} - \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \quad (\text{II.22})$$

$$\frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial y^2} - \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = 0 \quad (\text{II.23})$$

❖ Cas d'un milieu conducteur :

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial y^2} - \sigma \mu \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \quad (\text{II.24})$$

$$\frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial y^2} - \sigma \mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} - \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = 0 \quad (\text{II.25})$$

❖ Cas d'un plasma :

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial y^2} - \frac{\omega_p^2}{c^2} \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \quad (\text{II.26})$$

$$\frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial y^2} - \frac{\omega_p^2}{c^2} \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = 0 \quad (\text{II.27})$$

En se limitant à l'étude du champ électrique, les équations de propagation suivantes, déduites des équations d'ondes vectorielles générales précédentes :

$$\frac{\partial^2 E_z(x,y,t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_z(x,y,t)}{\partial y^2} - \varepsilon\mu \frac{\partial^2 E_z(x,y,t)}{\partial t^2} = 0 \quad (\text{II.28})$$

$$\frac{\partial^2 E_z(x,y,t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_z(x,y,t)}{\partial y^2} - \sigma\mu \frac{\partial E_z(x,y,t)}{\partial t} - \varepsilon\mu \frac{\partial^2 E_z(x,y,t)}{\partial t^2} = 0 \quad (\text{II.29})$$

$$\frac{\partial^2 E_z(x,y,t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_z(x,y,t)}{\partial y^2} - \frac{\omega_p^2}{c^2} E_z(x,y,t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_z(x,y,t)}{\partial t^2} = 0 \quad (\text{II.30})$$

II.4 Conditions aux limites et conditions initiales :

Les équations précédentes ne sont pas suffisantes pour décrire complètement la propagation de l'onde électromagnétique ; il faut les compléter de conditions initiales (état et vitesse de l'onde à l'instant initial $t=0$), ainsi que des conditions au bord (comportement de l'onde lorsqu'elle rencontre les limites physiques du domaine étudié).

Ces conditions peuvent se formuler suivant :

$$E(x, y, 0) = U(x, y), \forall (x, y) \in D \quad (\text{II.31})$$

$$\frac{\partial E(x,y,0)}{\partial t} = \tilde{U}(x, y), \forall (x, y) \in D \quad (\text{II.32})$$

$$E(0, y, t) = G(y, t), \forall t > 0, \forall y \in \partial D \quad (\text{II.33})$$

$$E(x, 0, t) = G(x, t), \forall t > 0, \forall x \in \partial D \quad (\text{II.34})$$

Les fonctions U, \tilde{U}, G étant des données du problème.

D : Domaine de calcul, ∂D : frontière du domaine.

On va résoudre numériquement sous Matlab la propagation d'une onde dans les différents milieux, dans le cas de deux dimensions (2D).

II.5 Equations de propagation aux différences finies centrées :

Si on pose $u(x, y, t)$ une composante du champ électrique \vec{E} ou magnétique \vec{H} alors la valeur de u au nœud (i, j) au temps $n\Delta t$ est noté par :

$$u_{i,j}^n = u(x_i, y_j, n\Delta t) = u(i\Delta x, j\Delta y, n\Delta t)$$

Ou $\Delta x, \Delta y$ sont les pas de la grille du maillage suivant les directions x et y , et Δt le pas de temps.

$$x \in [0, L_x], y \in [0, L_y], t \in [0, T]$$

Le domaine géométrique dans lequel l'onde peut se propager est découpé en une grille de calcul :

$$[0, L_x] \rightarrow [0: \Delta x: L_x], [0, L_y] \rightarrow [0: \Delta y: L_y], [0, T] \rightarrow [0: \Delta t: T]$$

Le choix du maillage est essentiel pour minimiser le temps de calcul et l'espace mémoire nécessaires.

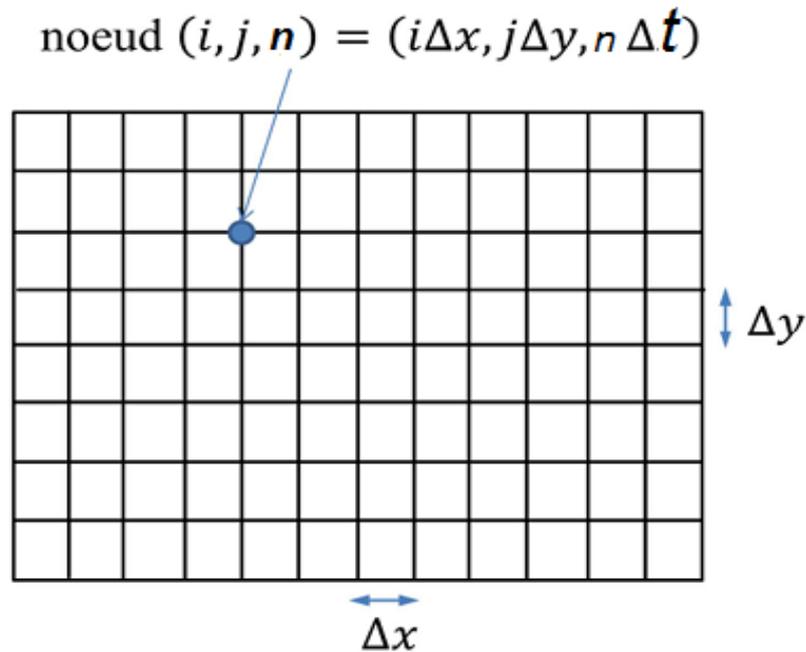


Figure II.3 : discrétisations pour les différences finies. Δx et Δy sont les pas du grille du maillage suivant x et y

L'approximation des dérivées partielles de u par la différence finie centrée est donnée par :

$$\left(\frac{\partial u^n}{\partial x}\right)_{i,j} = \frac{u_{i+1,j}^n - u_{i-1,j}^n}{2\Delta x} + O(\Delta x^2) \quad (\text{II.35})$$

$$\left(\frac{\partial u^n}{\partial y}\right)_{i,j} = \frac{u_{i,j+1}^n - u_{i,j-1}^n}{2\Delta y} + O(\Delta y^2) \quad (\text{II.36})$$

$$\left(\frac{\partial u^n}{\partial t}\right)_{i,j} = \frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^{n-1}}{2\Delta t} + O(\Delta t^2) \quad (\text{II.37})$$

$$\left(\frac{\partial^2 u^n}{\partial x^2}\right)_{i,j} = \frac{u_{i+1,j}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i-1,j}^n}{\Delta x^2} + O(\Delta x^2) \quad (\text{II.38})$$

$$\left(\frac{\partial^2 u^n}{\partial y^2}\right)_{i,j} = \frac{u_{i,j+1}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i,j-1}^n}{\Delta y^2} + O(\Delta y^2) \quad (\text{II.39})$$

$$\left(\frac{\partial^2 u^n}{\partial t^2}\right)_{i,j} = \frac{u_{i,j}^{n+1} - 2u_{i,j}^n + u_{i,j}^{n-1}}{\Delta t^2} + O(\Delta t^2) \quad (\text{II.40})$$

En appliquant ces discrétisations à la composante du champ électrique $E_z(x, y, t) = E(x, y, t)$, on obtient les équations de propagation discrétisées suivantes :

❖ **Cas d'un diélectrique sans perte :**

$$\frac{E_{i+1,j}^n - 2E_{i,j}^n + E_{i-1,j}^n}{\Delta x^2} + \frac{E_{i,j+1}^n - 2E_{i,j}^n + E_{i,j-1}^n}{\Delta y^2} - \varepsilon\mu \frac{E_{i,j}^{n+1} - 2E_{i,j}^n + E_{i,j}^{n-1}}{\Delta t^2} = 0 \quad (\text{II.41})$$

Donc :

$$\begin{aligned} & \frac{\Delta t^2}{\Delta x^2(\varepsilon\mu)} (E_{i+1,j}^n - 2E_{i,j}^n + E_{i-1,j}^n) + \frac{\Delta t^2}{\Delta y^2(\varepsilon\mu)} (E_{i,j+1}^n - 2E_{i,j}^n + E_{i,j-1}^n) = \\ & (E_{i,j}^{n+1} - 2E_{i,j}^n + E_{i,j}^{n-1}) \end{aligned} \quad (\text{II.42})$$

$$E_{i,j}^{n+1} = \frac{\Delta t^2}{\Delta x^2(\varepsilon\mu)} (E_{i+1,j}^n - 2E_{i,j}^n + E_{i-1,j}^n) + \frac{\Delta t^2}{\Delta y^2(\varepsilon\mu)} (E_{i,j+1}^n - 2E_{i,j}^n + E_{i,j-1}^n) + 2E_{i,j}^n - E_{i,j}^{n-1} \quad (\text{II.43})$$

$$E_{i,j}^{n+1} = \frac{\Delta t^2}{\Delta x^2(\varepsilon\mu)} (E_{i+1,j}^n + E_{i-1,j}^n) + \frac{\Delta t^2}{\Delta y^2(\varepsilon\mu)} (E_{i,j+1}^n + E_{i,j-1}^n) + 2\left(1 - \frac{\Delta t^2}{\Delta x^2(\varepsilon\mu)} - \frac{\Delta t^2}{\Delta y^2(\varepsilon\mu)}\right) E_{i,j}^n - E_{i,j}^{n-1} \quad (\text{II.44})$$

Les conditions initiales :

- Pour $n = 0$:

$$E_{i,j}^1 = \frac{\Delta t^2}{\Delta x^2(\varepsilon\mu)} (E_{i+1,j}^0 + E_{i-1,j}^0) + \frac{\Delta t^2}{\Delta y^2(\varepsilon\mu)} (E_{i,j+1}^0 + E_{i,j-1}^0) + 2\left(1 - \frac{\Delta t^2}{\Delta x^2(\varepsilon\mu)} - \frac{\Delta t^2}{\Delta y^2(\varepsilon\mu)}\right) E_{i,j}^0 - E_{i,j}^{-1} \quad (\text{II.45})$$

$$\text{On a : } \left(\frac{\partial E^0}{\partial t}\right)_{i,j} = \frac{E_{i,j}^1 - E_{i,j}^{-1}}{2\Delta t} = E'_{i,j} \quad (\text{II.46})$$

$$E_{i,j}^{-1} = E_{i,j}^1 - 2\Delta t E'_{i,j} \quad (\text{II.47})$$

$$E_{i,j}^1 = \frac{\Delta t^2}{\Delta x^2(\varepsilon\mu)} (E_{i+1,j}^0 + E_{i-1,j}^0) + \frac{\Delta t^2}{\Delta y^2(\varepsilon\mu)} (E_{i,j+1}^0 + E_{i,j-1}^0) + 2\left(1 - \frac{\Delta t^2}{\Delta x^2(\varepsilon\mu)} - \frac{\Delta t^2}{\Delta y^2(\varepsilon\mu)}\right) E_{i,j}^0 - E_{i,j}^{-1} + 2\Delta t (E'_{i,j}) \quad (\text{II.48})$$

$$E_{i,j}^1 = \frac{1}{2} \left[\frac{\Delta t^2}{\Delta x^2 (\varepsilon \mu)} (E_{i+1,j}^0 + E_{i-1,j}^0) + \frac{\Delta t^2}{\Delta y^2 (\varepsilon \mu)} (E_{i,j+1}^0 + E_{i,j-1}^0) \right] + \left(1 - \frac{\Delta t^2}{\Delta x^2 (\varepsilon \mu)} - \frac{\Delta t^2}{\Delta y^2 (\varepsilon \mu)} \right) E_{i,j}^0 + \Delta t (E'_{i,j}) \quad (\text{II.49})$$

$$\text{On pose } v^2 = \frac{1}{(\varepsilon \mu)} ; \Delta x = \Delta y = h ; A = \frac{v^2 \Delta t^2}{\Delta x^2} = \frac{v^2 \Delta t^2}{\Delta y^2} = \frac{v^2 \Delta t^2}{h^2} ;$$

$$E_{i,j}^{n+1} = A (E_{i+1,j}^n + E_{i-1,j}^n + E_{i,j+1}^n + E_{i,j-1}^n) + 2E_{i,j}^n - E_{i,j}^{n-1} \quad (\text{II.50})$$

$$E_{i,j}^1 = \frac{A}{2} (E_{i+1,j}^0 + E_{i-1,j}^0 + E_{i,j+1}^0 + E_{i,j-1}^0) + E_{i,j}^0 + \Delta t (E'_{i,j}) \quad (\text{II.51})$$

❖ Cas d'un milieu conducteur :

$$\frac{E_{i+1,j}^{n+1} - 2E_{i,j}^{n+1} + E_{i-1,j}^{n+1}}{\Delta x^2} + \frac{E_{i,j+1}^{n+1} - 2E_{i,j}^{n+1} + E_{i,j-1}^{n+1}}{\Delta y^2} - \sigma \mu \frac{E_{i,j}^{n+1} - E_{i,j}^{n-1}}{2\Delta t} - \varepsilon \mu \frac{E_{i,j}^{n+1} - 2E_{i,j}^n + E_{i,j}^{n-1}}{\Delta t^2} = 0 \quad (\text{II.52})$$

$$\frac{E_{i+1,j}^n - 2E_{i,j}^n + E_{i-1,j}^n}{\Delta x^2} + \frac{E_{i,j+1}^n - 2E_{i,j}^n + E_{i,j-1}^n}{\Delta y^2} = \sigma \mu \frac{E_{i,j}^{n+1} - E_{i,j}^{n-1}}{2\Delta t} + \varepsilon \mu \frac{E_{i,j}^{n+1} - 2E_{i,j}^n + E_{i,j}^{n-1}}{\Delta t^2} \quad (\text{II.53})$$

$$\begin{aligned} & \frac{2\Delta t^2}{\Delta x^2} (E_{i+1,j}^n - 2E_{i,j}^n + E_{i-1,j}^n) + \frac{2\Delta t^2}{\Delta y^2} (E_{i,j+1}^n - 2E_{i,j}^n + E_{i,j-1}^n) = \\ & \Delta t \sigma \mu (E_{i,j}^{n+1} - E_{i,j}^{n-1}) + 2\varepsilon \mu (E_{i,j}^{n+1} - 2E_{i,j}^n + E_{i,j}^{n-1}) \end{aligned} \quad (\text{II.54})$$

$$\begin{aligned} & \frac{2\Delta t^2}{\Delta x^2} (E_{i+1,j}^n + E_{i-1,j}^n) + \frac{2\Delta t^2}{\Delta y^2} (E_{i,j+1}^n + E_{i,j-1}^n) + 4 \left(\varepsilon \mu - \frac{\Delta t^2}{\Delta x^2} - \frac{\Delta t^2}{\Delta y^2} \right) E_{i,j}^n = \\ & (\Delta t \sigma \mu + 2\varepsilon \mu) (E_{i,j}^{n+1}) + (\Delta t \sigma \mu + 2\varepsilon \mu) (E_{i,j}^{n-1}) \end{aligned} \quad (\text{II.55})$$

$$\begin{aligned} E_{i,j}^{n+1} &= \frac{2\Delta t^2}{\Delta x^2 (\Delta t \sigma \mu + 2\varepsilon \mu)} (E_{i+1,j}^n + E_{i-1,j}^n) + \frac{2\Delta t^2}{\Delta y^2 (\Delta t \sigma \mu + 2\varepsilon \mu)} (E_{i,j+1}^n + E_{i,j-1}^n) + \\ & \frac{4}{(\Delta t \sigma \mu + 2\varepsilon \mu)} \left(\varepsilon \mu - \frac{\Delta t^2}{\Delta x^2} - \frac{\Delta t^2}{\Delta y^2} \right) E_{i,j}^n - E_{i,j}^{n-1} \end{aligned} \quad (\text{II.56})$$

Condition initial :

$$n = 0 :$$

$$\begin{aligned} E_{i,j}^1 &= \frac{2\Delta t^2}{\Delta x^2 (\Delta t \sigma \mu + 2\varepsilon \mu)} (E_{i+1,j}^0 + E_{i-1,j}^0) + \frac{2\Delta t^2}{\Delta y^2 (\Delta t \sigma \mu + 2\varepsilon \mu)} (E_{i,j+1}^0 + E_{i,j-1}^0) + \\ & \frac{4}{(\Delta t \sigma \mu + 2\varepsilon \mu)} \left(\varepsilon \mu - \frac{\Delta t^2}{\Delta x^2} - \frac{\Delta t^2}{\Delta y^2} \right) E_{i,j}^0 - (E_{i,j}^{-1}) \end{aligned} \quad (\text{II.57})$$

$$E_{i,j}^{-1} = E_{i,j}^1 - 2\Delta t E'_{i,j} \quad (\text{II.58})$$

$$E_{i,j}^1 = \frac{\Delta t^2}{\Delta x^2(\Delta t\sigma\mu + 2\varepsilon\mu)} (E_{i+1,j}^0 + E_{i-1,j}^0) + \frac{\Delta t^2}{\Delta y^2(\Delta t\sigma\mu + 2\varepsilon\mu)} (E_{i,j+1}^0 + E_{i,j-1}^0) + \frac{2}{(\Delta t\sigma\mu + 2\varepsilon\mu)} \left(\varepsilon\mu - \frac{\Delta t^2}{\Delta x^2} - \frac{\Delta t^2}{\Delta y^2} \right) E_{i,j}^0 + \Delta t E_{i,j}'^0 \quad (\text{II.59})$$

Si on pose : $\Delta x = \Delta y = h$; $B = \frac{2\Delta t^2}{h^2(\Delta t\sigma\mu + 2\varepsilon\mu)}$

$$E_{i,j}^{n+1} = B \left(E_{i+1,j}^n + E_{i-1,j}^n + E_{i,j+1}^n + E_{i,j-1}^n + \frac{2\varepsilon\mu}{\Delta t^2} E_{i,j}^n \right) - E_{i,j}^{n-1} \quad (\text{II.60})$$

$$E_{i,j}^1 = \frac{1}{2} B \left(E_{i+1,j}^0 + E_{i-1,j}^0 + E_{i,j+1}^0 + E_{i,j-1}^0 + \frac{2\varepsilon\mu}{\Delta t^2} E_{i,j}^0 \right) + \Delta t E_{i,j}'^0 \quad (\text{II.61})$$

❖ Cas d'un plasma :

$$\frac{E_{i+1,j}^n - 2E_{i,j}^n + E_{i-1,j}^n}{\Delta x^2} + \frac{E_{i,j+1}^n - 2E_{i,j}^n + E_{i,j-1}^n}{\Delta y^2} - \frac{\omega_p^2}{c^2} E_{i,j}^n - \frac{1}{c^2} \frac{E_{i,j}^{n+1} - 2E_{i,j}^n + E_{i,j}^{n-1}}{\Delta t^2} = 0 \quad (\text{II.62})$$

$$\frac{\Delta t^2 c^4}{\Delta x^2} (E_{i+1,j}^n - 2E_{i,j}^n + E_{i-1,j}^n) + \frac{\Delta t^2 c^4}{\Delta y^2} (E_{i,j+1}^n - 2E_{i,j}^n + E_{i,j-1}^n) - \omega_p^2 \Delta t^2 c^2 E_{i,j}^n - c^2 (E_{i,j}^{n+1} - 2E_{i,j}^n + E_{i,j}^{n-1}) = 0 \quad (\text{II.63})$$

$$\frac{\Delta t^2 c^4}{\Delta x^2} (E_{i+1,j}^n + E_{i-1,j}^n) + \frac{\Delta t^2 c^4}{\Delta y^2} (E_{i,j+1}^n + E_{i,j-1}^n) + 2c^2 \left(1 - \frac{\Delta t^2 c^2}{\Delta x^2} - \frac{\Delta t^2 c^2}{\Delta y^2} - \frac{1}{2} \omega_p^2 \Delta t^2 \right) E_{i,j}^n - c^2 (E_{i,j}^{n+1} + E_{i,j}^{n-1}) = 0 \quad (\text{II.64})$$

$$\frac{\Delta t^2 c^2}{\Delta x^2} (E_{i+1,j}^n + E_{i-1,j}^n) + \frac{\Delta t^2 c^2}{\Delta y^2} (E_{i,j+1}^n + E_{i,j-1}^n) + 2 \left(1 - \frac{\Delta t^2 c^2}{\Delta x^2} - \frac{\Delta t^2 c^2}{\Delta y^2} - \frac{1}{2} \omega_p^2 \Delta t^2 \right) E_{i,j}^n - (E_{i,j}^{n+1} + E_{i,j}^{n-1}) = 0 \quad (\text{II.65})$$

$$E_{i,j}^{n+1} = \frac{\Delta t^2 c^2}{\Delta x^2} (E_{i+1,j}^n + E_{i-1,j}^n) + \frac{\Delta t^2 c^2}{\Delta y^2} (E_{i,j+1}^n + E_{i,j-1}^n) + 2 \left(1 - \frac{\Delta t^2 c^2}{\Delta x^2} - \frac{\Delta t^2 c^2}{\Delta y^2} - \frac{1}{2} \omega_p^2 \Delta t^2 \right) E_{i,j}^n - E_{i,j}^{n-1} \quad (\text{II.66})$$

Condition initial :

$$n = 0$$

$$E_{i,j}^1 = \frac{\Delta t^2 c^2}{\Delta x^2} (E_{i+1,j}^0 + E_{i-1,j}^0) + \frac{\Delta t^2 c^2}{\Delta y^2} (E_{i,j+1}^0 + E_{i,j-1}^0) + 2 \left(1 - \frac{\Delta t^2 c^2}{\Delta x^2} - \frac{\Delta t^2 c^2}{\Delta y^2} - \frac{1}{2} \omega_p^2 \Delta t^2 \right) E_{i,j}^0 - E_{i,j}^{-1} \quad (\text{II.67})$$

$$E_{i,j}^{-1} = E_{i,j}^1 - 2\Delta t E_{i,j}'^0 \quad (\text{II.68})$$

$$E_{i,j}^1 = \frac{\Delta t^2 c^2}{2\Delta x^2} (E_{i+1,j}^0 + E_{i-1,j}^0) + \frac{\Delta t^2 c^2}{2\Delta y^2} (E_{i,j+1}^0 + E_{i,j-1}^0) + \left(1 - \frac{\Delta t^2 c^2}{\Delta x^2} - \frac{\Delta t^2 c^2}{\Delta y^2} - \frac{1}{2} \omega_p^2 \Delta t^2\right) E_{i,j}^0 + \Delta t E_{i,j}'^0 \quad (\text{II.69})$$

Si on pose : $\Delta x = \Delta y = h$; $C = \frac{\Delta t^2 c^2}{h^2}$

$$E_{i,j}^{n+1} = C(E_{i+1,j}^n + E_{i-1,j}^n + E_{i,j+1}^n + E_{i,j-1}^n) + 2\left(1 - 2C - \frac{1}{2} \omega_p^2 \Delta t^2\right) E_{i,j}^n - E_{i,j}^{n-1} \quad (\text{II.70})$$

$$E_{i,j}^1 = \frac{C}{2} (E_{i+1,j}^0 + E_{i-1,j}^0 + E_{i,j+1}^0 + E_{i,j-1}^0) + \left(1 - 2C - \frac{1}{2} \omega_p^2 \Delta t^2\right) E_{i,j}^0 + \Delta t E_{i,j}'^0 \quad (\text{II.71})$$

II.6 Choix des pas de discrétisation –Stabilité et dispersion :

II.6.1 Stabilité du schéma:

Comme tous les schémas explicites, le schéma est soumis à une condition de stabilité fixant le pas de temps à partir des pas d'espace. Il s'agit du critère de courant [11] :

$$v \cdot \Delta t < \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2}}} \quad (\text{II.72})$$

v : vitesse de propagation

En pratique, nous aurons dans tous les cas $h = \Delta x = \Delta y$ et $\Delta t = \frac{h}{2v}$

II.6.2 Dispersion numérique :

Le passage des équations continues aux équations discrétisés est à l'origine d'un phénomène de dispersion numérique. Il s'agit d'un décalage entre la vitesse de propagation numérique et la vitesse réelle de l'onde dans le milieu considéré. Cet écart dépend de la finesse de la discrétisation spatiale, c'est-à-dire du nombre de pas de discrétisation par longueur d'onde, mais aussi de la discrétisation temporelles, et de l'angle de propagation par rapport à une direction principale de maillage. En fait elle est d'autant plus faible que la discrétisation est fine [12].

En ce qui nous concerne, le pas d'espace h sera toujours pris inférieur ou égale à $\frac{\lambda_{min}}{10}$ ou λ_{min} est la longueur d'onde relative à la plus forte fréquence considéré dans l'impulsion.

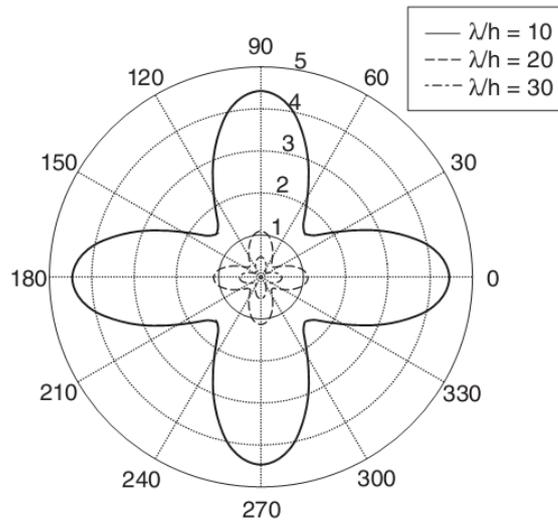


Figure II.4 : erreur numérique de phase en degré par longueur d'onde en fonction de
La direction de propagation de l'onde [11].

Clairement, cette erreur de phase est une fonction de l'angle de propagation, et elle est plus petite quand l'angle est dans la direction diagonale. Cette erreur est tracée pour $\frac{\lambda}{10} = 10$, $\frac{\lambda}{10} = 20$ et $\frac{\lambda}{10} = 30$.

II.7 Algorithme principale de la méthode des différences finies :

On a utilisé Matlab comme langage de programmation.

La figure suivante montre l'algorithme appliqué

Les détails des module1 et 2 (voir Annexe2)

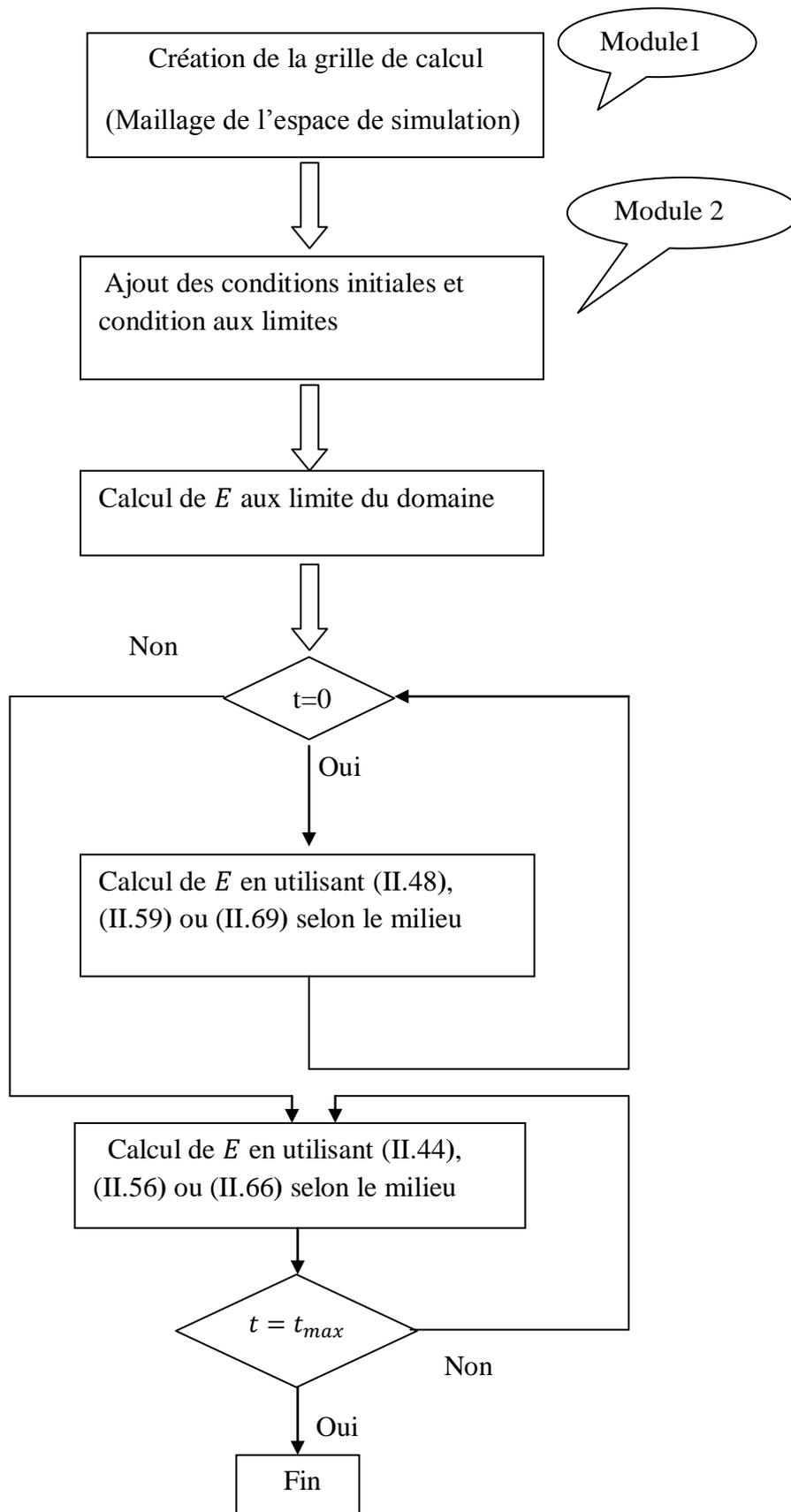


Figure II .5 : représentation de l'algorithme de la méthode des différences finies

Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons exposé la méthode de modélisation (méthode des différences finies), et on a utilisé son schéma centré pour approximer les équations de propagation en deux dimensions et dans trois milieux différents (vide, conducteur, plasma). On a montré aussi la condition de stabilité, la dispersion numérique et l'algorithme principal de cette méthode.

Résultats de simulation et commentaires

Chapitre III : Résultats de simulation et commentaires

Afin d'employer la méthode des différences finies, un domaine informatique doit rentrer en jeu, et c'est l'espace ou la simulation sera effectuée. Ensuite on indique le milieu avec lequel on travaille, ce dernier peut être le vide, un conducteur ou un plasma, sachant que n'importe quel matériau peut être employé, aussi longtemps que la perméabilité, la constante diélectrique, et la conductivité peuvent être indiquées. Une fois l'espace et le milieu sont indiqués, on définit la source.

Dans cette partie, on réalisera la simulation bidimensionnelle de l'onde électromagnétique dans trois milieux différents (vide, conducteur, plasma).

III.1 Paramètres de la simulation :

$$\theta = 45^\circ$$

III.1.1 Choix de la fréquence :

La fréquence de propagation $f = 300\text{MHz}$

$$\lambda = \frac{v}{f}, \quad \beta = \frac{2\pi}{\lambda}$$

La fréquence de discrétisation $f_{max} = 300\text{MHz}$, $f_{max} = 1\text{GHz}$,

$$f_{max} = 1.5\text{GHz} \quad \lambda_{min} = \frac{v}{f_{max}}$$

III.1.2 Pas de discrétisation (spatial et temporel) :

$$\text{On a choisi : } h = \Delta x = \Delta y = \frac{\lambda_{min}}{10}, \quad \Delta t = \frac{h}{2v}$$

Nombre de pas spatiaux : $N = M$

Dimension du domaine de calcul : $L_x = L_y = L = N \cdot h = 18\text{m}$

Nombre de pas temporel : $k = 400$

Durée de la simulation : $T = k \cdot \Delta t$

La simulation doit pouvoir être initialisée par l'arrivée d'une onde plane dans le domaine de calcul :

On a choisi une impulsion de type gaussienne (fonction sinus modulé par une gaussienne) [13], sa définition spatiale à $t=0$ (en 2D) est la suivante :

$$E(x, y) = 10E_0 \sin\left(\omega \frac{xcos\theta + ysin\theta}{v}\right) e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{xcos\theta + ysin\theta}{\sigma_0}\right)^2} \quad (\text{III.1})$$

E_0 : L'amplitude de la fonction sinus

σ_0 : écart-type

On prend: $E_0 = 10\text{V/m}$, $\sigma_0 = \frac{1}{f} \text{s}$, $f = 300\text{MHZ}$

III.2 cas d'un diélectrique : vide

$$v = c = 3.10^8 \text{ m/s}, \quad \lambda = 1\text{m}$$

III.2.1 Conditions initiales :

$$E(x, y) = 10 \sin\left(2\pi. 3.10^8 \frac{xcos\theta + ysin\theta}{3.10^8}\right) e^{-\frac{1}{2}(xcos\theta + ysin\theta)^2} \quad (\text{III.2})$$

$$\frac{\partial E(x, y, 0)}{\partial t} = 0 \quad (\text{III.3})$$

III.2.2 Conditions aux limites :

La propagation étant supposée se faire en espace libre (et donc infini).

Le domaine de calcul a été introduit artificiellement (présence des réflexions parasites le long des bords de notre domaine) .

Pour pallier cet inconvénient, on peut introduire des conditions dites absorbantes au bord de notre domaine (Conditions aux Limites Absorbantes, CLA) de manière à éliminer ces réflexions parasites.

Ces conditions absorbantes peuvent être simulées de la manière suivante :

$$\begin{cases} E(1, :, t + 1) = E(2, :, t), E(L_x, :, t + 1) = E(L_x - 1, :, t) \\ E(:, 1, t + 1) = E(:, 2, t), E(:, L_y, t + 1) = E(:, L_y - 1, t) \end{cases} \quad (\text{III.4})$$

Les différents paramètres calculés sont donnés sur le tableau III.1 :

Chapitre III : Résultats de simulation et commentaires

	$f_{max} = 300\text{MHZ}$	$f_{max} = 1\text{GHZ}$	$f_{max} = 1.5\text{GHZ}$
$\lambda_{min}(m)$	1	0.3	0.2
$h(m)$	0.1	0.03	0.02
$N = M$	180	600	900
$\Delta t(s)$	$16 \cdot 10^{-11}$	$5 \cdot 10^{-11}$	$3,3 \cdot 10^{-11}$
$T(s)$	$64 \cdot 10^{-9}$	$20 \cdot 10^{-9}$	$13,2 \cdot 10^{-9}$

Tableau III.1 : Les différents paramètres calculés

III.2.3 Les résultats :

- $f_{max} = 300\text{MHZ}(N = 180)$:

Temps d'exécution du programme : 20sec

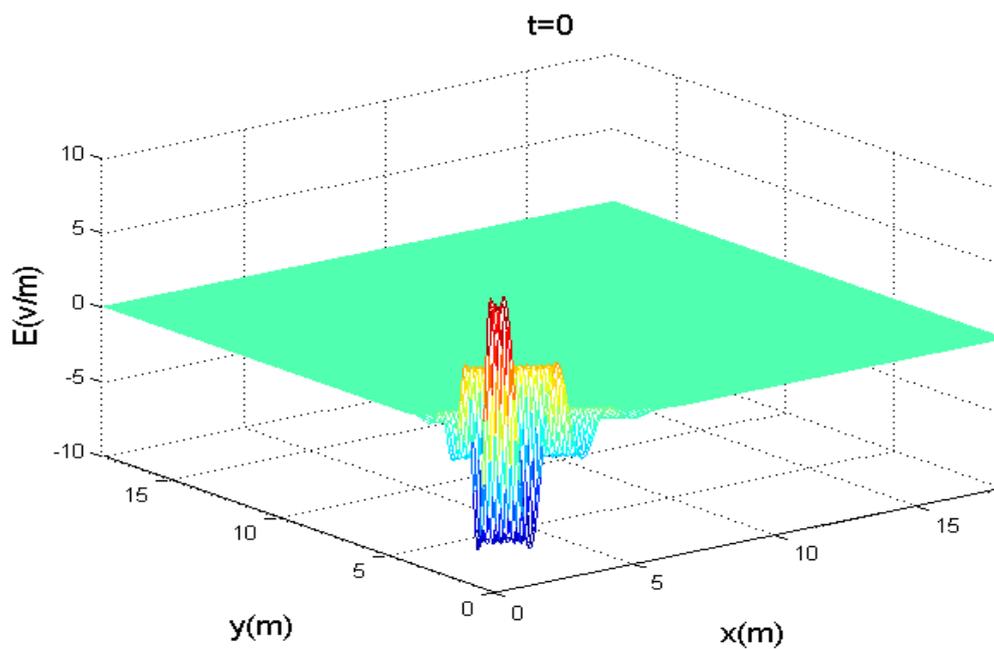


Figure III .1 : simulation à $t=0$

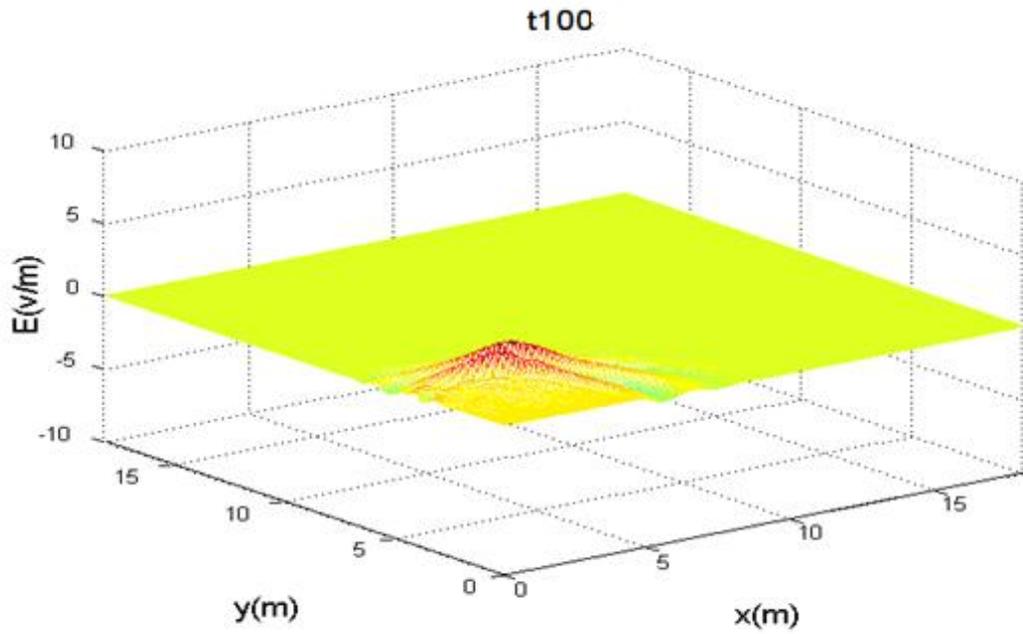


Figure III.2 : simulation à $t = 100\Delta t$

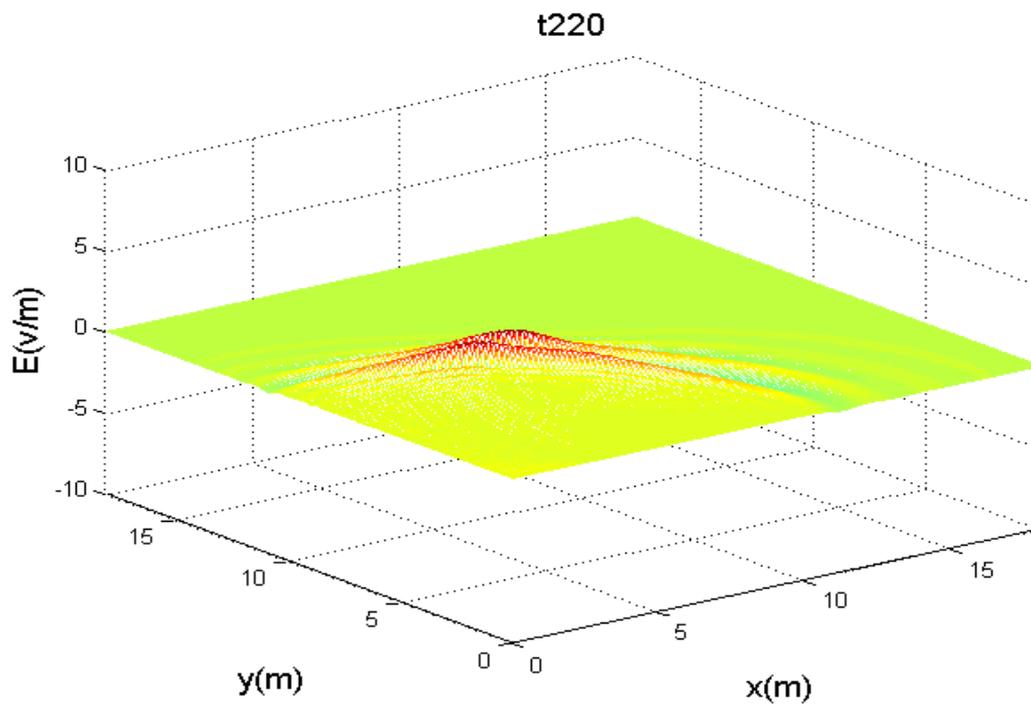


Figure III.3 : simulation à $t = 220\Delta t$

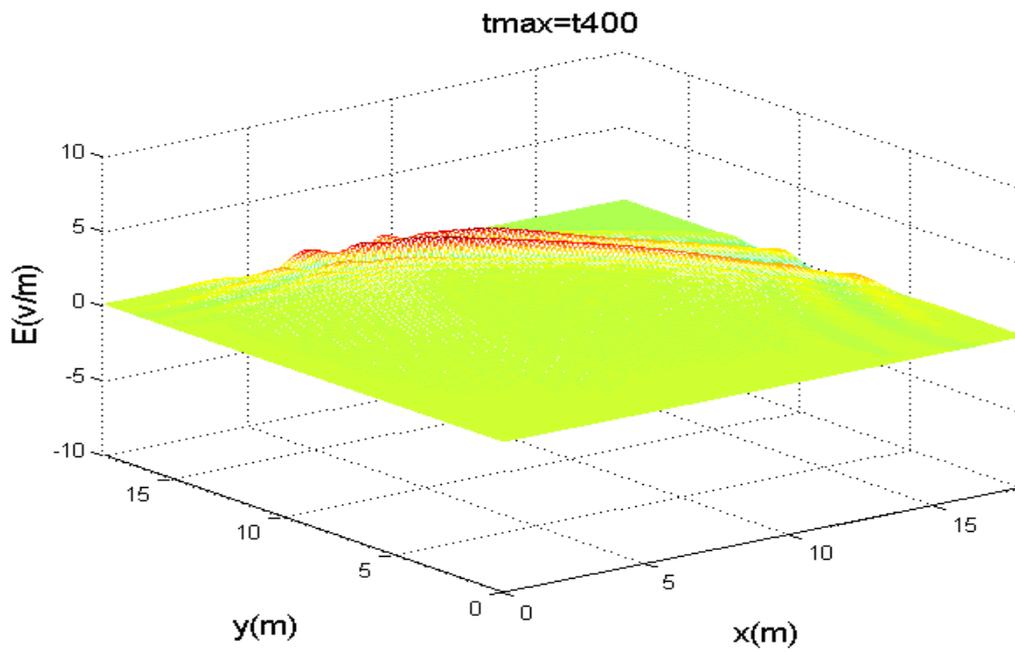


Figure III.4 : simulation à $t = 400\Delta t$

- $f_{max} = 1GHZ(N = 600)$

Temps d'exécution du programme : 3min et 45 sec

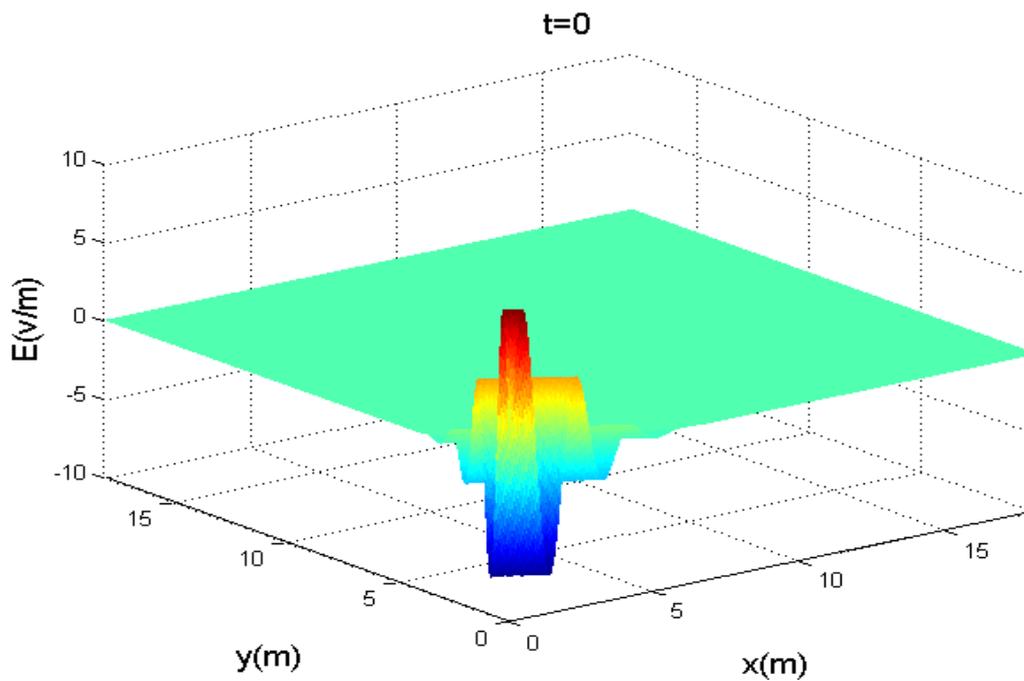


Figure III.5 : simulation à $t = 0$

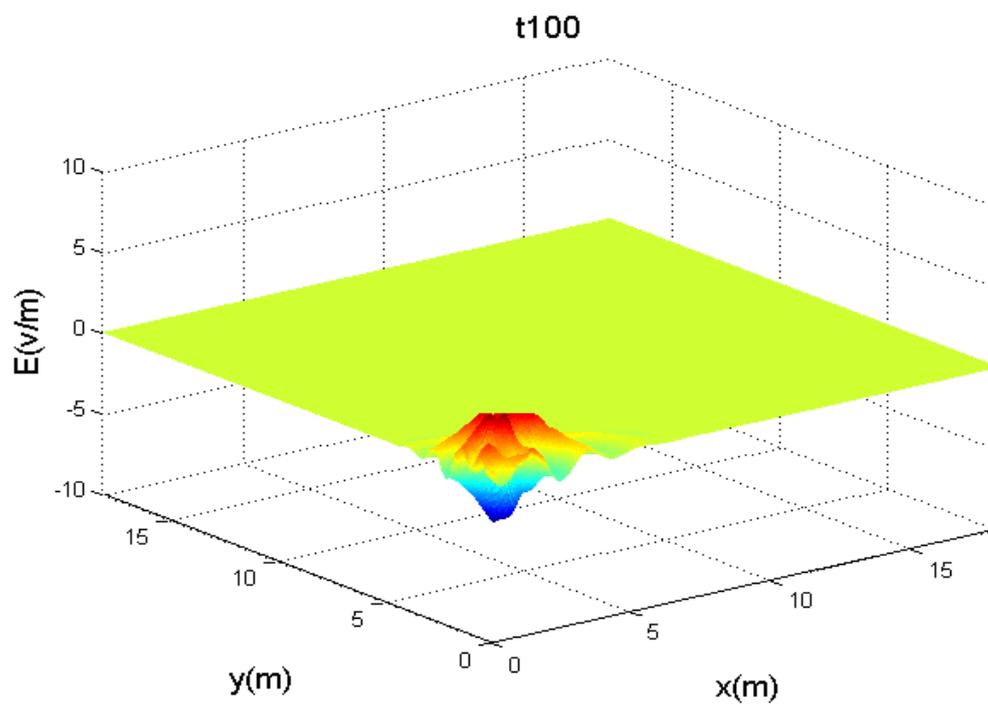


Figure III.6 : simulation à $t = 100\Delta t$

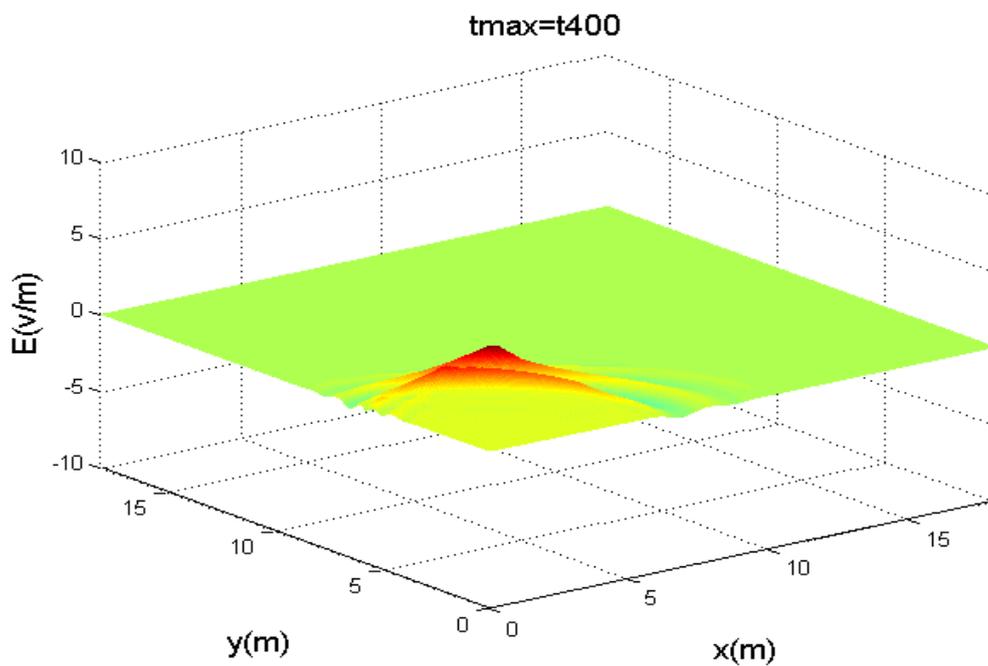


Figure III.7 : simulation à $t = 400\Delta t$

- $f_{max} = 1,5\text{GHZ}(N = 900)$

Temps d'exécution du programme : **8min et 25sec**

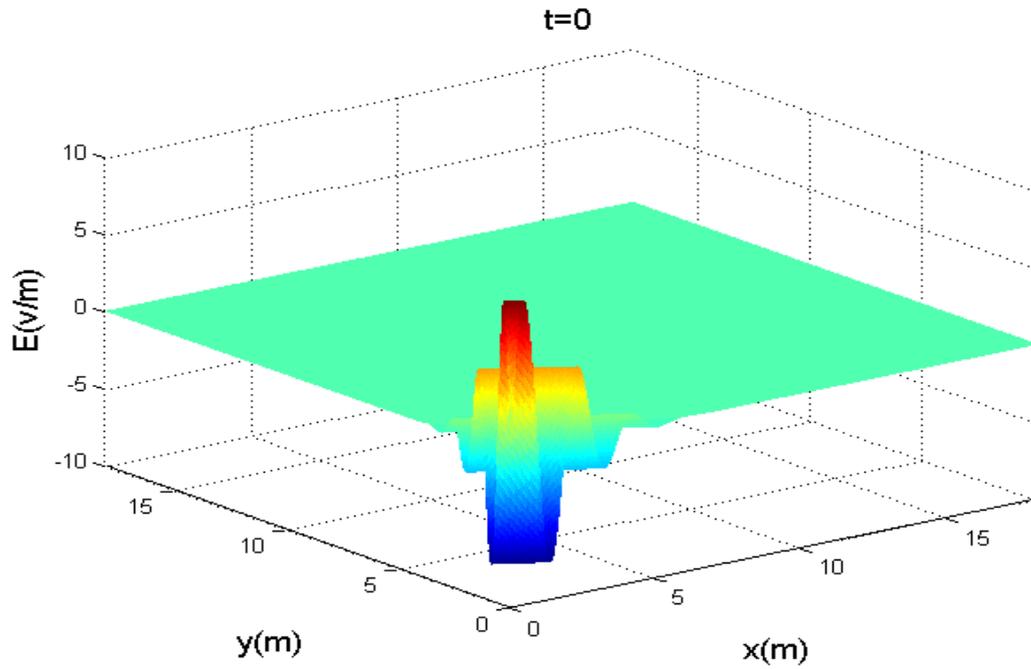


Figure III.8 : simulation à $t = 0$

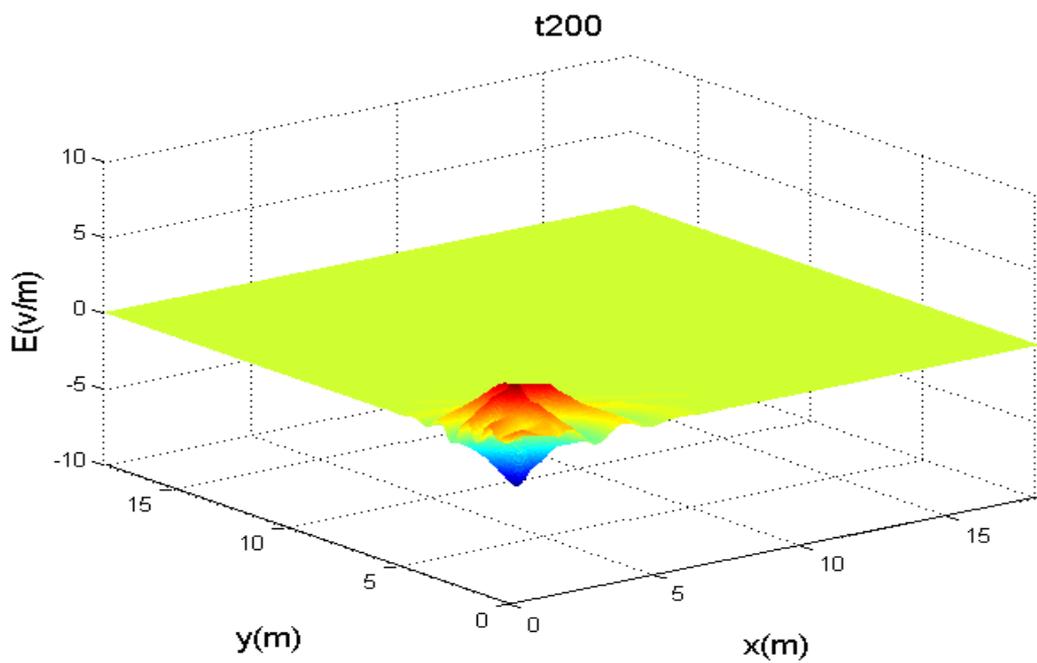


Figure III.9 : simulation à $t = 200\Delta t$

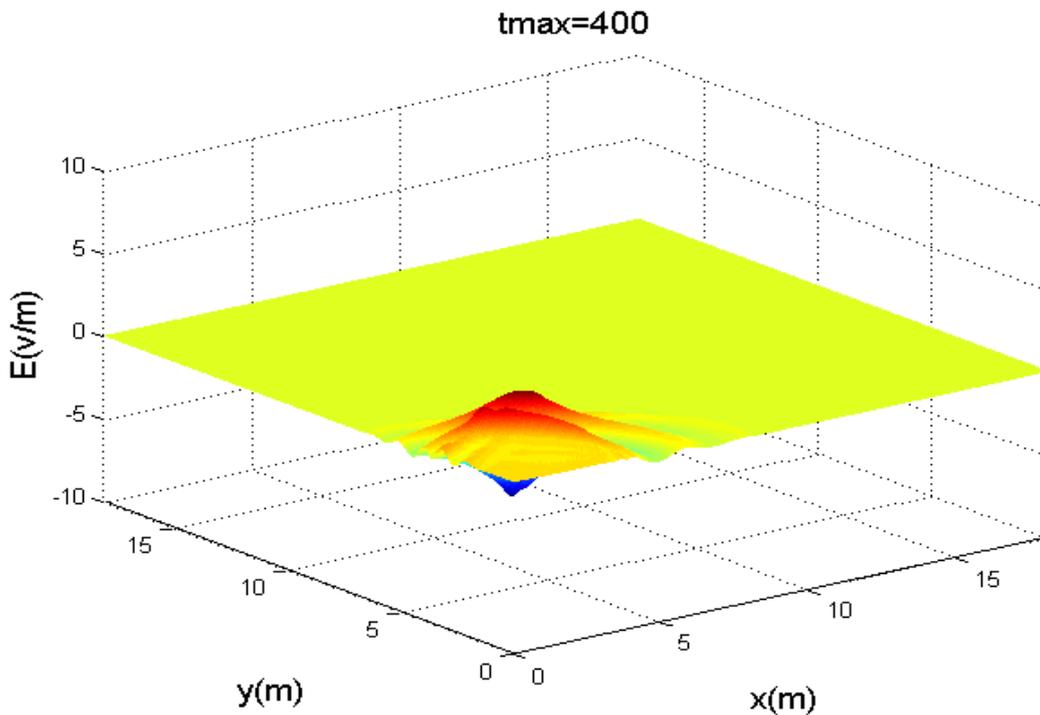


Figure III.10 : simulation à $t = 400\Delta t$

III.2.4 Commentaires:

Les figures (III-1 à III-10) représentent l'évolution de la propagation du champ électrique dans le vide pour différentes fréquences de discrétisation ($f_{max} = 300\text{MHZ}$, $f_{max} = 1\text{GHZ}$, $f_{max} = 1,5\text{GHZ}$).

A une même distance spatiale, la taille de la matrice augmente avec l'augmentation de la fréquence de discrétisation, et donc le temps d'exécution du programme augmente (ce temps dépend de la taille des matrices).

III.3 Cas d'un bon conducteur : le cuivre

$$\alpha = \beta \approx \sqrt{\omega\mu\sigma/2} = \sqrt{\pi\mu\sigma f} , \sigma = 5,8 \times 10^7 \text{ S/m}$$

$$\alpha = \beta = \sqrt{\pi \times 4\pi \cdot 10^{-7} \times 5,8 \times 10^7 \times 3 \times 10^8} = 261959,57 \text{ Np/m}$$

$$\delta_p = \frac{1}{\alpha} = 3,81 \times 10^{-6} \text{ m} , \quad \lambda = \frac{2\pi}{\beta} = 2.40 \times 10^{-5} \text{ m}$$

$$v = \lambda f = 2.40 \times 10^{-5} \times 3 \times 10^8 = 7200 \text{ m/s}$$

Chapitre III : Résultats de simulation et commentaires

On prend : $L = 96.10^{-5}m$, $k = 400$

Les différents paramètres calculés sont donnés sur le tableau III.2 :

	$f_{max} = 300MHz$	$f_{max} = 1GHz$	$f_{max} = 1.5GHz$
$\lambda_{min}(m)$	24.10^{-6}	13.10^{-6}	$10,8.10^{-6}$
$h(m)$	24.10^{-7}	13.10^{-7}	$10,8.10^{-7}$
N	400	740	888
$\Delta t(s)$	16.10^{-11}	5.10^{-11}	33.10^{-12}
$T(s)$	64.10^{-9}	20.10^{-9}	$13,2.10^{-9}$

Tableau III.2 : Les différents paramètres calculés

III.3.1 Les résultats :

- $f_{max} = 300MHz(N = 400)$

Temps d'exécution du programme : **1min et 40 sec**

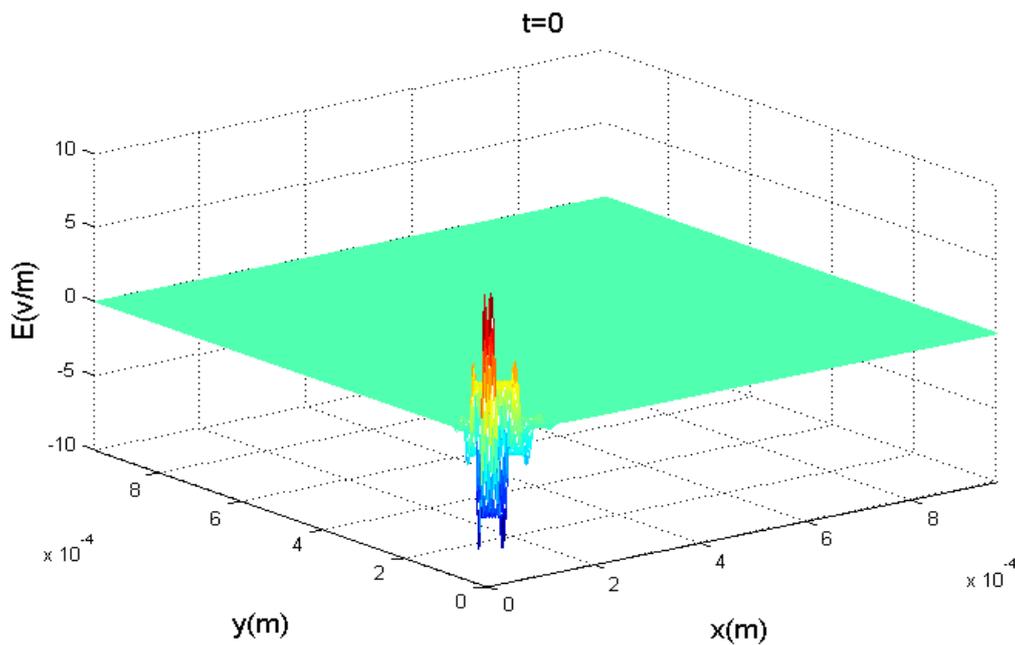


Figure III.11 : simulation à $t = 0$

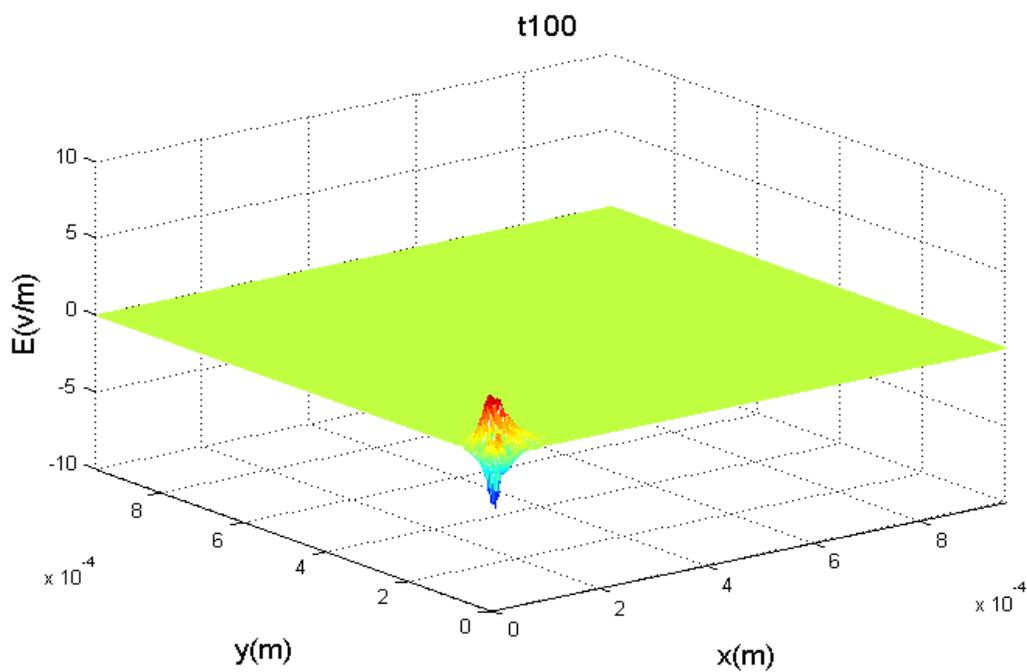


Figure III.12: simulation à $t = 100\Delta t$

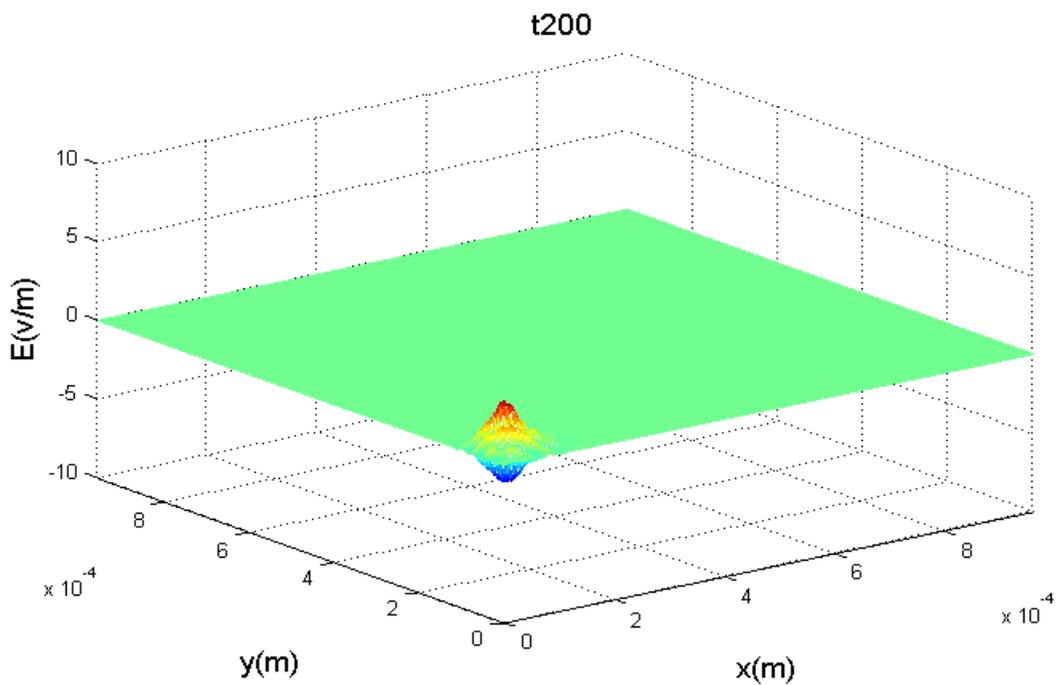


Figure III.13: simulation à $t = 200\Delta t$

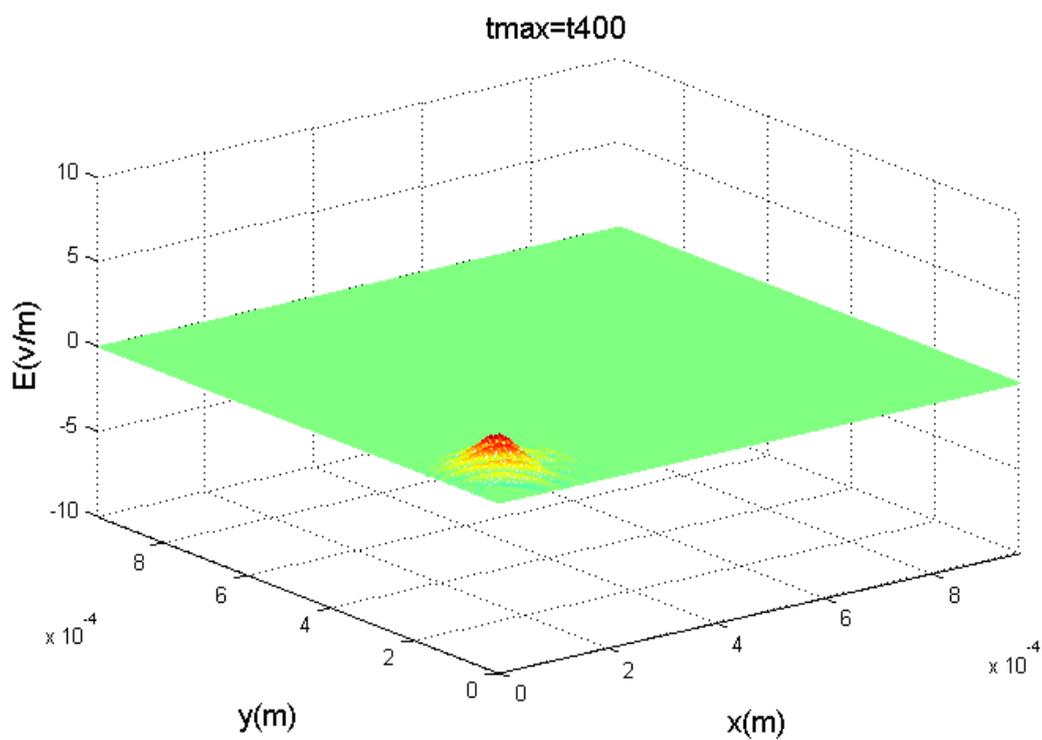


Figure III.14 : simulation à $t = 400\Delta t$

- $f_{\text{max}} = 1\text{GHZ}$ ($N = 740$)

Temps d'exécution du programme : **5min et 45sec**

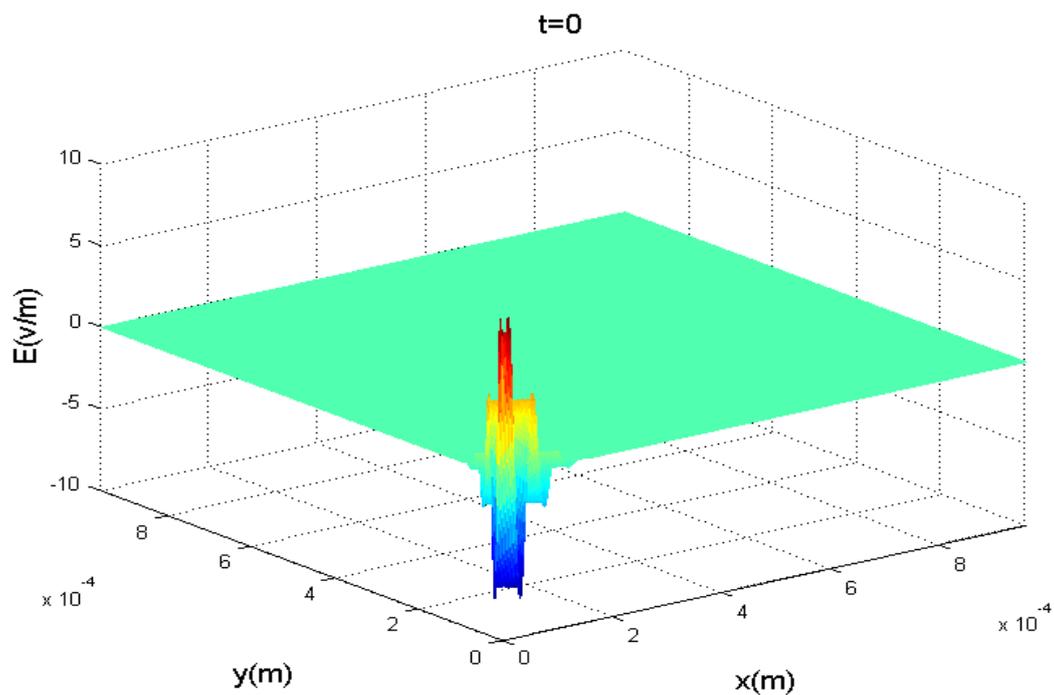


Figure III.15 : simulation à $t = 0$

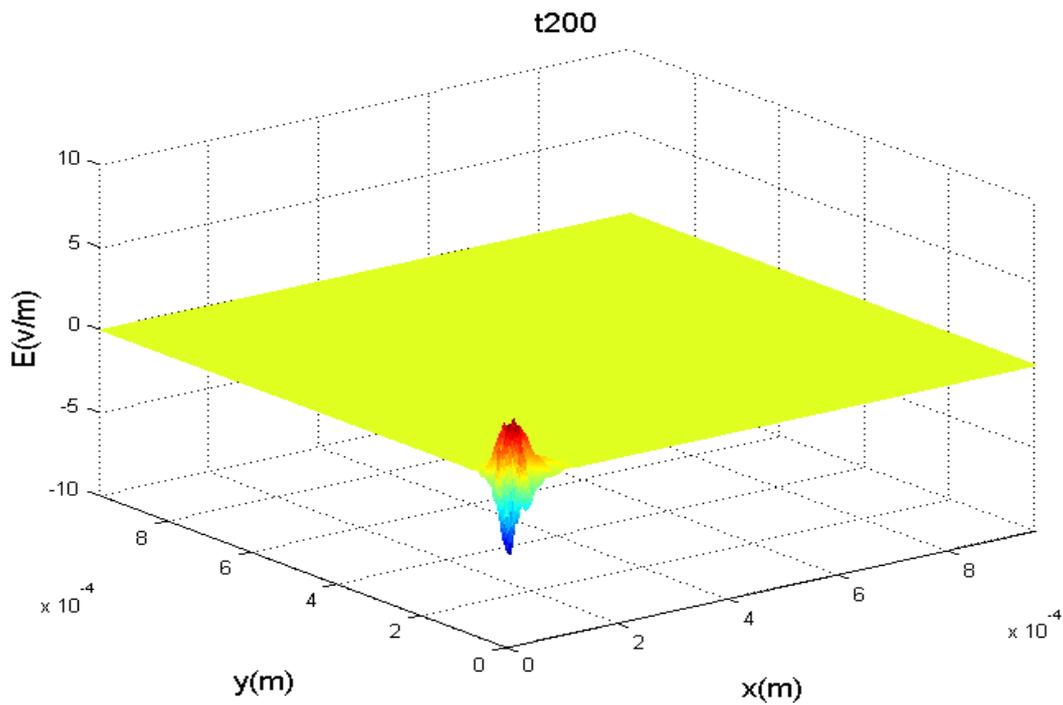


Figure III.16 : simulation à $t = 200\Delta t$

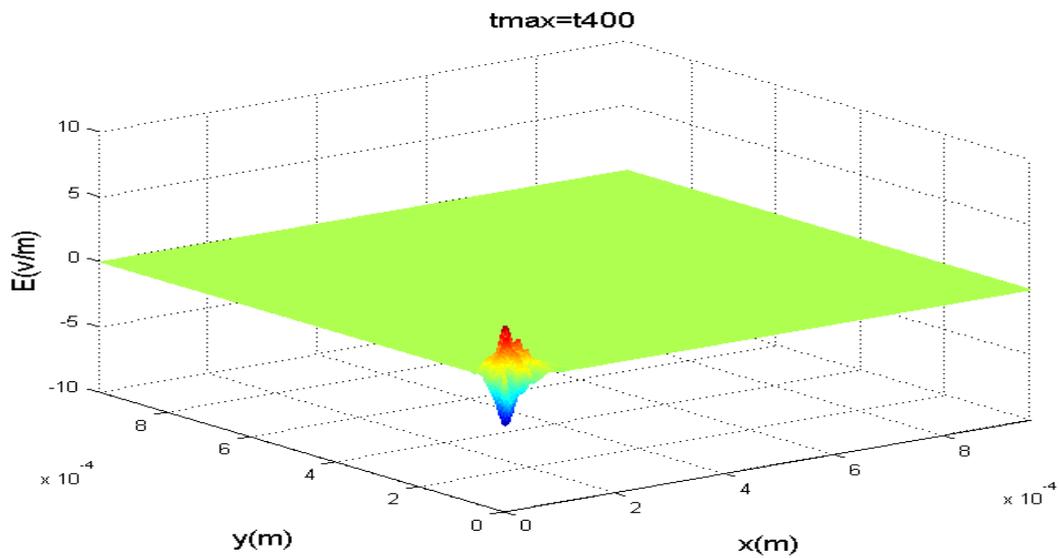


Figure III.17 : simulation à $t = 400\Delta t$

- $f_{max} = 1,5\text{GHZ}(N = 888)$:

Temps d'exécution du programme : **8min et 5sec**

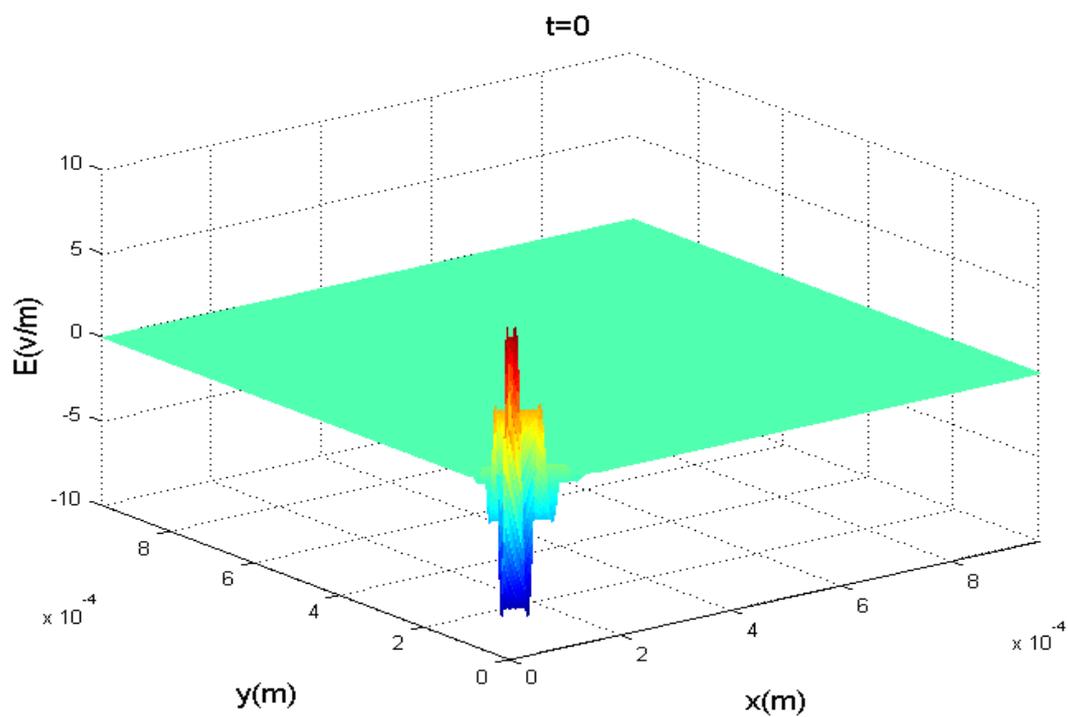


Figure III.18 : simulation à $t = 0$

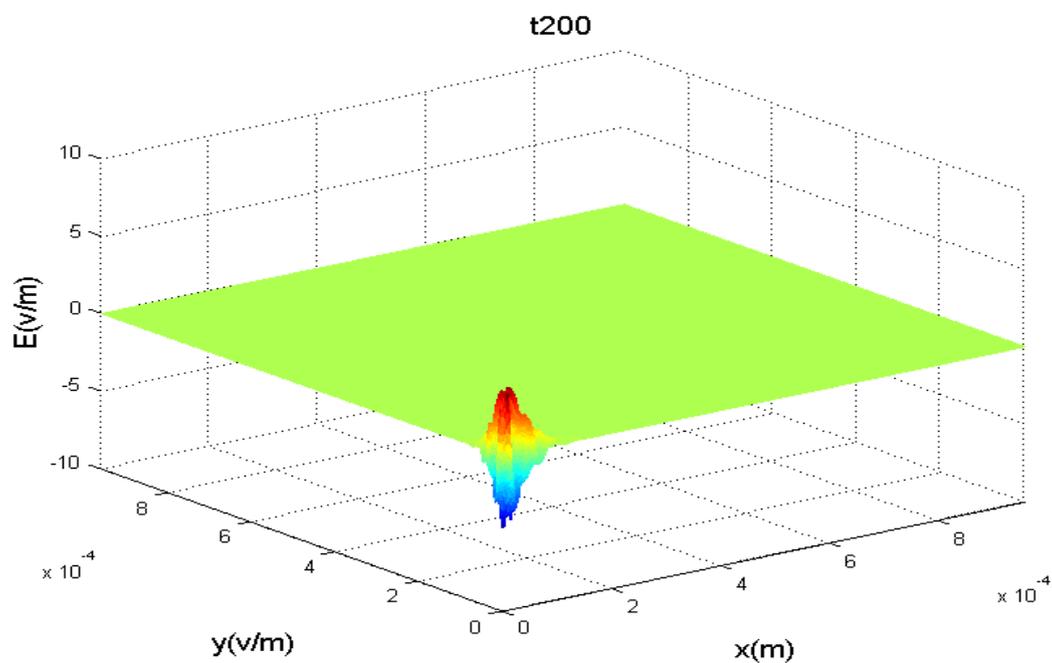


Figure III.19 : simulation à $t = 200\Delta t$

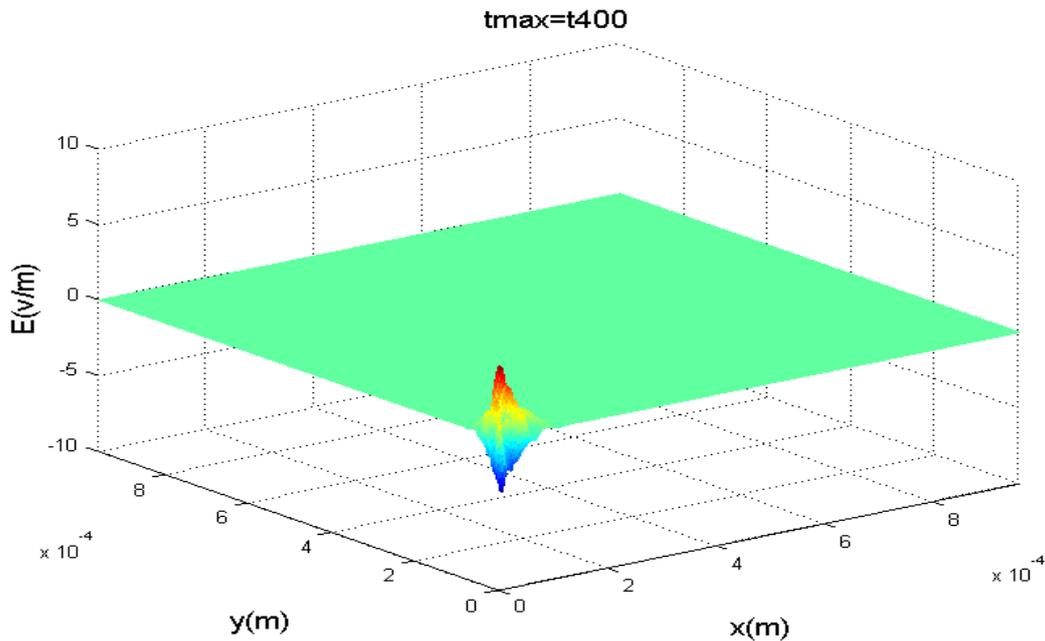


Figure III.20 : simulation à $t = 400\Delta t$

III.3.2 Commentaires:

Dans le cas d'un conducteur (voir figures : III-11 à III-20) (dans le domaine des hyperfréquences), la simulation se limite à des petites distances, car pour les grandes distances, le temps d'exécution du programme augmente beaucoup et donc on ne peut pas afficher facilement les résultats.

III .4 Cas d'un plasma :

Condition de propagation : $\omega \gg \omega_p$

$$\omega = 2\pi f = 2\pi \cdot 3 \cdot 10^8 \text{ rad/s}, \omega_p = \sqrt{\frac{ne^2}{m\epsilon_0}} = 56.8\sqrt{n}$$

$$\text{On prend : } n = 10^{12} \text{ m}^{-3} \rightarrow \omega_p = 5,68 \cdot 10^7 \text{ rad/s}$$

III.4.1 Les résultats :

- $f_{max} = 300\text{MHZ}(N = 180)$:

Temps d'exécution du programme : 20s

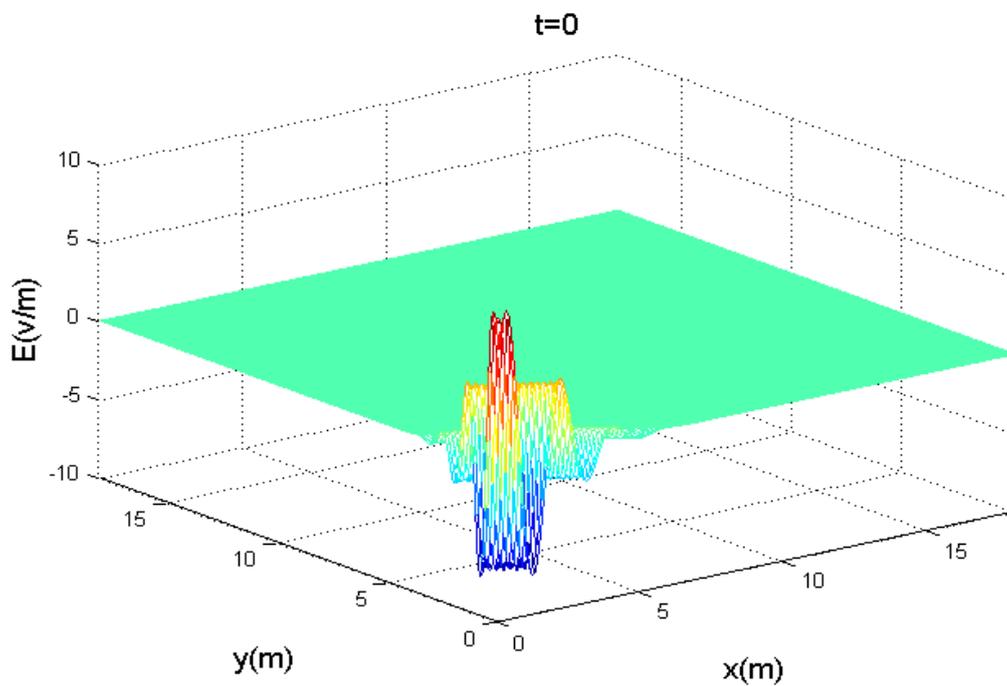


Figure III.21 : simulation à $t = 0$

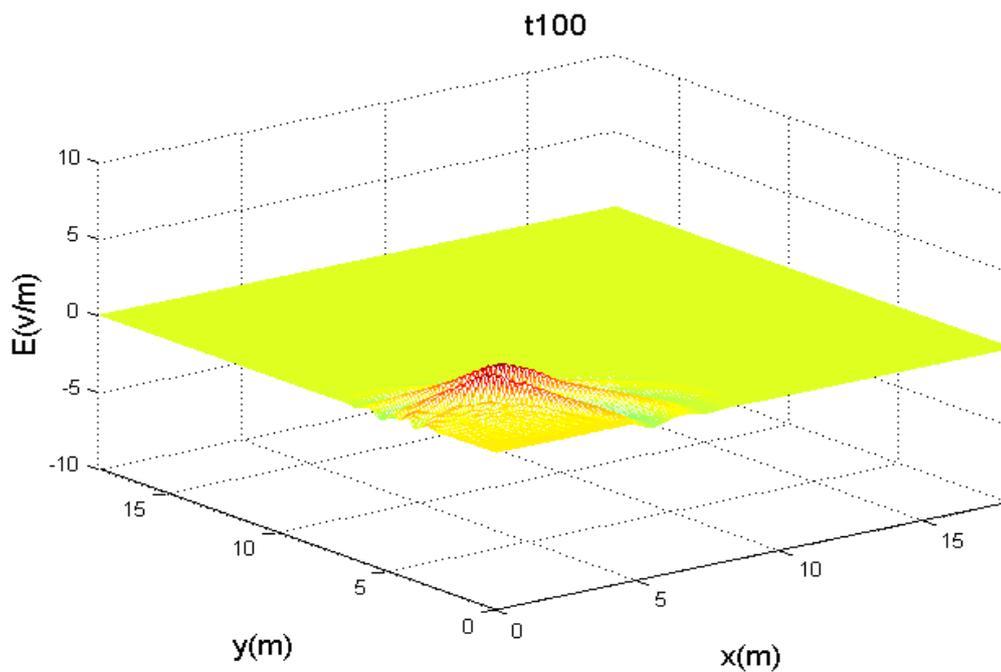


Figure III.22 : simulation à $t = 100\Delta t$

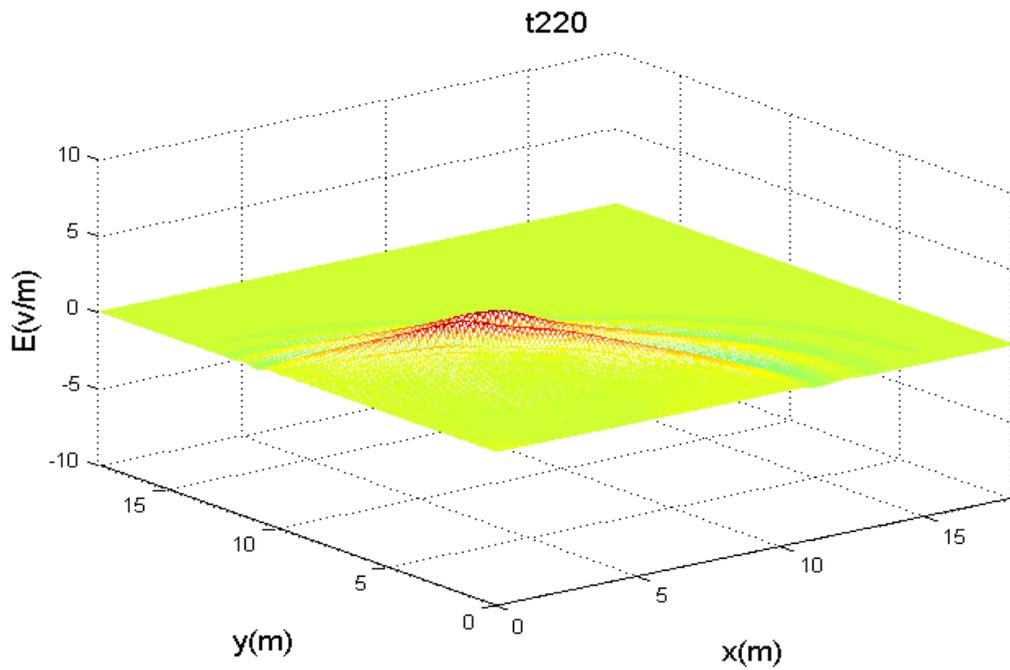


Figure III.23 : simulation à $t = 220\Delta t$

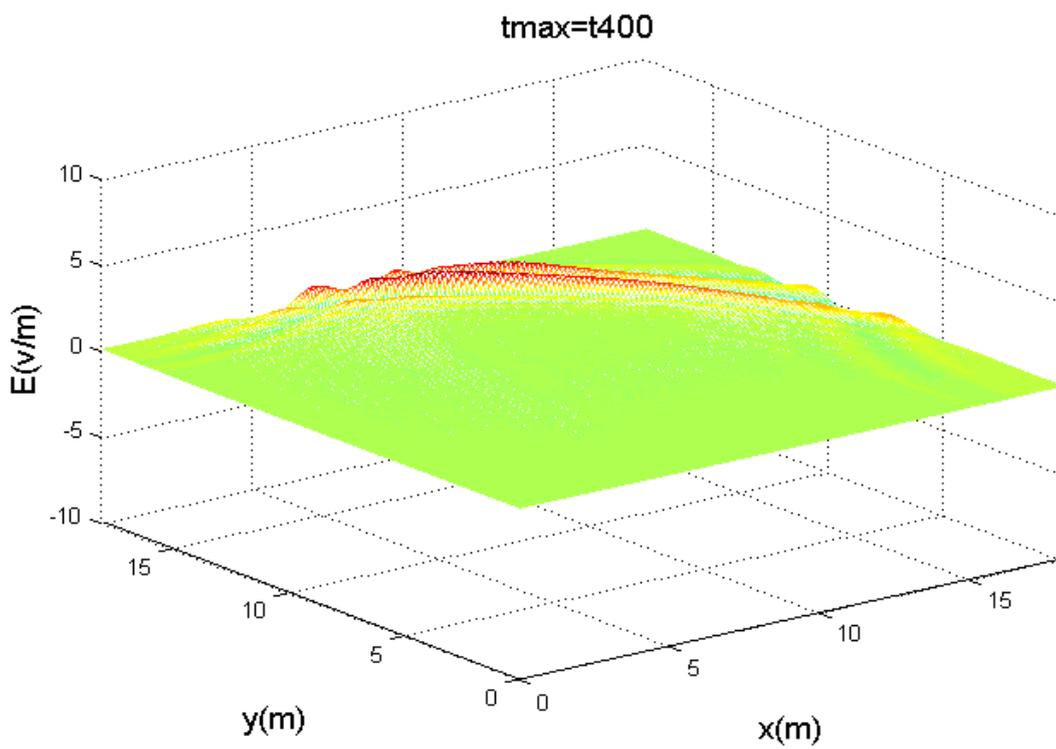


Figure III.24 : simulation à $t = 400\Delta t$

- $f_{max} = 1\text{GHZ}$ ($N = 600$)

Temps d'exécution du programme : 3min et 45 sec

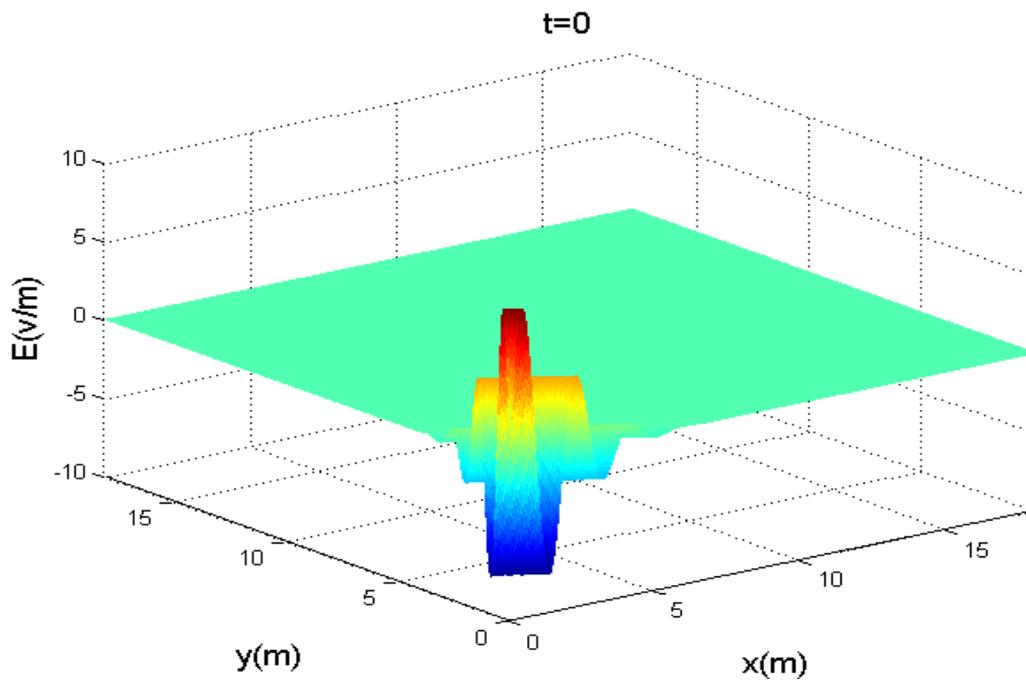


Figure III.25 : simulation à $t = 0$

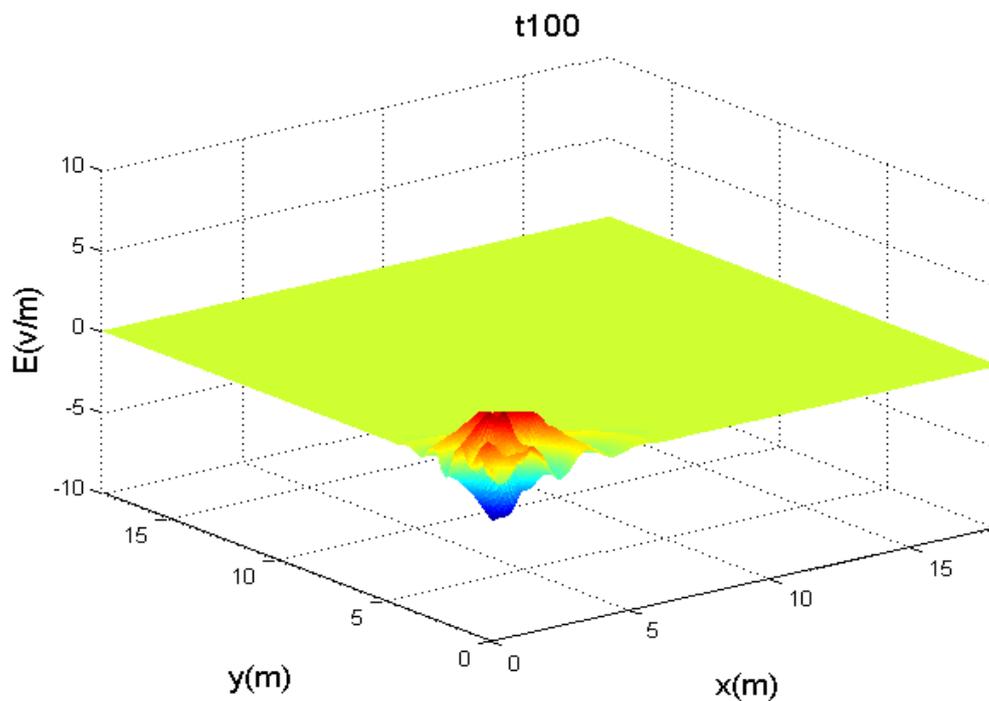


Figure III.26 : simulation à $t = 100\Delta t$

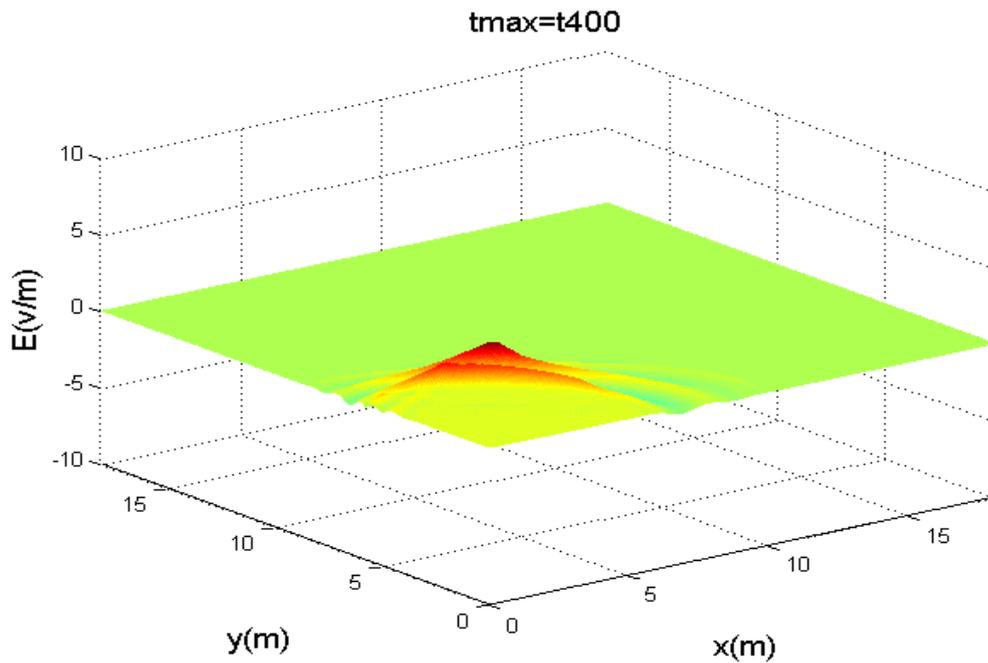


Figure III.27: simulation à $t = 400\Delta t$

- $f_{max} = 1,5\text{GHZ}(N = 900)$

Temps d'exécution du programme : **8min et 25sec**

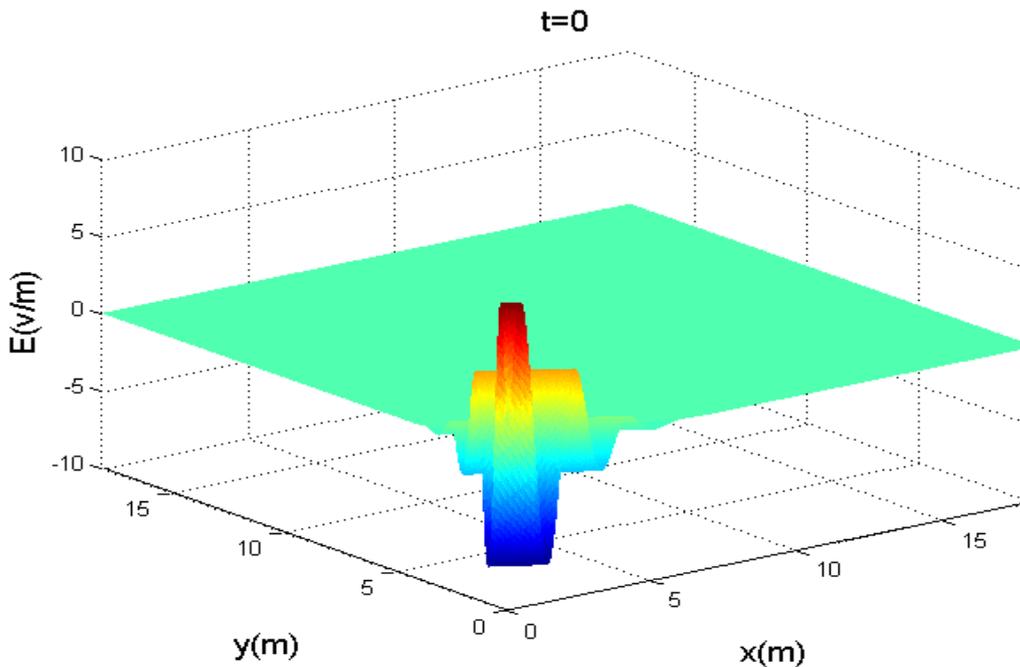


Figure III.28: simulation à $t = 0$

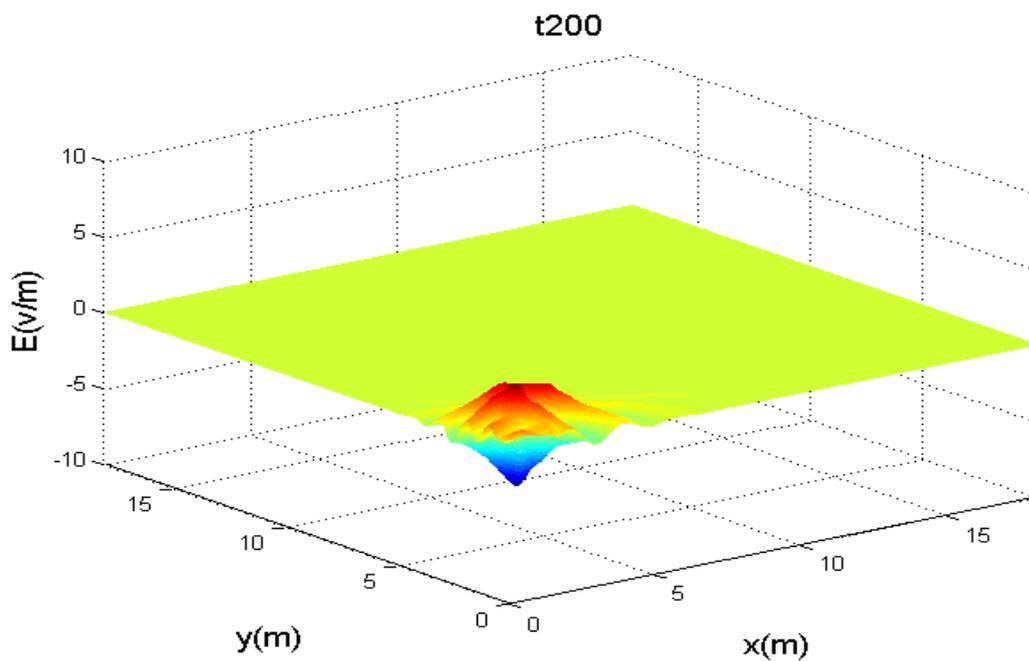


Figure III.29: simulation à $t = 200\Delta t$

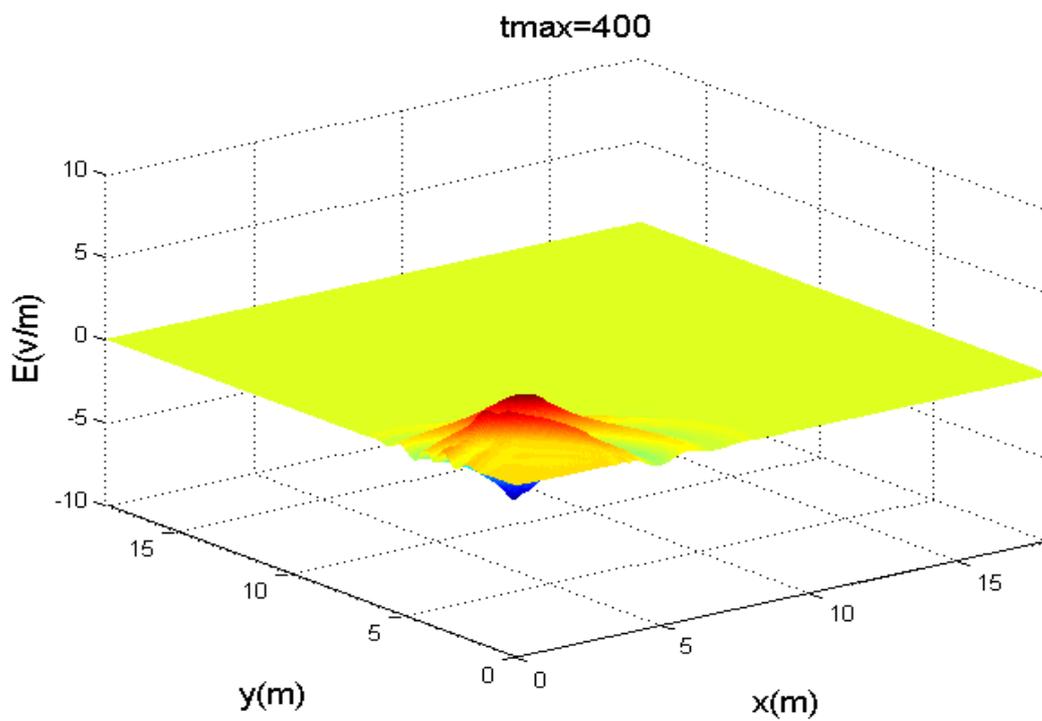


Figure III.30: simulation à $t = 400\Delta t$

III .4.2 Commentaires:

On remarque la ressemblance (voir figure : (III-21 à III-30) entre la simulation dans le vide et la simulation dans le plasma et cela est évident car pour : $\omega \gg \omega_p$, la relation de dispersion du plasma est de même que la relation de dispersion du vide

Conclusion

Un des avantages des différences finies dans le domaine temporel est que le champ électromagnétique est disposé dans tout l'espace sur la grille et à chaque itération temporelle.

Cette méthode nécessite un échantillonnage spatial complet de l'espace de calcul auquel s'ajoute un échantillonnage temporel. Ceci limite considérablement l'espace d'analyse. En effet la dimension h d'une cellule (de maillage) est inversement proportionnelle à la fréquence maximale d'observation f_{max} , respectivement proportionnelle à la longueur d'onde minimale d'observation λ_{min} . On a choisi la dimension d'une cellule : $h = \frac{\lambda_{min}}{10}$.

Lorsque la fréquence de discrétisation augmente, il faut beaucoup d'itérations temporelles pour simuler la distance désirée.

Conclusion générale

Conclusion

Dans ce mémoire nous avons modélisé et simulé la propagation bidimensionnelle des ondes électromagnétiques dans les différents milieux (vide, conducteur, plasma) en utilisant la méthode des différences finies dans la gamme des micro-ondes. Après avoir introduit les notions générales sur les ondes électromagnétiques, nous avons présenté la méthode de modélisation.

La dernière partie a été consacrée à la simulation dans les différents milieux en utilisant trois fréquences d'échantillonnage (discrétisation).

La gamme du domaine micro-ondes est comprise entre 300MHZ et 300GHZ ; ce qui correspond à des longueurs d'onde respectives 1m et 1mm et donc à une dimension de cellule $h \leq 0.1m$. On comprend bien la difficulté à modéliser de vastes espaces d'analyse.

Ainsi pour décrire des phénomènes très hautes fréquences (T.H.F), on doit prendre un pas de temps très petit ; donc un petit pas de temps pour une grande durée de simulation signifie beaucoup d'itérations (c'est très coûteux en terme de temps de calcul).

En perspective, on propose d'appliquer la méthode des différences finies dans le domaine fréquentiel. De même, il serait intéressant d'étudier la propagation des ondes électromagnétiques dans les différents guides d'ondes (rectangulaire, circulaire).

Bibliographie

[1] José-Philippe Pérez “ électromagnétisme fondements et application” Dunod , Paris, 2002.

[2] William H.Hayt, Jr.John A.Buck “Engineering Electromagnetics” Sixth Edition , Mc Graw Hill 2001.

[3] J.C. Maxwell. A Treatise on Electricity And Magnetism. Clarendon Press – Oxford,1873.

[4] P.F.Combes “ Micro-ondes “ Dunod, Paris , 1997.

[5] Michel Hulin “L’essentiel du cours avec exercices et problème résolus et classés 1-Electromagnétisme Equation de Maxwell “ Michel Hulin 1974.

[6] Dominic Grenier “Electromagnétisme et transmission des ondes” Département de génie électrique et de génie informatique Université Laval(Québec) automne 2016.

[7] Jean –Marcel Rax “physique des plasmas” Dunod , Paris, 2005 .

[8] Maxime Nicolas “Ondes et Electromagnétisme” Dunod , Paris, 2009 .

[9] Eric Goncalves da Silva “ Méthodes et Analyse Numériques “.archives-ouvertes.fr/cel-00556967. Soumis le 18 janvier 2011.

[10] S .M.Rao Time Domain Electromagnetics . Academic Press, 1999.

[11] Jian-Ming Jin “theory and computation of electromagnetic field” John wiley &son 2010.

[12] A. Taflove et K. R Umashankar .''The finite -Différence Time-Domain methode for numérical modeling of electromagnetic wave interactions whith arbitrary structures. Dans M.A Morgan, éditeur ,PIER 2 , Finite Element and Finite Différence Methods in Electromagnétic scattering ,Elsevier 1990.

[13] Sylvain CHenu'' modélisation électromagnétique in virtuo . Application aux problèmes de propagation en milieu complexes pour les systèmes de télécommunication ''Thèse de doctorat, université européenne de Bretagne, 2011

[14] David Voltmer '' Fundamentals of Electromagnetics 2: Quasistatics and Waves''
Rose-Hulman Institute of Technology Copyright © 2007 by Morgan & Claypool

Annexes

Annexe1

$$(1 + x)^{1/2} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} - \frac{5x^4}{128} + \dots$$

$$(1 + x)^{-1/2} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{3x^2}{8} - \frac{5x^3}{16} + \frac{56x^4}{128} + \dots$$

En utilisant les premiers termes de l'expansion binomiale (ci-dessus) [14], on peut faire l'approximation de la racine carrée :

$$\begin{aligned} \bar{\gamma} &= \sqrt{(j\omega\mu)(j\omega\varepsilon)(1 - j\frac{\sigma}{\omega\varepsilon})} \\ &= j\omega\sqrt{\mu\varepsilon}(1 - j\frac{\sigma}{\omega\varepsilon})^{1/2} \\ &\approx \frac{\sigma}{2}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\left(1 - \frac{1}{8}\left(\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right)^2\right) + j\omega\sqrt{\mu\varepsilon}\left(1 + \frac{1}{8}\left(\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right)^2\right) \end{aligned} \quad (A)$$

Et de la même manière :

$$\begin{aligned} \bar{\eta} &= \sqrt{\frac{j\omega\mu}{j\omega\varepsilon(1 - j\frac{\sigma}{\omega\varepsilon})}} \\ &= \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}(1 - j\frac{\sigma}{\omega\varepsilon})^{-1/2} \\ &= \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\left(1 - \frac{3}{8}\left(\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right)^2\right) + j\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\left(1 - \frac{5}{8}\left(\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right)^2\right) \end{aligned} \quad (B)$$

Ainsi de (A) et(B) découlent les expressions simplifiées :

$$\alpha \approx \frac{\sigma}{2}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\left(1 - \frac{1}{8}\left(\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right)^2\right)$$

$$\beta \approx \omega\sqrt{\mu\varepsilon}\left(1 + \frac{1}{8}\left(\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right)^2\right)$$

$$v_p \approx \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}\left(1 - \frac{1}{8}\left(\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right)^2\right)$$

$$\mathbf{Re}\{\bar{\eta}\} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\left(1 - \frac{3}{8}\left(\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right)^2\right)$$

$$\mathbf{Im}\{\bar{\eta}\} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\left(1 - \frac{5}{8}\left(\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right)^2\right)$$

Annexe 2

$$\bar{\gamma} = \sqrt{j\omega\mu(\sigma + j\omega\varepsilon)}$$

$$\approx \sqrt{j\omega\mu\sigma}$$

$$\approx \sqrt{e^{j\pi/2}\omega\mu\sigma}$$

$$\approx \sqrt{\omega\mu\sigma}e^{j\pi/4}$$

$$\approx \sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}}(1 + j)$$

$$\bar{\eta} \approx \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\sigma}} = \sqrt{\frac{e^{j\pi/2}\omega\mu}{\sigma}}$$

$$\approx \sqrt{\frac{\omega\mu}{\sigma}}e^{j\pi/4}$$

$$\approx \sqrt{\frac{\omega\mu}{2\sigma}}(1 + j)$$

Module 1 : affectation des différents paramètres :

N (nombre de pas spatial), k (nombre de pas temporel), L (distance de simulation), T (durée de simulation), f_{max} (fréquence maximale de discrétisation), h (pas spatial), v (vitesses de propagation), ε, μ, σ (selon le milieu)

Module 2 : donner les valeurs du champ électromagnétique a $t=0$ ($E(x,y,t=0)=E(x,y)$)

Et ses valeurs aux limites du domaines considérés ($E(0,y,t)=E(y,t), E(x,0,t)=E(x,t)$)

